Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Амурский государственный университет

Математическое моделирование

Лабораторный практикум

Благовещенск
Издательство АмГУ
2019

УДК 519.8

Рекомендовано
учебно-методическим советом университета

Рецензенты:

Бризицкий Р.В., с. н. с. Института прикладной математики ДВО РАН, канд. физ.-мат. наук,

Максимова, Н.Н.

Математическое моделирование. Лабораторный практикум / сост. Н.Н. Максимова. – Благовещенск: Изд-во АмГУ, 2019. – 105 с.

Лабораторный практикум содержит теоретические сведения и примеры решения задач по курсу «Математическое моделирование». Подробно рассмотрены моделирование задач линейного программирования, транспортных задач, динамического программирования, систем массового обслуживания. Реализация методов исследования моделей проведена в ППП MATLAB. Учебный материал позволяет выработать практические навыки построения и исследования рассмотренных в пособии типов моделей.

Лабораторный практикум предназначен для студентов, обучающихся по специальности 09.02.03 – «Программирование в компьютерных системах» (в рамках изучения дисциплины «Математическое моделирование»), а также будет полезным для студентов, обучающихся по направлению 01.03.02 – «Прикладная математика и информатика» (в рамках изучения дисциплины «Теория игр и исследование операций»).

ВВЕДЕНИЕ

Целью данного практикума является выработка практических навыков построения и исследования математических моделей. Подробно рассмотрены моделирование задач линейного программирования, транспортных задач, динамического программирования, систем массового обслуживания. Лабораторный практикум является дополнением к учебно-методическому пособию «Математическое моделирование».

Практикум состоит из введения и пяти лабораторных работы. В первой лабораторной работы изложены основы работы в ППП MATLAB; материал позволит получить практические навыки работы с указанным пакетом прикладных программ. В лабораторных работах №№ 2-5 представлены примеры моделей и рассмотрены методы их исследования. Данные разделы дополняются заданиями для самостоятельной работы.

Лабораторный практикум предназначен для студентов, обучающихся по специальности 09.02.03 – «Программирование в компьютерных системах» (в рамках изучения дисциплины «Математическое моделирование»), а также будет полезным для студентов, обучающихся по направлению 01.03.02 – «Прикладная математика и информатика» (в рамках изучения дисциплины «Теория игр и исследование операций»). Пособие может быть полезно студентам всех форм и ступеней обучения. Для более глубокого изучения методов математического моделирования рекомендован весьма обширный список литературы.

Лабораторная работа № 1

Основные приемы работы с пакетом MATLAB

MATLAB – интерактивный матрично-ориентированный пакет, предназначенный для выполнения научных и инженерных расчетов. Пакет содержит обширную библиотеку программ по численным методам, использует двух- и трехмерную графику, а также форматы языков высокого уровня.

Примечание. Данные лабораторные работы подготовлены для ППП MATLAB R2014b. Интерфейс других версий может отличаться, однако основные принципы работы остаются неизменными.

1. Простейшие вычисления в среде MATLAB

Встроенные математические функции позволяют находить значения различных выражений. MATLAB предоставляет возможность управления форматом вывода результата. Команды для вычисления выражении имеют вид, свойственный всем языкам программирования высокого уровня.

Приступим к работе в пакете.

Наберите в командной строке 1+2 и нажмите <Enter>. В результате в командном окне MATLAB отображается следующее:

```
>> 1+2

ans =

     3
```

Что сделала программа MATLAB? Сначала она вычислила сумму 1 + 2, затем записала результат в специальную переменную ans и вывела ее значение, равное 3, в командное окно. Переменная ans автоматически создается, когда вычисляемое выражение не присваивается некоторой переменной.

Вид, в котором выводится результат вычислений, зависит от формата вывода, установленного в MATLAB.

Требуемый формат вывода результата определяется пользователем из меню рабочей среды MATLAB. Выберите в меню File пункт Preferences. На экране появится диалоговое окно Preferences. Для установки формата вывода следует убедиться, что в списке левой панели выбран пункт Command Window. Задание формата производится из раскрывающегося списка Numeric format панели Text display.

Для того чтобы изменить формат вывода данных, можно в командной строке ввести определенную команду, например, «format long», результатом будут числа с 15 знаками после запятой. Чтобы посмотреть, какие форматы есть и как они предоставляют результат, необходимо в диалоговом окне набрать команду help format.

Команда help выдает на экран все команды, выполняемые MATLAB. Так, при выборе команды help elfun в командное окно выводится список всех встроенных элементарных функций с их кратким описанием.

Элементарные функции:

sin, cos, tan, cot – синус, косинус, тангенс и котангенс;

sec, csc – секанс, косеканс;

asin, acos, atan, acot - арксинус, арккосинус, арктангенс и арккотангенс;

asec, acsc - арксеканс, арккосеканс.

Примечание. Аргументы тригонометрических функций должны быть выражены в радианах.

Обратные тригонометрические функции возвращают результат также в радианах.

sinh, cosh, tanh, coth - гиперболические синус, косинус, тангенс и котангенс;

sech, csch - гиперболические секанс и косеканс;

asinh, acosh, atanh, acoth - гиперболические арксинус, арккосинус, арктангенс и арккотангенс;

asech, acsch - гиперболические арксеканс и арккосеканс;

exp - экспоненциальная функция;

log - натуральный логарифм;

log10 - десятичный логарифм;

log2 - логарифм по основанию 2;

pow2 - возведение числа 2 в степень;

sqrt - квадратный корень;

nextpow2 - степень, в которую надо возвести число 2, чтобы получить ближайшее число (большее или равное аргументу);

fix - округление до ближайшего целого по направлению к нулю;

floor, ceil - округление до ближайшего целого по направлению к минус бесконечности или плюс бесконечности;

round - округление до ближайшего целого;

mod - остаток от целочисленного деления (со знаком второго аргумента);

rem - остаток от целочисленного деления (со знаком первого аргумента);

sign - знак числа.

Арифметические операции в MATLAB выполняются в обычном порядке, свойственном большинству языков программирования:

возведение в степень - ^;

умножение и деление - *, /;

сложение и вычитание - +, -.

Для изменения порядка выполнения арифметических операторов следует использовать круглые скобки.

Как и во всех языках программирования, в MATLAB предусмотрена возможность работы с переменными. Причем пользователь не должен заботиться о том, какие значения будет принимать переменная (комплексные, вещественные или только целые). Для того чтобы присвоить, например, переменной z значение 1.45, достаточно написать в командной строке z=1.45, при этом MATLAB сразу же выведет значение z:

```
>> z=1.45

z =

    1.4500
```

<u>*Примечание.*</u> Для ввода длинных формул или команд в командную строку следует поставить три точки (подряд, без пробелов), нажать клавишу <Enter> и продолжить набор формулы на следующей строке. Так можно разместить выражение на нескольких строках. MATLAB вычислит все выражение или выполнит команду после нажатия на <Enter> в последней строке (в которой нет трех идущих подряд точек).

MATLAB запоминает значения всех переменных, определенных во время сеанса работы. Если после ввода примера, приведенного выше, были проделаны еще какие-либо вычисления, и возникла необходимость вывести значение z, то следует просто набрать z в командной строке и нажать <Enter>:

```
>> z

z =

    1.4500
```

<u>*Примечание.*</u> Для очистки командного окна следует использовать команду clc. Для удаления значений всех переменных можно ввести в командном окне команду clear или удалить из вручную в окне Workspase.

Следует также понимать, что при закрытии программы все команды в командном окне и все данные, введенные в командном окне, будут уничтожены. В окне Command History

2. Матрицы и действия над ними

MATLAB работает с одним видом объектов – числовыми прямоугольными матрицами, элементами которых в общем случае могут быть комплексные числа. Все элементы представляют собой матрицы, матрицы 1x1 интерпретируются как скаляры, матрицы с одной строкой или с одним столбцом – как вектора. В системе MATLAB матрицы могут быть созданы разным способами:

1) введены явно с помощью списка элементов;

2) сгенерированы встроенными операторами и функциями;

3) созданы в m-файлах;

Загружены из внешнего файла данных.

Ввод матриц, простейшие операции.

Вводить небольшие по размеру матрицы удобно прямо из командной строки, при этом строки при наборе отделяются точкой с запятой.

```
>> A=[1 2 3; 4 5 6; 8 7 1]

A =

     1     2     3
     4     5     6
     8     7     1
```

Либо вводить следующим образом:

```
>> K=[4 5 6
4 7 8
5 4 2]

K =

     4     5     6
     4     7     8
     5     4     2
```

Возможны и другие варианты, о которых можно прочитать в специализированной литературе.

Доступ к элементам матриц осуществляется при помощи двух индексов-номеров строки и столбца, заключенных в круглые скобки, например,

```
>> A(2,3)

ans =

     6
```

Обращение к элементам вектора возможно с указанием одного!!! номера (порядкового). Например,

```
>> v=[-1 4 5 -6 8]

v =

    -1     4     5    -6     8

>> v(3)

ans =

     5
```

Элементы матриц и векторов могут входить в состав выражений:

```
>> (A(1,2)-K(2,2))*v(5)

ans =

   -40
```

В качестве индексов могут выступать векторы, содержащие номера нужных строк и столбцов. Например, для выделения элементов первой и второй строк второго и третьего столбцов введенной выше матрицы A достаточно ввести команды:

`>> B=A([1 2],[2 3])`
 	
`B =`
 	
`     2     3`
`     5     6`
	`>> C=A([1 3],[1 3])`
	
	`C =`
	
	`     1     3`
	`     8     1`
		`>> D=K(:,[2 1])`
		
		`D =`
		
		`     5     4`
		`     7     4`
		`     4     5`

В последнем варианте команда «:» означает, что будут браться все элементы указанных столбцов (второго и первого в указанном порядке)

При использовании матричных операций следует помнить, что для сложения или вычитания матрицы должны быть одного размера, а при перемножении число столбцов первой матрицы обязано равняться числу строк второй матрицы. Сложение и вычитание матриц, так же как чисел и векторов, осуществляется при помощи знаков плюс и минус. Для умножения матриц предназначена "*". Умножение матрицы на число тоже осуществляется при помощи "*", причем умножать на число можно как справа, так и слева. Транспонирование матрицы производится при помощи «'». Деление производится при помощи символов / (правое деление) и \ (левое деление).

В MATLAB парные квадратные скобки [ ] обозначают пустой массив, который, в частности, позволяет удалять строки и столбцы матрицы. Для удаления строки следует присвоить ей пустой массив. Удалите, например, первую строку квадратной матрицы E, а затем в полученной матрице заменим элементы четвертого столбца на элементы вектора P (соответствующей размерности):

```
>> E=[3 -5 6 9; 8 6 4 -1; 6 5 4 -2; 3 -3 -2 7]

E =

     3    -5     6     9
     8     6     4    -1
     6     5     4    -2
     3    -3    -2     7

>> E(1, :)=[]

E =

     8     6     4    -1
     6     5     4    -2
     3    -3    -2     7

>> P=[0; 6; 0]

P =

     0
     6
     0

>> E(:, 4)=P

E =

     8     6     4     0
     6     5     4     6
     3    -3    -2     0
```

Примечание. Не всегда есть необходимость выводить на экран какие-либо данные; для этого в конце строки, задающей значение выражения, следует поставить знак «;».

Создание матриц специального вида.

Заполнение прямоугольной матрицы нулями производится встроенной функцией zeros, аргументами которой являются число строк и столбцов матрицы. Один аргумент функции zeros приводит к образованию квадратной матрицы заданного размера. Единичная матрица инициализируется при помощи функции eye. Функция eye с двумя аргументами создает прямоугольную матрицу, у которой на главной диагонали стоят единицы, а остальные элементы равны нулю. Матрица, состоящая из единиц, образуется в результате вызова функции ones. Использование одного аргумента в ones приводит к созданию квадратной матрицы, состоящей из единиц.

`>> R1=zeros(2)`
 	
`R1 =`
 	
`0   0`
`0   0`
	`>> R3=eye(3)`
	
	`R3 =`
	
	`1   0   0`
	`0   1   0`
	`0   0   1`
		`>> R4=eye(3, 2)`
		
		`R4 =`
		
		`1   0`
		`0   1`
		`0   0`
			`>> R5=ones(3, 2)`
			
			`R5 =`
			
			`1   1`
			`1   1`
			`1   1`

MATLAB предоставляет возможность заполнения матриц случайными элементами. Результатом функции rand является матрица чисел, распределенных случайным образом между нулем и единицей, а функции randn – матрица чисел, распределенных по нормальному закону. Обращение к функциям rand и randn с одним входным аргументом приводит к формированию квадратных матриц. Часто возникает необходимость создания диагональных матриц, т. е. матриц, у которых все внедиагоналъные элементы равны нулю. Функция diag(x) формирует диагональную матрицу из вектор-столбца или вектор-строки x, располагая их элементы по диагонали матрицы. Для заполнения не главной, а побочной диагонали предусмотрена возможность вызова функции diag с двумя аргументами. В этом случае второй аргумент означает, насколько побочная диагональ отстоит от главной, а его знак указывает на направление, плюс – вверх, минус – вниз от главной диагонали. Функция diag(A) служит и для выделения диагонали матрицы A в вектор.

`>> S1=rand(2)`
 	
`S1 =`
 	
`    0.6324    0.2785`
`    0.0975    0.5469`
	`>> S2=diag([2 3])`
	
	`S2 =`
	
	`     2     0`
	`     0     3`

`>> S3=diag([2 3], 1)`
 	
`S3 =`
 	
`     0     2     0`
`     0     0     3`
`     0     0     0`
	`>> S4=diag(K)`
	
	`S4 =`
	
	`     4`
	`     7`
	`     2`

Поэлементные операции с матрицами.

Умножение каждого элемента одной матрицы на соответствующий элемент другой производится при помощи оператора «.*». Для деления элементов первой матрицы на соответствующие элементы второй используется «./», а для деления элементов второй матрицы на соответствующие элементы первой служит «.\». Поэлементное возведение в степень осуществляется при помощи «.^». Показатель степени может быть матрицей того же размера, что и матрица, возводимая в степень. При этом элементы первой матрицы возводятся в степени, равные элементам второй матрицы.

Рассмотрим все эти операции на примерах матриц A и K, описанных выше:

`>> A*K`
 	
`ans =`
 	
`    27    31    28`
`    66    79    76`
`    65    93   106`
	`>> A^2`
	
	`ans =`
	
	`    33    33    18`
	`    72    75    48`
	`    44    58    67`

`>> A.*K`
 	
`ans =`
 	
`     4    10    18`
`    16    35    48`
`    40    28     2`
	`>> A.^2`
	
	`ans =`
	
	`     1     4     9`
	`    16    25    36`
	`    64    49     1`

```
>> A./K

ans =

    0.2500    0.4000    0.5000
    1.0000    0.7143    0.7500
    1.6000    1.7500    0.5000
```

```
>> A.\K

ans =

    4.0000    2.5000    2.0000
    1.0000    1.4000    1.3333
    0.6250    0.5714    2.0000
```

```
>> A.^K

ans =

           1          32         729
         256       78125     1679616
       32768        2401           1
```

<u>Вычисление математических функций от элементов матриц.</u>

Очень важно сразу понять, что в книгах по теории матриц формула cos A, где A – квадратная матрица, означает вычисление косинуса от матрицы, которое осуществляется при помощи разложения в ряд, В MATLAB имеется возможность вычисления функций от матриц. Запись c = cos (A) в MATLAB приводит к вычислению косинусов от элементов массива A и записи их в массив с того же размера, что и A. Аналогично вычисляются и другие математические функции.

Часто возникает необходимость использования векторных матричных функций. Наиболее употребительные из них:

Функция sum по умолчанию вычисляет сумму по столбцам, изменяя первый индекс массива при фиксированном втором. Для того чтобы производить суммирование по строкам, необходимо вызвать sum с двумя аргументами, указав место индекса, по которому следует суммировать. Функция sum суммирует или по строкам, или по столбцам, выдавая результат в виде вектора или вектор-строки. Аналогично работает и функция prod.

```
>> sum(A)

ans =

    13    14    10
```

```
>> sum(A,2)

ans =

     6
    15
    16
```

```
>> prod(A)

ans =

    32    70    18
```

```
>> sum(A,1)

ans =

    13    14    10
```

```
>> sum(sum(A))

ans =

    37
```

```
>> prod(prod(A))

ans =

       40320
```

Функция sort упорядочивает элементы каждого из столбцов матрицы в порядке возрастания. Вызов sort со вторым аргументом, равным двум, приводит к упорядочению элементов строк. Так же как и для векторов, функция sort позволяет получить матрицу индексов соответствия элементов исходной и упорядоченной матриц. Для этого необходимо вызвать sort с двумя выходными аргументами.

```
>> sort(K)

ans =

     4     4     2
     4     5     6
     5     7     8
```

```
>> sort(K, 2)

ans =

     4     5     6
     4     7     8
     2     4     5
```

```
>> [K1, b]=sort(K)

K1 =

     4     4     2
     4     5     6
     5     7     8


b =

     1     3     3
     2     1     1
     3     2     2
```

Функции max и min вычисляют вектор-строку, содержащую максимальные или минимальные элементы в соответствующих столбцах матрицы. Для того чтобы узнать не только значения максимальных или минимальных элементов, но и их номера в столбцах, следует вызвать max или min так: [mx, k] = max(M) или [mn, n] = min(M).

Наиболее часто употребляемые команды:

max (max(M)) – максимальный элемент матрицы,

min (min(M)) – минимальный элемент матрицы,

inv- обратная матрица,

det – определитель матрицы,

size – размерность матрицы,

norm – норма вектора или матрицы,

rank – ранг матрицы.

```
>> S=[3 6 -3; 6 4 9; -1 -1 1; -5 3 1]

S =

     3     6    -3
     6     4     9
    -1    -1     1
    -5     3     1
```

```
>> (max(S'))'

ans =

     6
     9
     1
     3
```

```
>> min(S)

ans =

    -5    -1    -3
```

```
>> max(S)

ans =

     6     6     9
```

```
>> max(max(S))

ans =

     9
```

```
>> min(min(S))

ans =

    -5
```

```
>> size(S)

ans =

     4     3
```

```
>> rank(S)

ans =

     3
```

```
>> inv(A)

ans =

   -2.4667    1.2667   -0.2000
    2.9333   -1.5333    0.4000
   -0.8000    0.6000   -0.2000
```

```
>> det(A)

ans =

    15
```

```
>> A^-1

ans =

   -2.4667    1.2667   -0.2000
    2.9333   -1.5333    0.4000
   -0.8000    0.6000   -0.2000
```

```
>> det(S)
??? Error using ==> det
Matrix must be square.
```

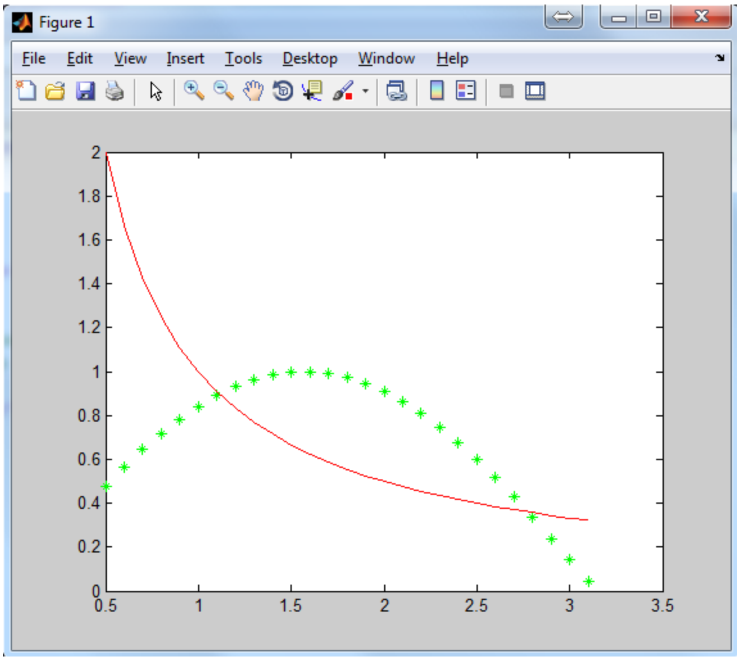
Более подробно про обработку матричных данных можно узнать, если вывести список всех встроенных функций обработки данных командой help datafun, а затем посмотреть информацию о нужной функции, например, help max, или обратиться к интерактивной справочной системе.

3. Построение графиков функций

Команду plot используют для построения графиков двумерных функций. Следующий пример иллюстрирует, как построить графики функций y=sin(x) и y=1/x:

```
>> x=0.5:0.1:pi; %задаем область с шагом 0.1
>> y=sin(x); %задаем функции
>> z=x.^-1;
>> plot(x, y, '*g', x, z,'-r') %строим графики
```

Результатом работы будет следующий график:



После каждой пары «переменная-функция» можно указывать тип и цвет линии, которым следует построить график функции. Без их указания график тип и цвет выберется по умолчанию.

Основные цвета и типы линий представлены в таблицах ниже.

Таблица 1.1 – Обозначение цвета линии графика

Маркер	Цвет линии
c	голубой
m	фиолетовый
y	желтый
r	красный
g	зеленый
b	синий
w	белый
k	черный

Таблица 1.2 – Обозначение типа линии графика

Маркер	Тип линии
-	непрерывная
--	штриховая
:	пунктирная
-.	штрих-пунктирная

Таблица 1.3 – Обозначение типа точек графика

Маркер	Тип точек
.	точка
+	плюс
*	звездочка
o	кружок
x	крестик
s	квадрат
d	ромб
v	треугольник вершиной вниз
^	треугольник вершиной вверх
<	треугольник вершиной влево
>	треугольник вершиной вправо
p	пятиконечная звезда
h	шестиконечная звезда

Для оформления графиков могут быть использованы следующие основные команды:

Таблица 1.4 – Команды оформления графика

Команда	Значение
grid on/off	Наносит/удаляет координатной сетки на графике
title(‘<текст>’)	Размещает текст над графиком
text(x, y, ’<текст>’) **text(x, y, z, ’<текст>’)**	Помещает в заданной точке (x, y) двумерного или (x, y, z) трехмерного графика начало текста, указанного в качестве третьего аргумента
xlabel('<текст>') **ylabel('<текст>')**	Помещает текст для графика вдоль соответствующих осей координат

zlabel('<текст>')	
legend(‘<текст1>‘, ‘<текст2>‘, ‘<текст3>‘, ...)	Добавляет к текущему графику пояснение в виде указанных текстовых строк
figure	Создаёт новое (добавочное) графическое окно, и все последующие за ней команды построения графиков выводят их в новое окно
subplot(m, n, p)	Производит разбивку графического окна на несколько подокон; значение m указывает, на сколько частей разбивается окно по горизонтали, n – по вертикали, а p – номер подокна, куда будет выводиться очередной график
polar(phi, rho)	Реализует построение графика в полярной системе координат
comet(y) **comet(x, y)**	Рисует движение точки по траектории, заданной одномерным массивом y или массивами x и y, в виде головы и хвоста кометы

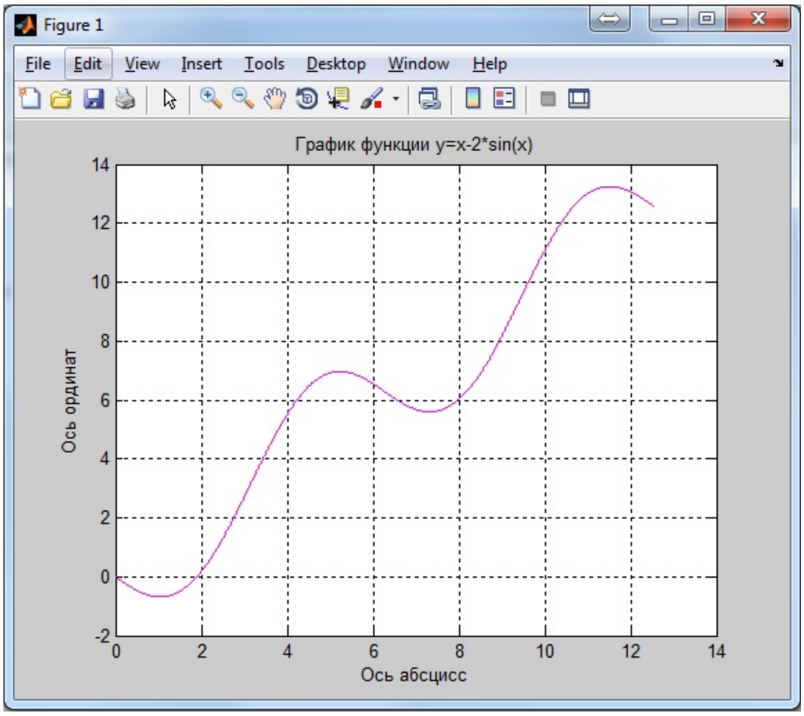
Разумеется, данный перечень является далеко неполным. Это наиболее часто используемые команды. Продемонстрируем работу этих команд на примерах.

Перед работой рекомендуется очистить командное окно и рабочую область.

Сценарий:

```
>> x=0:0.01:4*pi;
>> y=x-2*sin(x);
>> plot(x, y, 'm')
>> grid on
>> title('График функции y=x-2*sin(x)')
>> xlabel('Ось абсцисс')
>> ylabel('Ось ординат')
```

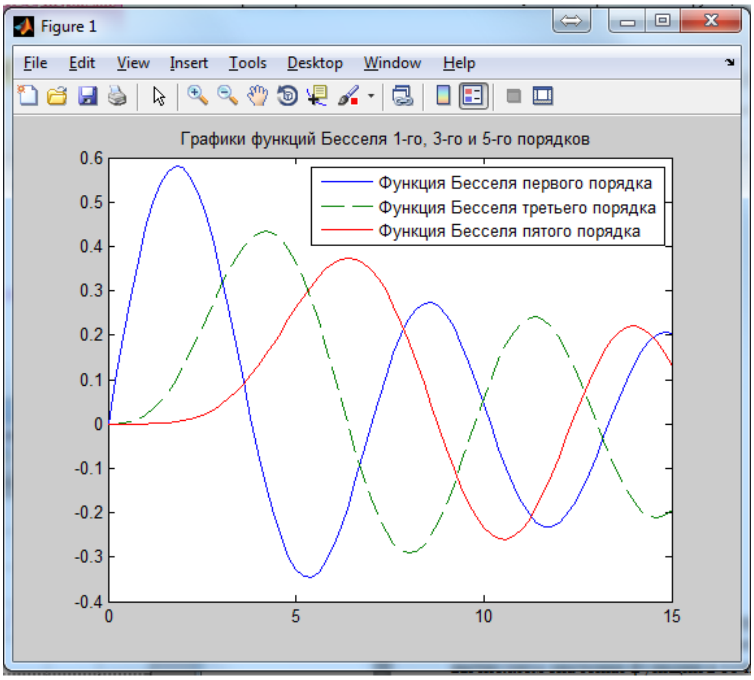
Результат работы:



Сценарий:

```
>> x=0:0.2:15;
>> y1= besselj(1, x);
>> y3= besselj(3, x);
>> y5= besselj(5, x);
>> plot(x, y1, '-', x, y3, '--', x, y5)
>> title('Графики функций Бесселя 1-го, 3-го и 5-го порядков ')
>> legend('Функция Бесселя первого порядка',...
'Функция Бесселя третьего порядка', 'Функция Бесселя пятого порядка')
```

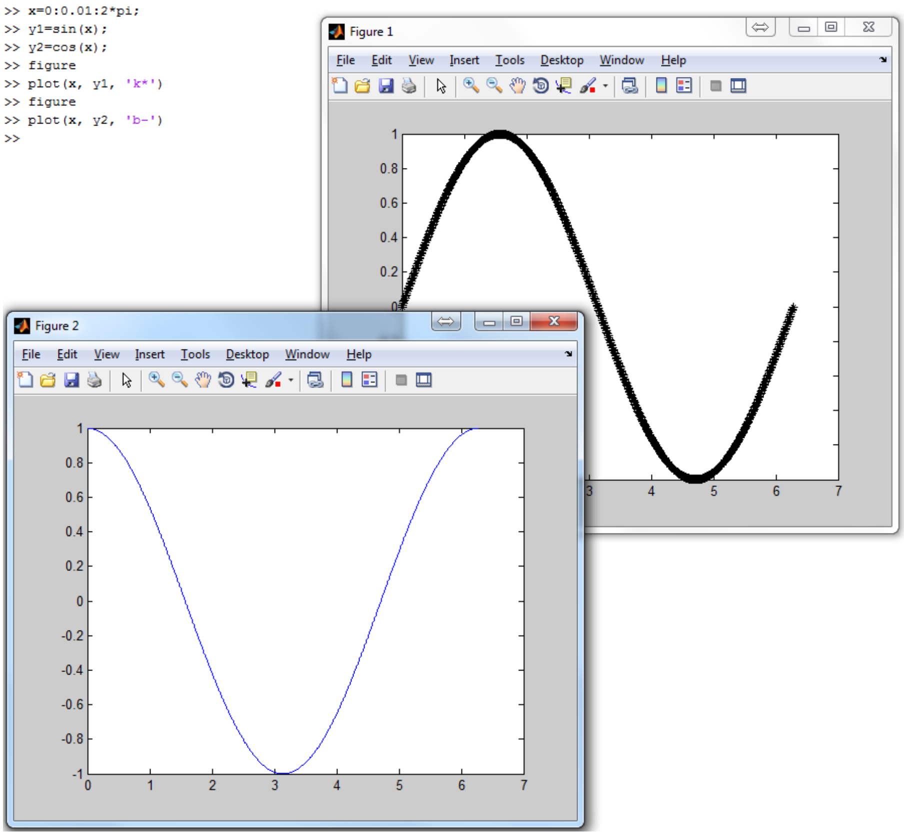
Результат работы:



Сценарий:

```
>> x=0:0.01:2*pi;
>> y1=sin(x);
>> y2=cos(x);
>> figure
>> plot(x, y1, 'k*')
>> figure
>> plot(x, y2, 'b-')
```

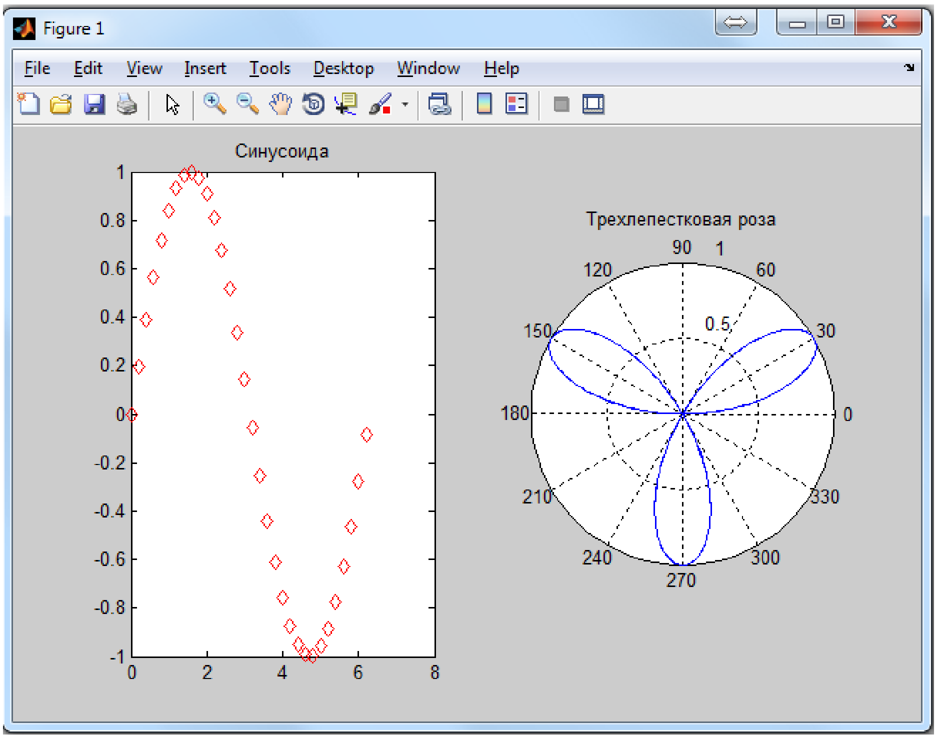
Результат работы:



Сценарий:

```
>> x=0:0.2:2*pi;
>> y=sin(x);
>> phi=0:0.01:2*pi;
>> ro=sin(3*phi);
>> subplot(1, 2, 1)
>> plot(x, y, 'rd')
>> title('Синусоида')
>> subplot(1, 2, 2)
>> polar(phi, ro)
>> title('Трехлепестковая роза')
```

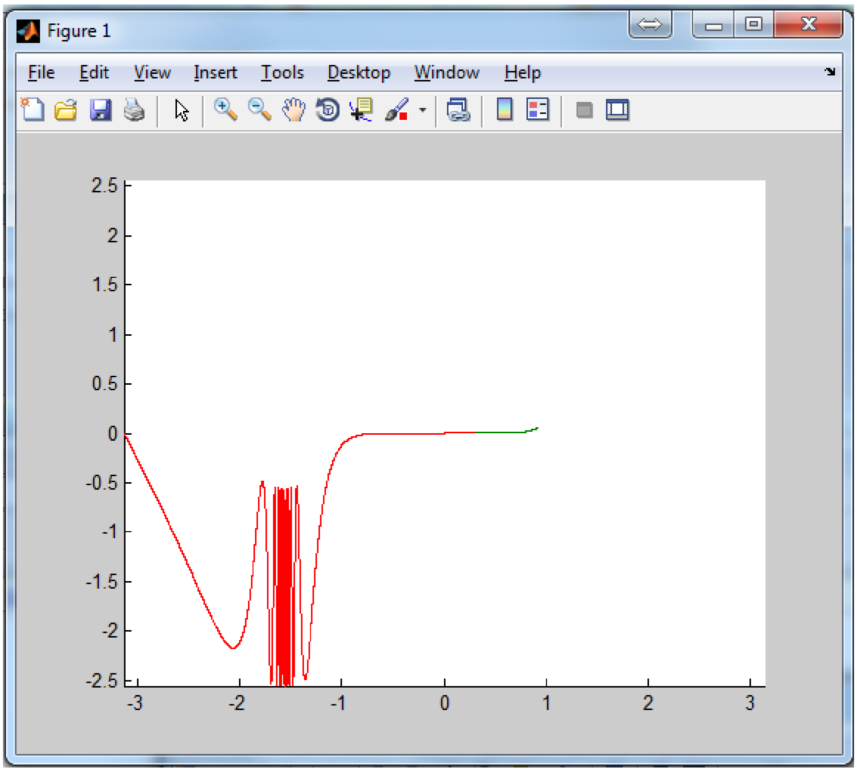
Результат работы:



Сценарий:

```
>> x=-pi:pi/5000:pi;
>> y=tan(sin(x))-sin(tan(x));
>> comet(x,y)
```

Результат работы:

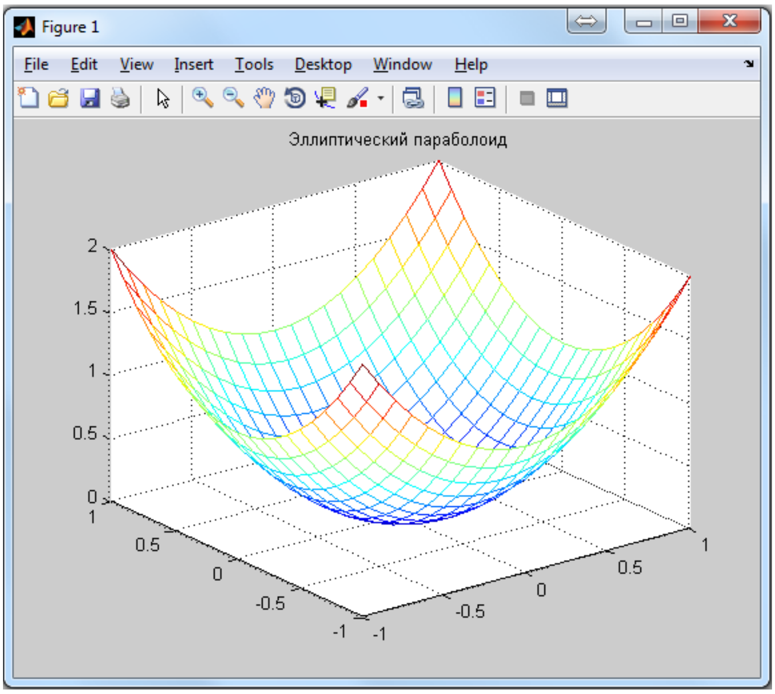


Для построения трехмерных графиков используется функция mesh. Процедура состоит из двух этапов: 1) разбиваем область определения прямоугольной сеткой, 2) вычисляем значения функции в точках пересечения линий сетки и записываем их в матрицу. Например, построим график функции $z(x,y)=x^2 + y^2$ на области определения в виде $x=[-1,1]$, $y=[-1,1]$.

Сценарий:

```
>> [X,Y]=meshgrid(-1:0.1:1,-1:0.1:1);
>> Z=X.^2+Y.^2;
>> mesh(X, Y, Z)
>> title('Эллиптический параболоид')
```

Результат работы:



4. Циклы. Условные операторы и операторы отношения

Операторы управления и операторы отношения MATLAB при использовании работают также, как и в большинстве языков программирования.

<table>
<tr><td><u>Оператор for:</u>
for <переменная цикла>=<выражение цикла>
<выполняемые операторы>
end</td><td rowspan="2"><u>Оператор if:</u>
if <условие>
<выполняемые операторы>
elseif <условие>
<выполняемые операторы>
else
<выполняемые операторы>
end</td></tr>
<tr><td><u>Оператор while:</u>
while <условие>
<выполняемые операторы>
end</td></tr>
</table>

При этом операторы elseif и else могут и не присутствовать.

В пакете MATLAB используются следующие операторы отношений и логические операторы: == - равно, ~= - не равно, <, > - меньше, больше, <=, > =- меньше либо равно, больше либо равно, ~ - не, & - и, | - или.

Приведем пример использования циклов и условий. В заданной матрице все отрицательные элементы заменить на нули.

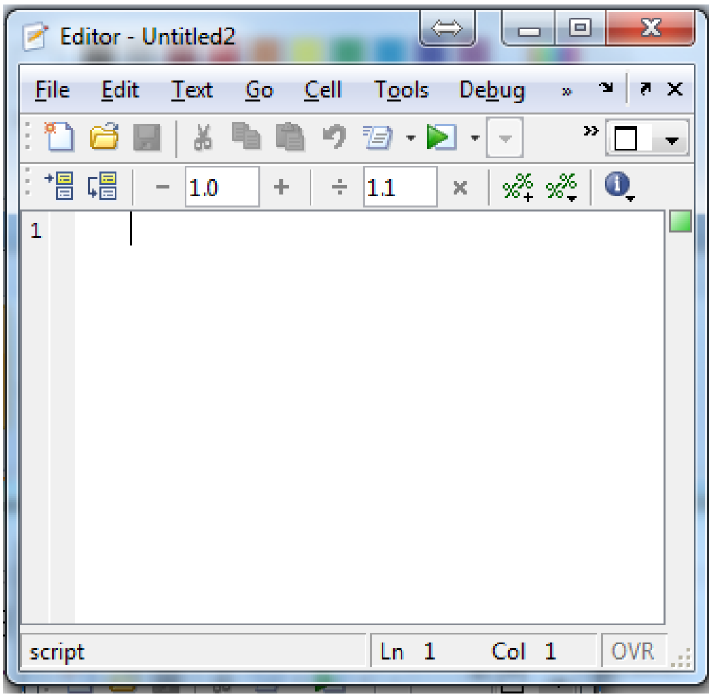
```
>> S=[-9 4 6 -3; 4 8 -2 3; 2 -1 -1 3]

S =

    -9     4     6    -3
     4     8    -2     3
     2    -1    -1     3

>> k=size(S);
>> for i=1:k(1)
for j=1:k(2)
if S(i, j)<0
S(i, j)=0;
end
end
end
>> S

S =

     0     4     6     0
     4     8     0     3
     2     0     0     3
```

5. Работа с М-файлами

Мы рассмотрели достаточно простые примеры, для выполнения которых требуется набрать несколько команд в командной строке. Для более сложных задач число команд возрастает, и работа в командной строке становится непродуктивной. MATLAB может последовательно выполнять последовательность операторов, записанных в файл на диске. Имена таких файлов имеют вид <имя>.m. Большая часть работы MATLAB заключается в создании, редактировании и выполнении таких m-файлов. Существуют два типа m-файлов: файлы-программы (сценарии) и файлы-функции. Ознакомиться с файламипрограммами вы можете в любой специализированной литературе. Остановимся подробно на файлах-функциях.

Файлы функции дают возможность расширять MATLAB, поскольку определенные пользователем функции имеют тот же статус, что и другие функции MATLAB. Переменные по умолчанию являются локальными.

Раскройте меню File рабочей среды MATLAB и в пункте New выберите подпункт M-file или нажмите кнопку New M-file на панели инструментов рабочей среды. Новый файл открывается в окне редактора M-файлов, которое приведено на рисунке:



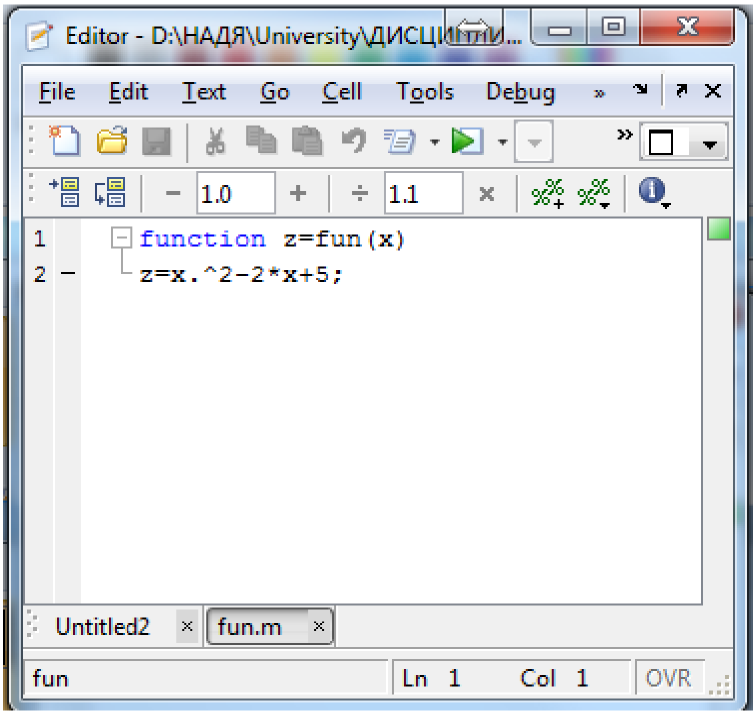
Общий вид задания:

function [x1,x1,…]=name(y1,y2,…)

<тело функции>

Первая строка функции содержит объявление выходных аргументов, имен функции и входных аргументов. Совпадение имени функции и имени файла является обязательным условием в MATLAB.

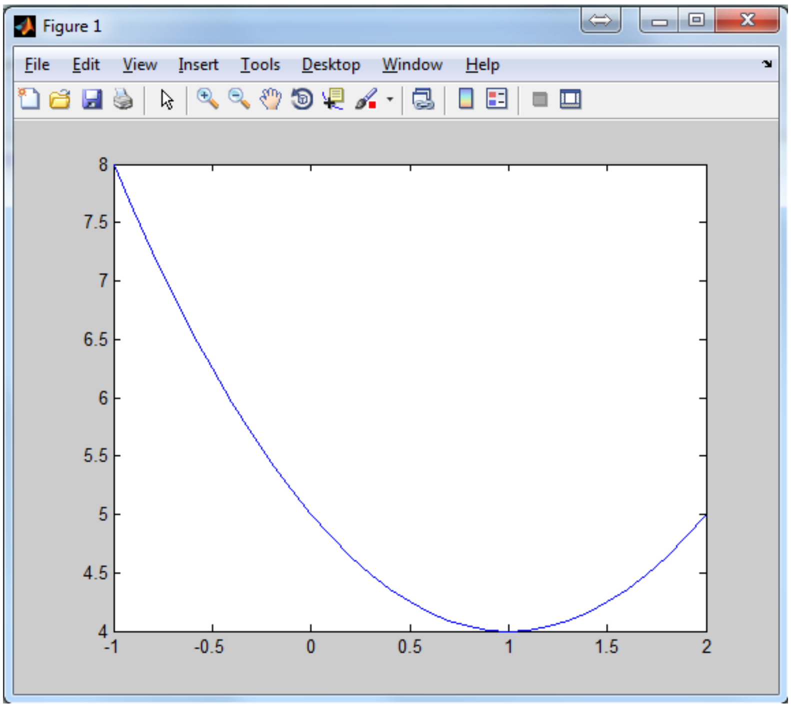
Приведем примеры. Например, необходимо вычислить значение функции в некоторой точке. Зададим функцию в отдельном m-файле.



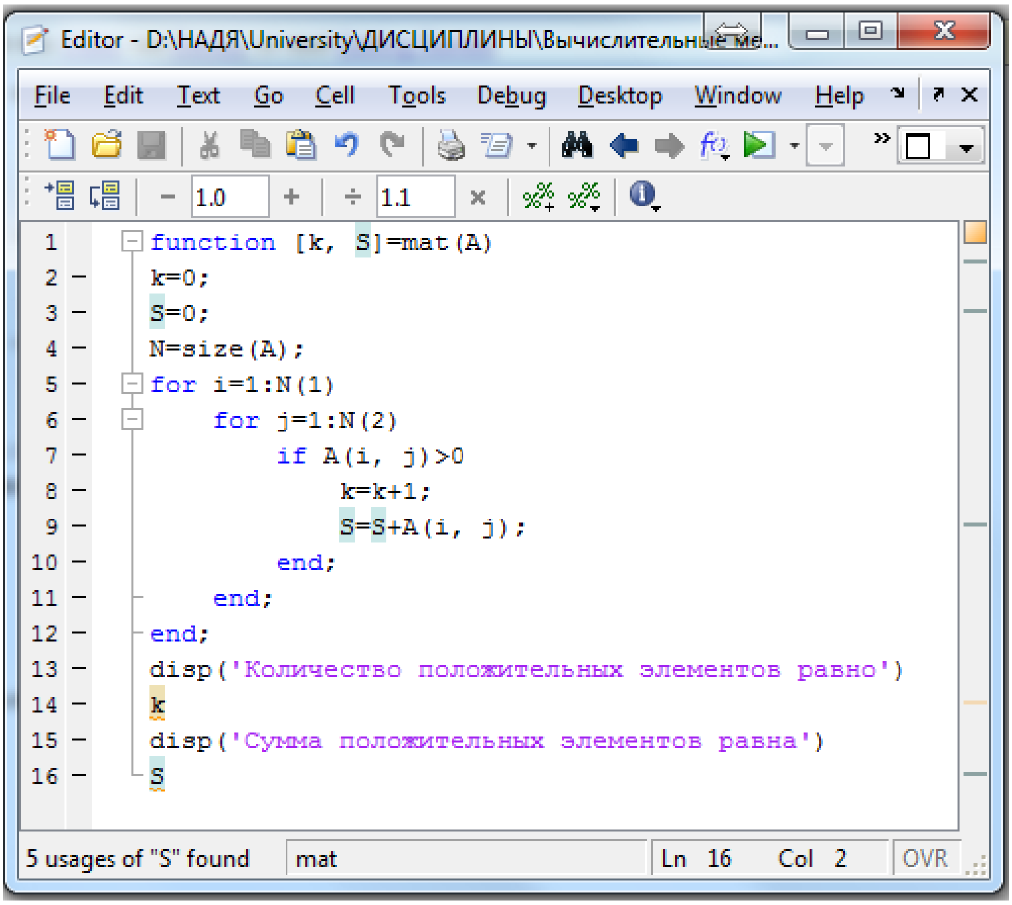
<u>Примечание.</u> Для того чтобы обращаться к функции в командном окне, в окне Current Folder должна быть открыта папка, где располагается файл с данной функцией.

Воспользуемся встроенной функцией feval для вычисления значения заданной функции в точке x=3 (которое, очевидно, совпадает с тем, если вызвать эту функцию с указанием значения аргумента, равного 3), а также построим график этой функции (данные команды следует вводить в командном окне):

```
>> z=feval('fun', 3)

z =

     8

>> y=fun(3)

y =

     8

>> x=-1:0.1:2;
>> yx=fun(x);
>> plot(x, yx)
```



Это довольно простой пример использования файлов-функции. Приведем другой: произведем подсчет количества положительных элементов матрицы и вычислим их сумму.



Результат работы этой программы (вводить в командном окне):

```
>> A=[1 2 -3 1; 4 -5 6 3; -8 7 1 -4;4 -6 -9 8;7 -9 3 4]

A =

     1     2    -3     1
     4    -5     6     3
    -8     7     1    -4
     4    -6    -9     8
     7    -9     3     4

>> [k, S]=mat(A);
Количество положительных элементов равно

k =

    13

Сумма положительных элементов равна

S =

    51
```

Лабораторная работа № 2

Построение и исследование моделей линейного программирования

2.1. Постановка задачи линейного программирования

Задачей линейного программирования называется задача минимизации или максимизации линейной функции при линейных ограничениях.

Будем рассматривать *общую задачу* линейного программирования в форме

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n}c_j x_j \to \max/\min, \qquad (2.1)$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i,\ i=\overline{1,k}, \qquad (2.2)$$

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\le b_i,\ \ i=\overline{k+1,m}, \qquad (2.3)$$

$$x_j\ge 0,\ \ j=\overline{1,n}. \qquad (2.4)$$

Ограничения типа (2.2) называются *ограничениями-равенствами*, ограничения типа (2.3) – *ограничениями-неравенствами*, ограничения типа (2.4) – *прямыми ограничениями*. Если в условии задачи линейного программирования не содержаться ограничения-неравенства, то есть в (2.3) $k = m$, что она называется задачей линейного программирования в *каноническом виде*. Любую задачу линейного программирования можно представить в каноническом виде.

Пример 2.1. Инвестор, располагающий суммой в 300 тыс. ден. ед., может вложить свой капитал в акции автомобильного концерна A и строительного предприятия B. Чтобы уменьшить инвестиционные риски, акций концерна A должно быть приобретено не меньше, чем акций строительного предприятия B, причем последних можно купить не более чем на 100 тыс. ден. ед. Дивиденды по акциям A составляют 8%, а по акциям B – 10% в год. Определить, какую максимальную прибыль может получить инвестор в первый год.

Решение. Построим экономико-математическую модель задачи. Введем обозначения: x_1 и x_2 – количество денежных средств (в тыс. ден. ед.), которые будут вложены в автомобильный концерн и в строительное предприятие соответственно. Критерий оптимальности в задачи – максимум прибыли от вложений.

Получаем следующую задачу: найти максимум целевой функции (функция прибыли)

$$f(x)=0{,}08x_1+0{,}1x_2\to\max$$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 300, \\ x_1 - x_2 \ge 0, \\ x_2 \le 100, \\ x_j \ge 0, j = 1, 2. \end{cases}$$

2.2. Графический метод решения задачи линейного программирования

Пусть задача линейного программирования содержит только две переменные, и в ее условии нет ограничений равенств, то есть, имеем задачу вида

$$f(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 \to \max/\min, \quad (2.5)$$

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 \le b_i, \ i = \overline{1, m}, \quad (2.6)$$

$$x_1, x_2 \ge 0. \quad (2.7)$$

Допустимое множество *X* в задаче (2.5)-(2.7) является пересечением первого квадранта и полуплоскостей, соответствующих неравенствам (2.6). Чтобы построить каждую из полуплоскостей, соответствующую неравенствам (2.6), необходимо построить граничную прямую $a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 = b_i$, выбрать на плоскости любую точку, не лежащую на данной прямой и подставить в соответствующее неравенство $a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 \le b_i$. Если неравенство выполняется, то решением будет все множество точек координатной плоскости, лежащее по ту же сторону, что и выбранная точка, в неравенство не выполняется, то множество точек на противоположной стороне.

При этом множество допустимых значений *X* может представлять собой ограниченный многоугольник в координатной плоскости (в этом случае задача разрешима, и решений может быть одно или бесконечное количество), пустое множество (иначе – система ограничений несовместна, и задача не имеет решение), неограниченный многоугольник (решение может существовать или не существовать, если функция неограниченна сверху или снизу на допустимом множестве).

Для решения задачи (2.5)-(2.7) рассмотрим семейство линий уровня целевой функции из (3.5)

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 = C, \ C = const, \quad (2.8)$$

которые являются параллельными прямыми. Градиент $f'(x) = (c_1, c_2)$ и антиградиент $-f'(x) = (-c_1, -c_2)$ перпендикулярны прямым (2.8) и указывают направление возрастания и убывания целевой функции. Если перемещать параллельно самой себе произвольную прямую (3.8), проходящую через допустимое множество *X*, в направлении градиента или антиградиента до тех пор, пока эта прямая будет иметь хотя бы одну общую точку с множеством X, то в своем крайнем положении указанная прямая пройдет через точку множества X, в которой целевая функция $f(x)$ принимает максимальное или минимальное на X значение.

Вернемся к примеру 2.1 и найдем решение данной задачи графическим методом.

Изобразим на координатной плоскости допустимое множество X. Проведем граничные прямые $x_1 + x_2 = 300$ (l_1), $x_1 - x_2 = 0$ (l_2), $x_2 = 100$ (l_3) и определим полуплоскости, соответствующие ограничениям-неравенствам. Для этого для каждого ограничения выберем точку (например, начало координат (0, 0)), не лежащую на соответствующей граничной прямой, и проверим выполнение неравенства. Например, для ограничения $x_1 + x_2 \le 300$ подставим координаты (0, 0) и получим, что неравенство выполняется, т.е. это ограничение описывает множество точек, лежащих ниже (левее) относительно прямой $x_1 + x_2 = 300$. В результате получаем следующее множество допустимых решений, изображенное на рис. 2.1.

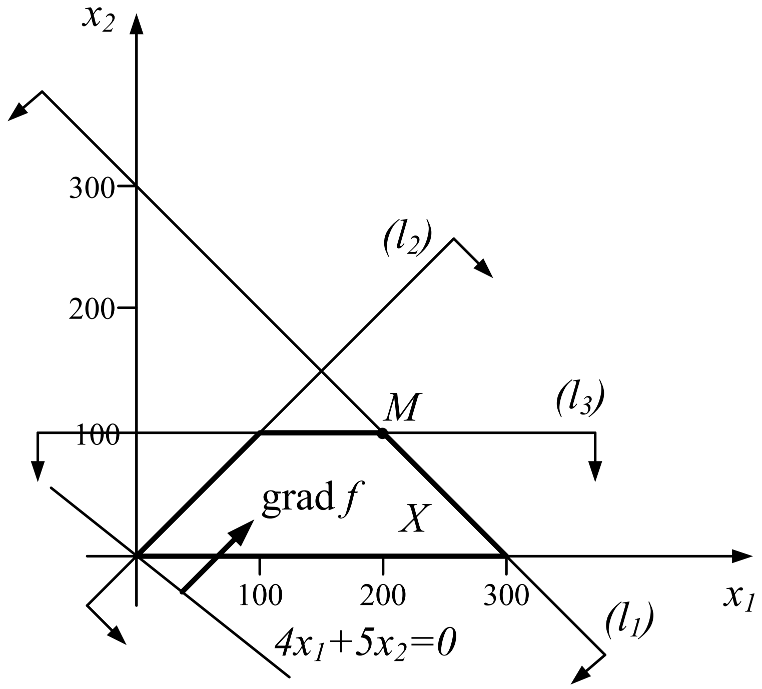


Рисунок 2.1 – Графическая иллюстрация к примеру 2.1

Построим линию уровня целевой функции $0{,}08x_1 + 0{,}1x_2 = 0$ и вычислим градиент $grad\, f = (0{,}08,\ 0{,}1)$. Для удобства построений, можно умножить целевую функцию на 50,чтобы получить целые значения коэффициентов при переменных. Следует также отметить, что необязательно строить градиент согласно вычисленным значениям, достаточно лишь определить его направление.

Совершая параллельный перенос линии уровня в направлении вектора *grad f*, находим ее крайнее положение. В этом положении прямая проходит через точку M – точку пересечения граничным прямых (l_1) и (l_3). Таким образом, целевая функция достигает максимум в точке $x^{max} = (200, 100)$, и максимальное значение равное $f^{max} = 26$.

Это означает, что инвестору следует вложить 200 тыс. ден. ед. в автомобильный концерн и 100 тыс. ден. ед. в строительное предприятие, при этом максимальная прибыль в первый год составит 26 тыс. ден. ед.

2.3. Использование возможностей MATLAB для решения задач линейного программирования

Задача линейного программирования состоит в нахождении вектора x, который минимизирует целевую линейную функцию

$$f^T x.$$

где f – вектор коэффициентов, и удовлетворяет заданным линейным ограничениям: неравенствам

$$Ax \le b$$

и равенствам

$$A_{eq} x = b_{eq}.$$

Кроме того, могут быть поставлены двусторонние покомпонентные ограничения в векторной форме

$$lb \le x \le ub.$$

В задачах оптимизации могут быть заданы не все типы ограничений, например, ограничения-равенства могут отсутствовать.

Для решения задач линейного программирования предназначена функция **linprog**. Первым аргументом linprog всегда является вектор f, далее задаются матрица A и вектор b. При наличии ограничений в виде равенств дополнительными аргументами могут быть *Aeq* и *beq*, наконец, двусторонние ограничения являются шестым и седьмым аргументами linprog.

Пример 2.2. Рассмотрим пример использования этой функции на следующей задаче: найти экстремум функции

$$f(x) = 4x_1 - 3x_2 + x_3 - 5x_4$$

при следующих ограничениях на переменные

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 10, \\ -3x_1 + 7x_2 + x_3 - x_4 \le 2, \\ 20x_1 - 20x_2 + 2x_3 + 3x_4 \ge 87, \\ x_j \ge 0, \ \ j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

Отметим, что следует отдельно решать задачи на нахождение максимума и минимума целевой функции при указанных ограничениях.

Запишем вектор *f*, матрицы *A* и *Aeq*, векторы *b*, *beq*, *lb* и *ub* ограничений в соответствии с требованиями Toolbox:

$f\,\min = (4 \quad -3 \quad 1 \quad -5)^T$, $f\,\max = (-4 \quad 3 \quad -1 \quad 5)^T$ соответственно для задачи на минимум и максимум (вектор $f\,\max = -f\,\min$, поскольку функция linprog находит минимальное значение функции при заданных ограничениях; после решения задачи для нахождения максимального значения следует поменять знак на противоположный),

$A = \begin{pmatrix} -3 & 7 & 1 & -1 \\ -20 & 20 & -2 & -3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ -87 \end{pmatrix}$ для ограничений неравенств (ограничения типа «$\ge$» следует привести к ограничениям типа «$\le$» умножением на (–1) обеих частей неравенства),

$Aeq = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, $beq = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix}$ для ограничений равенств,

$lb = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ для прямых ограничений (вектор *ub* пустой, поскольку сверху значения переменных не ограничены).

Составим следующую программу с именем linprog_1.m для решения задачи:

```
clc %очистка рабочей области
fmin=[4; -3; 1; -5];
fmax=[-4; 3; -1; 5];
A=[-3 7 1 -1; -20 20 -2 -3];
b=[2; -87];
Aeq=[1 -4 -2 1; 3 2 4 -1];
beq=[6; 10];
lb=[0; 0; 0; 0];
ub=[];  %пустой вектор
disp('Решение задачи на минимум')
[x_min, y_min]=linprog(fmin, A, b, Aeq, beq, lb, ub);
disp('Точка минимума')
x_min
disp('Значение минимума')
y_min

disp('Решение задачи на максимум')
[x_max, y_max]=linprog(fmax, A, b, Aeq, beq, lb, ub);
disp('Точка максимума')
x_max
disp('Значение максимума')
y_max=-y_max
```

3 usages of "lb" found | script | Ln 22 Col 13 | OVR

Результат работы программы будет следующим:

```
Решение задачи на минимум
Optimization terminated.
Точка минимума

x_min =

    5.0000
    8.0000
    6.0000
   45.0000

Значение минимума

y_min =

 -223.0000
```

```
Решение задачи на максимум
Optimization terminated.
Точка максимума

x_max =

    5.0000
    2.0000
    0.0000
    9.0000

Значение максимума

y_max =

  -31.0000
```

Тем самым, получили следующее решение задачи: точка минимума $x\min = (5 \quad 8 \quad 6 \quad 45)^T$ и значение минимума $f\min = -223$, точка максимума $x\max = (5 \quad 2 \quad 0 \quad 9)^T$ и значение максимума $f\min = -31$.

Пример 2.3. Решим классическую задачу линейного программирования о составлении рациона питания. Имеются три продукта П1, П2, П3 разной цены, каждый из которых содержит определенное количество питательных ингредиентов И1, И2, И3, И4 (табл. 2.1). Известно, что в день требуется: И1 – не менее 200, И2 – не менее 90, И3 – не менее 80 и И4 – не менее 210. Требуется минимизировать затраты на приобретение продуктов. Очевидно, что количество приобретаемых продуктов не может быть отрицательным.

Таблица 2.1 – Питательность и цена продуктов

	П 1	П2	П3
И1	1	7	10
И2	5	4	1
И3	4	2	3
И4	8	6	11
Цена	35	39	55

Математическая модель данной задачи представляется в виде: составить такой набор продуктов (обозначим искомые количества продуктов через x_1, x_2, x_3 соответственно), при котором достигается минимум функции стоимости набора продуктов

$$f(x) = 35x_1 + 39x_2 + 55x_3$$

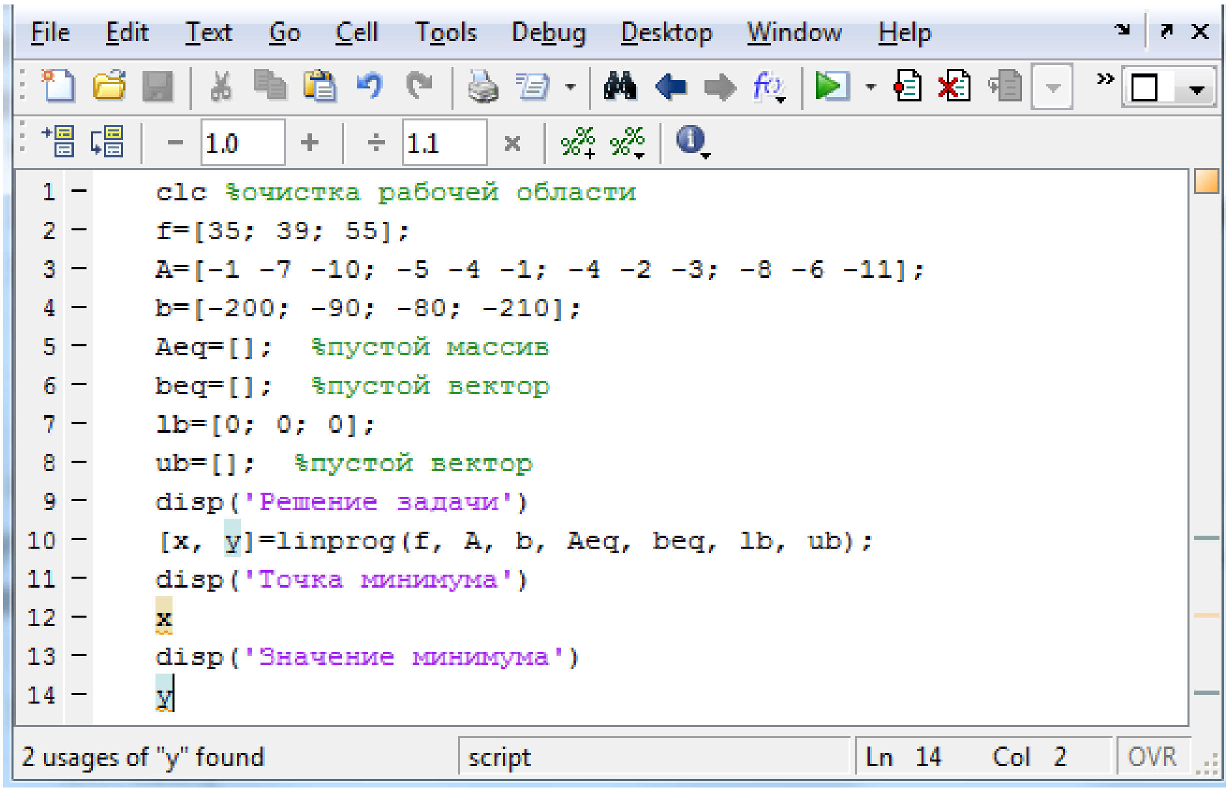
при ограничениях на содержание питательных веществ и неотрицательность переменных

$$\begin{cases} x_1 + 7x_2 + 10x_3 \geq 200, \\ 5x_1 + 4x_2 + x_3 \geq 90, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 80, \\ 8x_1 + 6x_2 + 11x_3 \geq 210, \\ x_{1,2,3} \geq 0. \end{cases}$$

Запишем целевую функцию, матрицу *A*, векторы *b* и *lb* ограничений в соответствии с требованиями Toolbox. Поскольку линейные ограничения содержат «меньше или равно», а количество ингредиентов в рационе не должно быть менее заданных величин, то следует изменить знаки обеих частей системы:

$$f=\begin{pmatrix}35\\39\\55\end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix}-1 & -7 & -10\\-5 & -4 & -1\\-4 & -2 & -3\\-8 & -6 & -11\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}-200\\-90\\-80\\-210\end{pmatrix},\ lb=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Для решения задачи составим файл-программу linprog_2. При вызове linprog вместо неиспользуемых аргументов (нет ограничений в виде равенств) задаем пустые массивы, обозначаемые в MATLAB квадратными скобками. Верхнее ограничение вида $x<ub$ отсутствует, а функция linprog поддерживает обращение с переменным числом входных аргументов, поэтому седьмой входной аргумент не нужен.



Выполнение файл-программы linprog_2 приводит к следующему результату:

```
Решение задачи
Optimization terminated.
Точка минимума

x =

    5.7480
   12.6772
   10.5512

Значение минимума

y =

  1.2759e+003
```

Таким образом, следует закупить продукты П1, П2, П3 в количествах 5.748, 12.6772 и 10.5512 соответственно, при этом затраты на их покупку составят 1275.9 у.ед. ■

Задание для самостоятельной работы. Встроенными средствами ППП MATLAB найти решение задачи из примера 2.1. Сравнить найденное решение с решением, полученным графическим методом.

Индивидуальные задания для самостоятельной работы

1. Найти решение следующей задачи линейного программирования

а) графическим методом;

б) с помощью средств MATLAB.

№ варианта	Задача	**№ варианта**	Задача
1	$f(x) = -x_1 - 4x_2 \to extr,$ $\begin{cases} x_1 \le 2, \\ x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ x_2 \le 2, \\ 2x_1 + x_2 \le 3, \\ x_1,\, x_2 \ge 0. \end{cases}$	**2**	$f(x) = -2x_1 - 3x_2 \to extr,$ $\begin{cases} x_1 \le 4, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 2, \\ x_2 \le 2, \\ 2x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1,\, x_2 \ge 0. \end{cases}$
3	$f(x) = -2x_1 - x_2 \to extr,$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ 2x_1 - x_2 \ge 0, \\ x_1 - 2x_2 \le 0, \\ x_1 - x_2 \ge -1, \\ x_1,\, x_2 \ge 0. \end{cases}$	**4**	$f(x) = 2x_1 + 3x_2 \to extr,$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ 2x_1 - x_2 \ge 0, \\ x_1 + 2x_2 \le 5, \\ x_1 - x_2 \ge -1, \\ x_1,\, x_2 \ge 0. \end{cases}$
5	$f(x) = x_1 + x_2 \to extr,$ $\begin{cases} x_2 \le 5, \\ 2x_1 - 6x_2 \le 12, \\ 3x_1 + 8x_2 \le 53, \\ x_1,\, x_2 \ge 0. \end{cases}$	**6**	$f(x) = 3x_1 - x_2 \to extr,$ $\begin{cases} x_2 \le 5, \\ 2x_1 - 6x_2 \le 13, \\ 3x_1 + 8x_2 \le 52, \\ x_1,\, x_2 \ge 0. \end{cases}$
7	$f(x) = -2x_1 + 5x_2 \to extr,$ $\begin{cases} x_1 - 3x_2 \le 3, \\ x_1 + x_2 \le 4, \\ -3x_1 + x_2 \le 3, \\ x_1,\, x_2 \ge 0. \end{cases}$	**8**	$f(x) = 2x_1 - 3x_2 \to extr,$ $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 \le 4, \\ x_1 + x_2 \le 5, \\ -3x_1 + x_2 \le 3, \\ x_1,\, x_2 \ge 0. \end{cases}$
9	$f(x) = -4x_1 + 2x_2 \to extr,$ $\begin{cases} -x_1 + 3x_2 \le 7, \\ 2x_1 + x_2 \le 7, \\ x_1 - 2x_2 \le 0, \\ x_1,\, x_2 \ge 0. \end{cases}$	**10**	$f(x) = -3x_1 + 2x_2 \to extr,$ $\begin{cases} -x_1 + 4x_2 \le 7, \\ 2x_1 + x_2 \le 8, \\ x_1 - 2x_2 \le 0, \\ x_1,\, x_2 \ge 0. \end{cases}$

11	$f(x)=4x_1+3x_2 \to extr,$ $\begin{cases} 2x_1-3x_2\le 6, \\ x_1-2x_2\ge -4, \\ 7x_1+x_2\le 14, \\ x_1,\, x_2\ge 0. \end{cases}$	**12**	$f(x)=-x_1+3x_2 \to extr,$ $\begin{cases} 3x_1-2x_2\le 6, \\ x_1-2x_2\ge -5, \\ 6x_1+x_2\le 12, \\ x_1,\, x_2\ge 0. \end{cases}$
13	$f(x)=-x_1+4x_2 \to extr,$ $\begin{cases} 5x_1+2x_2\ge 10, \\ 4x_1+x_2\le 20, \\ -3x_1+2x_2\le 6, \\ x_1,\, x_2\ge 0. \end{cases}$	**14**	$f(x)=x_1-2x_2 \to extr,$ $\begin{cases} 3x_1+2x_2\ge 12, \\ 2x_1+4x_2\le 10, \\ -4x_1+2x_2\le 7, \\ x_1,\, x_2\ge 0. \end{cases}$
15	$f(x)=2x_1+5x_2 \to extr,$ $\begin{cases} 2x_1-3x_2\le 6, \\ x_1+2x_2\ge 4, \\ 4x_1+x_2\ge 1, \\ x_1,\, x_2\ge 0. \end{cases}$	**16**	$f(x)=2x_1+3x_2 \to extr,$ $\begin{cases} 2x_1+3x_2\le 7, \\ x_1+2x_2\ge 4, \\ 4x_1+x_2\ge 1, \\ x_1,\, x_2\ge 0. \end{cases}$
17	$f(x)=4x_1-3x_2 \to extr,$ $\begin{cases} 2x_1+x_2\le 10, \\ x_1+2x_2\ge 2, \\ x_1-x_2\le 1, \\ x_1,\, x_2\ge 0. \end{cases}$	**18**	$f(x)=2x_1-3x_2 \to extr,$ $\begin{cases} x_1+3x_2\le 12, \\ x_1+x_2\ge 2, \\ 2x_1-x_2\le 3, \\ x_1,\, x_2\ge 0. \end{cases}$
19	$f(x)=3x_1+3x_2 \to extr,$ $\begin{cases} x_1+2x_2\le 8, \\ -2x_1+x_2\le 6, \\ 2x_1+x_2\ge 6, \\ x_1+2x_2\ge 6, \\ x_1,\, x_2\ge 0. \end{cases}$	**20**	$f(x)=x_1+3x_2 \to extr,$ $\begin{cases} x_1+2x_2\le 7, \\ 2x_1-x_2\le 5, \\ 2x_1+x_2\ge 6, \\ x_1,\, x_2\ge 0. \end{cases}$

2. По условиям задачи построить математическую модель и найти решение с использованием средств MATLAB.

<table>
<tr><th>№ варианта</th><th>Задача</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Фирма производит для автомобилей запасные части типа А и В. Фонд рабочего времени составляет 5000 чел.-ч в неделю. Для производства одной детали типа А требуется 1 чел.-ч, а для производства одной детали типа В – 2 чел.-ч. Производственная мощность позволяет выпускать максимум 2500 деталей типа А и 2000 деталей типа В в неделю. Для производства деталей типа А уходит 2 кг полимерного материала и 5 кг листового материала, а для производства одной детали типа В – 4 кг полимерного материала и 4 кг листового металла. Еженедельные запасы каждого материала – соответственно 10 и 12 т. Общее число производимых деталей в течение одной недели должно составлять не менее 1500 штук.
Определите, сколько деталей каждого вида следует производить, чтобы обеспечить максимальный доход от продажи за неделю, если доход от продаж одной детали типа А и В составляет соответственно 110 и 150 руб.</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Туристская фирма в летний сезон обслуживает в среднем 7500 туристов в месяц и располагает флотилией из двух типов судов, характеристики которых представлены в таблице.
<table>
<tr><th rowspan="2">Показатели</th><th colspan="2">Судно</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th></tr>
<tr><td>Пассажировместимость, чел.</td><td>2000</td><td>1000</td></tr>
<tr><td>Горючее, т</td><td>12000</td><td>7000</td></tr>
<tr><td>Экипаж, чел.</td><td>125</td><td>100</td></tr>
</table>
В месяц выделяется 60 000 т горючего. Потребность в рабочей силе не превышает 600 человек. Определите количество судов I и II типа, чтобы обеспечить максимальный доход, который составляет от эксплуатации судов I типа 20 млн руб., а II типа — 10 млн руб. в месяц.</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Фирма производит и продает столы и шкафы из древесины хвойных и лиственных пород. Расход каждого вида в кубометрах на каждое изделие задан в таблице.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>
<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th colspan="2">Расход древесины, м^3</th><th rowspan="2">Цена изделия, тыс. руб.</th></tr>
<tr><th>хвойные</th><th>лиственные</th></tr>
<tr><td>Стол</td><td>0,15</td><td>0,2</td><td>0,8</td></tr>
<tr><td>Шкаф</td><td>0,3</td><td>0,1</td><td>1,5</td></tr>
<tr><td>Запасы древесины, м^3</td><td>80</td><td>40</td><td></td></tr>
</table>

Определите оптимальное количество столов и шкафов, которое следует поставлять на продажу для получения максимального дохода фирмы.
</td></tr>
<tr><td>4</td><td>
С Курского вокзала Москвы ежедневно отправляются скорые и пассажирские поезда. Пассажировместимость и количество вагонов железнодорожного депо станции отправления указаны в таблице.

<table>
<tr><th colspan="2">Тип вагона</th><th>Багажный</th><th>Почтовый</th><th>Жесткий</th><th>Купейный</th><th>Мягкий</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Количество вагонов в поезде</td><td>скорый</td><td>1</td><td>1</td><td>8</td><td>4</td><td>1</td></tr>
<tr><td>пассажирский</td><td>1</td><td>0</td><td>5</td><td>6</td><td>3</td></tr>
<tr><td colspan="2">Пассажировместимость, чел.</td><td></td><td></td><td>58</td><td>40</td><td>32</td></tr>
<tr><td colspan="2">Парк вагонов</td><td>14</td><td>8</td><td>90</td><td>80</td><td>30</td></tr>
</table>

Определите оптимальное количество пассажирских и скорых поездов, обеспечивающих максимальное количество ежедневно отправляемых пассажиров с вокзала.
</td></tr>
<tr><td>5</td><td>
Малое предприятие арендовало мини-пекарню для производства чебуреков и беляшей. Мощность пекарни позволяет выпускать в день не более 50 кг продукции. Ежедневный спрос на чебуреки не превышает 260 шт., а на беляши — 240 шт. Суточные запасы теста и мяса и расходы на производство каждой единицы продукции приведены в таблице.
</td></tr>
</table>

	Расход на производство, кг/шт.		Суточные запасы сырья, кг
	чебурек	беляш	
Мясо	0,035	0,06	21
Тесто	0,065	0,03	22
Цена, руб./шт.	25	24	

Определить оптимальный план ежедневного производства чебуреков и беляшей, обеспечивающих максимальную выручку от продажи.

6 Издательский дом «Геоцентр-Медиа» издает два журнала: «Автомеханик» и «Инструмент», которые печатаются в трех типографиях: «Алмаз-Пресс», «Карелия-Принт» и Hansaprint (Финляндия), где общее количество часов, отведенное для печати, и производительность печати одной тысячи экземпляров ограничены и представлены в следующей таблице.

Типография	Время печати 1 тыс. экземпляров		Ресурс времени, отведенной типографии, ч
	«Автомеханик»	«Инструмент»	
Алмаз-Пресс	2	14	112
Карелия-Принт	4	6	70
Hansaprint	6	4	80
Оптовая цена, руб./шт.	16	12	

Спрос на журнал «Автомеханик» составляет 12 тыс. экземпляров, а на журнал «Инструмент» — не более 7,5 тыс. экземпляров в месяц. Определите оптимальное количество издаваемых журналов, которые обеспечат максимальную выручку от продажи.

7 Фирма решила открыть на основе технологии производства чешского стекла, фарфора и хрусталя линию по изготовлению ваз и графинов и их декорированию. Затраты сырья на производство этой продукции представлены в таблице.

Сырье	Расход на производство, гр		Поставки сырья в неделю, кг
	ваза	графин	
Кобальт	20	15	30

Сусальное 24-каратное золото	20	10	25
Оптовая цена, руб./шт.	1400	1000	

Определите оптимальный объем выпуска продукции, обеспечивающий максимальный доход от продаж, если спрос на вазы не превышает 800 шт. в неделю.

8 Фирма производит одежду для охотников, туристов и охранных структур. Дополнительно фирма решила изготавливать шапки и подстежки из натурального меха. Затраты на производство этих изделий и запасы сырья представлены в таблице. Спрос на шапки составляет не более 300 шт. в месяц, а подстежек – не более 400 шт. в месяц.

Сырье	Расход сырья на производство, дм		Средний запас в месяц, дм
	шапки	подстежки	
Мех	22	140	61600
Ткань	1,5	30	15000
Оптовая цена, руб./шт.	400	800	

Определите объемы производства этих изделий, обеспечивающих максимальный доход от продажи.

9 Коммерческие расчеты, проведенные студентами в деревне, привели к более выгодному использованию яблок и груш путем их засушки и последующей продажи зимой в виде смеси сухофруктов, варианты которых представлены в таблице.

Плоды	Вес 1 кг в составе фруктов		Сбор плодов, кг/день
	смесь 1	смесь 2	
Анис (яблоки)	0,25	0,25	75
Штрейфлинг (яблоки)	0,75	0,25	125
Груши	0	0,5	80
Оптовая цена, руб./кг	40	50	

Из 1 кг плодов получается 200 г сушеных яблок, а груш – 250 г.
Определите оптимальное количество упаковок сухофруктов по 1 кг смесей первого и второго вида, которое необходимо заготавливать в деревне ежедневно для обеспечения максимального дохода от продажи в день.

10 Кондитерская фабрика в Покрове освоила выпуск новых видов шоколада «Лунная начинка» и «Малиновый дождик», спрос на которые составляет соответственно не более 12 и 7 т в месяц. По причине занятости трех цехов выпуском традиционных видов шоколада каждый цех может выделить только ограниченный ресурс времени в месяц. В силу специфики технологического оборудования затраты времени на производство шоколада разные, данные представлены в таблице.

Номер цеха	Время на производство 1 т шоколада, ч		Время, отведенное цехами под производство, ч/мес
	«Лунная начинка»	«Малиновый дождик»	
I	1	7	56
II	2	3	36
III	3	2	42
Оптовая цена, руб./кг	80	60	

Определите оптимальный объем выпуска шоколада (в кг), обеспечивающий максимальную выручку от продажи.

11 Некоторая фирма выпускает два набора удобрений для газонов: обычный и улучшенный. В обычный набор входит 3 кг азотных, 4 кг фосфорных и 1 кг калийных удобрений, а в улучшенный – 2 кг азотных, 6 кг фосфорных и 3 кг калийных удобрений. Известно, что для некоторого газона требуется, по меньшей мере, 10 кг азотных, 20 кг фосфорных и 7 кг калийных удобрений. Обычный набор стоит 3 ден. ед., а улучшенный – 4 ден. ед.
Какие и сколько наборов удобрений нужно купить, чтобы обеспечить эффективное питание почвы и минимизировать стоимость?

12 На имеющихся у фермера 400 га земли он планирует посеять кукурузу и сою. Сев и уборка кукурузы требуют на каждый гектар 200 ден. ед. затрат, а сои – 100 ден. ед. На покрытие расходов, связанных с се-

	вом и уборкой, фермер получил ссуду в 60 тыс. ден. ед. Каждый гектар, засеянный кукурузой, принесет 30 центнеров, а каждый гектар, засеянный соей, – 60 центнеров. Фермер заключил договор на продажу, по которому каждый центнер кукурузы принесет ему 3 ден. ед., а каждый центнер сои – 6 ден. ед. Однако согласно этому договору фермер обязан хранить убранное зерно в течение нескольких месяцев на складе, максимальная вместимость которого равна 21 тыс. центнеров. Сколько гектаров нужно засеять каждой из этих культур, чтобы получить максимальную прибыль?
13	Финансовый консультант фирмы «АВС» консультирует клиента по оптимальному инвестиционному портфелю. Клиент хочет вложить средства (не более 25 000 долл.) в два наименования акций крупных предприятий в составе холдинга «Дикси». Анализируются акции «Дикси - Е» и «Дикси - В». Цены на акции: «Дикси - Е» – 5 долл. за акцию; «Дикси - В» – 3 долл. за акцию. Клиент уточнил, что он хочет приобрести максимум 6000 акций обоих наименований, при этом акций одного из наименований должно быть не более 5000 штук. По оценкам «АВС», прибыль от инвестиций в эти акции в следующем году составит: «Дикси - Е» – 1,1 долл.; «Дикси - В» – 0,9 долл. Задача консультанта состоит в том, чтобы выдать клиенту рекомендации по оптимизации прибыли от инвестиций.
14	Завод – производитель высокоточных элементов для автомобилей выпускает два различных типа деталей – *X и Y*. Завод располагает фондом рабочего времени в 4000 чел.-ч в неделю. Для производства одной детали типа X требуется 1 чел.-ч, а для производства одной детали типа *Y* – 2 чел.-ч. Производственные мощности завода позволяют выпускать максимум 2250 деталей типа *X* и 1750 деталей типа У в неделю. Каждая деталь типа X требует 2 кг металлических стержней и 5 кг листового металла, а для производства одной детали типа *Y* необходимо 5 кг металлических стержней и 2 кг листового металла. Уровень запасов каждого вида металла составляет 10 000 кг в неделю. Кроме того, еженедельно завод поставляет 600 деталей типа *X* своему постоянному заказчику. Существует также профсоюзное соглашение, в соответствии с которым общее число производимых в течение одной недели деталей должно составлять не менее 1500 штук.

<table>
<tr><td></td><td>Сколько деталей каждого типа следует производить, чтобы максимизировать общий доход за неделю, если доход от производства одной детали типа X составляет 30 ден. ед,, а от производства одной детали типа Y — 40 ден. ед.?</td></tr>
<tr><td>15</td><td>Фирма производит два широко популярных безалкогольных напитка – «Лимонад» и «Тоник». Фирма может продать всю продукцию, которая будет произведена. Однако объем производства ограничен количеством основного ингредиента и производственной мощностью имеющегося оборудования. Для производства 1 л «Лимонада» требуется 0,02 ч работы оборудования, а для производства 1 л «Тоника» – 0,04 ч. Расход специального ингредиента составляет 0,01 кг и 0,04 кг на 1 л «Лимонада» и «Тоника» соответственно. Ежедневно в распоряжении фирмы имеется 24 ч времени работы оборудования и 16 кг специального ингредиента. Прибыль фирмы составляет 0,10 ден. ед. за 1 л «Лимонада» и 0,30 ден. ед. за 1 л «Тоника».
Сколько продукции каждого вида следует производить ежедневно, если цель фирмы состоит в максимизации ежедневной прибыли?</td></tr>
<tr><td>16</td><td>Фабрика выпускает два вида пряжи «Люкс» и «Фантазия». Для изготовления требуются ресурсы: станки, шерсть и хлопок. В таблице указан расход ресурсов при производстве 1 кг пряжи, а также суточный запас ресурсов на фабрике.
<table>
<tr><td rowspan="2">Вид ресурса</td><td colspan="2">Расход на 1 кг пряжи</td><td rowspan="2">Суточный запас</td></tr>
<tr><td>«Люкс</td><td>«Фантазия»</td></tr>
<tr><td>станки, ст.ч.</td><td>0,1</td><td>0,1</td><td>7</td></tr>
<tr><td>хлопок, кг</td><td>0,2</td><td>0,1</td><td>11</td></tr>
<tr><td>шерсть, кг</td><td>1,1</td><td>1</td><td>65</td></tr>
</table>
Доход от реализации 1 кг пряжи «Люкс» составляет 350 р., 1 кг пряжи «Фантазия» – 300 р. Определить суточный объем производства пряжи, который позволит при имеющихся ресурсах получить максимальный доход.</td></tr>
<tr><td>17</td><td>В опытном хозяйстве установлено, что откорм крупного рогатого скота выгоден только тогда, когда каждое животное получает в суточном рационе не менее 20 кормовых единиц, не менее 2000 г белка и не менее 100 г кальция. Для кормления животных используется сено и си-</td></tr>
</table>

лос. Содержание указанных питательных веществ 1 кг корма каждого вида, а также себестоимость 1 кг корма приведены в таблице.

Корм	Содержание в 1 кг			Себестоимость 1 кг корма, ден. ед.
	кормовых единиц	белка, г	кальция, г	
Сено	0,5	40	5	2
Силос	0,2	10	4	1

Возможности хозяйства позволяют включать в суточный рацион не более 20 кг сена, не более 25 кг силоса.
Составить кормовой рацион минимальной стоимости, учитывающий минимальные суточные нормы потребления питательных веществ и возможности хозяйства по ресурсам.

18 Имеются два проекта на строительство жилых домов. Расход стройматериалов, их запас, и полезная площадь дома каждого проекта приведены в таблице.

Стройматериалы	Расход стройматериалов ($м^3$) на один дом		Запас стройматериалов, $м^3$
	I	II	
Кирпич силикатный	7	3	1365
Кирпич красный	6	3	1245
Пиломатериалы	1	2	650
Полезная площадь, $м^2$	60	50	

Определить, сколько домов первого и второго проекта следует построить, чтобы полезная площадь была наибольшей.

19 Рацион для питания животных на ферме состоит из двух видов кормов I и II. Один килограмм корма I стоит 80 ден. ед. и содержит: 1 ед. жиров, 3 ед. белков, 1 ед. углеводов, 2 ед. нитратов. Один килограмм корма II стоит 10 ден. ед. и содержит 3 ед. жиров, 1 ед. белков, 8 ед. углеводов, 4 ед. нитратов.
Составить наиболее дешевый рацион питания, обеспечивающий жиров не менее 6 ед., белков не менее 9 ед., углеводов не менее 8 ед., нитратов не более 16 ед.

20 Для изготовления шкафов и буфетов мебельная фабрика применяет древесину четырёх видов, запасы которой ограничены и составляют соответственно: 12, 16, 12, 8 единиц. Количество единиц древесины для изготовления 1 шкафа и 1 буфета даны в таблице.

Ресурсы	Расход		Запасы
	1 шкаф	1 буфет	
1	0	0,4	12
2	0,4	0	16
3	0,2	0,2	12
4	0,1	0,2	8
Доход, ден. ед.	2	3	

Требуется составить такой план выпуска продукции, который обеспечивает наибольший доход, если от реализации шкафов получено 2 д. ед. дохода, а буфетов – 3 д. ед. дохода.

Лабораторная работа № 3

Построение и исследование моделей транспортных задач

2.1. Постановка транспортной задачи

Пусть имеется *n* пунктов отправления (поставщиков) грузов $A_1, A_2, ..., A_m$, на которых сосредоточены запасы какого-либо однородного груза в объемах соответственно $a_1, a_2, ..., a_m$. Величины a_i определяют максимально возможные размеры вывоза груза с пунктов отправления. Суммарный запас груза поставщиков составляет $\sum_{i=1}^{m} a_i$.

Кроме того, имеется *n* пунктов назначения $B_1, B_2, ..., B_n$, которые подали заявки на поставку грузов в объемах соответственно $b_1, b_2, ..., b_n$. Суммарная величина заявок составляет $\sum_{j=1}^{n} b_j$.

Стоимость перевозки одной единицы груза от поставщика A_i к потребителю B_j обозначим через c_{ij} (транспортный тариф), образующих матрицу транспортных издержек $C = \{c_{ij}\}$. В качестве критерия оптимальности выбираем суммарные издержки по перевозке грузов.

Тогда транспортная задача формулируется следующим образом: необходимо составить оптимальный план, т.е. найти такие значения объема перевозок грузов $X = \{x_{ij}\}$ от поставщиков A_i к потребителям B_j, чтобы вывести все грузы от поставщиков; удовлетворить заявки каждого потребителя и обеспечить минимальные транспортные расходы на перевозку груза.

Все исходные данные транспортной задачи можно записать в виде табл. 3.1, которая называется *транспортной*. Матрица $X = \{x_{ij}\}$, определяющая решение задачи, называется *матрицей перевозок*. Очевидно, что элементы x_{ij}, определяющие объем перевозимого от поставщиков A_i к потребителям B_j груза, должны быть неотрицательны. Столбец u_i и строка v_j в табл. 3.1 являются вспомогательными при решении задачи. О правилах их заполнения будет сказано ниже.

Таблица 3.1

$a_i \setminus b_j$	b_1	b_2	…	b_n	u_i
a_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}	
…	…	…	…	…	
a_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}	
v_j					

Задача заключается в определении плана перевозок – матрицы $X = \{x_{ij}\}$ ($i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$), которая удовлетворяет следующим условиям: обеспечивает минимальное значение целевой функции

$$f(X) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min \tag{3.1}$$

и удовлетворяет следующим условиям

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \; i = \overline{1,m}, \tag{3.2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \; j = \overline{1,n}, \tag{3.3}$$

$$x_{ij} \ge 0, \; i = \overline{1,m}, \; j = \overline{1,n}. \tag{3.4}$$

В таком виде экономико-математическая постановка транспортной задачи считается законченной.

Целевая функция задачи $f(X)$ выражает требование обеспечить минимум суммарных затрат на перевозку всех грузов. Первая группа из уравнений ограничений, записанных в общем виде (3.2), выражает требование, что запасы всех m поставщиков вывозятся полностью, а вторая группа из уравнений ограничений, записанных в общем виде (3.3) означает, полностью должны удовлетворятся запросы всех n потребителей. Последнее неравенство (3.4) является условием неотрицательности всех переменных.

В рассмотренной математической модели транспортной задачи предполагается, что суммарные запасы поставщиков равны суммарным запросам потребителей, т.е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j. \tag{3.5}$$

Такая задача называется *сбалансированной*, а её модель *закрытой*. Если же это равенство не выполняется, то задача называется *несбалансированной* (с неправильным балансом), а её модель – *открытой*.

Для того чтобы транспортная задача линейного программирования имела решение, необходимо, чтобы суммарные запасы поставщиков равнялись суммарным запросам потребителей, т.е. задача должна быть сбалансированной.

В случае превышения запаса над потребностями, т.е. если $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, вводится фиктивный $(n+1)$-й пункт назначения с потребностью $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$ и равными нулю тарифами перевозок $c_{i(n+1)} = 0 \ (i = \overline{1,m})$.

Аналогично при превышении потребностей над запасами, т.е. при $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$, вводится фиктивный $(m+1)$-й поставщик с запасами $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$ и нулевыми тарифами перевозок $c_{(m+1)j} = 0 \ (j = \overline{1,n})$.

Число переменных x_{ij} в транспортной задачу с m пунктами отправления и n пунктами назначения равно mn, а число уравнений в системе (3.2), (3.3) равно $(m+n)$.

Решение транспортной задачи разбивается на следующие этапы:

1) определение начального (опорного) решения;

2.1) проверка данного решения на оптимальность;

2.2) в случае не оптимальности решения его улучшение.

Для определения начального (опорного) решения в транспортной задаче существует несколько методов (метод северо-западного угла, метод минимального элемента и метод аппроксимации Фогеля).

Для проверки плана на оптимальность используется методы потенциалов.

3.2. Решение транспортной задачи методом потенциалов

Рассмотрим следующий пример. На трех базы A_1, A_2, A_3 имеется однородный груз в количествах, соответственно равных 60, 80, 100 ед. Этот груз требуется перевезти в четыре магазина B_1, B_2, B_3, B_4 соответственно в количествах 40, 60, 90, 70 ед. Стоимость доставки единицы груза из каждого пункта отправления в соответствующие пункты назначения задана матрицей тарифов (тыс. руб. за ед. груза):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & 8 & 5 \\ 4 & 7 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Требуется составить план перевозок однородного груза с минимальными транспортными издержками.

Решение. Составим математическую модель задачи. Проверим необходимое и достаточное условие разрешимости:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 60 + 80 + 100 = 240,$$

$$\sum_{j=1}^{4} b_j = 40 + 60 + 90 + 70 = 260.$$

Как видно, суммарная потребность груза в пунктах назначения превышает запасы груза на трех базах. Следовательно, модель исходной транспортной задачи является открытой. Чтобы получить закрытую модель, введем дополнительную (фиктивную) базу A_4 с запасом груза, равным $a_4 = \sum_{j=1}^{4} b_j - \sum_{i=1}^{3} a_i = 260 - 240 = 20$ ед. Тарифы перевозки единицы груза из базы A_4 во все магазины полагаем равны нулю, т.е. $c_{4j} = 0,\ j = \overline{1,4}$.

Решение будем искать в виде матрицы перевозок

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{pmatrix},$$

где x_{ij} – количество ед. груза, перевозимого с i-го склада в j-й магазин.

Математическая модель задачи имеет вид: найти минимум суммарной стоимости перевозок

$$f(X) = 1x_{11} + 2x_{12} + 4x_{13} + 3x_{14} + 6x_{21} + 3x_{22} + 8x_{23} + 5x_{24} +$$
$$+4x_{31} + 7x_{32} + 6x_{33} + 2x_{34} + 0x_{41} + 0x_{42} + 0x_{43} + 0x_{44} \to \min$$

при условии вывоза всего груза со складов

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 60,$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 80,$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 100,$$

$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 20,$$

при удовлетворении потребностей всех магазинов

$x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}=40,$

$x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}=60,$

$x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}=90,$

$x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}=70,$

и при условиях неотрицательности переменных

$x_{ij}\ge 0,\ i=\overline{1,4},\ \ j=\overline{1,4}.$

Найдем решение транспортной задачи методом потенциалов, находя первый опорный план двумя описанными алгоритмами.

1. Метод северо-западного угла

Проставим перевозку в клетку (1, 1): $x_{11}=\min\{a_1,b_1\}=\min\{60,40\}=40$. Поскольку потребности первого потребителя удовлетворены, то его исключаем из рассмотрения и передвигаемся на одну клетку вправо.

Ставим перевозку в клетку (1, 2): $x_{12}=\min\{a_1-x_{11},b_2\}=\min\{20,60\}=20$. Поскольку весь груз из первого склада вывезен, то его исключаем из рассмотрения и перемещаемся на одну клетку вниз.

Ставим перевозку в клетку (2, 2): $x_{22}=\min\{a_2,b_2-x_{12}\}=\min\{80,40\}=40$. Поскольку все потребности второго магазина удовлетворены, то его исключаем из рассмотрения и перемещаемся на одну клетку вправо.

Ставим перевозку в клетку (2, 3): $x_{23}=\min\{a_2-x_{22},b_3\}=\min\{40,90\}=40$. Поскольку весь груз из второго склада вывезен, то его исключаем из рассмотрения и перемещаемся на одну клетку вниз.

Ставим перевозку в клетку (3, 3): $x_{33}=\min\{a_3,b_3-x_{23}\}=$ $=\min\{100,50\}=50$. Поскольку все потребности третьего магазина удовлетворены, то его исключаем из рассмотрения и перемещаемся на одну клетку вправо.

Ставим перевозку в клетку (3, 4): $x_{34}=\min\{a_3-x_{33},b_4\}=\min\{50,70\}=50$. Поскольку весь груз из третьего склада вывезен, то его исключаем из рассмотрения и перемещаемся на одну клетку вниз.

Ставим перевозку в клетку (4, 4): $x_{44}=\min\{a_4,b_4-x_{34}\}=\min\{20,20\}=20$. Все потребности четвертого магазина удовлетворены и весь груз из четвертого склада вывезен.

Таким образом, построен первый опорный план (табл. 3.2).

Рассчитаем стоимость такого плана перевозок:

$F=1\cdot 40+2\cdot 20+3\cdot 40+8\cdot 40+6\cdot 50+2\cdot 50+0\cdot 20=920.$

Количество базисных клеток равно 7 и равно $m+n-1$=4+4-1=7, следовательно, план не вырожден.

Проверим план на оптимальность. Для базисных клеток построим следующую систему для расчета потенциалов:

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 1, \quad u_1 + v_2 = 2, \\ u_2 + v_2 = 3, \;\; u_2 + v_3 = 8, \\ u_3 + v_3 = 6, \;\; u_3 + v_4 = 2, \\ u_4 + v_4 = 0. \end{cases}$$

Зададим значение $u_1 = 0$ и из построенной системы рассчитаем:

$$\begin{cases} v_1 = 1 - u_1 = 1, \\ v_2 = 2 - u_1 = 2, \\ u_2 = 3 - v_2 = 1, \\ v_3 = 8 - u_2 = 7, \\ u_3 = 6 - v_3 = -1, \\ v_4 = 2 - u_3 = 3, \\ u_4 = 0 - v_4 = -3. \end{cases}$$

Все вычисления удобно проводить в транспортной таблице (табл. 3.2).

Таблица 3.2

$a_i \setminus b_j$	40	60	90	70	u_i
60	1 **40**	2 **20**	4	3	0
80	6	3 **40**	8 **40**	5	1
100	4	7	6 – **50**	2 + **50**	–1
20	0	0	0 +	0 – **20**	–3
v_j	1	2	7	3	

Для свободных клеток вычислим разности:

$\Delta_{13} = 4 - 0 - 7 = -3 < 0$, $\Delta_{14} = 3 - 0 - 3 = 0$,

$\Delta_{21} = 6 - 1 - 1 = 4 > 0$, $\Delta_{24} = 5 - 1 - 3 = 1 > 0$,

$\Delta_{31} = 4 + 1 - 1 = 4 > 0$, $\Delta_{32} = 7 + 1 - 2 = 6 > 0$,

$\Delta_{41} = 0 + 3 - 1 = 2 > 0$, $\Delta_{42} = 0 + 3 - 2 = 1 > 0$,

$\Delta_{43} = 0 + 3 - 7 = -4 < 0$.

Поскольку среди Δ_{ij} есть отрицательные, то план не оптимален. Для клетки (4, 3) с наименьшей отрицательной разностью строим цикл перераспределения: это четырехугольник с вершинами в клетках (4, 3), (4, 4), (3, 4), (3, 3).

Расставим, чередуя, знаки «+» и «–», начиная с клетки (4, 3). Далее вычислим шаг пересчета $h = \min\{50, 20\} = 20$ и строим новый план перевозок (табл. 3.3).

Таблица 3.3

$a_i \setminus b_j$	40	60	90	70	u_i
60	1 **40**	2 – **20**	4 +	3	0
80	6	3 + **40**	8 – **40**	5	1
100	4	7	6 **30**	2 **70**	–1
20	0	0	0 **20**	0	–7
v_j	1	2	7	3	

Рассчитаем стоимость нового плана перевозок:

$F = 1 \cdot 40 + 2 \cdot 20 + 3 \cdot 40 + 8 \cdot 40 + 6 \cdot 30 + 2 \cdot 70 + 0 \cdot 20 = 840$.

Видно, что на новом плане значение стоимости перевозок уменьшилось.

Число базисных клеток равно 7, следовательно, план не вырожден. Аналогично рассчитаем потенциалы и проверим план на оптимальность:

$\Delta_{13} = 4 - 0 - 7 = -3 < 0$, $\Delta_{14} = 3 - 0 - 3 = 0$,

$\Delta_{21} = 6 - 1 - 1 = 4 > 0$, $\Delta_{24} = 5 - 1 - 3 = 1 > 0$,

$\Delta_{31} = 4 + 1 - 1 = 4 > 0$, $\Delta_{32} = 7 + 1 - 2 = 6 > 0$,

$\Delta_{41} = 0 + 7 - 1 = 6 > 0$, $\Delta_{42} = 0 + 7 - 2 = 5 > 0$,

$\Delta_{43} = 0 + 7 - 3 = 4 > 0$.

Поскольку среди $\Delta_{13} < 0$, то план не оптимален. Для клетки (1, 3) строим цикл перераспределения: это четырехугольник с вершинами в клетках (1, 3), (2, 3), (2, 2), (1, 2). Расставим, чередуя, знаки «+» и «–», начиная с клетки (1, 3). Далее вычислим шаг пересчета $h = \min\{40, 20\} = 20$ и строим новый план перевозок (табл. 3.4).

Таблица 3.4

$a_i \setminus b_j$	40	60	90	70	u_i
60	1 **40**	2	4 **20**	3	0
80	6	3 **60**	8 **20**	5	4
100	4	7	6 **30**	2 **70**	2
20	0	0	0 **20**	0	–4
v_j	1	–1	4	0	

Число базисных клеток равно 7, следовательно, план не вырожден. Рассчитаем потенциалы и проверим план на оптимальность:

$\Delta_{12} = 2 - 0 + 1 = 3 > 0$, $\Delta_{14} = 3 - 0 - 0 = 3 > 0$,

$\Delta_{21} = 6 - 4 - 1 = 1 > 0$, $\Delta_{24} = 5 - 4 - 0 = 1 > 0$,

$\Delta_{31} = 4 - 2 - 1 = 1 > 0$, $\Delta_{32} = 7 - 2 + 1 = 6 > 0$,

$\Delta_{41} = 0 + 4 - 1 = 3 > 0$, $\Delta_{42} = 0 + 4 + 1 = 5 > 0$,

$\Delta_{43} = 0 + 4 - 0 = 4 > 0$.

Поскольку все разности Δ_{ij} неотрицательны, то построенный план является оптимальным.

2. Метод минимального элемента

Среди всех стоимостей перевозок выберем минимальную. Это будут нули, расположенные в четвертой, фиктивной, строке. Остановимся на первом столбце и поставим перевозку в клетку (4, 1): $x_{41} = \min\{a_4, b_1\} = \min\{20, 40\} = 20$. Поскольку весь груз из четвертого склада вывезен, то его исключаем из рассмотрения.

Среди оставшихся клеток выбираем клетку (1, 1) с наименьшей стоимостью и назначаем перевозку $x_{11} = \min\{a_1, b_1 - x_{41}\} = \min\{60, 20\} = 20$. Поскольку все потребности первого магазина удовлетворены, то его исключаем из рассмотрения.

Далее аналогично ставим следующие перевозки:

$x_{12} = \min\{a_1 - x_{11}, b_2\} = \min\{40, 60\} = 40$, исключаем из рассмотрения первую строку;

$x_{34} = \min\{a_3, b_4\} = \min\{100, 70\} = 70$, исключаем из рассмотрения четвертый столбец;

$x_{22} = \min\{a_2, b_2 - x_{12}\} = \min\{80, 20\} = 20$, исключаем из рассмотрения второй столбец;

$x_{33} = \min\{a_3 - x_{34}, b_3\} = \min\{30, 90\} = 30$, исключаем из рассмотрения третью строку;

$x_{23} = \min\{a_2 - x_{22}, b_3 - x_{33}\} = \min\{60, 60\} = 60$.

Весь груз вывезен со складов, потребности всех магазинов удовлетворены. Получили первый опорный план (табл. 3.5), который является невырожденным, поскольку число базисных клеток равно 7.

Таблица 3.5

$a_i \setminus b_j$	40	60	90	70	u_i
60	1 + **20**	2 – **40**	4	3	0
80	6	3 + **20**	8 – **60**	5	1
100	4	7	6 **30**	2 **70**	–1
20	0 – **20**	0	0 +	0	–1
v_j	1	2	7	3	

Рассчитаем стоимость такого плана перевозок:

$F = 1 \cdot 20 + 2 \cdot 40 + 3 \cdot 20 + 8 \cdot 60 + 6 \cdot 30 + 2 \cdot 70 + 0 \cdot 20 = 900$.

Рассчитаем потенциалы и проверим план на оптимальность:

$\Delta_{13} = 4 - 0 - 7 = -3 < 0$, $\Delta_{14} = 3 - 0 - 3 = 0$,

$\Delta_{21} = 6 - 1 - 1 = 4 > 0$, $\Delta_{24} = 5 - 1 - 3 = 1 > 0$,

$\Delta_{31} = 4 + 1 - 1 = 4 > 0$, $\Delta_{32} = 7 + 1 - 2 = 6 > 0$,

$\Delta_{42} = 0 + 1 - 2 = -1 < 0$, $\Delta_{43} = 0 + 1 - 7 = -6 < 0$,

$\Delta_{44} = 0 + 1 - 3 = -2 < 0$.

Поскольку среди Δ_{ij} есть отрицательные, то план не оптимален. Для клетки (4, 3) с наименьшей отрицательной разностью строим цикл перераспределения: это шестиугольник с вершинами в клетках (4, 3), (2, 3), (2, 2), (1, 2), (1, 1), (4, 1). Расставим, чередуя, знаки «+» и «–», начиная с клетки (4, 3). Далее вычислим шаг пересчета $h = \min\{20, 40, 60\} = 20$ и строим новый план перевозок (табл. 3.6).

Таблица 3.6

$a_i \setminus b_j$	40	60	90	70	u_i
60	1 **40**	2 **20**	4	3	
80	6	3 **40**	8 **40**	5	
100	4	7	6 **30**	2 **70**	
20	0	0	0 **20**	0	
v_j					

План, соответствующий табл. 3.6, совпадает с планом табл. 3.3, который не является оптимальным. Дальнейший процесс решения полностью совпадает с описанным выше (в случае метода северо-западного угла). В итоге получаем такое же решение.

Окончательно получаем оптимальный план перевозок

$$X = \begin{pmatrix} 40 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 60 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 70 \\ 0 & 0 & 20 & 0 \end{pmatrix},$$

состоящий в перевозке 40 ед. груза с первого склада в первый магазин, 20 ед. груза с первого склада в третий магазин, 60 ед. груза со второго склада во второй магазин, 20 ед. груза со второго склада в третий магазин, 30 ед. груза с третьего склада в третий магазин, 70 ед. груза с третьего склада в четвертый магазин, в третий магазин не довезут 20 ед. груза. Стоимость такого плана перевозок составит

$$F = 1\cdot 40 + 4\cdot 20 + 3\cdot 60 + 8\cdot 20 + 6\cdot 30 + 2\cdot 70 + 0\cdot 20 = 780 \text{ тыс. руб.}$$ ■

3.3. Решение транспортной задачи встроенными средствами MATLAB

Для решения транспортной задачи средствами пакета MATLAB можно использовать функцию **linprog**, поскольку транспортная задача является задачей линейного программирования. Ее отличие от классической задачи ЛП состоит в том, что переменные и коэффициенты целевой функции имеют двойную индексацию. Однако, можно провести переиндексацию переменных и коэффициентов и по определенному закону двумерному массиву поставить в соответствие вектор. Возможная реализация такого подхода представлена в следующем листинге:

transport_problem.m

```
clear
clc
C=[1 2 4 3;
    6 3 8 5;
    4 7 6 2;
    0 0 0 0];                 %матрица стоимости перевозок
a=[60; 80; 100; 20];        %вектор мощностей поставщиков
b=[40; 60; 90; 70];         %вектор потребностей потребителей
k=size(C);
m=k(1);
n=k(2);
for i=1:m
    for j=1:n
        f((i-1)*n+j)=C(i,j);
    end;
end;
Aeq=zeros(m+n, m*n);
for i=1:m
    Aeq(i, (i-1)*n+1:i*n)=1;
end;
for j=1:n
    for i=1:m
        Aeq(m+j, (i-1)*n+j)=1;
    end;
end;
Beq(1:m,1)=a;
Beq(m+1:m+n,1)=b;
A=[]; B=[];
lb=zeros(m*n,1); ub=[];
[x, Y]=linprog(f, A, B, Aeq, Beq, lb, ub);
for i=1:m
    for j=1:n
        X(i,j)=x((i-1)*n+j);
    end;
end;
X
disp('Оптимальный план перевозок')
Xopt=X(1:m-1, :)
disp('Минимальная стоимость перевозок')
Fmin=Y
disp('Проверка минимальной стоимости перевозок')
FF=sum(sum(C.*X))
```

Результат работы будет следующим:

```
Optimal solution found.


X =

    40     0    20     0
     0    60    20     0
     0     0    30    70
     0     0    20     0

Оптимальный план перевозок

Xopt =

    40     0    20     0
     0    60    20     0
     0     0    30    70

Минимальная стоимость перевозок

Fmin =

   780

Проверка минимальной стоимости перевозок

FF =

   780
```

Как видно, результат работы программы такой же, что и при решении задачи аналитически.

Индивидуальные задания для самостоятельной работы

Имеется следующая задача. В пунктах A_i (i = 1, 2, 3) производится однородная продукция в количестве a_i единиц. Себестоимость единицы продукции в *i-м* пункте равна c_i. Готовая продукция поставляется в пункты B_j (j = 1, 2, 3, 4), потребности которых составляют b_j ед. стоимость перевозки единицы продукции из пункта A_i в пункт B_j задана матрицей C_{ij}. Составить план перевозки продукции, при котором минимизируются суммарные затраты по ее изготовлению и доставке потребителям для условия что продукция произведенная в пункте A_i, где себестоимость её производства наименьшая, распределяется полностью

Требуется:

1) написать математическую модель задачи с указанием экономического смысла всех переменных;

2) найти решение задачи:

а) методом потенциалов (начальное решение находить методом наименьшей стоимости);

б) с помощью средств MATLAB;

3) указать;

а) в какие пункты развозится продукция от поставщиков;

б) установить пункты, в которых останется нераспределенная продукция, и указать её объем;

в) суммарные минимальные затраты.

№ варианта	Количество продукции, производимой в пунктах A_i	Себестоимость производства единицы продукции	Потребность продукции в пунктах B_j	Стоимость перевозки единицы продукции из пункта A_i в пункт B_j
1	$a = \begin{pmatrix} 149 \\ 223 \\ 239 \end{pmatrix}$	$c = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$	$b = \begin{pmatrix} 122 \\ 188 \\ 135 \\ 294 \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 7 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 10 \end{pmatrix}$
2	$a = \begin{pmatrix} 152 \\ 201 \\ 358 \end{pmatrix}$	$c = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$	$b = \begin{pmatrix} 211 \\ 200 \\ 144 \\ 279 \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 6 & 7 \\ 6 & 3 & 9 & 6 \\ 10 & 8 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

3	$a=\begin{pmatrix}192\\272\\232\end{pmatrix}$	$c=\begin{pmatrix}3\\5\\4\end{pmatrix}$	$b=\begin{pmatrix}264\\166\\203\\211\end{pmatrix}$	$C=\begin{pmatrix}3&2&4&3\\4&3&2&4\\3&7&6&5\end{pmatrix}$
4	$a=\begin{pmatrix}283\\242\\118\end{pmatrix}$	$c=\begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix}$	$b=\begin{pmatrix}195\\232\\131\\163\end{pmatrix}$	$C=\begin{pmatrix}8&2&7&8\\6&2&7&2\\10&4&4&6\end{pmatrix}$
5	$a=\begin{pmatrix}193\\269\\136\end{pmatrix}$	$c=\begin{pmatrix}3\\5\\2\end{pmatrix}$	$b=\begin{pmatrix}196\\270\\140\\114\end{pmatrix}$	$C=\begin{pmatrix}9&4&4&9\\5&6&3&6\\3&6&7&8\end{pmatrix}$
6	$a=\begin{pmatrix}161\\113\\300\end{pmatrix}$	$c=\begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix}$	$b=\begin{pmatrix}279\\110\\162\\198\end{pmatrix}$	$C=\begin{pmatrix}7&5&4&3\\5&2&7&7\\3&7&4&7\end{pmatrix}$
7	$a=\begin{pmatrix}320\\198\\205\end{pmatrix}$	$c=\begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix}$	$b=\begin{pmatrix}246\\131\\201\\178\end{pmatrix}$	$C=\begin{pmatrix}2&9&2&3\\5&1&2&5\\6&4&3&2\end{pmatrix}$
8	$a=\begin{pmatrix}176\\269\\185\end{pmatrix}$	$c=\begin{pmatrix}2\\2\\5\end{pmatrix}$	$b=\begin{pmatrix}244\\196\\123\\170\end{pmatrix}$	$C=\begin{pmatrix}6&6&4&1\\9&3&6&7\\2&8&9&5\end{pmatrix}$
9	$a=\begin{pmatrix}215\\170\\273\end{pmatrix}$	$c=\begin{pmatrix}4\\3\\4\end{pmatrix}$	$b=\begin{pmatrix}187\\147\\161\\200\end{pmatrix}$	$C=\begin{pmatrix}9&6&4&2\\3&3&5&8\\6&4&2&3\end{pmatrix}$
10	$a=\begin{pmatrix}220\\188\\242\end{pmatrix}$	$c=\begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix}$	$b=\begin{pmatrix}191\\175\\196\\114\end{pmatrix}$	$C=\begin{pmatrix}4&3&1&7\\2&2&6&5\\4&3&5&3\end{pmatrix}$

11	$a=\begin{pmatrix}245\\197\\165\end{pmatrix}$	$c=\begin{pmatrix}7\\9\\8\end{pmatrix}$	$b=\begin{pmatrix}167\\244\\157\\146\end{pmatrix}$	$C=\begin{pmatrix}2&3&4&1\\1&1&3&7\\5&4&1&8\end{pmatrix}$
12	$a=\begin{pmatrix}118\\296\\132\end{pmatrix}$	$c=\begin{pmatrix}5\\6\\3\end{pmatrix}$	$b=\begin{pmatrix}174\\206\\161\\110\end{pmatrix}$	$C=\begin{pmatrix}4&3&6&5\\1&7&3&5\\4&6&8&1\end{pmatrix}$
13	$a=\begin{pmatrix}145\\301\\110\end{pmatrix}$	$c=\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}$	$b=\begin{pmatrix}150\\163\\149\\215\end{pmatrix}$	$C=\begin{pmatrix}6&2&4&7\\3&5&1&2\\6&4&6&3\end{pmatrix}$
14	$a=\begin{pmatrix}234\\176\\142\end{pmatrix}$	$c=\begin{pmatrix}3\\5\\1\end{pmatrix}$	$b=\begin{pmatrix}115\\132\\201\\181\end{pmatrix}$	$C=\begin{pmatrix}3&2&4&9\\3&1&2&1\\5&2&3&2\end{pmatrix}$
15	$a=\begin{pmatrix}209\\163\\215\end{pmatrix}$	$c=\begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix}$	$b=\begin{pmatrix}112\\142\\169\\201\end{pmatrix}$	$C=\begin{pmatrix}3&5&4&2\\1&2&7&3\\6&2&3&1\end{pmatrix}$
16	$a=\begin{pmatrix}204\\146\\187\end{pmatrix}$	$c=\begin{pmatrix}5\\3\\2\end{pmatrix}$	$b=\begin{pmatrix}200\\160\\141\\115\end{pmatrix}$	$C=\begin{pmatrix}2&6&5&1\\6&1&4&6\\2&3&2&3\end{pmatrix}$
17	$a=\begin{pmatrix}216\\156\\202\end{pmatrix}$	$c=\begin{pmatrix}9\\6\\7\end{pmatrix}$	$b=\begin{pmatrix}301\\156\\143\\112\end{pmatrix}$	$C=\begin{pmatrix}2&3&5&4\\3&2&6&2\\1&3&2&7\end{pmatrix}$
18	$a=\begin{pmatrix}303\\123\\141\end{pmatrix}$	$c=\begin{pmatrix}7\\6\\5\end{pmatrix}$	$b=\begin{pmatrix}196\\133\\141\\123\end{pmatrix}$	$C=\begin{pmatrix}1&3&2&4\\3&2&4&2\\3&5&1&6\end{pmatrix}$

19	$a=\begin{pmatrix}156\\302\\144\end{pmatrix}$	$c=\begin{pmatrix}2\\6\\4\end{pmatrix}$	$b=\begin{pmatrix}131\\153\\201\\146\end{pmatrix}$	$C=\begin{pmatrix}6 & 5 & 4 & 1\\1 & 2 & 4 & 3\\5 & 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$
20	$a=\begin{pmatrix}163\\175\\206\end{pmatrix}$	$c=\begin{pmatrix}3\\6\\5\end{pmatrix}$	$b=\begin{pmatrix}126\\115\\169\\158\end{pmatrix}$	$C=\begin{pmatrix}3 & 6 & 2 & 4\\1 & 3 & 5 & 1\\6 & 1 & 2 & 5\end{pmatrix}$

Лабораторная работа № 4

Исследование моделей динамического программирования

4.1. Предмет динамического программирования

Динамическое программирование представляет собой математический аппарат, который подходит к решению некоторого класса задач путем их разложения на части, небольшие и менее сложные задачи. При этом отличительной особенностью является решение задач по этапам, через фиксированные интервалы, промежутки времени, что и определило появление термина «динамическое программирование». Следует заметить, что методы динамического программирования успешно применяются и при решении задач, в которых фактор времени не учитывается. В целом математический аппарат можно представить как пошаговое или поэтапное программирование. Решение задач методами динамического программирования проводится на основе сформулированного Р.Э. Беллманом принципа оптимальности: ***оптимальное поведение обладает тем свойством, что какими бы ни были первоначальное состояние системы и первоначальное решение, последующее решение должно определять оптимальное поведение относительно состояния, полученного в результате первоначального решения.***

4.2. Постановка задачи динамического программирования

Постановку задачи ДП рассмотрим на примере инвестирования, связанного с распределением средств между несколькими предприятиями. В результате управления инвестициями система последовательно переводится из начального состояния S_0 в конечное S_n. Предположим, что управление можно разбить на *n* шагов и решение принимается последовательно на каждом шаге, а управление представляет собой совокупность *n* пошаговых управлений. На каждом шаге необходимо определить два типа переменных – переменную состояния системы S_k и переменную управления x_k. Переменная S_k определяет, в каких состояниях может оказаться система на рассматриваемом *k*-м шаге. В зависимости от состояния S_k на этом шаге можно применить некоторые управления, которые характеризуются переменной x_k, удовлетворяющей определенным ограничениям, и называются допустимыми.

Допустим $\overline{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots, x_n)$ арифметический вектор – управление, переводящий систему из состояния S_0 в состояние S_n, а S_k – промежуточное состояние системы на *k*-м шаге управления. Тогда последовательность состояний системы можно представить в виде графа (рис. 4.1).

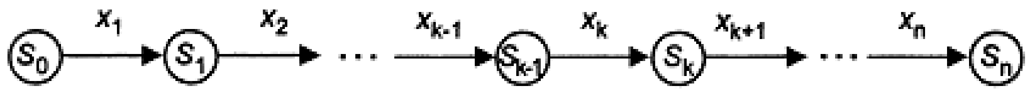


Рисунок 4.1 – Граф состояний системы

Применение управляющего воздействия x_k на каждом шаге переводит систему в новое состояние S_k и приносит некоторый результат $\varphi_k(S_{k-1}, x_k)$. Для каждого возможного состояния на каждом шаге среди всех возможных управлений выбирается оптимальное управление x_k^* – такое, чтобы результат, который достигается за шаги с *k*-го по последний *n*-й, оказался бы оптимальным. Числовая характеристика этого результата называется функцией Беллмана $F_k(S_k)$ и зависит от номера шага *k* и состояния системы S_{k-1}.

Задача динамического программирования формулируется следующим образом: требуется определить такое управление $\overline{X}^*$, переводящее систему изначального состояния S_0 в конечное состояние S_n, при котором целевая функция принимает наибольшее (наименьшее) значение $F\left(S_0, \overline{X}^*\right) \to extr$.

Особенности математической модели динамического программирования заключаются в следующем:

1) задача оптимизации формулируется как конечный многошаговый процесс управления;

2) показатель эффективности или критерий оптимальности операции определяется целевой функцией, которая является аддитивной от каждого шага оптимизации:

$$F\left(\overline{X}\right) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(S_{k-1}, x_k);$$

3) выбор управления x_k на каждом шаге зависит только от состояния системы к этому шагу S_{k-1} и не влияет на предшествующие шаги (нет обратной связи);

4) состояние системы S_k после каждого шага управления зависит только от предшествующего состояния системы S_{k-1} и управляющего воздействия x_k (отсутствие последействия) и может быть записано в виде уравнения состояния системы:

$$S_k = f_k(S_{k-1}, x_k), k = \overline{1, n};$$

5) на каждом шаге управление x_k зависит от конечного числа управляющих переменных, а состояние системы S_k зависит от конечного числа параметров;

6) оптимальное управление представляет собой арифметический вектор $\overline{X}^*$, определяемый последовательностью оптимальных пошаговых управлений $\overline{X}^* = (x_1, x_2, ..., x_k, ..., x_n)$, число которых и определяет количество шагов задачи.

4.3. Принцип оптимальности и математическое описание динамического процесса управления

В основе метода ДП лежит принцип оптимальности, впервые сформулированный в 1953 г. американским математиком Р.Э. Беллманом: *каково бы ни было состояние системы в результате какого-либо числа шагов, на ближайшем шаге нужно выбирать управление так, чтобы оно в совокупности с оптимальным управлением на всех последующих шагах приводило к оптимальному выигрышу на всех оставшихся шагах, включая выигрыш на данном шаге*.

4.4. Оптимальное распределение инвестиций

Требуется распределить имеющиеся *B* единиц средств среди *n* предприятий, доход $g_j(x_i)$ от которых в зависимости от количества вложенных средств x_i определяется матрицей (*m*x*n*), приведенной в табл. 4.1, так, чтобы суммарный доход со всех предприятий был бы максимальным. Состояние системы перед каждым шагом определяется числом еще не вложенных средств.

Таблица 4.1

$x \setminus g_i$	g_1	g_2	$\dots$	g_j	$\dots$	g_n
x_1	$g_1(x_1)$	$g_2(x_1)$	$\dots$	$g_j(x_1)$	$\dots$	$g_n(x_1)$
x_2	$g_1(x_2)$	$g_2(x_2)$	$\dots$	$g_j(x_2)$	$\dots$	$g_n(x_2)$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_i	$g_1(x_i)$	$g_2(x_i)$	$\dots$	$g_j(x_i)$	$\dots$	$g_n(x_i)$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_m	$g_1(x_m)$	$g_2(x_m)$	$\dots$	$g_j(x_m)$	$\dots$	$g_n(x_m)$

Запишем математическую модель задачи.

Определить $\overline{X}^* = \left(x_1^*, x_2^*, ..., x_i^*, ..., x_n^*\right)$, удовлетворяющий условиям

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = B, \qquad (4.1)$$
$$x_i \geq 0,\ i = \overline{1, n},$$

и обеспечивающий максимум целевой функции

$$F(\overline{X})=\sum_{i=1}^{n} g_i(x_i) \to \max . \quad (4.2)$$

Теперь необходимо записать рекуррентное соотношение связи между шагами управления $F_k(x)$ и $F_{k+1}(x)$. Очевидно, эта задача может быть решена простым перебором всех возможных вариантов распределения B единиц средств по n предприятиям, на пример на сетевой модели. Однако ее можно решить более эффективным методом, который заключается в замене сложной многовариантной задачи многократным решением простых задач с малым количеством исследуемых вариантов.

С этой целью разобьем процесс оптимизации на n шагов и будем на каждом k-м шаге оптимизировать инвестирование не всех предприятий, а только предприятий с k-го по n-е. При этом естественно считать, что в остальные предприятия (с первого по (k-1)-е) тоже вкладываются средства, и поэтому на инвестирование предприятий с k-го по n-е остаются не все средства, а некоторая меньшая сумма $c_k \le B$. Эта величина и будет являться переменной состояния системы. Переменной управления на k-м шаге назовем величину x_k средств, вкладываемых в k-е предприятие. В качестве функции Беллмана $F_k(c_k)$ на k-м шаге можно выбрать максимально возможный доход, который можно получить с предприятий с k-го по n-е при условии, что на их инвестирование осталось c_k средств. Очевидно, что при вложении в k-е предприятие x_k средств будет получена прибыль $g_k(x_k)$, а система к (k+1)-му шагу перейдет в состояние S_{k+1} и, следовательно, на инвестирование предприятий с (k+1)-го до n-го останется средств $c_{k+1}=c_k-x_k$.

Таким образом, на **первом шаге условной оптимизации** при k=n функция Беллмана представляет собой прибыль только с n-го предприятия. При этом на его инвестирование может остаться количество средств $c_n, 0 \le c_n \le B$. Чтобы получить максимум прибыли с этого предприятия, можно, например, вложить в него все эти средства, т.е. $F_n(c_n)=g_n(c_n)$ и $x_n=c_n$.

На каждом последующем шаге для вычисления функции Беллмана необходимо использовать результаты предыдущего шага. Пусть на k-м шаге для инвестирования предприятий с k-го по n-е осталось c_k средств ($0 \le c_k \le B$). Тогда от вложения в k-е предприятие x_k средств будет получена прибыль $g_k(x_k)$, а на инвестирование остальных предприятий (с k-го по n-е) останется $c_{k+1}=c_k-x_k$ средств. Максимально возможный доход, который может быть получен с предприятий (с k-го по n-е), будет равен:

$$F_k(c_k)=\max_{x_k \le c_k}\{g_k(x_k)+F_{k+1}(c_k-x_k)\}, \; k=\overline{1,n}. \quad (4.3)$$

Максимум выражения (5) достигается на некотором значении x_k^*, которое является оптимальным управлением на k-м шаге для состояния системы S_k. Действуя таким образом, можно определить функцию Беллмана и оптимальные управления последовательно вплоть до шага k=1.

Значение функции Беллмана $F_1(c_1)$ представляет собой максимально возможный доход со всех предприятий, а значение x_1^*, на котором достигается максимум дохода, является оптимальным количеством средств, вложенных в первое предприятие. Затем на этапе безусловной оптимизации для всех последующих шагов вычисляется величина $c_k = c_{k-1} - x_{k-1}$ и оптимальным управлением на k-м шаге является то значение x_k, которое обеспечивает максимум дохода при соответствующем состоянии системы S_k.

Пример 4.1. На развитие трех предприятий выделено 5 млн. руб. Известна эффективность капитальных вложений в каждое предприятие, заданная значением нелинейной функции $g_j(x_i)$, представленной в табл. 4.2. Необходимо распределить выделенные средства между предприятиями таким образом, чтобы получить максимальный суммарный доход.

Для упрощения расчетов предполагаем, что распределение средств осуществляется в целых числах $x_i = \{0,1,2,3,4,5\}$ млн. руб.

Таблица 4.2

x_i	g_1	g_2	g_3
0	0	0	0
1	2,2	2	2,8
2	3	3,2	5,4
3	4,1	4,8	6,4
4	5,2	6,2	6,6
5	5,9	6,4	6,9

Решение. Условная оптимизация (*k* = 3, 2, 1)

Шаг 1. k = 3. Предположим, что все средства в количестве x_3 = 5 млн руб. отданы третьему предприятию. В этом случае максимальный доход, как это видно из табл. 4.3, составит $g_3(x_3) = 6{,}9$ тыс. руб., следовательно:

$F_3(c_3) = g_3(x_3)$.

Таблица 4.3

$c_3 \setminus x_3$	0	1	2	3	4	5	$F_3(c_3)$	x_3^*
0	0	-	-	-	-	-	0	0
1	-	2,8	-	-	-	-	2,8	1
2	-	-	5,4	-	-	-	**5,4**	2
3	-	-	-	6,4	-	-	6,4	3
4	-	-	-	-	6,6	-	6,6	4
5	-	-	-	-	-	6,9	6,9	5

Шаг 2. $k = 2$. Определяем оптимальную стратегию при распределении денежных средств между вторым и третьим предприятиями. При этом рекуррентное соотношение Беллмана имеет вид

$$F_2(c_2) = \max_{x_2 \le c_2} \{g_2(x_2) + F_3(c_2 - x_2)\},$$

на основе которого составлена табл. 4.4 по данным табл. 4.2 и 4.3.

Таблица 4.4

$c_2 \setminus x_2$	0	1	2	3	4	5	$F_2(c_2)$	x_2^*
0	0+0	-	-	-	-	-	0	0
1	0+2,8	2+0	-	-	-	-	2,8	0
2	0+5,4	2+2,8	3,2+0	-	-	-	5,4	0
3	0+6,4	2+5,4	3,2+2,8	4,8+0	-	-	7,4	1
4	0+6,6	2+6,4	**3,2+5,4**	4,8+2,8	6,2+0	-	**8,6**	2
5	0+6,9	2+6,6	3,2+6,4	4,8+5,4	6,2+2,8	6,4+0	10,2	3

Шаг 3. $k = 1$. Определяем оптимальную стратегию при распределении денежных средств между первым и двумя другими предприятиями, используя следующую формулу для расчета суммарного дохода:

$$F_1(c_1) = \max_{x_1 \le c_1} \{g_1(x_1) + F_2(c_1 - x_1)\},$$

на основе которого составлена табл. 4.5.

Таблица 4.5

$c_1 \setminus x_1$	0	1	2	3	4	5	$F_1(c_1)$	x_1^*
0	0+0	-	-	-	-	-	0	0
1	0+2,8	2,2+0	-	-	-	-	2,8	0
2	0+5,4	2,2+2,8	3+0	-	-	-	5,4	0
3	0+7,4	2,2+5,4	3+2,8	4,1+0	-	-	7,6	1
4	0+8,6	2,2+7,4	3+5,4	4,1+2,8	5,2+0	-	9,6	1
5	0+10,2	**2,2+8,6**	3+7,4	4,1+5,4	5,2+2,8	5,9+0	**10,8**	1

Безусловная оптимизация (*k* = 1, 2, 3)

Определяем компоненты оптимальной стратегии.

Шаг 1: k = 1. По данным из табл. 4.5 максимальный доход при распределении 5 млн. руб. между тремя предприятиями составляет: $c_1 = 5,\ F_1(c_1) = 10{,}8$. При этом первому предприятию нужно выделить $x_1^* = 1$ млн. руб.

Шаг 2: k = 2. Определяем величину оставшихся денежных средств, приходящуюся на долю второго и третьего предприятий: $c_2 = c_1 - x_1^* = 4$ млн. руб. По данным табл. 4.4 находим, что оптимальный вариант распределения денежных средств размером 4 млн. руб. между вторым и третьим предприятиями составляет: $F_2(4) = 8{,}6$ при выделении второму предприятию $x_2^* = 2$ млн. руб.

Шаг 3: k = 3. Определяем величину оставшихся денежных средств, приходящуюся на долю третьего предприятия: $c_3 = c_2 - x_2^* = 2$ млн. руб. По данным табл. 4.3 находим: $F_3(2) = 5{,}4$ и $x_3^* = 2$ млн. руб.

Таким образом, оптимальный план инвестирования предприятий:

$x_1^* = 1$ млн. руб., $x_2^* = 2$ млн. руб., $x_3^* = 2$ млн. руб.

Данный план обеспечит максимальный доход, равный

$F(5) = g_1(1) + g_2(2) + g_3(2) = 2{,}2 + 3{,}2 + 5{,}4 = 10{,}8$ млн. руб. ■

4.5. Выбор оптимального маршрута перевозки грузов

Математический аппарат ДП, основанный на методологии пошаговой оптимизации, может быть использован при нахождении кратчайших расстояний, например, на географической карте, представленной в виде сети. Решение задачи по определению кратчайших расстояний между пунктами отправления и пунктами получения продукции по существующей транспортной сети является исходным этапом при решении таких экономических задач, как оптимальное прикрепление потребителей к поставщикам, повышение производительности транспорта за счет сокращения непроизводительного пробега и др.

Пусть транспортная сеть состоит из 10 узлов. На рис. 4.2 показаны сеть дорог и стоимость перевозки единицы груза между пунктами сети. Ребра являются вариантами выбора решения. Необходимо определить маршрут доставки груза из пункта 1 в пункт 10, обеспечивающий наименьшие транспортные расходы.

В задаче имеется ограничение – двигаться по изображенным на схеме маршрутам можно только слева направо, т.е. попав, например, в пункт 7, мы имеем право переместиться только в пункт 10 и не можем возвратиться обратно в 5-й или 6-й. Эта особенность транспортной сети дает право отнести каждый из десяти пунктов к одному из поясов. Будем считать, что пункт принадлежит k-му поясу, если из него попасть в конечный пункт ровно за k шагов, т.е. с заездом ровно в $(k-1)$-й промежуточный пункт. Таким образом, пункты 7, 8 и 9 принадлежат к первому поясу, 5 и 6 – ко второму, 2, 3 и 4 – к третьему и 1 – к четвертому. Тогда на k-м шаге будем находить оптимальные маршруты перевозки груза из пунктов k-го пояса до конечного пункта. Оптимизацию будем производить с конца процесса, и потому, дойдя до k-то шага, неизвестно, в каком из пунктов k-го пояса окажется груз, перевозимый из первого пункта.

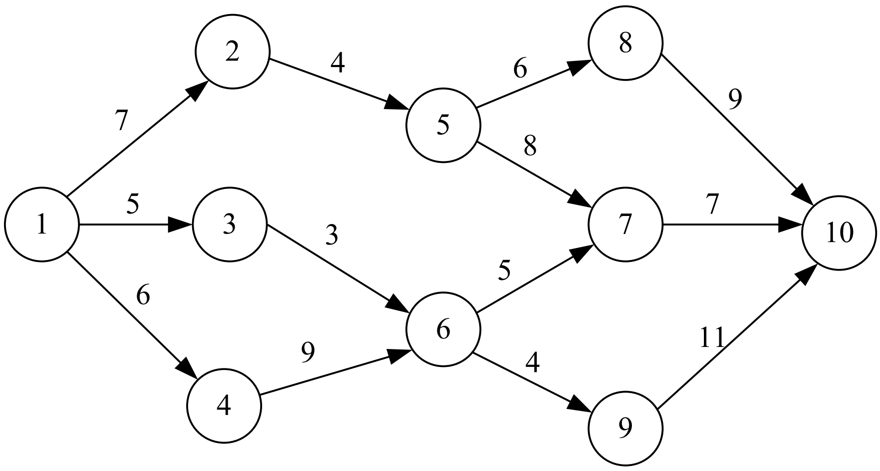


Рисунок 4.2 – Модель транспортной сети

Введем обозначения:

k – номер шага ($k = 1, 2, 3, 4$);

i – пункт, из которого осуществляются перевозки ($i = 1,2, ..., 9$);

j – пункт, в который доставляется груз ($j = 2, 3, ..., 10$);

c_{ij} – стоимость перевозки груза из пункта i в пункт j.

$F_k(i)$ – минимальные затраты на перевозку груза на k-м шаге решения задачи из пункта i до конечного пункта.

Очевидно, что минимум затрат на перевозку груза из пунктов k-то пояса до пункта 10 будет зависеть от того, в каком пункте этого пояса мы оказались.

Номер i пункта, узел, принадлежащий k-му поясу, будет являться переменной состояния системы на k-м шаге. Поскольку оптимизация осуществляется с конца процесса, то, находясь в некотором пункте i k-то пояса, принимается решение о перемещении груза в один из пунктов (k-1)-го пояса, а направление дальнейшего движения известно из предыдущих шагов. Номер j пункта (k – 1)-го пояса будет переменной управления на k-м шаге.

Для первого шага управления (k = 1) функция Беллмана представляет собой минимальные затраты на перевозку груза из пунктов 1-го пояса в конечный пункт, т.е. $F_1(i) = C_{i10}$. Для последующих шагов затраты складываются из двух слагаемых – стоимости перевозки груза C_{ij} из пункта k-го пояса в пункт (k – 1)-го пояса и минимально возможных затрат на перевозку из пункта j до конечного пункта, т.е. $F_{k-1}(j)$, Таким образом, функциональное уравнение Беллмана будет иметь вид

$$F_k(i) = \min_j \{C_{ij} + F_{k-1}(j)\}. \tag{4.8}$$

Минимум затрат достигается на некотором значении j^*, которое является оптимальным направлением движения из пункта i в конечный пункт.

На четвертом шаге попадаем на 4-й пояс; состояние системы становится определенным i = 1. Функция $F_4(1)$ представляет собой минимально возможные затраты по перемещению груза из 1-го пункта в 10-й. Оптимальный маршрут определяется в результате анализа всех шагов в обратном порядке, а выбор некоторого управления j на k-м шаге приводит к тому, что состояние системы на (k – 1)-м шаге становится определенным.

Пример 4.3. Решим сформулированную выше задачу, исходные данные которой приведены на рис. 4.2.

Условная оптимизация

1-й шаг: k = 1.

На первом шаге в пункт 10 груз может быть доставлен из пунктов 7, 8 или 9 (табл. 4.9).

Таблица 4.9

$i \backslash j$	10	$F_1(i)$	j^*
7	7	7	10
8	9	9	10
9	11	11	10

2-й шаг: k = 2.

Функциональное уравнение на втором шаге принимает вид

$$F_2(i) = \min_j \{C_{ij} + F_1(j)\}.$$

Все возможные перемещения груза на втором шаге и результаты расчета приведены в табл. 4.10.

Таблица 4.10

$i \setminus j$	7	8	9	$F_2(i)$	j^*
5	8+7	6+9	–	15	7, 8
6	5+7	–	4+11	12	7

3-й шаг: $k = 3$.

Функциональное уравнение на втором шаге принимает вид

$$F_3(i) = \min_j \{C_{ij} + F_2(j)\}.$$

Все возможные перемещения груза на втором шаге и результаты расчета приведены в табл. 4.11.

Таблица 4.11

$i \setminus j$	5	6	$F_3(i)$	j^*
2	4+15	–	19	5
3	–	3+12	15	6
4	–	9+12	21	6

4-й шаг: $k = 4$.

Функциональное уравнение на втором шаге принимает вид

$$F_4(i) = \min_j \{C_{ij} + F_3(j)\}.$$

Все возможные перемещения груза на втором шаге и результаты расчета приведены в табл. 4.12.

Таблица 4.12

$i \setminus j$	2	3	4	$F_3(i)$	j^*
1	7+19	5+15	6+21	20	3

Безусловная оптимизация

На этапе условной оптимизации получено, что минимальные затраты на перевозку груза из пункта 1 в пункт 10 составляют $F_4(1) = 20$. Данный результат достигается при движении груза из 1-го пункта в 3-й. По данным табл. 4.11, из пункта 3 необходимо двигаться в пункт 6, затем – в пункт 7 (см. табл. 4.10) и из него – в конечный пункт (см. табл. 4.9).

Таким образом, оптимальный маршрут доставки груза: $1 \to 3 \to 6 \to 7 \to 10$. На рис. 4.3 он показан жирными стрелками. ■

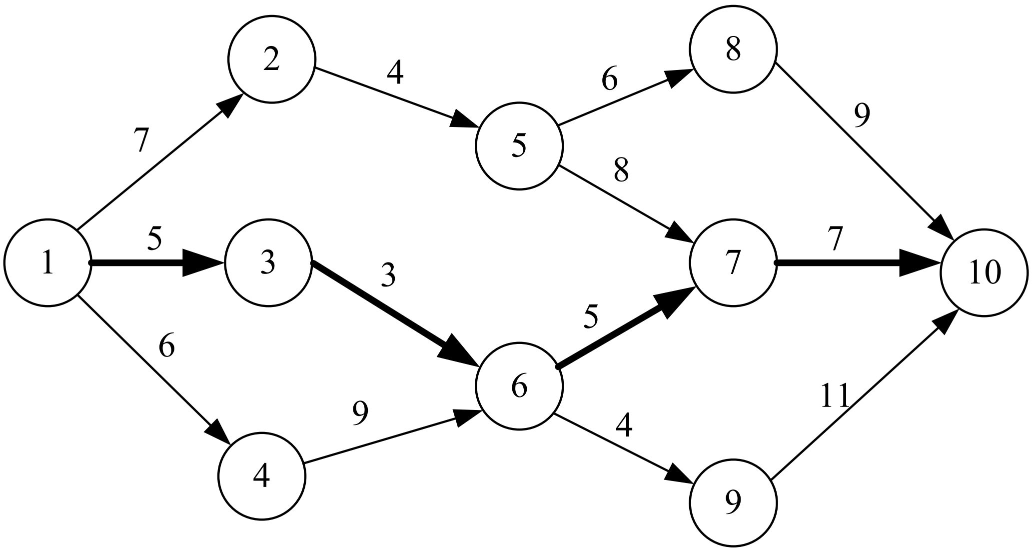


Рисунок 4.3 – Транспортная сеть с оптимальным маршрутом

Индивидуальные задания для самостоятельной работы

Задание 1. Выделены денежные средства S_0=100 д.ед. для вложения в инвестиционные проекты для реконструкции и модернизации производства на четырех предприятиях.

По каждому предприятию известен возможный прирост $f_i(x)$ (i=1, 2, 3, 4) выпуска продукции в зависимости от выделенной суммы.

Требуется:

1) распределить средства S_0 между предприятиями так, чтобы суммарный прирост продукции на всех четырех предприятиях достиг максимальной величины;

2) используя решение основной задачи, найти оптимальное распределение между тремя предприятиями.

Параметр	**Номер варианта**									
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
f_1 (20)	4	2	4	2	2	2	2	2	4	4
f_2 (20)	2	3	4	4	2	4	2	2	5	2
f_3 (20)	4	4	4	5	2	3	4	1	4	2
f_4 (20)	1	2	2	2	3	2	4	2	2	3
f_1 (40)	4	4	6	6	7	6	3	4	3	6
f_2 (40)	4	4	4	6	5	5	6	6	6	7
f_3 (40)	6	3	3	4	6	3	4	4	3	4
f_4 (40)	4	4	5	5	5	5	6	4	4	4
f_1 (60)	9	7	9	8	7	9	5	6	4	8
f_2 (60)	6	4	6	5	8	10	8	9	7	8
f_3 (60)	10	8	5	6	5	10	5	4	9	9
f_4 (60)	9	5	7	9	8	5	5	6	9	4
f_1 (80)	12	11	7	11	12	7	11	7	7	7
f_2 (80)	11	11	9	5	13	8	11	8	10	8
f_3 (80)	5	8	8	12	7	7	12	7	6	10
f_4 (80)	6	5	13	7	9	11	9	8	12	12
f_1 (100)	15	14	14	14	14	15	11	15	14	11
f_2 (100)	12	11	10	10	12	12	15	15	10	14
f_3 (100)	12	13	13	10	10	12	11	10	12	15
f_4 (100)	13	14	12	13	14	14	13	12	14	12

Параметр	Номер варианта									
	11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
f_1 (20)	5	4	6	4	5	4	4	5	5	5
f_2 (20)	3	5	6	6	5	6	4	5	6	3
f_3 (20)	5	6	6	7	5	5	6	4	5	3
f_4 (20)	2	4	4	4	6	4	6	5	3	4
f_1 (40)	5	6	8	8	10	8	5	7	4	7
f_2 (40)	5	6	6	8	8	7	8	9	7	8
f_3 (40)	7	5	5	6	9	5	6	7	4	5
f_4 (40)	5	6	7	7	8	7	8	7	5	5
f_1 (60)	10	9	11	10	10	11	7	9	5	9
f_2 (60)	7	6	8	7	11	12	10	12	8	9
f_3 (60)	11	10	7	8	8	12	7	7	10	10
f_4 (60)	10	7	9	11	11	7	7	9	10	5
f_1 (80)	13	13	9	13	15	9	13	10	8	8
f_2 (80)	12	13	11	7	16	10	13	11	11	9
f_3 (80)	6	10	10	14	10	9	14	10	7	11
f_4 (80)	7	7	15	9	12	13	11	11	13	13
f_1 (100)	16	16	16	16	17	17	13	18	15	12
f_2 (100)	13	13	12	12	15	14	17	18	11	15
f_3 (100)	13	15	15	12	13	14	13	13	13	16
f_4 (100)	14	16	14	15	17	16	15	15	15	13

Задание 2. На заданной сети дорог имеется несколько маршрутов по доставке груза из пункта 1 в пункт 11 (рис. 4.4). Стоимость перевозки единицы груза между отдельными пунктами сети проставлена у ребер. Необходимо определить оптимальный маршрут доставки груза из пункта 1 в пункт 11, который обеспечил бы минимальные транспортные расходы.

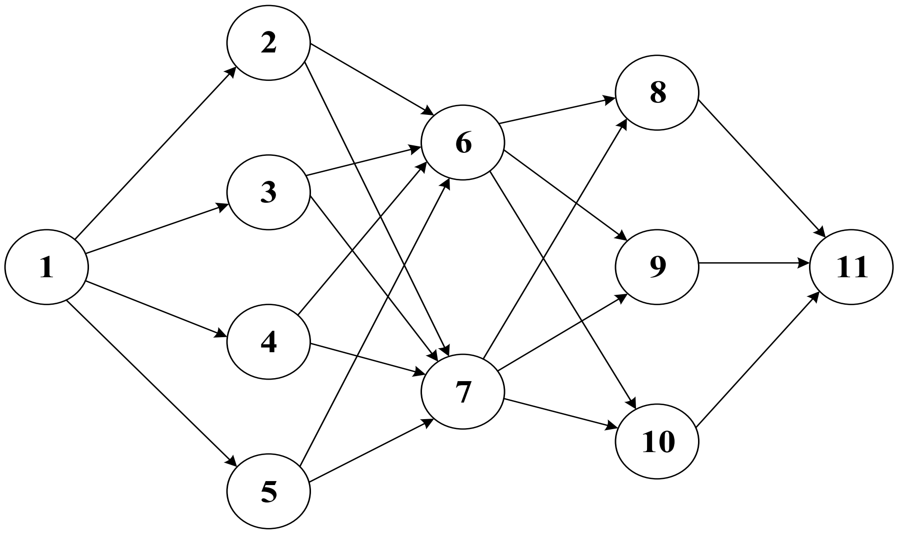


Рисунок 4.4 – Сеть дорог к заданию 2

Параметр	Номер варианта									
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
$c_{1,2}$	10	7	3	5	17	6	13	13	11	9
$c_{1,3}$	2	19	17	17	5	19	11	6	10	2
$c_{1,4}$	4	18	6	8	15	15	15	10	12	2
$c_{1,5}$	18	20	11	1	19	10	13	9	16	12
$c_{2,6}$	20	11	17	14	9	9	19	6	19	14
$c_{2,7}$	13	11	14	7	6	19	18	20	4	12
$c_{3,6}$	1	5	6	19	17	14	20	14	17	9
$c_{3,7}$	16	18	10	13	13	3	15	2	16	13
$c_{4,6}$	10	10	3	9	11	13	8	20	5	7
$c_{4,7}$	1	2	15	15	15	4	19	9	9	12
$c_{5,6}$	7	5	3	3	17	10	20	12	11	3
$c_{5,7}$	9	18	3	17	2	3	13	16	17	16
$c_{6,8}$	3	7	14	7	5	13	14	19	11	3
$c_{6,9}$	20	2	5	3	10	18	20	6	5	11
$c_{6,10}$	10	16	3	1	8	3	18	11	14	5
$c_{7,8}$	8	4	3	1	1	10	11	7	19	11
$c_{7,9}$	11	11	11	4	8	17	20	4	11	1
$c_{7,10}$	17	15	13	3	14	17	17	3	14	20
$c_{8,11}$	3	14	11	15	1	6	2	19	7	9
$c_{9,11}$	11	10	16	6	10	10	20	1	9	1
$c_{10,11}$	4	16	12	8	7	14	11	4	19	2

Параметр	Номер варианта									
	11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
$c_{1,2}$	11	9	4	7	18	8	14	15	12	11
$c_{1,3}$	3	21	18	19	6	21	12	8	11	4
$c_{1,4}$	5	20	7	10	16	17	16	12	13	4
$c_{1,5}$	19	22	12	3	20	12	14	11	17	14
$c_{2,6}$	21	13	18	16	10	11	20	8	20	16
$c_{2,7}$	14	13	15	9	7	21	19	22	5	14
$c_{3,6}$	2	7	7	21	18	16	21	16	18	11
$c_{3,7}$	17	20	11	15	14	5	16	4	17	15
$c_{4,6}$	11	12	4	11	12	15	9	22	6	9
$c_{4,7}$	2	4	16	17	16	6	20	11	10	14
$c_{5,6}$	8	7	4	5	18	12	21	14	12	5
$c_{5,7}$	10	20	4	19	3	5	14	18	18	18
$c_{6,8}$	4	9	15	9	6	15	15	21	12	5
$c_{6,9}$	21	4	6	5	11	20	21	8	6	13
$c_{6,10}$	11	18	4	3	9	5	19	13	15	7
$c_{7,8}$	9	6	4	3	2	12	12	9	20	13
$c_{7,9}$	12	13	12	6	9	19	21	6	12	3
$c_{7,10}$	18	17	14	5	15	19	18	5	15	22
$c_{8,11}$	4	16	12	17	2	8	3	21	8	11
$c_{9,11}$	12	12	17	8	11	12	21	3	10	3
$c_{10,11}$	5	18	13	10	8	16	12	6	20	4

Лабораторная работа № 5

Моделирование систем массового обслуживания

Системы массового обслуживания (СМО) – это такие системы, в которые в случайные моменты времени поступают заявки на обслуживание, при этом поступившие заявки обслуживаются с помощью имеющихся в распоряжении системы каналов обслуживания.

Примерами систем массового обслуживания могут служить: магазины, банки, ремонтные мастерские, почтовые отделения, посты технического обслуживания автомобилей, посты ремонта автомобилей, персональные компьютеры, обслуживающие поступающие заявки или требования на решение тех или иных задач, аудиторские фирмы, отделы налоговых инспекций, занимающиеся приемкой и проверкой текущей отчетности предприятий, телефонные станции и т. д.

Основными компонентами системы массового обслуживания любого вида являются:

– входной поток поступающих требований или заявок на обслуживание;

– дисциплина очереди;

– механизм обслуживания.

В качестве основных критериев эффективности функционирования систем массового обслуживания, в зависимости от характера решаемой задачи, могут выступать:

– вероятность немедленного обслуживания поступившей заявки;

– вероятность отказа в обслуживании поступившей заявки;

– относительная и абсолютная пропускная способность системы;

– средний процент заявок, получивших отказ в обслуживании;

– среднее время ожидания в очереди;

– средняя длина очереди;

– средний доход от функционирования системы в единицу времени и т.п.

Независимо от характера процесса, протекающего в системе массового обслуживания, различают **два основных вида СМО:** системы с отказами и системы с ожиданием (очередью).

Системы массового обслуживания с ожиданием делятся на системы с ограниченным ожиданием и системы с неограниченным ожиданием.

Все системы массового обслуживания различают **по числу каналов обслуживания** одноканальные системы и многоканальные системы.

5.1. Одноканальная СМО с отказами

Рассмотрим следующую задачу. Имеется один канал, на который поступает поток заявок с интенсивностью λ. Поток обслуживаний имеет интенсивность μ. Найти предельные вероятности состояний системы и показатели ее эффективности.

Среднее время обслуживания $\overline{T}_{об} = 1/\mu$.

Среднее время простоя канала $\overline{T}_{пр} = 1/\lambda$.

Система S (СМО) имеет два состояния: S_0 – канал свободен, S_1 – канал занят. Тогда ***предельные вероятности состояний*** равны $p_0 = \dfrac{\mu}{\lambda+\mu}$, $p_1 = \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}$.

Предельные вероятности состояний можно выразить через средние времена простоя канала и обслуживания одной заявки: $p_0 = \dfrac{\overline{T}_{пр}}{\overline{T}_{об}+\overline{T}_{пр}}$, $p_1 = \dfrac{\overline{T}_{об}}{\overline{T}_{об}+\overline{T}_{пр}}$.

Относительная пропускная способность Q системы и ***вероятность отказа*** $P_{отк}$ равны

$Q = p_0$, $P_{отк} = p_1$.

Абсолютная пропускная способность равна $A = \lambda Q = \dfrac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}$.

Пример 5.1. В фирму поступает простейший поток заявок на телефонные переговоры с интенсивностью λ=90 вызовов в час, а средняя продолжительность разговора по телефону $\overline{T}_{об} = 2$ мин. Определить показатели эффективности работы СМО (телефонной связи) при наличии одного телефонного номера.

Интенсивность потока обслуживаний

$\mu = 1/\overline{T}_{об} = 0{,}5\,(1/мин.) = 30\,(1/ч.)$.

Относительная пропускная способность СМО $Q = \dfrac{30}{90+90} = 0{,}25$, т.е. в среднем только 25% поступающих заявок осуществят переговоры по телефону. Соответственно вероятность отказа составит $P_{отк} = 1 - Q = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$. Абсолютная пропускная способность СМО $A = \lambda Q = 90 \cdot 0{,}25 = 22{,}5$, т.е. в среднем в час будут обслужены 22,5 заявки на переговоры. Очевидно, что при наличии только одного телефонного номера СМО будет плохо справляться с потоком заявок.

Листинг соответствующей программы представлен ниже:

```
function odnok_syst_s_otcaz
clc
% задание параметров системы
lambda=90;
T_ob=2/60;
mu=1/T_ob;
% рассчет параметров системы
disp('Предельные вероятности состояний')
P0=mu/(lambda+mu)
P1=lambda/(lambda+mu)
disp('Относительная пропускная способность')
Q=P0
disp('Вероятность отказа')
P_otk=P1
disp('Абсолютная пропускная способность')
A=lambda*Q
```

5.2. Многоканальная система с отказами (задача Эрланга)

Здесь мы рассмотрим одну из первых по времени, «классических» задач теории массового обслуживания; эта задача возникла из практических нужд телефонии и была решена в 1909 г. датским инженером-математиком А.К. Эрлангом. Задача ставится так: имеется n каналов (линий связи), на которые поступает поток заявок с интенсивностью λ. Поток обслуживаний каждого канала имеет интенсивность μ. Найти предельные вероятности состояний системы и показатели ее эффективности.

Система S (СМО) имеет следующие состояния (нумеруем их по числу заявок, находящихся в системе): $S_0, S_1, S_2, \ldots, S_n$, где S_k – состояние системы, когда в ней находится k заявок, т.е. занято k каналов.

Предельная вероятность состояния равна

$$p_0 = \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{2!\,\mu^2} + \ldots + \frac{\lambda^k}{k!\,\mu^k} + \ldots + \frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n}\right)^{-1},$$

где члены разложения $\frac{\lambda}{\mu}, \frac{\lambda^2}{2!\,\mu^2}, \ldots, \frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n}$ – коэффициенты при p_0 в выражениях для предельных вероятностей $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Заметим, что в формулу для p_0 интенсивности λ и μ входят не по отдельности, а только в виде отношения λ/μ. Обозначим $\frac{\lambda}{\mu} = \rho$ и будем называть величину ρ ***приведенной интенсивностью потока заявок*** или ***интенсивностью нагрузки канала***. Она выражает среднее число заявок, приходящих за среднее время обслуживания одной заявки. Пользуясь этим обозначением, перепишем формулу для p_0 в виде: $p_0 = \left(1+\rho+\frac{\rho^2}{2!}+\ldots+\frac{\rho^k}{k!}+\ldots+\frac{\rho^n}{n!}\right)^{-1}$.

При этом $p_1 = \rho\, p_0$, $p_2 = \frac{\rho^2}{2!} p_0$, $p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0$.

Вероятность отказа СМО есть предельная вероятность того, что все n каналов системы будут заняты, т.е. $P_{отк} = p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0$.

Отсюда находим ***относительную пропускную способность*** – вероятность того, что заявка будет обслужена: $Q = 1 - P_{отк} = 1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0$.

Абсолютную пропускную способность получим, умножая интенсивность потока заявок λ на Q: $A = \lambda Q = \lambda\left(1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0\right)$.

Осталось только найти ***среднее число занятых каналов*** $\bar{k}$. Эту величину можно было бы найти «впрямую», как математическое ожидание дискретной случайной величины с возможными значениями 0,1,..., n и вероятностями этих значений $p_0, p_1, \ldots, p_n$:

$$\bar{k} = 0\cdot p_0 + 1\cdot p_1 + 2\cdot p_2 + \ldots + n\cdot p_n = \sum_{k=0}^{n} k p_k .$$

Однако среднее число занятых каналов можно найти проще, если учесть, что абсолютная пропускная способность A системы есть не что иное, как интенсивность потока обслуженных системой заявок (в единицу времени). Так как каждый занятый канал обслуживает в среднем μ заявок (в единицу времени), то среднее число занятых каналов

$$\bar{k} = \frac{A}{\mu} = \rho\left(1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0\right).$$

Пример 5.2. В условиях предыдущего примера 5.5 определить оптимальное число телефонных номеров в фирме, если условием оптимальности считать удовлетворение из каждых 100 заявок на переговоры в среднем не менее 90 заявок.

Решение. Интенсивность нагрузки канала ρ=90/30=3, т.е. за время среднего (по продолжительности) телефонного разговора $\bar{T}_{об} = 2$ мин. поступает в среднем 3 заявки на переговоры.

Листинг соответствующей программы представлен ниже:

```
function mnogok_syst_s_otcaz
clc
% задание параметров системы
lambda=90;
T_ob=2/60;
mu=1/T_ob;
n=6;
% расчет параметров системы
disp('Интенсивность загрузки канала')
ro=lambda/mu
z=1;
x=1;
for i=1:n
   x=x*ro/i;
   z=z+x;
end;
P(1)=1/z;
for i=2:(n+1)
   P(i)=ro/(i-1)*P(i-1);
end;
disp('Вектор предельных вероятностей состояний')
P=P
disp('Вероятность отказа')
P_otk=P(n+1)
disp('Относительная пропускная способность')
Q=1-P_otk
disp('Абсолютная пропускная способность')
A=lambda*Q
disp('Среднее число занятых каналов')
K=A/mu
```

Будем постепенно увеличивать число каналов (телефонных номеров) $n = 2, 3, 4,...$ и определим для получаемой n-канальной СМО характеристики обслуживания. Значения характеристик СМО сведем в таблицу:

n	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	$P_{отк}$	Q	A	$\bar{k}$
1	0,25	0,75						0,75	0,25	22,5	
2	0,118	0,353	0,529					0,529	0,471	42,353	1,412
3	0,077	0,231	0,346	0,346				0,346	0,654	58,846	1,962
4	0,061	0,183	0,275	0,275	0,206			0,206	0,794	71,45	2,382
5	0,054	0,163	0,245	0,245	0,183	0,11		0,11	0,89	80,095	2,67
6	0,052	0,155	0,232	0,232	0,174	0,104	0,052	0,052	0,948	85,306	2,844

По условию оптимальности $Q \geq 0{,}9$, следовательно, в фирме необходимо установить 6 телефонных номеров (в этом случае $Q = 0{,}948$). При этом в час будут обслуживаться в среднем 85 заявок ($A = 85{,}306$), а среднее число занятых телефонных номеров (каналов) $\bar{k} = 2{,}844$.

Тут уже проглядывает некоторый намек на *оптимизацию*. В самом деле, содержание каждого канала в единицу времени обходится в какую-то сумму. Вместе с тем, каждая обслуженная заявка приносит какой-то доход (если речь идет о СМО, для которых этот доход можно оценить). Умножая этот доход на среднее число заявок A, обслуживаемых в единицу времени, мы получим средний доход от СМО в единицу времени. Естественно, при увеличении числа каналов этот доход растет, но растут и расходы, связанные с содержанием каналов. Что перевесит – увеличение доходов или расходов? Это зависит от условий операции, т.е. от «платы за обслуживание заявки» и от стоимости содержания канала. Зная эти величины, можно найти оптимальное число каналов, наиболее экономически эффективное.

5.3. Одноканальная СМО с ожиданием и ограничением на длину очереди

На практике довольно часто встречаются одноканальные СМО с очередью (врач, обслуживающий пациентов; кассир, выдающий зарплату; телефон-автомат на улице и т.д.). В теории массового обслуживания одноканальные СМО с очередью также занимают особое место: именно к таким СМО относится большинство полученных до сих пор аналитических формул для немарковских систем.

Рассмотрим одноканальную СМО, на вход которой поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ. Предположим, что поток обслуживаний также простейший с интенсивностью μ. Это означает, что непрерывно занятый канал обслуживает в среднем μ заявок в единицу времени. Заявка, поступившая в СМО в момент, когда канал занят, в отличие от СМО с отказами, не покидает систему, а становится в очередь и ожидает обслуживания.

Далее предполагаем, что в данной системе имеется ограничение на длину очереди, под которой понимается максимальное число мест в очереди, а именно, предполагаем, что в очереди могут находиться максимум $m \geq 1$ заявок. Поэтому заявка, пришедшая на вход СМО, в момент, когда в очереди уже стоят m заявок, получает отказ и покидает систему необслуженной.

Таким образом, рассматриваемая СМО относится к системам *смешанного типа с ограничением на длину очереди*.

Пронумеруем состояния СМО по числу заявок, находящихся в системе, т.е. под обслуживанием и в очереди:

S_0 – канал свободен (следовательно, очереди нет);

S_1 – канал занят и очереди нет, т.е. в СМО находится (под обслуживанием) одна заявка;

S_2 – канал занят и в очереди стоит одна заявка;

…

S_{m+1} – канал занят и в очереди m заявок.

При наличии только одного канала обслуживания все интенсивности потоков обслуживания равны μ.

Для описания предельного режима работы СМО можно воспользоваться изложенными ранее правилами и формулами. Запишем сразу выражения, определяющие ***предельные вероятности состояний***:

$$p_0 = \left(1 + \rho + \rho^2 + \ldots + \rho^k + \ldots + \rho^{m+1}\right)^{-1},$$

$$p_k = \rho^k p_0, \; k = 1, \ldots, m+1,$$

где $\rho = \lambda/\mu$ – интенсивность нагрузки канала.

Если $\lambda = \mu$, то получаем $p_0 = p_1 = \ldots = p_{m+1} = 1/(m+2)$.

Пусть теперь $\lambda \neq \mu$ ($\rho \neq 1$). Выражение для p_0 можно в данном случае записать проще, пользуясь тем, что в знаменателе стоит сумма m+2 членов геометрической прогрессии со знаменателем ρ: $p_0 = \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}}$.

Определим основные характеристики одноканальной СМО с ожиданием:

относительная пропускная способность

$$P_{отк} = p_{m+1} = \begin{cases} \dfrac{\rho^{m+1}(1-\rho)}{1-\rho^{m+2}}, & если \;\; \rho \neq 1; \\ \dfrac{1}{m+2}, & если \;\; \rho = 1; \end{cases}$$

относительная пропускная способность, или доля обслуживаемых заявок, поступающих в единицу времени

$$Q = 1 - P_{отк} = \begin{cases} \dfrac{1-\rho^{m+1}}{1-\rho^{m+2}}, & если \quad \rho \neq 1; \\ \dfrac{m+1}{m+2}, & если \quad \rho = 1; \end{cases}$$

абсолютная пропускная способность системы $A = \lambda\, Q$;

среднее число заявок (средняя длина очереди)

$$L_{оч} = \begin{cases} \dfrac{\rho^2\left(1-\rho^m\left(m+1-m\rho\right)\right)}{\left(1-\rho\right)\left(1-\rho^{m+2}\right)}, & если \quad \rho \neq 1; \\ \dfrac{m(m+1)}{2(m+2)}, & если \quad \rho = 1; \end{cases}$$

среднее время ожидания заявки $\overline{T}_{оч} = \dfrac{L_{оч}}{\lambda}$;

среднее время пребывания заявки в системе $\overline{T}_{СМО} = \overline{T}_{оч} + \overline{T}_{об}$.

Пример 5.3. На автозаправочной станции (АЗС) имеется одна колонка. Площадка при станции, на которой машины ожидают заправку, может вместить не более трех машин одновременно, и если она занята, то очередная машина, прибывшая к станции, в очередь не становится, а проезжает на соседнюю АЗС. В среднем машины прибывают на станцию каждые 2 мин. Процесс заправки одной машины продолжается в среднем 2,5 мин. Определить основные характеристики системы.

Решение. Математической моделью данной АЗС является одноканальная СМО с ожиданием и ограничением на длину очереди (m = 3). Предполагается, что поток машин, подъезжающих к АЗС для заправки, и поток обслуживаний – простейшие.

Поскольку машины прибывают в среднем через каждые 2 мин, то интенсивность входящего потока равна λ =1/2 = 0,5 (машин в минуту). Среднее время обслуживания одной машины равно 2,5 мин, следовательно, интенсивность потока обслуживаний μ =1/2,5 = 0,4 (машины в минуту).

Определяем интенсивность нагрузки канала: $\rho = \lambda/\mu$ = 0,5/0,4 =1,25.

Вычисляем вероятность отказа $P_{отк} = \dfrac{\rho^4(1-\rho)}{1-\rho^5} = \dfrac{1{,}25^4(1-1{,}25)}{1-1{,}25^5} \approx 0{,}297$,

откуда относительная пропускная способность $Q = 1 - P_{отк} = 1 - 0{,}297 \approx 0{,}703$ и абсолютная пропускная способность $A = \lambda Q \approx 0{,}5 \cdot 0{,}703 \approx 0{,}352$.

Среднее число машин, ожидающих в очереди на заправку

$$L_{оч} = \frac{\rho^2\left(1-\rho^3(4-3\rho)\right)}{(1-\rho)\left(1-\rho^5\right)} = \frac{1{,}25^2\left(1-1{,}25^3(4-3\cdot 1{,}25)\right)}{(1-1{,}25)\left(1-1{,}25^5\right)} \approx 1{,}559.$$

Среднее время ожидания машины в очереди

$$\overline{T}_{оч} = \frac{L_{оч}}{\lambda} = \frac{1{,}559}{0{,}5} = 3{,}118 \text{ мин.}$$

Таким образом, из анализа работы СМО следует, что из каждых 100 подъезжающих машин 30 получают отказ, т.е. обслуживаются 70% заявок. Поэтому необходимо либо сократить время обслуживания одной машины (увеличить интенсивность потока обслуживаний), либо увеличить число колонок, либо увеличить площадку для ожидания. Оптимальное решение принимается с учетом затрат, связанных соответственно с увеличением штата обслуживающего персонала (увеличение производительности канала), с расширением площадки для ожидания или приобретением дополнительной колонки, и потерь, связанных с потерей заявок на обслуживание.

Листинг соответствующей программы представлен ниже:

```
function odnok_syst_s_ogranich_ozhid
clc
% задание параметров системы
lambda=1/2;
mu=1/2.5;
m=3;
T_ob=2.5;
% рассчет параметров системы
disp('Интенсивность загрузки канала')
ro=lambda/mu
z=1;
for i=1:(m+1)
   z=z+ro^i;
end;
P(1)=1/z;
for i=2:(m+2)
   P(i)=ro*P(i-1);
end;
disp('Вектор предельных вероятностей состояний')
P=P
disp('Вероятность отказа')
P_otk=P(m+2)
```

```
disp('Относительная пропускная способность')
Q=1-P_otk
disp('Абсолютная пропускная способность')
A=lambda*Q
disp('Средняя длина очереди')
if ro==1
   L_och=m*(m+1)/2/(m+2);
else L_och=ro^2*(1-ro^m*(m+1-m*ro))/(1-ro)/(1-ro^(m+2))
end;
disp('Среднее время ожидания заявки')
T_och=L_och/lambda
disp('Среднее время пребывания заявки в системе')
T_syst=T_och+T_ob
```

5.4. Одноканальная СМО с неограниченным ожиданием

Проанализируем работу одноканальной СМО с ожиданием без ограничений на длину очереди и на время ожидания в очереди. По-прежнему будем предполагать, что входящий поток и поток обслуживаний являются простейшими и имеют интенсивности λ и μ соответственно.

Такая система представляет собой предельный случай системы, рассмотренной в предыдущем пункте, при $m \to \infty$. Таким образом, длина очереди станет бесконечной и в соответствии с этим бесконечным станет число состояний СМО.

Если отказаться от ограничения на длину очереди, то случаи $\rho < 1$ и $\rho \geq 1$ начинают существенно различаться.

Если $\lambda > \mu$ ($\rho > 1$), т.е. среднее число заявок, поступивших в систему за единицу времени, больше среднего числа обслуживаемых заявок за то же время при непрерывно работающем канале, то очевидно, что очередь неограниченно растет. В этом случае предельный режим не устанавливается и предельных вероятностей состояний не существует (точнее, они равны нулю).

В случае $\lambda = \mu$ ($\rho = 1$) только при условии, что входящий поток заявок и поток обслуживаний регулярные (т.е. заявки поступают в СМО через равные интервалы времени, и время обслуживания одной заявки является постоянным, равным интервалу времени между поступлениями заявок), очереди вообще не будет и канал будет обслуживать заявки непрерывно. Но как только входящий поток или поток обслуживаний перестает быть регулярным и приобретает элементы случайности, очередь начинает расти до бесконечности.

Поэтому далее при рассмотрении указанных систем будем предполагать, что $\lambda < \mu$, т.е. $\rho < 1$. При этом условии с течением времени устанавливается предельный режим, и предельные вероятности состояний существуют.

Устремляя m к бесконечности в формулах для вероятностей состояний (полученных для СМО с ограниченной длиной очереди при $\rho < 1$), находим выражения для ***предельных вероятностей состояний*** рассматриваемой СМО:

$$p_k = \lim_{m\to\infty} \rho^k\, p_0 = \rho^k \lim_{m\to\infty} \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}} = \rho^k(1-\rho),\; k = 0,1,2,....$$

При отсутствии ограничений на очередь каждая заявка, поступившая в СМО, рано или поздно будет обслужена. Поэтому ***вероятность отказа*** равна нулю: $P_{отк} = 0$.

Следовательно, вероятность того, что поступившая заявка будет принята в систему, так же как и ***относительная пропускная способность*** Q, равна единице: $Q = 1 - P_{отк} = 1$.

Тогда для ***абсолютной пропускной способности*** A (и интенсивности выходящего потока) будем иметь: $A = \lambda Q = \lambda$, т.е. интенсивности входящего и выходящего потоков совпадают.

Среднее число заявок в очереди равно $L_{оч} = \lim\limits_{m\to\infty} \dfrac{\rho^2\left(1-\rho^m(m+1-m\rho)\right)}{(1-\rho)\left(1-\rho^{m+2}\right)} = \dfrac{\rho^2}{1-\rho}$.

Среднее время ожидания заявки в очереди равно $\overline{T}_{оч} = \dfrac{L_{оч}}{\lambda} = \dfrac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)} = \dfrac{\rho}{\mu(1-\rho)}$.

Наконец, ***среднее время пребывания заявки*** в СМО $T_{СМО}$ складывается из среднего времени заявки в очереди и среднего времени обслуживания заявки:

$$\overline{T}_{СМО} = \overline{T}_{оч} + \overline{T}_{об} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu(1-\rho)} = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)}.$$

Пример 5.4. В парикмахерской работает только один мужской мастер. Среднее время стрижки одного клиента составляет 20 мин. Клиенты в среднем приходят каждые 25 мин. Средняя стоимость стрижки составляет 350 руб. Как в первую смену с 9 до 15, так и во вторую – с 15 до 21, работают по одному мастеру. Провести анализ работы системы обслуживания. Определить ежедневный «чистый» доход каждого мастера, если он получает только 30% от выручки (остальное уходит на оплату аренды помещения, налоги, амортизацию оборудования и проч.).

Решение. Интенсивность входящего потока λ=2,4 клиента/ч, интенсивность потока обслуживаний μ=3 клиента/ч. Находим:

интенсивность нагрузки (канала) мастера $\rho = \lambda/\mu = 0{,}8$;

долю времени (вероятность) простоя мастера $p_0 = 1 - \rho = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$;

вероятность того, что мастер занят работой $p_{зан} = 1 - p_0 = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$;

среднее число клиентов в очереди $L_{оч} = \dfrac{0{,}8^2}{1-0{,}8} = 3{,}2$ клиента;

среднее время ожидания в очереди $\overline{T}_{оч} = \dfrac{3{,}2}{2{,}4} \approx 1{,}33$ мин;

среднее время пребывания клиентов в парикмахерской $\overline{T}_{СМО} = 1{,}34 + 20 = 21{,}34$ мин.

Система работает вполне удовлетворительно. Поскольку $\rho < 1$, то режим работы системы устойчивый, 20% рабочего времени мастер не занят, а остальные 80% времени занят работой, длина очереди 3,2 клиента небольшая, а среднее время пребывания клиента в парикмахерской всего 21,34 мин.

Каждый мастер занимается обслуживанием клиентов в среднем ежедневно в течение 0,8· (15 − 9) = 4,8 *ч* = 288 *мин*.

За это время он обслужит 288 20 =14,4 клиента, поэтому ежедневная выручка в среднем составит 14,4·350 = 5040 руб. Ежедневный «чистый» доход каждого мастера в среднем составляет 5040·0,3 = 1512 руб.

Листинг соответствующей программы представлен ниже:

```
function odnok_syst_s_neogranich_ozhid
clc
% задание параметров системы
T_ob=20/60;
lambda=60/25;
mu=1/T_ob;
% рассчет параметров системы
disp('Интенсивность загрузки канала')
ro=lambda/mu
disp('Вероятность отказа')
P_otk=0
disp('Относительная пропускная способность')
Q=1-P_otk
disp('Доля времени (вероятность) простоя канала')
P0=1-ro
disp('Доля времени (вероятность) занятости канала')
P0=ro
disp('Абсолютная пропускная способность')
```

```
A=lambda*Q
disp('Средняя длина очереди')
L_och=ro^2/(1-ro)
disp('Среднее время ожидания заявки')
T_och=L_och/lambda
disp('Среднее время пребывания заявки в системе')
T_syst=T_och+T_ob*60
```

5.5. Многоканальная СМО с ограниченной очередью

Рассмотрим n-канальную СМО с ожиданием, на которую поступает поток заявок с интенсивностью λ; интенсивность обслуживания μ (для одного канала); число мест в очереди m.

Состояния системы нумеруются по числу заявок, связанных системой:

нет очереди:

S_0 – все каналы свободны;

S_1 – занят один канал, остальные свободны;

S_k – заняты k каналов, остальные нет;

S_n – заняты все n каналов, свободных нет;

есть очередь:

S_{n+1} – заняты все n каналов; одна заявка стоит в очереди;

S_{n+r} – заняты все n каналов, r заявок в очереди;

S_{n+m} – заняты все n каналов, m заявок в очереди.

Напишем выражения для ***предельных вероятностей*** состояний, используя обозначение $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$:

$$p_0 = \left(1+\rho+\frac{\rho^2}{2!}+\ldots+\frac{\rho^n}{n!}+\frac{\rho^{n+1}}{n\cdot n!}+\frac{\rho^{n+2}}{n^2\cdot n!}+\ldots+\frac{\rho^{n+m}}{n^m\cdot n!}\right)^{-1} =$$

$$= \left(1+\rho+\frac{\rho^2}{2!}+\ldots+\frac{\rho^n}{n!}+\frac{\rho^n}{n!}\cdot\frac{\dfrac{\rho}{n}-\left(\dfrac{\rho}{n}\right)^{m+1}}{1-\dfrac{\rho}{n}}\right)^{-1},$$

$$p_k = \frac{\rho^k}{k!}p_0 \quad (k=1,\ldots,n),$$

$$p_{n+i} = \frac{\rho^{n+i}}{n^i\cdot n!}p_0 \quad (i=1,\ldots,m).$$

Определим характеристики эффективности системы:

вероятность отказа $P_{отк} = p_{n+m} = \dfrac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0$;

относительная пропускная способность $Q = 1 - P_{отк} = 1 - \dfrac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0$;

абсолютная пропускная способность СМО $A = \lambda Q = \lambda\left(1 - \dfrac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0\right)$;

среднее число занятых каналов $\bar{k} = \dfrac{A}{\mu} = \rho\left(1 - \dfrac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0\right)$;

среднее число заявок в очереди $L_{оч} = \dfrac{\rho^{n+1} p_0}{n \cdot n!} \dfrac{1 - \left(\dfrac{\rho}{n}\right)^m \left(m + 1 - m\dfrac{\rho}{n}\right)}{\left(1 - \dfrac{\rho}{n}\right)^2}$ **или**

$L_{оч} = 1 \cdot p_{n+1} + 2 \cdot p_{n+2} + \ldots + m \cdot p_{n+m}$;

среднее число заявок в системе $K = L_{оч} + \bar{k}$;

среднее время ожидания заявки в очереди

$$\bar{T}_{оч} = \frac{L_{оч}}{\lambda} = \frac{\rho^n p_0}{n \cdot \mu \cdot n!} \frac{1 - \left(\dfrac{\rho}{n}\right)^m \left(m + 1 - m\dfrac{\rho}{n}\right)}{\left(1 - \dfrac{\rho}{n}\right)^2};$$

среднее время пребывания заявки в системе $\bar{T}_{СМО} = \bar{T}_{оч} + \bar{T}_{об}$.

Пример 5.5. На станцию техобслуживания с двумя подъёмниками для текущего ремонта поступает простейший поток заявок с плотностью $\lambda = 1{,}5$ маш./час. Во дворе могут находиться, дожидаясь обслуживания не более 3-х машин. Среднее время ремонта $T_{обс} = 2$ час. Найти основные характеристики работы станции.

Решение. Имеем марковскую с параметрами: $n = 2$, $m = 3$, $\lambda = 1{,}5$, $\mu = 1/T_{обс} = 1/2$, значит $\rho = \lambda/\mu = 3$.

В результате расчетов, получим следующие характеристики системы:

вероятность отказа $P_{отк} = 0{,}374$;

относительная пропускная способность $Q = 1 - P_{отк} = 0{,}626$;

абсолютная пропускная способность СМО $A = \lambda Q = 0{,}938$;

среднее число занятых каналов $\bar{k} = \dfrac{A}{\mu} = 1{,}877$;

среднее число заявок в очереди $L_{оч} = 1{,}789$;

среднее число заявок в системе $K = L_{оч} + \overline{k} = 3{,}666$;

среднее время ожидания заявки в очереди $\overline{T}_{оч} = \dfrac{L_{оч}}{\lambda} = 1{,}193$ час. или 72 мин.;

среднее время пребывания заявки в системе $\overline{T}_{СМО} = \overline{T}_{оч} + \overline{T}_{об} = 3{,}193$ час. или 192 мин.

Таким образом, получаем, что примерно треть поступающих машин получают отказ в обслуживании. В этом случае руководству станции техобслживания можно либо увеличить количество подъемников, либо сократить время обслуживания, либо увеличить площадку для ожидающих машин.

Например, если увеличить количество подъемников до четырех, то вероятность отказа составит $P_{отк} = 0{,}064$ или 6,4%.

Листинг соответствующей программы представлен ниже:

```
function mnogok_syst_s_ogranich_ozhid
clc
% задание параметров системы
lambda=1.5;
T_ob=2;
mu=1/T_ob;
n=2;
m=3;
% рассчет параметров системы
disp('Интенсивность загрузки канала')
ro=lambda/mu
z=1;
x=1;
for i=1:n
   x=x*ro/i;
   z=z+x;
end;
z=z+ro^n/prod(1:n)*(ro/n-(ro/n)^(m+1))/(1-ro/n);
P(1)=1/z;
for i=2:(n+1)
   P(i)=ro/(i-1)*P(i-1);
end;
for j=1:m
```

```
    P(n+1+j)=ro^(n+j)/n^j/prod(1:n)*P(1);
end;
disp('Вектор предельных вероятностей состояний')
P=P
disp('Вероятность отказа')
P_otk=P(n+m+1)
disp('Относительная пропускная способность')
Q=1-P_otk
disp('Абсолютная пропускная способность')
A=lambda*Q
disp('Среднее число занятых каналов')
K=A/mu
disp('Среднее число заявок в очереди')
y=0;
for j=1:m
    y=y+j*P(n+1+j);
end;
L_och=y
disp('Среднее число заявок в системе')
K_zayav=L_och+K
disp('Среднее время ожидания заявки')
T_och=L_och/lambda
disp('Среднее время пребывания заявки в системе')
T_syst=T_och+T_ob
```

5.6. Многоканальная СМО с неограниченной очередью

Мы рассмотрели n-канальную СМО с ожиданием, когда в очереди одновременно могут находиться не более m заявок. Так же, как и ранее, при анализе систем без ограничений необходимо рассмотреть полученные соотношения при $m \to \infty$. Будем считать, что $\rho/n < 1$, в противном случае система не является устойчивой (очередь неограниченно растет).

Предельные вероятности состояний

$$p_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}\right)^{-1},$$

$$p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0 \quad (k = 1, \ldots, n),$$

$$p_{n+i} = \frac{\rho^{n+i}}{n^i \cdot n!} p_0 \quad (i = 1, \ldots, m, \ldots);$$

вероятность отказа $P_{отк} = 0$;

относительная пропускная способность $Q = 1 - P_{отк} = 1$;

абсолютная пропускная способность СМО $A = \lambda Q = \lambda$;

среднее число занятых каналов $\bar{k} = \dfrac{A}{\mu} = \rho$;

среднее число заявок в очереди $L_{оч} = \dfrac{\rho^{n+1} p_0}{n \cdot n!} \cdot \dfrac{1}{\left(1 - \dfrac{\rho}{n}\right)^2}$;

среднее число заявок в системе $K = \bar{k} + L_{оч}$;

среднее время ожидания заявки в очереди $\bar{T}_{оч} = \dfrac{L_{оч}}{\lambda} = \dfrac{\rho^n p_0}{n \cdot \mu \cdot n!} \dfrac{1}{\left(1 - \dfrac{\rho}{n}\right)^2}$;

среднее время пребывания заявки в системе $\bar{T}_{СМО} = \bar{T}_{оч} + \bar{T}_{об}$.

Пример 5.6. Автозаправочная станция с двумя колонками (n=2) обслуживает поток машин с интенсивностью λ=0,8 (машин в минуту). Среднее время обслуживания одной машины $\bar{T}_{об} = 2$ мин. В данном районе нет другой АЗС, так что очередь машин перед АЗС может расти практически неограниченно. Найти характеристики СМО.

Решение. Имеем $\mu = 1/\bar{T}_{об} = 0{,}5$ (машин в минуту), $\rho = \lambda/\mu = 0{,}8/0{,}5 = 1{,}6$, $\rho/n = 0{,}8 < 1$, поэтому очередь не растет безгранично и имеет смысл говорить о предельном стационарном режиме работы СМО.

Находим характеристики системы:

$$p_0 = \left(1 + 1{,}6 + \frac{1{,}6^2}{2!} + \frac{1{,}6^3}{2!(2 - 1{,}6)}\right)^{-1} = (1 + 1{,}6 + 1{,}28 + 5{,}12)^{-1} = \frac{1}{9} \approx 0{,}11;$$

вероятность отказа $P_{отк} = 0$;

относительная пропускная способность $Q = 1 - P_{отк} = 1$;

абсолютная пропускная способность СМО $A = \lambda = 0{,}8$ (машин в минуту);

среднее число занятых каналов $\bar{k} = \rho = 1{,}6$ (каналов);

среднее число машин в очереди $L_{оч} = \dfrac{1{,}6^3 \cdot 0{,}11}{2 \cdot 2!} \cdot \dfrac{1}{(1 - 0{,}8)^2} \approx 2{,}844$ (машин);

среднее число машин на АЗС $K = 2{,}84 + 1{,}6 = 4{,}444$ (машин);

среднее время ожидания заявки в очереди $\overline{T}_{оч} = \dfrac{2{,}84}{0{,}8} = 3{,}556$ (мин.);

среднее время пребывания заявки в системе $\overline{T}_{СМО} = 3{,}55 + 2 = 5{,}556$ (мин.).

Как видим, автозаправочная станция довольно эффективно – среднее время пребывания машины на станции не более 6 минут, при этом среднее число машин в очереди не более трех.

Листинг соответствующей программы представлен ниже:

```
function mnogok_syst_s_neogranich_ozhid
clc
% задание параметров системы
lambda=0.8;
T_ob=2;
mu=1/T_ob;
n=2;
%    асчет параметров системы
disp('Интенсивность загрузки канала')
ro=lambda/mu
z=1;
x=1;
for i=1:n
   x=x*ro/I;
   z=z+x;
end;
z=z+ro^(n+1)/prod(1:n)/(n-ro);
P0=1/z;
disp('Вероятность отказа')
P_otk=0
disp('Относительная пропускная способность')
Q=1-P_otk
disp('Абсолютная пропускная способность')
A=lambda*Q
disp('Среднее число занятых каналов')
K=A/mu
disp('Среднее число заявок в очереди')
L_och=ro^(n+1)*P0/n/prod(1:n)/(1-ro/n)^2
disp('Среднее число заявок в системе')
```

```
K_zayav=L_och+K
disp('Среднее время ожидания заявки')
T_och=L_och/lambda
disp('Среднее время пребывания заявки в системе')
T_syst=T_och+T_ob
```

<u>Индивидуальные задания для самостоятельной работы</u>

Найти решение задачи теории систем массового обслуживания.

№ вар-та	Задание
1	На оптовую базу прибывают автомашины с непродовольственными товарами. Поток простейший и поступает с интенсивностью 8 автомашин в час. На территории базы могут одновременно находиться не более 5 автомашин. На базе имеются 2 бригады грузчиков, которые разгружают автомашины. Среднее время разгрузки одной машины каждой бригадой составляет 1 ч. Определите основные показатели СМО оптовой базы и разработайте рекомендации по улучшению ее работы.
2	На стоянке автомобилей возле магазина имеются 3 места, каждое из которых отводится под один автомобиль. Автомобили прибывают на стоянку с интенсивностью 20 автомобилей в час. Продолжительность пребывания автомобилей на стоянке составляет в среднем 15 мин. Стоянка на проезжей части не разрешается. Определите основные показатели СМО и разработайте рекомендации по улучшению ее работы.
3	В службе «Скорой помощи» поселка круглосуточно дежурят 3 диспетчера, обслуживающие 3 телефонных аппарата. Если заявка на вызов врача к больным поступает, когда диспетчеры заняты, то абонент получает отказ. Поток заявок составляет в среднем 4 вызова в минуту. Оформление заявки длится в среднем 1,5 мин. Определить основные показатели работы службы «Скорой помощи» как объекта СМО и рассчитать, сколько потребуется телефонных аппаратов, чтобы удовлетворить не менее 90% поступающих вызовов врачей.
4	В морской порт поступает в среднем 6 сухогрузов в сутки. В порту имеются 3 крана, каждый из которых обслуживает 1 сухогруз в среднем за 8 часов. Краны работают круглосуточно. Определить характеристики работы порта как объекта СМО и в случае необходимости дать рекомендации по улучшению его работы.
5	В магазине покупателей обслуживают 2 продавца. Среднее время обслуживания одного покупателя – 4 мин. Интенсивность потока покупателей – 3 человека в минуту. Вместимость магазина такова, что одновременно в нем в очереди могут находиться не более 5 человек. Покупатель, пришедший в переполненный магазин, когда в очереди уже стоит 5 человек, не ждет снаружи и уходит.

	Определить характеристики работы магазина как объекта СМО и в случае необходимости дать рекомендации по улучшению его работы.
6	Морской вокзал г. Североморск обслуживает касса с двумя окнами. В выходные дни, когда население активно морским сообщением, интенсивность потока сообщений составляет 0,9 человек/мин. Кассир затрачивает на обслуживание пассажира в среднем 2 мин. Определить характеристики работы касс как объекта СМО и в случае необходимости дать рекомендации по улучшению его работы.
7	На АЗС имеются 3 колонки. Площадка при станции, на которой машины ожидают заправку, может вместить не более одной машины, и если она занята, то очередная машина, прибывшая к станции, в очередь не становится, а проезжает на соседнюю АЗС. В среднем машины прибывают на станцию каждые 2 мин. Процесс заправки одной машины продолжается в среднем 2,5 мин. Определить характеристики работы АЗС как объекта СМО и в случае необходимости дать рекомендации по улучшению его работы.
8	В мастерской бытового обслуживания работают 3 мастера. Если клиент заходит в мастерскую, когда все мастера заняты, то он уходит из мастерской, не ожидая обслуживания. Среднее число клиентов, обращающихся в мастерскую за 1 час, равно 20. Среднее время, которое затрачивает мастер на обслуживание одного клиента, равно 6 мин. Определить характеристики работы порта как объекта СМО и в случае необходимости дать рекомендации мастерской улучшению его работы.
9	Универсам получает ранние овощи и зелень из теплиц пригородного совхоза. В среднем прибывают с товаром 3 автомашины «Газель» в день. Подсобные помещения и оборудование для подготовки овощей к продаже позволяют обработать и хранить товар объемом не более 2 автомашин одновременно. В универсаме работают 5 групп фасовщиков, каждая из которых может обработать товар с одной автомашины в среднем в течение 0,5 дня. Определить характеристики работы универсама как объекта СМО и в случае необходимости дать рекомендации по улучшению его работы.
10	В торговом павильоне покупателей обслуживает один продавец. Площадь павильона составляет 24 м^2, причем 10 м^2 приходится на торговый зал, вместимость которого ограничена. Поэтому если очередь на обслуживание составляет 10 человек, то потенциальный поку-

	патель туда не входит, что свидетельствует об отказе в обслуживании и, как следствие, снижении товарооборота и ухудшении других экономических показателей работы коммерческого предприятия. Дайте оценку СМО и определите рекомендации по созданию оптимального режима работы, если интенсивность прихода покупателей составляет 60 человек в час, а среднее время обслуживания продавцом одного покупателя – 3 мин.
11	Интенсивность потока телефонных звонков в агентство по заказу железнодорожных билетов, имеющему один телефон, составляет 16 вызовов в час. Продолжительность оформления заказа на билет равна 2.4 минуты. Определить относительную и абсолютную пропускную способность этой СМО и вероятность отказа (занятости телефона). Сколько телефонов должно быть в агентстве, чтобы относительная пропускная способность была не менее 0,75?
12	Система массового обслуживания – билетная касса с одним окошком и неограниченной очередью. Касса продает билеты в пункты А и В. Пассажиров, желающих купить билет в пункт А, приходит в среднем трое за 20 мин, в пункт В – двое за 20 мин. Поток пассажиров простейший. Кассир в среднем обслуживает трех пассажиров за 10 мин. Определить характеристики работы билетной кассы как объекта СМО и в случае необходимости дать рекомендации по улучшению ее работы.
13	Междугородный переговорный пункт имеет четыре телефонных аппарата. В среднем за сутки поступает 320 заявок на переговоры. Средняя длительность переговоров составляет 5 мин. Длина очереди не должна превышать 6 абонентов. Потоки заявок и обслуживаний простейшие. Определить характеристики обслуживания переговорного пункта в стационарном режиме и в случае необходимости дать рекомендации по улучшению ее работы.
14	Универсам получает ранние овощи и зелень из теплиц пригородного совхоза. В среднем прибывают с товаром 4 автомашины «Газель» в день. Подсобные помещения и оборудование для подготовки овощей к продаже позволяют обработать и хранить товар объемом не более 2 автомашин одновременно. В универсаме работают 6 групп фасовщиков, каждая из которых может обработать товар с одной автомашины в среднем в течение 0,5 дня. Определить характеристики работы универсама как объекта СМО

	и в случае необходимости дать рекомендации по улучшению его работы.
15	Морской вокзал г. Североморск обслуживает касса с тремя окнами. В выходные дни, когда население активно морским сообщением, интенсивность потока сообщений составляет 1,2 человек/мин. Кассир затрачивает на обслуживание пассажира в среднем 2 мин. Определить характеристики работы касс как объекта СМО и в случае необходимости дать рекомендации по улучшению его работы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1 Азарнова, Т.В. Методы оптимизации: Учебное пособие / Т.В. Азарнова, И.Л. Каширина, Г.Д. Чернышова. – Воронеж: Изд-во ВГУ, 2003. – 86 с.

2 Алексеев, В.М. Сборник задач по оптимизации: Теория. Примеры. Задачи: Учеб. пособие / В.М. Алексеев, Э.М. Галлеев, В.М. Тихомиров. – 2-е изд. – М.: ФИМАЛИТ, 2005. – 256 с.

3 Амос, Г. MATLAB. Теория и практика [Электронный ресурс] / Г. Амос; пер. с англ. Н.К. Смоленцев. – Электрон. дан. – Москва: ДМК Пресс, 2016. – 416 с. – Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/82814

4 Ануфриев, И.Е. MATLAB 7 / И.Е. Ануфриев, И.Е. Смирнов, Е.Н. Смирнова – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 1104 с.

5 Аттетков, А.В. Методы оптимизации / А.В. Аттетков, С.В. Галкин, В.С. Зарубин . – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. – 440 с.

6 Бережная, Е.В. Математические методы моделирования экономических систем: учеб. пособие: рек. УМО вузов / Е.В. Бережная, В.И. Бережной. – М.: Финансы и статистика, 2001, 2002, 2003, 2005. – 368 с.

7 Блинов, Ю.Ф. Методы математического моделирования, Ч. 1 [Электронное учебное пособие] / Ю.Ф. Блинов, В.В. Иванцов, П.В. Серба. – Таганрог: ТТИ ЮФУ, 2012. – 42 с.

8 Васильев, А.Н. MATLAB. Самоучитель. Практический подход [Электронный ресурс]: самоучитель / А.Н. Васильев. – Электрон. дан. – Санкт-Петербург: Наука и Техника, 2015. – 448 с. - Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/69619

9 Васильев, О.В. Методы оптимизации в задачах и упражнениях / О.В. Васильев, А.В. Аргучинцев. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 1999. – 208 с.

10 Васин, А.А. Исследование операций: учеб. пособие: рек. НМС / А.А. Васин, П.С. Краснощеков, В.В. Морозов. – М.: Академия, 2008. – 464 с.

11 Вентцель, Е.С. Исследование операций: задачи, принципы, методология / Е.С. Вентцель. – М.: Высшая школа, 2001. – 208 с.

12 Волков, И.К. Исследование операций: Учеб для вузов / И.К. Волков, Е.А. Загоруйко, под. ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. М.Э. Баумана, 2000. – 436 с.

13 Дьяконов, В.П. MATLAB. Полный самоучитель / В.П. Дьяконов – М.: ДМК Пресс, 2012. – С. 42-768.

14 Исследование операций в экономике: учеб. пособие: рек. Мин. обр. РФ / под ред. Н.Ш. Кремера. – М.: Маркет ДС, 2007. – 408 с.

15 Карманов, В.Г. Математическое программирование: Учеб. пособие / В.Г. Карманов. – 4-е изд., перераб. и доп. - М.: ФИМАЛИТ, 2000. – 264 с.

16 Климов, Г.П. Теория массового обслуживания [Электронный ресурс]: учебное пособие / Г. П. Климов. – Электрон. текстовые данные. – М.: Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, 2011. – 235 с. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/13316.html

17 Кубланов, М.С. Математическое моделирование. Методология и методы разработки математических моделей механических систем и процессов: Учебное пособие. Часть I. Третье издание / М.С. Кубланов. – М.: МГТУ ГА, 2004. – 108 с.

18 Максимова, Н.Н. Исследование операций. Модели линейного программирования: учебно-методическое пособие / Н.Н. Максимова. – Благовещенск: Изд-во АмГУ, 2016. – 144 с.

19 Морозов, В.В. Исследование операций в задачах и упражнениях: учеб. пособие: доп. Мин. обр. РФ / В.В. Морозов, А.Г. Сухарев, В.В. Федоров. – 2-е изд., испр. – М.: Либроком, 2009. – 287 с.

20 Мызникова, Т.А. Модели социально-эколого-экономических систем: Учебно-методическое пособие / Т.А. Мызникова. – Омск: Изд-во СибАДИ, 2008. – 62 с.

21 Пантелеев, А.В. Методы оптимизации в примерах и задачах / А.В. Пантелеев, Т.А. Летова. – М.: Высш.шк., 2002. – 544 с.

22 Самарский, А.А. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. 2-е изд., испр. / А.А. Самарский, А.П. Михайлов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 320 с.

23 Самусевич, Г.А. Основы теории массового обслуживания [Электронный ресурс]: практикум / Г.А. Самусевич. – Электрон. текстовые данные. – Екатеринбург: Уральский федеральный университет, ЭБС АСВ, 2014. – 44 с. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/68270.html

24 Стариков, А.В. Экономико-математическое и компьютерное моделирование: учеб. пособие / А.В. Стариков, И.С. Кущева. – Воронеж: ГОУ ВПО «ВГЛТА». – Воронеж, 2008. – 132 с.

25 Тарасова, Н.В. Системы массового обслуживания [Электронный ресурс]: методические указания к семинарским занятиям по дисциплине «Сервисная деятельность» / сост. Н. В. Тарасова. – Электрон. текстовые данные. – Липецк: Липецкий государственный технический университет, ЭБС АСВ, 2012. –24с.— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/17695.html

26 Таха, Х.А. Введение в исследование операций, 7-е издание.: Пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. – 912 с.

27 Фомин, Г.П. Математические методы и модели в коммерческой деятельности: учебник: рек. Мин. обр. РФ / Г.П. Фомин. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Финансы и статистика, 2005. – 616 с.

28 Шапошников, А.В. Теория систем массового обслуживания [Электронный ресурс]: учебное пособие / сост. А. В. Шапошников [и др.]. – Электрон. текстовые данные. – Ставрополь: Северо-Кавказский федеральный университет,2017.–134с.Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/75605.html

СОДЕРЖАНИЕ

Составитель
Надежда Николаевна Максимова,
доцент кафедры математического анализа и моделирования,
кандидат физико-математических наук

Математическое моделирование. Учебно-методическое пособие

Изд-во АмГУ. Подписано к печати __.__.2019. Формат 60x84/16.

Усл. печ. л. 5,8.

Тираж __. Заказ __.

Отпечатано в типографии АмГУ.