Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

И.В. Абакумова

ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ В ТЕКСТИЛЬНОЙ И ЛЕГКОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ

Учебно-методическое пособие

Благовещенск

Издательство АмГУ

2019

ББК 37.23я73
А 27

Рекомендовано учебно-методическим советом АмГУ

Рецензенты:

Чалкина Н.А., доцент кафедры общей математики и информатики ФГБОУ ВО «Амурский государственный университет»

Абакумова И.В.
Оптимизационные методы решения задач в текстильной и легкой промышленности**:** Учебно-методическое пособие/ И.В. Абакумова. – Благовещенск: Изд-во АмГУ, 2019. – 33 с.

В учебно-методическом пособии рассмотрены оптимизационные методы решения задач в текстильной и легкой промышленности. В пособие описываются аналитические и численные методы оптимизации, эффективно используемые в научных исследованиях.

Практическая направленность, большое число специально подобранных примеров и задач позволяют использовать данное учебно-методическое пособие при изучении дисциплин «Методы научных исследований», «Методы и средства исследования», «Методы оптимизации технологических процессов», «Методы оптимизации сервисной деятельности», а также для выполнения курсовых и выпускных квалификационных работ студентами, обучающимися по направлениям «Конструирование изделий легкой промышленности», «Технологии и проектирование текстильных изделий», «Сервис».

1. АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД БЕЗУСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

В сфере текстильной и легкой промышленности часто встречаются задачи, в которых необходимо найти максимум или минимум значения целевой функции одной переменной.

Пусть X – область определения функции $y=F(x)$ и точка $x^* \in X$.

Точка x^* называется *локальным максимумом* функции $y=F(x)$, если существует такая окрестность точки x^*, что для всех x из нее выполняется неравенство $F(x) \le F(x^*)$.

Точка x^* называется *локальным минимумом* функции $y=F(x)$, если существует такая окрестность точки x^*, что для всех x из нее выполняется неравенство $F(x) \ge F(x^*)$.

Локальный максимум и локальный минимум называются *локальными экстремумами* функции.

Если в задаче оптимизации отсутствуют ограничения, и она имеет вид $F(x) \to extr$, $x \in R^n$, то она называется *задачей безусловной оптимизации*. Теория необходимых и достаточных условий оптимальности в задачах безусловной оптимизации излагается в курсе математического анализа.

Необходимые условия того, что x^* является точкой локального экстремума дважды дифференцируемой на множестве X функции $F(x)$ выражается следующими соотношениями:

$$\frac{dF(x^*)}{dx} = 0 \qquad (1),$$

$$\frac{d^2F(x^*)}{dx^2} \ge 0$$
$$\frac{d^2F(x^2)}{dx^2} \le 0 \qquad (2),$$

где x^* – точка экстремума.

Выражение (1) называют необходимым условием первого порядка, а соотношения (2) – условием второго порядка существования локального экстремума целевой функции $F(x)$ в точке x^*.

Необходимые условия часто используют для того, чтобы установить неоптимальность точки, то есть в случае, когда они не выполняются, точка x^* не является точкой локального экстремума. Если требуется доказать ее оптимальность применяют достаточные условия, соблюдение которых является гарантией экстремума.

Любую точку x^*, в которой выполняется равенство (1) называют *стационарной точкой*. Среди стационарных точек могут быть точки локального минимума, локального максимума и точки перегиба.

Для выявления различия указанных точек применяют *достаточные условия* оптимальности.

Пусть в точке x^* первые $(n-1)$ производные целевой функции равны нулю, а производные порядка n отличны от нуля, то:

1) при нечетном n, в точке x^* будет точка перегиба;
2) при четном n, в точке x^* будет точка локального экстремума;
3) если четная производная положительна, то x^* – точка локального минимума, если четная производная отрицательна, то x^* – точка локального максимума.

Воспользуемся необходимыми и достаточными условиями для решения одномерных безусловных задач оптимизации.

Пример 1

В результате экспериментальных исследований по изучению взаимосвязи y – натяжения нити (сН) от диаметра бобины x (мм) получено следующее уравнение:

$$y=0,0002x^2-0,036x+3,79$$

Найти диаметр бобины, при котором нить имеет наименьшее натяжение.

1) Определим стационарную точку x^*, используя необходимое условие экстремума, для этого найдем первую производную функции:

$$\frac{dy}{dx} = 0{,}0004x - 0{,}036$$

Приравниваем производную к нулю:

$$0{,}0004x - 0{,}036 = 0$$

$x^* = 90$ – стационарная точка.

2) Для определения вида стационарной точки найдем вторую производную:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0{,}0004 \geq 0$$

Так как вторая производная положительная полученная точка $x^* = 90$ является точкой локального минимума.

Подставляя полученное значение в уравнение, определим, что при диаметре бобины $x^* = 90$ нить имеет минимальное натяжение y=2,17 сН.

Пример 2

В результате обработки данных эксперимента установлена взаимосвязь между y – разрывной нагрузкой иглопробивного материала в продольном направлении и x – числом проколов в обоих направлениях:

$$y=3{,}3x-0{,}000013x^3$$

Определить число проколов, при котором материал имеет наибольшую прочность.

1) Определим стационарную точку x^*, используя необходимое условие экстремума, для этого найдем первую производную функции:

$$\frac{dy}{dx} = 3{,}3 - 0{,}000039x^2$$

Приравниваем производную к нулю и находим стационарные точки:

$$3{,}3 - 0{,}000039x^2 = 0$$

$$0{,}000039x^2 = 3{,}3$$

$$x_1^* = 290{,}9$$

$$x_2^* = -290{,}9$$

2) Для определения вида стационарных точек найдем вторую производную, и подставим в нее найденные стационарные точки:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -0{,}000078x$$

$$\frac{d^2y(x_1^*)}{dx^2} = -0{,}000078 \cdot 290{,}9 = -0{,}023 \leq 0$$

$$\frac{d^2y(x_2^*)}{dx^2} = -0{,}000078 \cdot (-290{,}9) = 0{,}023 \geq 0$$

Так как вторая производная отрицательна в точке $x_1^* = 290{,}9$, то данная точка является точкой локального максимума.

Так как вторая производная положительна в точке $x_2^* = -290{,}9$, то данная точка является точкой локального минимума.

Подставляя полученное значение максимума в уравнение, определим, что при числе проколов $x_1^* = 291$ иглопробивной материал имеет наибольшую прочность в продольном направлении y=640.

2. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Численные методы одномерной оптимизации состоят в вычислении целевой функции $F(x)$ в некоторых точках в пределах интервала (a,b), называемого *интервалом неопределенности*, так как неизвестно истинное положение точки экстремума на этом интервале.

Различные методы и алгоритмы одномерного поиска отличаются друг от друга способом построения этих точек. Методы поиска, которые позволяют определить оптимум функции одной переменной путем последовательного исключения подинтервалов, т.е. путем уменьшения интервала поиска, носят название *методов исключения интервалов*. Любой из методов приводит к сокращению интервала неопределенности до заданной величины ε – точности определения экстремума x^*.

Все численные методы поиска основаны на предположении, что функция $F(x)$ унимодальна, т.е. имеет единственный экстремум на интервале $(a;b)$.

Численные методы оптимизации основаны на итерационных алгоритмах.

Алгоритм – это однозначная определенная последовательность действий, приводящая к решению задач.

Алгоритм называется *итерационным*, если решение достигается в конце последовательности приближения решений, получаемых в результате неоднократного выполнения однотипных операций (итераций).

2.1. Метод дихотомии (деления пополам)

Решаемая этим методом задача, имеет следующий вид:

$F(x) \to extr$

$x \in (a;b)$,

где *a, b* – границы интервала, в пределах которого изменяется параметр *x*.

Процесс решения задачи определения оптимума целевой функции *F(x)* на интервале (*a;b)* состоит в построении последовательности интервалов $(a^{(m)}, b^{(m)})$, стягивающихся к точке x^* на каждой итерации *m*. Поиск продолжается, пока длина отрезка $(a^{(m)}, b^{(m)})$ не станет меньше заданной точности поиска ε.

Существует несколько модификаций метода дихотомии. Рассмотрим один из них.

Алгоритм метода дихотомии для поиска минимума:

1) Определяются три точки на отрезке $(a^{(m)};b^{(m)})$:

$$x_1^{(m)} = a + 0{,}25(b-a)$$
$$x_2^{(m)} = a + 0{,}5(b-a) \qquad (3)$$
$$x_3^{(m)} = a + 0{,}75(b-a)$$

2) Вычисляются значения целевой функции в этих точках

$$F_1^{(m)} = F(x_1^{(m)})$$
$$F_2^{(m)} = F(x_2^{(m)})$$
$$F_3^{(m)} = F(x_3^{(m)})$$

3) При поиске минимума определяется *минимальное* из трех значений целевой функции $\min\{F_1;F_2;F_3\}$:

- если $\min\{F_1;F_2;F_3\} = F_1$, то на следующем этапе рассматривается интервал $(a^{(m)};x_2^{(m)})$, интервал $(x_2^{(m)};b^{(m)})$ исключается из поиска, отрезок сокращается вдвое, на следующей итерации принимается:

$a^{(m+1)}=a^{(m)}$

$b^{(m+1)}=x_2^{(m)}$

$x_2^{(m+1)} = x_1^{(m)}$

$F_2^{(m+1)} = F_1^{(m)}$;

- если $\min\{F_1; F_2; F_3\} = F_2$ на следующем этапе рассматривается интервал $(x_1^{(m)}; x_3^{(m)})$, интервалы $(a^{(m)}; x_1^{(m)})$ и $(x_3^{(m)}; b^{(m)})$ исключаются из поиска, на следующей итерации принимается:

$a^{(m+1)} = x_1^{(m)}$

$b^{(m+1)} = x_3^{(m)}$

$x_2^{(m+1)} = x_2^{(m)}$

$F_2^{(m+1)} = F_2^{(m)}$;

- если $\min\{F_1; F_2; F_3\} = F_3$ на следующем этапе рассматривается интервал $(x_2^{(m)}; b^{(m)})$, интервал $(a^{(m)}; x_2^{(m)})$ исключается из поиска, на следующей итерации принимается:

$a^{(m+1)} = x_2^{(m)}$

$b^{(m+1)} = b^{(m)}$

$x_2^{(m+1)} = x_3^{(m)}$

$F_2^{(m+1)} = F_3^{(m)}$.

Во всех случаях в итоге получается отрезок $(a^{(m+1)}; b^{(m+1)})$ меньше вполовину исходного интервала $(a^{(m)}; b^{(m)})$, и точка x_2 в середине этого отрезка с известным значением функции F_2 в этой точке.

4) Проверяется необходимость следующей итерации:

- если $(b^{(m+1)} - a^{(m+1)}) < \varepsilon$, то поиск прекращается, а точка минимума x^* находится в середине полученного отрезка:

$$x^* = \frac{a^{(m+1)} + b^{(m+1)}}{2};$$

- если $(b^{(m+1)} - a^{(m+1)}) > \varepsilon$, то поиск продолжается, повторяются пункты 1-4 алгоритма, по формуле (3) находятся координаты точек x_1 *и* x_3 на следующей итерации для полученного отрезка $(a^{(m+1)}; b^{(m+1)})$, координаты точки x_2 с известным значением функции F_2 в этой точке известны из предыдущей итерации.

Алгоритм метода дихотомии *для поиска максимума* осуществляется аналогично, только в пункте 3 определяется *максимальное* из трех значений целевой функции $\max\{F_1; F_2; F_3\}$.

Рассмотрим нахождение точек экстремума численным методом деления пополам для примеров, рассмотренных в разделе 1.

Пример1

В результате экспериментальных исследований по изучению взаимосвязи *y* – натяжения нити (сН) от диаметра бобины *x* (мм) получено следующее уравнение:

$y=0{,}0002x^2-0{,}036x+3{,}79$

Найти диаметр бобины, при котором нить имеет наименьшее натяжение, с точностью ε=1, если известно, что диаметр бобины может изменяться от 50 до 200 мм.

Рассмотрим подробно первую итерацию метода деления пополам для нахождения минимума.

1) Определим три точки на отрезке $(50;200)$ по формулам (3):

$$x_1^{(1)} = a + 0{,}25(b-a) = 50 + 0{,}25(200-50) = 87{,}5$$

$$x_2^{(1)} = a + 0{,}5(b-a) = 50 + 0{,}5(200-50) = 125$$

$$x_3^{(1)} = a + 0{,}75(b-a) = 50 + 0{,}75(200-50) = 162{,}5$$

2) Вычислим значение функции в этих точках

$$y_1^{(1)} = 0{,}0002 \cdot 87{,}5^2 - 0{,}036 \cdot 87{,}5 + 3{,}79 = 2{,}171$$

$$y_2^{(1)} = 0{,}0002 \cdot 125^2 - 0{,}036 \cdot 125 + 3{,}79 = 2{,}415$$

$$y_3^{(1)} = 0{,}0002 \cdot 162{,}5^2 - 0{,}036 \cdot 162{,}5 + 3{,}79 = 3{,}221$$

3) Находим минимальное из трех значений функции: $\min\{y_1; y_2; y_3\} = y_1 = 2{,}171$, поэтому на следующем этапе рассматриваем интервал $(a;x_2)$, для следующей итерации рассчитываем:

$a^{(2)}=a^{(1)}=50$

$b^{(2)}=x_2^{(1)}=125$

$x_2^{(2)}=x_1^{(1)}=87{,}5$

$y_2^{(2)}=y_1^{(1)}=2{,}171$

4) Так как, длина полученного отрезка $b^{(2)}-a^{(2)}=125-50=75>1$, повторяем пункты 1-4.

Все остальные итерации сводим в таблицу 1.

Метод деления пополам при поиске минимума

Таблица 1

m	**a**	**b**	**l=b-a**	**x_1**	**x_2**	**x_3**	**y_1**	**y_2**	**y_3**
1	50,00	200,00	150,00	87,50	125,00	162,50	<u>2,17125</u>	2,415	3,22125
2	50,00	125,00	75,00	68,75	87,50	106,25	2,260313	<u>2,171250</u>	2,222813
3	68,75	106,25	37,50	78,13	87,50	96,88	2,198203	<u>2,171250</u>	2,179453
4	78,13	96,88	18,75	82,81	87,50	92,19	2,180332	2,171250	<u>2,170957</u>
5	87,50	96,88	9,38	89,84	92,19	94,53	<u>2,170005</u>	2,170957	2,174106
6	87,50	92,19	4,69	88,67	89,84	91,02	2,170353	<u>2,170005</u>	2,170206
7	88,67	91,02	2,34	89,26	89,84	90,43	2,170110	<u>2,170005</u>	2,170037
8	89,26	90,43	1,17	89,55	89,84	90,14	2,170040	2,170005	<u>2,170004</u>
9	89,84	90,43	0,59	89,99	90,14	90,28	<u>2,170000</u>	2,170004	2,170016

На 9-й итерации длина полученного отрезка:

$b^{(9)}-a^{(9)}=90{,}43-89{,}84=0{,}59<1$,

поэтому поиск прекращаем и находим точку минимума:

$$x^* = \frac{89{,}84+90{,}43}{2} = 90{,}14 \approx 90$$

Таким образом, при диаметре бобины $x^* = 90$ нить имеет минимальное натяжение y=2,17 сН, данный результат совпадает с решением задачи, найденным аналитическим методом.

Пример 2

В результате обработки данных эксперимента установлена взаимосвязь между *y* – разрывной нагрузкой иглопробивного материала в продольном направлении и *x* – числом проколов в обоих направлениях:

$y=3,3x-0,000013x^3$

Определить число проколов, при котором материал имеет наибольшую прочность с точностью ε=1, если известно, что число проколов может изменяться от 100 до 400.

Рассмотрим подробно первую итерацию метода деления пополам для нахождения максимума.

1) Определим три точки на отрезке $(100;400)$:

$$x_1^{(1)} = a + 0,25(b-a) = 100 + 0,25(400-100) = 175$$

$$x_2^{(1)} = a + 0,5(b-a) = 100 + 0,5(400-100) = 250$$

$$x_3^{(1)} = a + 0,75(b-a) = 100 + 0,75(400-100) = 325$$

2) Вычислим значение функции в этих точках

$$y_1^{(1)} = 3,3 \cdot 175 - 0,000013 \cdot 175^3 = 507,8$$

$$y_2^{(1)} = 3,3 \cdot 250 - 0,000013 \cdot 250^3 = 621,9$$

$$y_3^{(1)} = 3,3 \cdot 325 - 0,000013 \cdot 325^3 = 626,2$$

3) Находим максимальное из трех значений функции: $\max\{y_1; y_2; y_3\} = y_3 = 626,2$, поэтому на следующем этапе рассматриваем интервал (x_2,b), для следующей итерации рассчитываем:

$a^{(2)}=x_2^{(1)}=250$

$b^{(2)}=b^{(1)}=400$

$x_2^{(2)}=x_3^{(1)}=325$

$y_2^{(2)}=y_3^{(1)}=626,2$

4) Так как, длина полученного отрезка $b^{(2)}–a^{(2)}$=400–250=150>1, повторяем пункты 1-4.

Все остальные итерации сводим в таблицу 2.

Метод деления пополам при поиске максимума

Таблица 2

m	a	b	l=b-a	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3
1	100,00	400,00	300,00	175,00	250,00	325,00	507,8281	621,8750	<u>626,2344</u>
2	250,00	400,00	150,00	287,50	325,00	362,50	<u>639,8223</u>	626,2344	576,9980
3	250,00	325,00	75,00	268,75	287,50	306,25	634,5334	<u>639,8223</u>	637,2273
4	268,75	306,25	37,50	278,13	287,50	296,88	638,1312	<u>639,8223</u>	639,5424
5	278,13	296,88	18,75	282,81	287,50	292,19	639,2191	639,8223	<u>639,9327</u>
6	287,50	296,88	9,38	289,84	292,19	294,53	<u>639,9396</u>	639,9327	639,8006
7	287,50	292,19	4,69	288,67	289,84	291,02	639,8964	639,9396	<u>639,9517</u>
8	289,84	292,19	2,34	290,43	291,02	291,60	639,9495	<u>639,9517</u>	639,9461
9	290,43	291,60	1,17	290,72	291,02	291,31	639,9516	<u>639,9517</u>	639,9499
10	290,72	291,31	0,59	290,87	291,02	291,16	<u>639,9519</u>	639,9517	639,9511

На 10-й итерации длина полученного отрезка:

$$b^{(10)} - a^{(10)} = 291{,}31 - 290{,}72 = 0{,}59 < 1,$$

поэтому поиск прекращаем и находим точку максимума:

$$x^* = \frac{290{,}72 + 291{,}31}{2} = 291{,}02 \approx 291$$

Таким образом, при числе проколов $x_1^* = 291$ иглопробивной материал имеет наибольшую прочность в продольном направлении y=640, данный результат совпадает с решением задачи, найденным аналитическим методом.

2.2. Метод с использованием производной целевой функции

Использование дополнительной информации о свойствах целевой функции позволяет ускорить поиск. Например, если целевая функция $F(x)$ дифференцируема на отрезке $(a;b)$, то, учитывая унимодальность функции, можно использовать алгоритм, в котором на каждой итерации требуется лишь определение знака производной $\frac{dF(x)}{dx}$, что позволяет сокращать в 2 раза интервал поиска.

Алгоритм метода с использованием производной целевой функции для поиска минимума

1) Определяется точка в середине отрезка $(a^{(m)};b^{(m)})$:

$$x_1^{(m)} = \frac{a^{(m)} + b^{(m)}}{2}$$

2) Находится производная целевой функции:

$$F'(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

3) Определяется знак производной в точке $x_1^{(m)}$:

- если $\frac{dF(x_1^{(m)})}{d(x)} > 0$, то на следующем этапе рассматривается интервал $(a^{(m)};x_1^{(m)})$, интервал $(x_1^{(m)};b^{(m)})$ исключается из поиска, отрезок сокращается вдвое, на следующей итерации принимают:

$a^{(m+1)}=a^{(m)}$

$b^{(m+1)}=x_1^{(m)};$

- если $\frac{dF(x_1^{(m)})}{d(x)} < 0$, то на следующем этапе рассматривается интервал $(x_1^{(m)};b^{(m)})$, интервал $(a^{(m)};x_1^{(m)})$ исключается из поиска, отрезок сокращается вдвое, на следующей итерации принимают:

$a^{(m+1)}= x_1^{(m)}$

$b^{(m+1)}=b^{(m)}$.

4) Проверяется необходимость следующей итерации:

- если $(b^{(m+1)}–a^{(m+1)})< \varepsilon$, то поиск прекращается, а точка минимума x^* находится в середине отрезка:

$$x^* = \frac{a^{(m+1)} + b^{(m+1)}}{2};$$

- если $(b^{(m+1)}–a^{(m+1)}) > \varepsilon$, то поиск продолжается, повторяются пункты 1-4.

Алгоритм метода с использованием производной целевой функции *для поиска максимума* осуществляется аналогично, только в пункте 3 меняются знаки производной целевой функции:

- если $\frac{dF(x_1^{(m)})}{d(x)} < 0$, то на следующем этапе рассматривается интервал $(a^{(m)};x_1^{(m)})$, интервал $(x_1^{(m)};b^{(m)})$ исключается из поиска, отрезок сокращается вдвое, на следующей итерации принимают:

$a^{(m+1)}=a^{(m)}$

$b^{(m+1)}=x_1^{(m)};$

- если $\frac{dF(x_1^{(m)})}{d(x)} > 0$, то на следующем этапе рассматривается интервал $(x_1^{(m)};b^{(m)})$, интервал $(a^{(m)};x_1^{(m)})$ исключается из поиска, отрезок сокращается вдвое, на следующей итерации принимают:

$a^{(m+1)}= x_1^{(m)}$

$b^{(m+1)}=b^{(m)}$.

Рассмотрим нахождение точек экстремума численным методом с использованием производной целевой функции для примеров, рассмотренных в разделе 1 и 2.1.

Пример1

В результате экспериментальных исследований по изучению взаимосвязи y – натяжения нити (сН) от диаметра бобины x (мм) получено следующее уравнение:

$$y=0,0002x^2-0,036x+3,79$$

Найти диаметр бобины, при котором нить имеет наименьшее натяжение, с точностью ε=1, если известно, что диаметр бобины может изменяться от 50 до 200 мм.

Рассмотрим подробно первую итерацию метода с использованием производной целевой функции для нахождения минимума.

1) Определим точку в середине отрезка $(50;200)$:

$$x_1^{(1)} = \frac{50+200}{2} = 125$$

2) Вычислим значение производной целевой функции:

$$\frac{dy}{dx} = 0,0004x - 0,036$$

3) Определим знак производной в точке $x_1^{(1)}$:

$$\frac{dy(x_1^{(1)})}{dx} = 0,0004 \cdot 125 - 0,036 = 0,014 > 0,$$

поэтому на следующем этапе рассматриваем интервал $(a;x_1)$, для следующей итерации рассчитываем:

$a^{(2)}=a^{(1)}=50$

$b^{(2)}=x_1^{(1)}=125$

4) Так как, длина полученного отрезка $b^{(2)}- a^{(2)}$=125–50=75>1, повторяем пункты 1-4.

Все остальные итерации сводим в таблицу 3.

Метод с использованием производной целевой функции при поиске минимума

Таблица 3

m	a	b	l=b-a	x_1	y'	Знак производной
1	50,00	200,00	150,00	125,00	0,014	+
2	50,00	125,00	75,00	87,50	-0,001	-
3	87,50	125,00	37,50	106,25	0,0065	+
4	87,50	106,25	18,75	96,88	0,00275	+
5	87,50	96,88	9,38	92,19	0,000875	+
6	87,50	92,19	4,69	89,84	-0,00006	-
7	89,84	92,19	2,34	91,02	0,0004	+
8	89,84	91,02	1,17	90,43	0,00017	+
9	89,84	90,43	0,59	90,14	0,00006	+

На 9-й итерации длина полученного отрезка:

$b^{(9)}- a^{(9)}$=90,43–89,84=0,59<1,

поэтому поиск прекращаем и находим точку минимума:

$$x^* = \frac{89,84 + 90,43}{2} = 90,14 \approx 90$$

Таким образом, при диаметре бобины $x^* = 90$ нить имеет минимальное натяжение y=2,17 сН, данный результат совпадает с решениями задачи, найденными аналитическим методом и методом деления пополам.

Пример 2

В результате обработки данных эксперимента установлена взаимосвязь между y – разрывной нагрузкой иглопробивного материала в продольном направлении и x – числом проколов в обоих направлениях:

$y=3{,}3x-0{,}000013x^3$

Определить число проколов, при котором материал имеет наибольшую прочность с точностью $\varepsilon=1$, если известно, что число проколов может изменяться от 100 до 400.

Рассмотрим подробно первую итерацию метода с использованием производной целевой функции для нахождения максимума.

1) Определим точку в середине отрезка $(100;400)$:

$$x_1^{(1)} = \frac{100+400}{2} = 250$$

2) Вычислим значение производной целевой функции:

$$\frac{dy}{dx} = 3{,}3 - 0{,}000039x^2$$

3) Определим знак производной в точке $x_1^{(1)}$:

$$\frac{dy(x_1^{(1)})}{dx} = 3{,}3 - 0{,}000039 \cdot 250^2 = 0{,}863 > 0,$$

поэтому на следующем этапе рассматриваем интервал (x_1,b), для следующей итерации рассчитываем:

$a^{(2)}= x_1^{(1)}=250$

$b^{(2)}=b^{(1)}=400$

4) Так как, длина полученного отрезка $b^{(2)}–a^{(2)}$=400–250=150>1, повторяем пункты 1-4.

Все остальные итерации сводим в таблицу 4.

Метод с использованием производной целевой функции при поиске максимума

Таблица 4

m	**a**	**b**	**l=b-a**	**x_1**	**y’**	**Знак производной**
1	100,00	400,00	300,00	250,00	0,863	+
2	250,00	400,00	150,00	325,00	-0,819	-
3	250,00	325,00	75,00	287,50	0,076	+
4	287,50	325,00	37,50	306,25	-0,358	-
5	287,50	306,25	18,75	296,88	-0,137	-
6	287,50	296,88	9,38	292,19	-0,030	-
7	287,50	292,19	4,69	289,84	0,024	+
8	289,84	292,19	2,34	291,02	-0,003	-
9	289,84	291,02	1,17	290,43	0,010	+
10	290,43	291,02	0,59	290,72	0,004	+

На 10-й итерации длина полученного отрезка:

$$b^{(10)} - a^{(10)} = 291{,}02 - 290{,}43 = 0{,}59 < 1,$$

поэтому поиск прекращаем и находим точку максимума:

$$x^* = \frac{290{,}43 + 291{,}02}{2} = 290{,}72 \approx 291$$

Таким образом, при числе проколов $x_1^* = 291$ иглопробивной материал имеет наибольшую прочность в продольном направлении y=640, данный результат совпадает с решениями задачи, найденными аналитическим методом и методом деления пополам.

2.3. Метод золотого сечения

В методе золотого сечения на интервале неопределенности $(a;b)$ в каждой итерации сравниваются два значения целевой функции в точках x_1 и x_2, причем одна из точек определяется на данной итерации, а другая (со значением целевой функции в этой точке) известна из предыдущей итерации.

При определении координат точек x_1 и x_2 исходят из следующих требований:

- точки должны располагаться симметрично относительно середины интервала:

$$x_1 - a = b - x_2$$
$$x_2 - a = b - x_1 \qquad (4)$$

- положение сохраняющейся точки на сокращенном интервале должно удовлетворять тем же пропорциям, что и на исходном интервале данной итерации:

$$\frac{x_2 - a}{b - a} = \frac{x_1 - a}{x_2 - a}$$
$$\frac{b - x_1}{b - a} = \frac{b - x_2}{b - x_1} \qquad (5)$$

Пропорции (5) называются пропорциями золотого сечения.

Золотым сечением отрезка называют деление отрезка на две части так, что отношение длины всего отрезка к длине большей части равно отношению длины большей части к меньшей.

Решая совместно равенства (4) и (5) находим координаты точек x_1 и x_2:

$$x_1 = a + (1 - r)(b - a)$$
$$x_2 = a + r(b - a),$$

где $r = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0{,}618$

$$1 - r = 0{,}382$$

Величина r определяет пропорцию золотого сечения, а также расположение точек x_1 и x_2 на интервале $(a;b)$. Отметим, что точка x_1, в свою очередь, производит «золотое сечение» отрезка $(a;x_2)$, а точка x_2 – *«золотое сечение»* отрезка $(x_1;b)$. На основании данных соотношений разработан метод золотого сечения, который включает в себя следующие шаги.

Алгоритм метода золотого сечения для поиска минимума

1) Определяются две точки на отрезке $(a^{(m)};b^{(m)})$:

$$x_1^{(m)} = a + 0{,}382(b - a)$$
$$x_2^{(m)} = a + 0{,}618(b - a), \qquad (6)$$

2) Вычисляются значения целевой функции в этих точках

$$F_1^{(m)} = F(x_1^{(m)})$$

$F_2^{(m)} = F(x_2^{(m)})$

3) При поиске минимума определяется *минимальное* из двух значений целевой функции $\min\{F_1;F_2\}$:

- если $F_1<F_2$, то на следующем этапе рассматривается интервал $(a^{(m)};x_2^{(m)})$, интервал $(x_2^{(m)};b^{(m)})$ исключается из дальнейшего поиска, отрезок сокращается, на следующей итерации принимается:

$a^{(m+1)}=a^{(m)}$

$b^{(m+1)}=x_2^{(m)}$

$x_2^{(m+1)}=x_1^{(m)}$

$F_2^{(m+1)}=F_1^{(m)};$

- если $F_2<F_1$ на следующем этапе рассматривается интервал $(x_1^{(m)};b^{(m)})$, интервал $(a^{(m)};x_1^{(m)})$ исключаются из поиска, на следующей итерации принимается:

$a^{(m+1)}=x_1^{(m)}$

$b^{(m+1)}=b^{(m)}$

$x_1^{(m+1)}=x_2^{(m)}$

$F_1^{(m+1)}=F_2^{(m)};$

4) Проверяется необходимость следующей итерации:

- если $(b^{(m+1)}-a^{(m+1)})<\varepsilon$, то поиск прекращается, а точка минимума x^* находится в середине отрезка:

$$x^* = \frac{a^{(m+1)}+b^{(m+1)}}{2};$$

- если $(b^{(m+1)}-a^{(m+1)})>\varepsilon$, то поиск продолжается, повторяются пункты 1-4, по формуле (6) находятся координаты точек x_1 или x_2 на следующей итерации для полученного отрезка $(a^{(m+1)};b^{(m+1)})$.

Алгоритм метода золотого сечения *для поиска максимума* осуществляется аналогично, только в пункте 3 определяется *максимальное* из двух значений целевой функции $\max\{F_1;F_2\}$.

Рассмотрим нахождение точек экстремума численным методом золотого сечения для примеров, рассмотренных в разделах 1, 2.1 и 2.2.

Пример1

В результате экспериментальных исследований по изучению взаимосвязи y – натяжения нити (сН) от диаметра бобины x (мм) получено следующее уравнение:

$y=0,0002x^2-0,036x+3,79$

Найти диаметр бобины, при котором нить имеет наименьшее натяжение, с точностью ε=1, если известно, что диаметр бобины может изменяться от 50 до 200 мм.

Рассмотрим подробно первую итерацию метода золотого сечения для нахождения минимума.

1) Определим две точки на отрезке $(50;200)$:

   $x_1^{(1)} = a + 0,382(b - a) = 50 + 0,382(200 - 50) = 107,3$

   $x_2^{(1)} = a + 0,618(b - a) = 50 + 0,618(200 - 50) = 142,7$

2) Вычислим значение функции в этих точках

   $y_1^{(1)} = 0,0002 \cdot 107,3^2 - 0,036 \cdot 107,3 + 3,79 = 2,23$

   $y_2^{(1)} = 0,0002 \cdot 142,7^2 - 0,036 \cdot 142,7 + 3,79 = 2,725$

3) Находим минимальное из двух значений функции: $\min\{y_1; y_2\} = y_1 = 2,23$, на следующем этапе рассматриваем интервал $(a;x_2)$, для следующей итерации рассчитываем:

   $a^{(2)}=a^{(1)}=50$

   $b^{(2)}=x_2^{(1)}=142,7$

   $x_2^{(2)}=x_1^{(1)}=107,3$

   $y_2^{(2)}=y_1^{(1)}=2,23$

4) Так как, длина полученного отрезка $b^{(2)}– a^{(2)}$=142,7–50=92,7>1, далее повторяем пункты 1-4.

   Все остальные итерации сводим в таблицу 5.

Метод золотого сечения при поиске минимума

Таблица 5

m	a	b	l=b-a	x_1	x_2	y_1	y_2
1	50,00	200,00	150,00	107,30	142,70	2,22986	2,72546
2	50,00	142,70	92,70	85,41	107,30	2,17421	2,22986
3	50,00	107,30	57,30	71,89	85,41	2,23560	2,17421
4	71,89	107,30	35,41	85,41	93,77	2,17421	2,17285
5	85,41	107,30	21,89	93,77	98,94	2,17285	2,18598
6	85,41	98,94	13,53	90,58	93,77	2,17007	2,17285
7	85,41	93,77	8,36	88,60	90,58	2,17039	2,17007
8	88,60	93,77	5,17	90,58	91,80	2,17007	2,17065
9	88,60	91,80	3,19	89,82	90,58	2,17001	2,17007
10	88,60	90,58	1,97	89,36	89,82	2,17008	2,17001
11	89,36	90,58	1,22	89,82	90,11	2,17001	2,17000
12	89,82	90,58	0,75	90,11	90,29	2,17000	2,17002

На 12-й итерации длина полученного отрезка:

$b^{(12)} - a^{(12)} = 90,58 – 89,82 = 0,75 < 1$,

поэтому поиск прекращаем и находим точку минимума:

$$x^* = \frac{89,82 + 90,58}{2} = 90,2 \approx 90$$

Таким образом, при диаметре бобины $x^* = 90$ нить имеет минимальное натяжение y=2,17 сН, данный результат совпадает с решениями задачи, найденными аналитическим методом, методом деления пополам и методом с использованием производной целевой функции.

Пример 2

В результате обработки данных эксперимента установлена взаимосвязь между y – разрывной нагрузкой иглопробивного материала в продольном направлении и x – числом проколов в обоих направлениях:

$y=3,3x-0,000013x^3$

Определить число проколов, при котором материал имеет наибольшую прочность с точностью ε=1, если известно, что число проколов может изменяться от 100 до 400.

Рассмотрим подробно первую итерацию метода золотого сечения для нахождения максимума.

1) Определим две точки на отрезке $(100;400)$:

$$x_1^{(1)} = a + 0{,}382(b-a) = 100 + 0{,}382(400-100) = 214{,}6$$

$$x_2^{(1)} = a + 0{,}618(b-a) = 100 + 0{,}618(400-100) = 285{,}4$$

2) Вычислим значение функции в этих точках

$$y_1^{(1)} = 3{,}3 \cdot 214{,}6 - 0{,}000013 \cdot 214{,}6^3 = 579{,}701$$

$$y_2^{(1)} = 3{,}3 \cdot 285{,}4 - 0{,}000013 \cdot 285{,}4^3 = 639{,}612$$

3) Находим максимальное из двух значений функции: $\max\{y_1; y_2\} = y_2 = 639{,}612$, поэтому на следующем этапе рассматриваем интервал $(x_1;b)$, для следующей итерации рассчитываем:

$a^{(2)}=x_1^{(1)}=214{,}6$

$b^{(2)}=b^{(1)}=400$

$x_1^{(2)}=x_2^{(1)}=285{,}4$

$y_1^{(2)}=y_2^{(1)}=639{,}612$

4) Так как, длина полученного отрезка $b^{(2)}–a^{(2)}=400–214{,}6=185{,}4>1$, повторяем пункты 1-4.

Все остальные итерации сводим в таблицу 6.

Метод золотого сечения при поиске максимума

Таблица 6

m	a	b	l=b-a	x_1	x_2	y_1	y_2
1	100,00	400,00	300,00	214,60	285,40	579,701	639,612
2	214,60	400,00	185,40	285,40	329,18	639,612	622,590
3	214,60	329,18	114,58	258,37	285,40	628,402	639,612
4	258,37	329,18	70,81	285,40	302,13	639,612	638,500
5	258,37	302,13	43,76	275,08	285,40	637,170	639,612
6	275,08	302,13	27,04	285,40	291,80	639,612	639,943
7	285,42	302,13	16,71	291,80	295,74	639,943	639,683
8	285,42	295,74	10,33	289,36	291,80	639,926	639,943
9	289,36	295,74	6,38	291,80	293,31	639,943	639,885
10	289,36	293,31	3,94	290,87	291,80	639,952	639,943
11	289,36	291,80	2,44	290,29	290,87	639,948	639,952
12	290,29	291,80	1,51	290,87	291,22	639,952	639,951
13	290,29	291,22	0,93	290,65	290,87	639,951	639,952

На 13-й итерации длина полученного отрезка:

$b^{(13)}– a^{(13)}=291{,}22–290{,}29=0{,}93<1$,

поэтому поиск прекращаем и находим точку максимума:

$$x^* = \frac{290{,}29 + 291{,}22}{2} = 290{,}76 \approx 291$$

Таким образом, при числе проколов $x_1^* = 291$ иглопробивной материал имеет наибольшую прочность в продольном направлении y=640, данный результат совпадает с решениями задачи, найденными ранее методами.

2. 4. Метод Фибоначчи

В методе Фибоначчи в каждой итерации сравниваются два значения целевой функции в точках x_1 и x_2 аналогично методу золотого сечения, различие лишь в пропорциях, на которые при каждом шаге делят интервал $(a;b)$. В методе Фибоначчи эти пропорции приравниваются к отношению очередной пары чисел Фибоначчи.

Числа Фибоначчи – это элементы числовой возвратной последовательности, в которой каждый последующий член равен сумме двух предыдущих:

$$\Phi_{n+1} = \Phi_n + \Phi_{n-1} \tag{7}$$

где n=1, 2 …

$\Phi_0 = \Phi_1 = 1$.

В таблице 7 приведены некоторые из чисел Фибоначчи, рассчитанные по формуле (7).

Числа Фибоначчи

Таблица 7

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$\boldsymbol{\Phi_n}$	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	987

Согласно методу Фибоначчи координаты точек x_1 и x_2 для начального интервала $(a;b)$ определяются по формулам:

$$x_1 = a + \frac{\Phi_{n-2}}{\Phi_n}(b-a)$$
$$x_2 = a + \frac{\Phi_{n-1}}{\Phi_n}(b-a), \qquad (8)$$

где n – заданное общее число вычислений функции при определении экстремума.

Число вычислений n необходимо выбирать таким, чтобы удовлетворялось условие:

$$\Phi_n > \frac{b-a}{l_n} \qquad (9)$$

где l_n – длина конечного интервала неопределенности $(a^{(n)};b^{(n)})$ на последнем этапе поиска, которая зависит от точности поиска ε.

В соответствии с законом симметричного расположения точек x_1 и x_2 при сокращении интервала новый интервал неопределенности на каждой m-й итерации уменьшится в Φ_{n-m}/Φ_{n-m+1} раз. Поэтому на каждой последующей итерации требуется определить только одну из точек, а другая (со значением целевой функции в этой точке) известна из предыдущей итерации.

Алгоритм метода Фибоначчи для поиска минимума

1) Выбирается число вычислений целевой функции n таким образом, чтобы выполнялось условие (9).

2) Определяются координаты двух симметричных точек $x_1^{(1)}$ и $x_2^{(1)}$ в первой итерации на начальном интервале $(a;b)$ согласно формулам (8).

3) Вычисляются значения целевой функции в этих точках:

$F_1^{(1)} = F(x_1^{(1)})$

$F_2^{(1)} = F(x_2^{(1)})$.

4) При поиске минимума определяется *минимальное* из двух значений целевой функции $\min\{F_1; F_2\}$:

- если $F_1<F_2$, то на следующем этапе рассматривается интервал $(a^{(m)};x_2^{(m)})$, интервал $(x_2^{(m)};b^{(m)})$ исключается из дальнейшего поиска, отрезок сокращается, на следующей итерации принимается:

$a^{(m+1)}=a^{(m)}$

$b^{(m+1)}=x_2^{(m)}$

$x_2^{(m+1)}=x_1^{(m)}$

$F_2^{(m+1)}=F_1^{(m)}$

$x_1^{(m+1)} = a^{(m)} + x_2^{(m)} - x_1^{(m)}$.

Если $m=n-2$ перейти к п.6, иначе вычислить $F_1^{(m+1)} = F(x_1^{(m+1)})$ и перейти к п.5.

- если $F_2<F_1$ на следующем этапе рассматривается интервал $(x_1^{(m)};b^{(m)})$, интервал $(a^{(m)};x_1^{(m)})$ исключаются из поиска, на следующей итерации принимается:

$a^{(m+1)}=x_1^{(m)}$

$b^{(m+1)}=b^{(m)}$

$x_1^{(m+1)}=x_2^{(m)}$

$F_1^{(m+1)}=F_2^{(m)}$

$x_2^{(m+1)} = b^{(m)} + x_1^{(m)} - x_2^{(m)}$.

Если $m=n-2$ перейти к п.6, иначе вычислить $F_2^{(m+1)} = F(x_2^{(m+1)})$ и перейти к п.5.

5) Заменить m на $(m+1)$ и перейти к п.4.

6) Положить $x_1^{(n)} = x_1^{(n-1)}$ и $x_2^{(n)} = x_1^{(n)} + \varepsilon$.

Если $F(x_1^{(n)}) > F(x_2^{(n)})$, то $a^{(n)}=x_1^{(n)}$ и $b^{(n)}=b^{(n-1)}$, иначе

если $F(x_1^{(n)}) < F(x_2^{(n)})$, то $a^{(n)}=a^{(n-1)}$ и $b^{(n)}=x_2^{(n)}$.

Поиск прекращается, а точка минимума x^* находится в середине отрезка:

$$x^* = \frac{a^{(n)} + b^{(n)}}{2}.$$

Алгоритм метода Фибоначчи *для поиска максимума* осуществляется аналогично, только в пункте 4 определяется *максимальное* из двух значений целевой функции $\max\{F_1;F_2\}$.

Рассмотрим нахождение точек экстремума численным методом Фибоначчи для примеров, рассмотренных в разделах 1, 2.1, 2.2 и 2.3.

Пример1

В результате экспериментальных исследований по изучению взаимосвязи *y* – натяжения нити (сН) от диаметра бобины *x* (мм) получено следующее уравнение:

$y=0{,}0002x^2-0{,}036x+3{,}79$

Найти диаметр бобины, при котором нить имеет наименьшее натяжение, с точностью $\varepsilon=0{,}1$, если известно, что диаметр бобины может изменяться от 50 до 200 мм.

Рассмотрим подробно первую итерацию метода Фибоначчи для нахождения минимума.

1) Определим число вычислений целевой функции *n*.

Найдем длину исходного интервала неопределенности:

$b-a=200-50=150$

Длину последнего интервала примем $l_n=1$, исходя из точности поиска $\varepsilon=0{,}1$.

Из соотношения (9) определим число Фибоначчи:

$$\Phi_n > \frac{150}{1} = 150$$

По таблице 7 находим $\Phi_n=\Phi_{12}=233>150$, следовательно число итераций должно быть $n=12$.

2) Определим координаты двух симметричных точек $x_1^{(1)}$ и $x_2^{(1)}$ на начальном интервале $(a;b)$ согласно формулам (8):

$$x_1^{(1)} = a + \frac{\Phi_{10}}{\Phi_{12}}(b-a) = 50 + \frac{89}{233}(200-50) = 107{,}3$$

$$x_2^{(1)} = a + \frac{\Phi_{11}}{\Phi_{12}}(b-a) = 50 + \frac{144}{233}(200-50) = 142{,}7$$

3) Вычислим значение функции в этих точках

$$y_1^{(1)} = 0{,}0002 \cdot 107{,}3^2 - 0{,}036 \cdot 107{,}3 + 3{,}79 = 2{,}23$$

$$y_2^{(1)} = 0{,}0002 \cdot 142{,}7^2 - 0{,}036 \cdot 142{,}7 + 3{,}79 = 2{,}725$$

4) Находим минимальное из двух значений функции: $\min\{y_1; y_2\} = y_1 = 2{,}23$, на следующем этапе рассматриваем интервал $(a;x_2)$, для следующей итерации рассчитываем:

$a^{(2)}=a^{(1)}=50$

$b^{(2)}=x_2^{(1)}=142{,}7$

$x_2^{(2)}=x_1^{(1)}=107{,}3$

$y_2^{(2)}=y_1^{(1)}=2{,}23$

$$x_1^{(2)} = a^{(1)} + x_2^{(1)} - x_1^{(1)} = 50 + 142{,}7 - 107{,}3 = 85{,}41$$

$$y_1^{(2)} = 0{,}0002 \cdot 85{,}41^2 - 0{,}036 \cdot 85{,}41 + 3{,}79 = 2{,}174$$

5) Переходим к следующей итерации, повторяя пункт 4.

Все остальные итерации сводим в таблицу 8.

Метод Фибоначчи при поиске минимума

Таблица 8

m	a	b	l=b-a	x_1	x_2	y_1	y_2
1	50,00	200,00	150,00	107,30	142,70	2,22983	2,72554
2	50,00	142,70	92,70	85,41	107,30	2,17422	2,22983
3	50,00	107,30	57,30	71,89	85,41	2,23561	2,17422
4	71,89	107,30	35,41	85,41	93,78	2,17422	2,17285
5	85,41	107,30	21,89	93,78	98,93	2,17285	2,18594
6	85,41	98,93	13,52	90,56	93,78	2,17006	2,17285
7	85,41	93,78	8,37	88,63	90,56	2,17038	2,17006
8	88,63	93,78	5,15	90,56	91,85	2,17006	2,17068
9	88,63	91,85	3,22	89,91	90,56	2,17000	2,17006
10	88,63	90,56	1,93	89,27	89,91	2,17011	2,17000
11	89,27	90,56	1,29	89,91	89,91	2,17000	2,17000
12	89,91	90,56	0,64	89,91	90,01	2,170001	2,170000

На 11-й итерации координаты точек x_1 и x_2 равны между собой $x_1=x_2=89{,}91$, поэтому на 12-й итерации полагаем:

$$x_1^{(12)} = x_1^{(11)} = 89{,}91$$

$$x_2^{(12)} = x_1^{(12)} + \varepsilon = 89{,}91 + 0{,}1 = 90{,}01$$

Так как, $y_1(x_1^{(12)}) = 2{,}170001 > y_2(x_2^{(12)}) = 2{,}140000$, то то на последнем этапе:

$a^{(12)} = x_1^{(12)} = 89{,}91$ и $b^{(12)} = b^{(11)} = 90{,}56$

Конечный интервал неопределенности равен:

$$b^{(12)} - a^{(12)} = 90{,}56 - 89{,}91 = 0{,}64 < 1,$$

поэтому поиск прекращаем и находим точку минимума:

$$x^* = \frac{89{,}91 + 90{,}56}{2} = 90{,}2 \approx 90$$

Таким образом, при диаметре бобины $x^* = 90$ нить имеет минимальное натяжение y=2,17 сН, данный результат совпадает с решениями задачи, найденными ранее методами.

Пример 2

В результате обработки данных эксперимента установлена взаимосвязь между y – разрывной нагрузкой иглопробивного материала в продольном направлении и x – числом проколов в обоих направлениях:

$y=3{,}3x-0{,}000013x^3$

Определить число проколов, при котором материал имеет наибольшую прочность с точностью ε=0,1, если известно, что число проколов может изменяться от 100 до 400.

Рассмотрим подробно первую итерацию метода Фибоначчи для нахождения максимума.

1) Определим число вычислений целевой функции n.

Для этого найдем длину исходного интервала неопределенности:

$$b-a=400-100=300.$$

Длину последнего интервала примем l_n=1, исходя из точности поиска ε=0,1.

Из соотношения (9) определим число Фибоначчи:

$$Ф_n > \frac{300}{1} = 300$$

По таблице 7 находим Φ_n=Φ_{13}=377>300, следовательно число итераций должно быть n=13.

2) Определим координаты двух симметричных точек $x_1^{(1)}$ и $x_2^{(1)}$ на начальном интервале ($a;b$) согласно формулам (8):

$$x_1^{(1)} = a + \frac{\Phi_{11}}{\Phi_{13}}(b-a) = 100 + \frac{144}{377}(400-100) = 214{,}589$$

$$x_2^{(1)} = a + \frac{\Phi_{12}}{\Phi_{13}}(b-a) = 100 + \frac{233}{377}(400-100) = 285{,}411$$

3) Вычислим значение функции в этих точках

$$y_1^{(1)} = 3{,}3 \cdot 214{,}589 - 0{,}000013 \cdot 214{,}589^3 = 579{,}684$$

$$y_2^{(1)} = 3{,}3 \cdot 285{,}411 - 0{,}000013 \cdot 285{,}411^3 = 639{,}614$$

4) Находим максимальное из двух значений функции: $\max\{y_1; y_2\} = y_2 = 639{,}614$, поэтому на следующем этапе рассматриваем интервал $(x_1;b)$, для следующей итерации рассчитываем:

$a^{(2)}=x_1^{(1)}=214{,}589$

$b^{(2)}=b^{(1)}=400$

$x_1^{(2)}=x_2^{(1)}=285{,}411$

$y_1^{(2)}=y_2^{(1)}=639{,}614$

$$x_2^{(2)} = b^{(1)} + x_1^{(1)} - x_2^{(1)} = 400 + 214{,}589 - 285{,}411 = 329{,}178$$

$$y_2^{(2)} = 3{,}3 \cdot 329{,}178 - 0{,}000013 \cdot 329{,}178^3 = 622{,}589$$

5) Переходим к следующей итерации, повторяя пункт 4.

Все остальные итерации сводим в таблицу 9.

На 12-й итерации координаты точек x_1 и x_2 равны между собой x_1=x_2 =290,981, поэтому на 13-й итерации полагаем:

$$x_1^{(13)} = x_1^{(12)} = 290{,}981$$

$$x_2^{(13)} = x_1^{(13)} + \varepsilon = 290{,}981 + 0{,}1 = 290{,}081$$

Так как, $y_1(x_1^{(13)}) = 639{,}952 > y_2(x_2^{(13)}) = 639{,}951$, то на последнем этапе:

$a^{(13)}$ =$a^{(12)}$ = 290,19 и $b^{(13)}$ = $x_2^{(13)}$ =291,08

Конечный интервал неопределенности равен:

$$b^{(13)} - a^{(13)} = 291{,}08 - 290{,}19 = 0{,}9 < 1,$$

поэтому поиск прекращаем и находим точку максимума:

$$x^* = \frac{290{,}19 + 291{,}08}{2} = 290{,}63 \approx 291$$

Метод Фибоначчи при поиске максимума

Таблица 9

m	a	b	l=b-a	x_1	x_2	y_1	y_2
1	100,00	400,00	300,00	214,589	285,411	579,684	639,614
2	214,59	400,00	185,41	285,411	329,178	639,614	622,589
3	214,59	329,18	114,59	258,355	285,411	628,393	639,614
4	258,36	329,18	70,82	285,411	302,122	639,614	638,502
5	258,36	302,12	43,77	275,066	285,411	637,164	639,614
6	275,07	302,12	27,06	285,411	291,777	639,614	639,943
7	285,41	302,12	16,71	291,777	295,756	639,943	639,682
8	285,41	295,76	10,34	289,390	291,777	639,927	639,943
9	289,39	295,76	6,37	291,777	293,369	639,943	639,882
10	289,39	293,37	3,98	290,981	291,777	639,952	639,943
11	289,39	291,78	2,39	290,186	290,981	639,946	639,952
12	290,19	291,78	1,59	290,981	290,981	639,952	639,952
13	290,19	291,08	0,90	290,981	291,081	639,952	639,951

Таким образом, при числе проколов $x_1^* = 291$ иглопробивной материал имеет наибольшую прочность в продольном направлении y=640, данный результат совпадает с решениями задачи, найденными ранее методами.

СОДЕРЖАНИЕ

Ирина Валентиновна Абакумова,
доцент кафедры сервисных технологий и общетехнических дисциплин АмГУ, канд.техн.наук

Оптимизационные методы решения задач в текстильной и легкой промышленности

Учебно-методическое пособие