Министерство науки и высшего образования РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
(ФГБОУ ВО «АмГУ»)

ТЕОРИЯ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ
сборник учебно-методических материалов

для направления подготовки 10.03.01 Информационная безопасность

Благовещенск

2019

Печатается по решению
редакционно-издательского совета
факультета математики и информатики
Амурского государственного
университета

Составитель: Самохвалова С.Г.

Теория принятия решений: сборник учебно-методических материалов для направлений подготовки 10.03.01 Информационная безопасность – Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2019

КРАТКОЕ ИЗЛОЖЕНИЕ ЛЕКЦИОННОГО МАТЕРИАЛА

Модели и методы принятия решений

Понятие системы уточняется и совершенствуется вместе с развитием самого системного анализа. Так, основоположник теории систем Людвиг фон Берталанфи определил систему как комплекс взаимодействующих элементов, находящихся в определенных отношениях друг с другом и со средой.

Таким образом, исходным моментом в определении системы является ее сопоставление со средой, т.е. среда - это все то, что не входит в систему, а система - это конечное множество объектов, каким-то образом выделенное из среды. Между средой и системой существует множество взаимных связей, с помощью которых реализуется процесс взаимодействия среды и системы.

Выделение системы из среды и определение границ их взаимодействия является одной из первоочередных задач системного анализа. От правильности определения границ зависят не только выполняемые функции, эффективность и качество системы, но и нередко сама ее жизнедеятельность. С другой стороны, диалектической основой системных исследований является принцип системности, суть которого сводится к тому, что система как нечто целое обладает свойствами, не присущими составляющим ее элементам (свойство целостности, эмерджентности). В этом случае при определении системы необходимо исходить из двух основополагающих понятий:

–система как совокупность взаимодействующих элементов;

–система как целостное образование, обладающее новыми системообразующими свойствами.

С учетом вышеизложенного перечислим следующие отличительные свойства системы:

• система есть нечто целое;
• система есть множество элементов, свойств и отношений;
• система есть организованное множество элементов;
• система есть динамическое множество элементов.

Тогда определение системы можно сформулировать следующим образом: система есть конечное множество элементов и отношений между ними, выделяемое из среды в соответствии с определенной целью, в рамках определенного временного интервала.

В данном случае под элементом принято понимать простейшую неделимую часть системы. При этом ответ на вопрос: что является такой частью? - не может быть однозначным и зависит от целей рассмотрения объекта как системы.

Объективно с точки зрения элементов внешней среды любая система существует как источник удовлетворения ее потребностей. Из этого следует, что простейшая модель взаимодействия между системой и средой выглядит следующим образом (рис. 1.1).

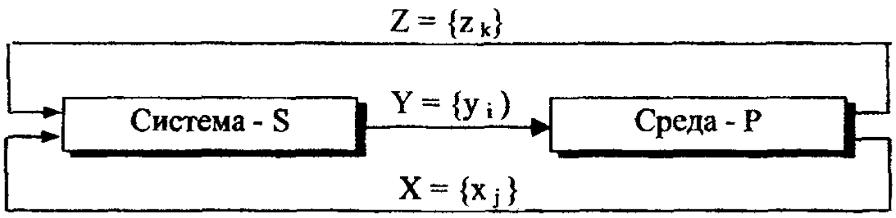


Рис. 1.1. Модель взаимодействия системы и среды

Элементы внешней среды задают системе множество целей и ограничений - $Z =-\{z_к\}$ и поставляют множество ресурсов - $X = \{x_j\}$.

Выходом из системы является множество конечных продуктов и услуг (КП) - $Y = \{y_j\}$, ориентированных на удовлетворение потребностей внешней среды. При этом множество конечных продуктов и ресурсов можно классифицировать на следующие группы: материальные, информационные, финансовые, трудовые, энергетические. В ряде случаев в классификаторе выходов системы помимо полезных конечных продуктов необходимо выделять отходы, т.е. конечные продукты, оказывающие негативное влияние на внешнюю среду.

Рассмотрим фрагмент модели взаимодействия учебного заведения с элементами внешней среды.

В качестве конечных продуктов учебного заведения можно рассматривать следующие множества:

• инженерные и научные кадры:

y_1 - инженерные кадры, подготовленные по типовым учебным планам;

y_2 - инженерные кадры, подготовленные по заказам органов власти и управления;

y_3 - инженерные кадры, подготовленные по заказам финансовых институтов;

y_4 - инженерные кадры, подготовленные по заказам конкретного предприятия и т.д.;

y_5 - кадры высшей квалификации;

• информационную продукцию вуза:

y_6 - учебно-методическая литература;

y_7 - научно-техническая литература;

y_8- отчетная информация о деятельности вуза;

y_9- научно-технические разработки вуза. В качестве входных ресурсов учебного заведения выделим:

• финансовые ресурсы:

x_1 - средства федерального бюджета для организации учебного процесса;

x_2 - средства местного бюджета для организации учебного процесса;

x_3 - средства внебюджетных фондов для организации учебного процесса;

x_4 - средства благотворительных фондов для организации учебного процесса;

x_5- кредиты банков для организации учебного процесса;

x_6- финансовые ресурсы для организации научно-исследовательской деятельности;

x_7 - финансовые ресурсы для организации административно-хозяйственной деятельности;

• абитуриентов, поступающих в вуз:

x_8- на основе госбюджетного финансирования;

x_9- по заказам органов власти и управления;

x_{10} - по заказам финансовых институтов;

x_{11} - по заказам конкретных промышленных предприятий;

x_{12} - на личные сбережения родителей.

В качестве ограничений, определяющих деятельность вуза, можно рассматривать следующие:

• ограничения по учебной деятельности:

z_1 - требования государственного образовательного стандарта на подготовку специалистов по конкретной специальности;

z_2 - требования органов власти и управления к качеству подготовки специалистов;

z_3 - требования финансовых структур к качеству подготовки специалистов;

• ограничения по научно-исследовательской деятельности:

z_4 - требования федеральных органов к качеству выполнения госбюджетных тем;

z_5 - требования заказчиков к качеству выполнения хоздоговорных тем.

Понятие проблемной ситуации

Как было показано в предыдущем подразделе, взаимодействие между системой и средой построено по следующей схеме: среда поставляет системе ресурсы, устанавливает цели, ограничения, а получает из системы и потребляет ее конечные продукты (КП). Характерно, что КП системы принципиально не могут быть созданы в среде (в противном случае нет необходимости выделять систему из среды).

Возникшая либо назревающая степень неудовлетворения элементов внешней среды конечными продуктами системы либо низкая эффективность взаимодействия элементов внешней среды с системой порождают новое понятие системного подхода - “проблемная ситуация”. В этом случае очевидно, что перечень проблемных ситуаций можно определить исходя из анализа взаимосвязи элементов множеств:

$X=\{x_j\}$, $Y=\{y_i\}$, $Z=\{z_k\}$

При проведении данного этапа системных исследований рекомендуется, прежде всего, четко сформулировать сущность проблемы и описать ситуацию, в которой она имеет место. При этом содержание деятельности включает следующие этапы:

- установление содержания проблемы, т.е. уяснение, существует ли в действительности проблема либо является надуманной;
- определение новизны проблемной ситуации;
- установление причин возникновения проблемной ситуации;
- определение степени взаимосвязи проблемных ситуаций;
- определение полноты и достоверности информации о проблемной ситуации;
- определение возможности разрешения проблемы.

Определение существования проблемы предполагает проверку истинности или ложности формулировки проблемы и ее принадлежности. Проверка истинности существования проблемы должна определяться, прежде всего, по наличию в системе совокупности экономических и социальных потерь, а ее значимость - по критерию экономического либо социального эффекта, получаемого в системе после ликвидации проблемной ситуации. Оценка же степени проблемности должна производиться путем сопоставления фактических (в данный момент либо в будущем) значений целей с их плановыми либо нормативными значениями.

Определение новизны проблемной ситуации необходимо для выявления и установления возможных прецедентов или аналогий. Наличие прошлого опыта или нормативных рекомендаций позволяют существенно облегчить работу экспертов по выработке и принятию решений по ликвидации проблемы.

Установление причин (как в системе, так и во внешней среде) возникновения проблемы позволяет глубже понять закономерности функционирования объекта управления, вскрыть наиболее существенные факторы, приведшие к проблемной ситуации.

При анализе проблемной ситуации необходимо установить возможные взаимосвязи рассматриваемой проблемы с другими проблемами. При этом необходимо провести классификацию этих проблем на главные и второстепенные, общие и частные, срочные и несрочные. Анализ взаимосвязей проблем создает возможности четкого и глубокого выявления причинно-следственных зависимостей и способствует выработке комплексного решения, что, в свою очередь, позволяет выдавать рекомендации по изменению не только исследуемой системы, но и внешней среды.

Большое значение в анализе имеет определение степени полноты и достоверности информации о проблемной ситуации. В случае полной информации нетрудно сформулировать сущность проблемы и комплекс характеризующих ее условий. Если же имеет место неопределенность информации, то необходимо рассмотреть две альтернативы: провести работу по получению недостающей информации; отказаться от получения дополнительной информации и принимать решение в условиях имеющейся неопределенности. Выбор той или иной альтернативы в каждом конкретном случае надо производить исходя из схемы "затраты - эффект".

Важной составной частью анализа проблемной ситуации является определение степени разрешимости проблемы. В данном случае уже на предварительном этапе необходимо хотя бы приблизительно оценить возможность разрешения проблемы, поскольку не имеет смысла заниматься поиском решений для неразрешимых в данный момент времени проблем.

Сложность и многообразие систем и проблемных ситуаций требуют разработки формальных процедур организации такого рода деятельности. В предлагается следующий перечень методов, позволяющих систематизировать анализ и оценку проблемные ситуаций:

- анкетное обследование;
- прогнозирование на базе временных рядов;

• производное прогнозирование (использование уже полученных прогнозов для оценки каких-либо ситуаций. Например, компания, производящая запчасти к автомобилям, может воспользоваться прогнозами об объемах продаж автомобилей);

• моделирование на базе факторного и регрессионного анализа (установление причинно-следственных связей между некоторыми факторами и переменной величиной, которую необходимо определить);

• метод мозгового штурма;

• метод Дельфи;

• метод разработки сценариев.

Более подробная информация по некоторым методам будет представлена в следующих разделах учебного пособия.

Продолжая рассматривать пример анализа взаимодействия учебного заведения с элементами внешней среды, выделим следующий перечень проблемных ситуаций:

• на взаимосвязи y_4- низкое качество подготовки специалистов, несоответствующее требованиям современного производства;

• на взаимосвязи x_1 - низкий уровень финансирования учебного процесса со стороны государства;

• на взаимосвязи x_3 - низкие объемы и темпы привлечения внебюджетных средств при организации целевой и коммерческой подготовки студентов;

• на взаимосвязи x_8 - низкий конкурс при поступлении в вуз по ряду специальностей и т.д.

Понятие цели системы

Понятие цели и связанные с ним понятия целенаправленности, целеустремленности, целесообразности трудно сформулировать ввиду их неоднозначного толкования. Так, в БСЭ цель определяется как “заранее мыслимый результат созидательной деятельности человека”. Кроме того, в литературе имеется еще ряд альтернативных вариантов определения цели системы:

• “желаемое состояние выходов системы”;

• “определенное извне или установленное самой системой состояние ее выходов”;

• “идеальный образ того, чего человек либо группа людей хочет достичь”;

• “предвосхищение в сознании результата, на достижение которого направлены действия”;

• “требуемые внешней средой результаты деятельности системы, заданные на множестве выходных конечных продуктов”.

В данном случае при определении понятия цели будем исходить из следующих предпосылок. Поскольку проблемная ситуация идентифицируется с анализом взаимоотношений системы с элементами внешней среды, то цели системы должны выражаться через идеальный информационный образ этих взаимоотношений.

Таким образом, главная трудность формирования целей связана с тем, что цели являются как бы антиподом проблем. Формулируя проблемы, мы говорим в явном виде, что нам не нравится. Говоря о целях, мы пытаемся сформулировать, что мы хотим. При формулировке цели не следует подменять ее средствами. Предположим, вы хотите “улучшить информационное обслуживание своей фирмы” - приобретение необходимого количества ПЭВМ является лишь одним из возможных действий в этом направлении. В дальнейшем будем исходить из следующей классификации целей (рис. 1.3).

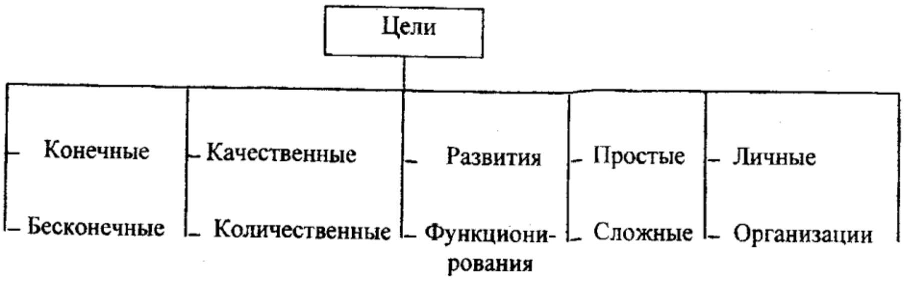


Рис. 1.3. Классификация целей

Конечные цели характеризуют вполне определенный результат, который может быть получен в заданном времени и пространстве. В этом случае цель можно задать в виде желаемых значений (или области желаемых значений) параметров состояния системы. Таким образом, конечная цель может быть представлена как некоторая точка (или область) в пространстве состояний.

Бесконечные цели определяют, как правило, общее направление деятельности.

Бесконечная цель может задаваться как вектор в пространстве состояний системы, например, в виде функций максимизации или минимизации параметров состояния.

Выбор того или иного класса целей зависит от характера решаемой проблемы. Очевидно, что при определении целей необходимо исходить из общественных интересов системы. При этом формулировка целей может выражаться как в качественной, так и в количественной форме, должна быть четкой и компактной, носить повелительный характер.

По отношению к состоянию целей система может находиться в двух режимах: функционирования и развития. В первом случае считается, что система полностью удовлетворяет потребности внешней среды и процесс перехода ее и ее отдельных элементов из состояния в состояние происходит при постоянстве заданных целей. Во втором случае считается, что система в некоторый момент времени перестает удовлетворять потребностям внешней среды, и требуется корректировка прежних целевых установок.

Учитывая, что практически все системы относятся к классу многопродуктовых (многоцелевых) систем, следует рассматривать простые (частные) цели системы и сложные (комплексные) цели. Так, например, для достижения успеха в бизнесе можно ограничиться заданием целей в основных областях деятельности (производство, финансы, коллектив, экология):

- максимизация объема выпуска продукции;
- минимизация затрат ресурсов;
- максимизация прибыли;
- максимизация эффективности инноваций;
- минимизация финансовых затрат;
- минимизация социальной напряженности;
- минимизация загрязнения окружающей среды.

Современная концепция управления по целям является одним из эффективных средств организации корпоративного управления. Она основана на том, что каждый член организации представляет себе цели организации и стремится к их достижению. При этом для такого управления характерны следующие особенности:

1) деятельность сотрудников должна оцениваться по ее результатам (достижениям), а не по количеству отработанного времени;

2) сотрудники должны знать цели организации и стремиться к их достижению;

3) сотрудники должны иметь право отстаивать свои собственные цели.

Установление личных целей придает человеку осмысленное поведение и высокую мотивацию. Римский философ Сенека однажды высказался: “Когда не знаешь, какая гавань тебе нужна, любой ветер будет попутным”. Многочисленные социологические исследования в этом направлении показывают, что человек всегда стремится достичь разумного компромисса между личными и профессиональными интересами. Личные интересы, как правило, определяются человеком в виде определенного стандарта удовлетворения своих потребностей. Одним из возможных вариантов задания таких стандартов для определения личных целей является следующий, включающий семь направлений целеполагания:

- карьера;
- душевное состояние;
- вера (религия), идеалы;
- финансы;
- физическое состояние;
- друзья;
- семья.

Содержательная формулировка целей является необходимым, но не достаточным условием осуществления целеполагания. Для конкретизации целей необходимо задать критерии достижения целей и ограничения, при которых осуществляется поиск возможных вариантов решения.

Критерий - мера близости к цели. В этом смысле критерий — это модель цели.

Критерий достижения целей отождествляется с показателем эффективности системы и может выражаться как в качественной, так и в количественной форме. От критериев требуется как можно большее сходство с целями для того, чтобы оптимизация решения в системе выбранных критериев соответствовала максимальному приближению к цели.

Наряду с выбранными критериями большое влияние на выбор того или иного варианта решения оказывает система выделенных в задаче ограничений.

Ограничения - это условия, отражающие влияние внешних и внутренних факторов, которые нужно учитывать в задаче принятия решений. Требования системности при рассмотрении вопроса требуют учета всех возможных ограничений: организационных, экономических, правовых, технических, психологических и т.д. При этом качественные ограничения формулируются, как правило, в терминах "не разрешается", "не допускается", а количественные - "не более", "не менее", "в интервале от-до". Ограничения, как правило, дополняют (конкретизируют) сформулированные ранее цели и в ряде случаев могут сделать цели нереализуемыми. В этом случае необходимо через проведение ряда итерационных процедур снять часть ограничений.

При формировании целей и ограничений используется так называемое пространство целеполагания. Пространство целеполагания - совокупность систем, предъявляющих требования к исследуемой системе. Для организационных систем это пространство включает такие системы окружающей среды:

• вышестоящие, организации, местные и федеральные органы управления;

• подведомственные организации;

• потребители и поставщики.

В пространство целеполагания также включается сама система, предъявляющая собственные требования.

Нужно отметить, что установить правильную систему целей намного важнее, чем найти наилучший вариант решения. Не самый лучший вариант приведет все-таки к целевому результату. Выбор же неправильной цели приводит не столько к решению самой проблемы, сколько к появлению новых проблем.

Примеры целей для ликвидации проблемных ситуаций по y_4 и x_3 :

1) повышение качества подготовки специалистов, проходящих обучение на контрактной основе;

2) обеспечение среднего балла по диплому для специалистов, обучаемых на контрактной основе, не ниже 4,5;

3) увеличение объема привлекаемых внебюджетных средств от контрактного обучения до N рублей;

4) обеспечение 100%-го выполнения договорных обязательств с предприятиями, получающими молодых специалистов.

Наличие проблемной ситуации и сформулированной цели системы как прообраза ее будущего состояния требует реализации определенных действий по достижению заданных целевых результатов.

В этом случае определим функцию системы как способ (совокупность действий) достижения системой поставленных целей.

В действующих системах множество функций задается, как правило, в уставе организации, множестве должностных инструкций. В этом случае задачей системного анализа является выявление соответствия между целями организации и множеством ее нормативных функций.

Для определения множества функций вновь проектируемых систем либо определения множества вариантов решения каких-либо проблемных ситуаций с успехом могут быть использованы некоторые формальные приемы системного анализа: метод декомпозиции; использование стандартных моделей сложных систем; IDEFO-методология; метод формирования иерархических содержательных моделей и др. Перечисленные методы будут рассмотрены ниже.

Например, при реализации цели "Обеспечение качества подготовки специалистов, соответствующего требованиям конкретного предприятия" можно сформулировать следующие функции (виды деятельности):

1) заключение договоров по целевой подготовке специалистов;

2) перевод студентов на индивидуальное обучение;

3) подготовка цикла специализированных занятий, соответствующих требованиям предприятия;

4) развитие материальной базы учебного процесса и т.д. В ряде случаев для генерации множества функций рекомендуется привлекать внешних экспертов, специалистов, не обремененных прошлым системы, не знающих ее внутренних ограничений и противоречий.

Понятие структуры системы

Рассмотренные выше этапы создания системы для конкретной проблемной ситуации (формирование целей и способов их достижения, т.е. функций) объективно требуют следующего логического шага - выявления таких элементов и отношений между ними (внутреннего устройства системы), которые реализуют целенаправленное функционирование системы.

Элементы любого содержания, необходимые для реализации функций, назовем частями или компонентами системы. Совокупность частей (компонентов) системы образует ее элементный (компонентный) состав. При этом те элементы системы, которые рассматриваются как неделимые, будут называться элементарными. Часть системы, состоящая более чем из одного элемента, образует подсистему. Вместе с тем каждую из подсистем, реализующих конкретную функцию, можно, в свою очередь, рассматривать как новую систему и т.д.

Отношения между элементами системы могут быть самыми разнообразными. Можно выделить следующие типы отношений:

• классификационные (“род - вид”);

• отношения типа “часть- целое”;

• пространственные отношения;

• временные отношения;

• материальные (вещественные, энергетические, информационные) связи;

• определяющие отношения (определяющие свойства, в том числе через математические, логические соотношения между свойствами элементов);

• эмпирические отношения.

К последнему типу относятся весьма разнообразные отношения, присутствующие в реальных системах, например: “руководить”, “владеть”, “нравиться” и т.д.

В общем случае под формальной структурой понимается совокупность функциональных элементов и их отношений, необходимых и достаточных для достижения системой поставленных целей. Из определения следует, что формальная структура описывает нечто общее, присущее системам одного типа.

В свою очередь, материальная структура является носителем конкретных типов и параметров элементов системы и их взаимосвязей.

Приведенные рассуждения позволяют сделать два вывода относительно сущности формальных структур: фиксированной цели соответствует, как правило, одна и только одна формальная структура; одной формальной структуре может соответствовать множество материальных структур.

При проведении системного анализа на этапе изучения формальных и материальных структур системы аналитики решают обычно следующие задачи:

• определение соответствия существующей структуры новым целям и функциям системы;

• определение необходимости реорганизации существующей структуры либо проектирования принципиально новой структуры;

• определение вида распределения (перераспределения) новых и старых функций системы по элементам структуры.

Рассмотрим типовые структуры, используемые при построении административных, производственно-технологических и вычислительных систем (рис. 1.).

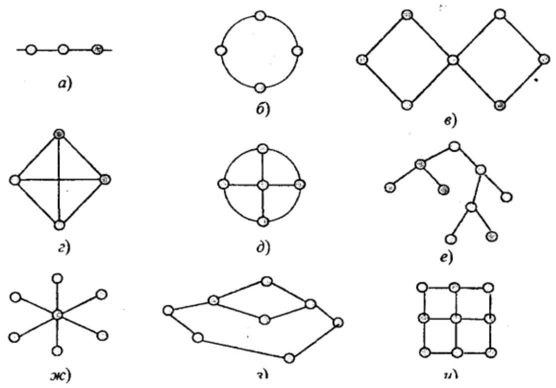


Рис. 1. Типы (виды) структур:
а) линейная; б) кольцевая; в) сотовая; г) многосвязная; д) колесо;
е) иерархическая; ж) звездная; з) графовая; и) матричная

Линейная структура (рис. 1. а) характеризуется тем, что каждая вершина связана с двумя соседними. При выходе из строя хотя бы одного элемента (связи) структура разрушается.

Кольцевая структура (рис. 1. б) отличается замкнутостью, любые два элемента обладают двумя направлениями связи. Это повышает скорость общения, делает структуру более живучей.

Сотовая структура (рис. 1. в) характеризуется наличием резервных связей, что повышает надежность (живучесть) функционирования структуры, но приводит к повышению ее стоимости.

Многосвязная структура (рис. 1. г) имеет структуру полного графа.

Надежность функционирования максимальная, эффективность функционирования высокая за счет наличия кратчайших путей, стоимость - максимальная.

Частным случаем многосвязной структуры является структура "колесо" (рис.1.д). Иерархическая структура (рис. 1. е) получила наиболее широкое распространение при проектировании систем управления, чем выше уровень иерархии, тем меньшим числом связей обладают ее элементы. Все элементы, кроме верхнего и нижнего уровней, обладают как командными, так и подчиненными функциями управления. Каждый уровень такой системы характеризуется уровнем иерархии, который определяется как отношение числа исходящих связей к числу входящих.

Звездная структура (рис. 1. ж) имеет центральный узел, который исполняет роль центра, все остальные элементы системы являются подчиненными.

Графовая структура (рис. 1.з) является инвариантной по отношению у иерархической и используется обычно при описании производственно-технологических систем.

Матричная структура (рис. 1. и) используется, в частности, для описания матричной схемы управления оргсистемой.

В целом структура является материальным носителем целевой деятельности по ликвидации проблемной ситуации и от ее эффективности во многом зависит конечный результат этой деятельности. При выборе варианта структуры целесообразно использовать некоторые обобщенные показатели эффективности.

В литературе рассматриваются два класса таких показателей:

• показатели, описывающие статические параметры системы;

• показатели, описывающие ее динамические свойства.

К первой группе показателей относятся число уровней иерархии, характер взаимосвязей между элементами, степень централизации (децентрализации) управления. Вторая группа показателей описывает эффективность функционирования системы: оперативность, централизацию, периферий-ность, живучесть.

Оперативность оценивается временем реакции системы на воздействие внешней среды либо скоростью ее изменения и зависит, в основном, от общей схемы соединения элементов и их расположения.

Централизация определяет возможности выполнения одним из элементов системы руководящих функций. Численно централизация определяется средним числом связей центрального (руководящего) элемента со всем” остальными.

Периферийность характеризует пространственные свойства структур Численно периферийность определяется показателем центра тяжести структуры, при этом в качестве единичной оценки меры связности выступав "относительный вес" элемента структуры.

Внешние условия системы

Системное проектирование организации позволяет создать идеально нормативную систему, которая может служить эталоном реальных систем функционирующих в условиях ограничений, накладываемых внешней средой. При несоответствии существующей структуры системы нормативному набору функций, приводящему к достижению целей и невозможности ее реорганизации за счет внутренних ресурсов системы, должны рассматривать; варианты целенаправленного воздействия на систему элементов внешней среды.

При исследовании системы в окружающую среду включаются лишь следующие элементы :

а) изменение свойств (параметров) которых влияет на систему;

б) свойства (параметры) которых изменяются вследствие изменения состояния системы.

В большинстве случаев в качестве элементов внешней среды, активно воздействующих на систему, рассматриваются:

• внешние ресурсы (финансовые, материальные, трудовые);

• ограничения (законодательные акты, нормативно-правовые документы и т.д.), задаваемые, как правило, в виде некоторых информационных ресурсов;

• потребители конечного продукта.

Иногда, после определения множества необходимых ресурсов, становится очевидной нереальность заданных целевых результатов и требуется корректировка исходных целей либо изменение множества функций по реализации целей.

В случае, если внешних ресурсов достаточно, то можно говорить о ликвидации анализируемой проблемной ситуации. В противном случае речь должна пойти о переосмыслении проблемы и формулировании новой системы целей.

Использование приведенных понятий и определений системной деятельности позволяет выявить наличие либо отсутствие проблемной ситуации, выявить основные направления (целя) ее ликвидации, определить, какие функции системы при этом надо реализовать и какой структурой, выяснить имеются ли для этой реализации соответствующие ресурсы.

Легко заметить, что цепочка "проблемная ситуация - цели - функция -структура - внешние ресурсы" образует логически обоснованную (на содержательном уровне) последовательность системной деятельности (рис. 2).

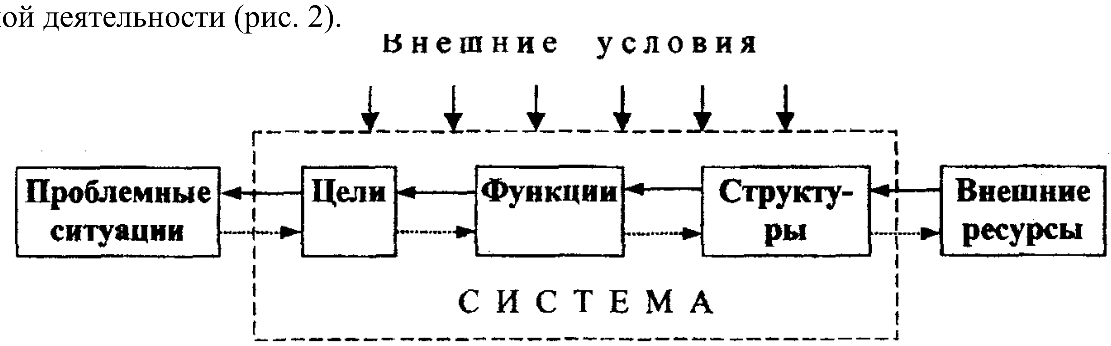


Рис. 2. Модель этапов системной деятельности

На рисунке сплошной линией показана последовательность функционирования системы, а пунктирной - последовательность анализа или проектирования системы.

Система - целенаправленно функционирующая структура, способная к разрешению проблемной ситуации при определенных внешних условиях.

Принятие решений - это важный и сложный процесс. Тем не менее, многие руководители полагают, что принятие решений это не что иное, как выбор одного из нескольких возможных вариантов действий. Увы, решения подобного рода представляют собой всего лишь один шаг сложного и динамичного процесса. Самое страшное в управлении - это не плохое решение, а отсутствие решения. Чтобы научиться принимать правильные решения, необходимо принимать много решений. Чарльз Грегг в своей работе "Мудрость нельзя передать словами" пишет: "Бизнес, по крайней мере сегодня, не является точной наукой. Не существует в природе единственно верного ответа на деловую проблему. Для студента или для менеджера невозможно взять книгу и найти в ней путь к правильному решению. В каждой деловой ситуации всегда есть обоснованная возможность того, что правильный ответ на нее.

Разработка и оптимизация решения конкретной проблемы методами моделирования - довольно сложная процедура, которая может быть представлена последовательностью основных этапов:

1. Постановка задачи;
2. Определение критерия эффективности анализируемой операции;
3. Количественное измерение факторов, влияющих на исследуемую операцию;
4. Построение математической модели изучаемого объекта (операции);
5. Количественное решение модели и нахождение оптимального решения;
6. Проверка адекватности модели и найденного решения анализируемой ситуации;
7. Корректировка и обновление модели. Количество всевозможных конкретных моделей почти так же велико, как и число проблем, для решения которых они разработаны.

Наиболее распространённые типы моделей: модели теории игр; модели теории очередей или оптимального обслуживания; модели управления запасами; модели линейного программирования.

Модели теории игр. Большинство хозяйственных операций можно рассматривать как действия, совершаемые в условиях противодействия. К противодействиям следует относить такие факторы, как авария, пожар, кража, забастовка, нарушение договорных обязательств и т.п. Однако наиболее массовый случай противодействия - конкуренция. Поэтому одним из важнейших условий, от которого зависит успех организации, является конкурентоспособность. Очевидно, что возможность прогнозировать действия конкурентов - существенное преимущество для любой коммерческой организации.

Принимая решение, следует выбирать альтернативу, позволяющую уменьшить степень противодействия, что в свою очередь снизит степень риска. Такую возможность предоставляет менеджеру теория игр, математические модели которой побуждают анализировать возможные альтернативы своих действий с учётом возможных ответных действий конкурентов. Первоначально разработанные для военно-стратегических целей модели теории игр применяются в бизнесе для прогнозирования реакции конкурентов на принимаемые решения, например, на изменение цен, выпуск новых видов товаров и услуг, выход на новые сегменты рынка и т.п. Так, принимая решение об изменении уровня цен на свои товары, руководство фирмы должно прогнозировать реакцию и возможные ответные действия основных конкурентов. И если с помощью модели теории игр будет установлено, что, например, при повышении цены конкуренты не сделают того же, организация, чтобы не попасть в невыгодное положение, должна отказаться от этой альтернативы и поискать другое решение проблемы. Следует, однако, отметить, что используются эти модели довольно редко, так как слишком упрощены по сравнению с реальными экономическими ситуациями, настолько изменчивыми, что полученные прогнозы бывают не слишком достоверны.

Модели теории очередей или оптимального обслуживания. Они используются для нахождения оптимального числа каналов обслуживания при определённом уровне потребности в них. К ситуациям, в которых такие модели могут быть полезны относятся, например, определение количества телефонных линий, необходимых для ответов на звонки клиентов; троллейбусов на маршруте, необходимых, чтобы на остановках не скапливались большие очереди; операционистов в банке, чтобы клиенты не ждали, пока ими смогут заняться и т.п. Проблема здесь заключается в том, что дополнительные каналы обслуживания (больше телефонных линий, троллейбусов или банковских служащих) требуют дополнительных ресурсов, а их загрузка неравномерна (избыточная пропускная способность в одни периоды времени и появление очередей - в другие). Следовательно, нужно найти такое решение, которое позволяет сбалансировать дополнительные расходы на расширение каналов обслуживания и потери от их недостатка. Модели теории очередей как раз и служат инструментом нахождения такого оптимального решения.

Модели управления запасами. Любая организация должна поддерживать некоторый уровень запасов своих ресурсов, чтобы избежать простоев или перерывов в технологических процессах и сбыте товаров или услуг. В жизни мы принимаем десятки и сотни решений. К решениям относятся, как малозначащий выбор одежды и просмотр телевизионных программ, так и выбор места работы или ВУЗа для получения образования. В силу неосознаваемых психологических факторов мы зачастую уделяем непропорционально много внимания одним решениям, пренебрегая значимостью других. Многие решения принимаются без должного систематического обдумывания. Однако в управлении принятие решения - это более систематизированный процесс, чем в частной жизни.

Управленческие решения - это выбор альтернативы, осуществлённый руководителем в рамках его должностных полномочий, компетенции и направленный на достижение целей организации. Что отличает управленческое решение от частного выбора?

1. Цели. Субъект управления (будь то один или группа) принимает решения исходя не из своих собственных потребностей (хотя их влияние и играет определённую роль), а в целях решения проблем конкретной организации.

2. Последствия. Частный выбор индивида сказывается на его собственной жизни и может повлиять на немногих близких ему людей.

Менеджер, особенно высокого ранга, выбирает направление действий не только для себя, но и для организации в целом и её работников, и его решения могут существенно повлиять на жизнь многих людей. Если организация велика и влиятельна, решения её руководителей может серьёзно отразиться на социально-экономической ситуации целых регионов. Например, решение закрыть нерентабельное предприятие организации может существенно повысить уровень безработицы.

3. Разделение труда. Если в частной жизни человек, принимая решение, как правило, сам его и выполняет, то в организации существует определённое разделение труда: одни работники (менеджеры) заняты решением возникающих проблем и принятием решений, а другие (исполнители) - реализацией уже принятых решений.

4. Профессионализм. В частной жизни каждый человек самостоятельно принимает решения в силу своего интеллекта и опыта. В управлении организацией принятие решений - гораздо более сложный, ответственный и формализованный процесс, требующий профессиональной подготовки.

Выделяют два уровня решений в организации: индивидуальный и организационный.

Принятие решений в организации характеризуется:

1. сознательная и целенаправленная деятельность, осуществляемая человеком;

2.поведение, основанное на фактах и ценностных ориентирах;

3.процесс взаимодействия членов организации;

4. выбор альтернатив в рамках социального и политического состояния организационной среды;

5. часть общего процесса управления;

6. неизбежная часть ежедневной работы менеджера;

7. важностью для выполнения всех других функций управления.

Принятие правильного решения - это область управленческого искусства. Способность и умение делать это развиваются с опытом, приобретаемым руководителем на протяжении всей жизни. Совокупность первого и второго знания и умения составляют компетентность любого руководителя.

В зависимости от достигнутого уровня компетентности, говорят об эффективности работы менеджера.

В процессе разрешения сложных проблем с целью усиления способности менеджеров к принятию обоснованных и объективных решений могут применяться различные научные методы их разработки и оптимизации, которые принято делить на два основных класса: методы моделирования и методы экспертных оценок.

Методы моделирования (называемые также методами исследования операций) базируются на использовании математических моделей для решения наиболее часто встречающихся управленческих задач. Поддержание высокого уровня запасов повышает надёжность функционирования организации и избавляет от потерь, связанных с их нехваткой. С другой стороны, создание запасов требует дополнительных издержек на хранение, складирование, транспортировку, страхование и т.п. Кроме того, избыточные запасы связывают оборотные средства и препятствуют прибыльному инвестированию капитала, например, в ценные бумаги или банковские депозиты.

Методы экспертных оценок. При разработке и обосновании многих решений, которые полностью или частично не поддаются количественному анализу, значительный эффект приносят методы экспертных оценок Сущность экспертных методов принятия решений заключается в получении ответов специалистов на поставленные перед ними вопросы. Информация, полученная от экспертов, в целях минимизации погрешностей и влияния субъективного фактора обрабатывается с помощью специальных логических и математических процедур, и преобразуются в форму, удобную для выбора решения. Для подготовки и проведения экспертизы формируется организационная группа, обеспечивающая условия для эффективной работы экспертов.

Основные задачи этой группы:

1) постановка проблемы, определение цели и задач экспертизы;

2) разработка процедуры проведения экспертизы;

3) отбор, проверка компетентности и формирование группы экспертов;

4) проведение опроса экспертов и получение их оценок;

5) обработка, формализация и интерпретация полученной информации. Среди методов экспертных оценок широко распространены и используются на практике методы группового опроса: метод комиссий, метод “мозговой атаки”, различные модификации метода “Дельфи”. Большое значение этих методов состоит в том, что они усиливают элемент коллегиальности в процессе принятия сложных решений и, используя интуицию и коллективную генерацию идей, позволяют находить новые, оригинальные решения проблем, к которым нельзя прийти с помощью только логических рассуждений. Между рассмотренными методами разработки и оптимизации решений на практике довольно трудно установить чёткие границы, так как разрешение комплексных проблем современного менеджмента требует и комплексного использования различных логических, статистических, математических и эвристических приёмов. Поэтому не какая-то одна, а преобладающая группа способов и формирует тот или иной метод. Области применения методов принятия решений зависят в основном от характера решаемых проблем и условий принятия решений.

Модели управления запасами позволяют найти оптимальное решение, т.е. такое решение, при котором уровень запаса, который минимизирует издержки на его создание и поддержание при заданном уровне непрерывности производственных процессов.

Модели линейного программирования. Их применяют для нахождения оптимального решения в ситуации распределения дефицитных ресурсов при наличии конкурирующих потребностей. Например, с помощью модели линейного программирования управляющий производством может определить оптимальную производственную программу, т.е. рассчитать, какое количество изделий каждого наименования следует производить для получения наибольшей прибыли при известных объемах материалов и деталей, фонде времени работы оборудования и рентабельности каждого типа изделия. Большая часть разработанных для практического применения оптимизационных моделей сводится к задачам линейного программирования.

Однако с учётом характера анализируемых операций и сложившихся форм зависимости факторов могут применяться и модели других типов:

при нелинейных формах зависимости результата операции от основных факторов - модели нелинейного программирования;

при необходимости включения в анализ фактора времени - модели динамического программирования;

при вероятностном влиянии факторов на результат операции - модели математической статистики (корреляционно-регрессионный анализ).

Модели принятия решений в организации. В зависимости от того, как процесс принятия решений воспринимается и интерпретируется на различных уровнях (индивидуальным или организационным) можно выделить следующие методы принятия решений.

1. Рациональная модель предполагает выбор такой альтернативы, которая принесет максимум выгоды для организации. В рамках такого подхода требуется всестороннее определение проблемы, изнурительный поиск альтернатив, тщательный подбор данных и их углубленный анализ. Оценочные критерии в этом случае обычно определяются в начале процесса. Обмен информацией должен происходить беспристрастно на основе выбора лучшей альтернативы для организации.

2. Модель ограниченной рациональности в принятии решений предполагает, что менеджер в своем желании быть рациональным зависит от возможностей познания, привычек и предупреждений. В зависимости от преобладания первого или второго, модель может иметь две разновидности: личностно ограниченная рациональность; организационно-ограниченная рациональность. Определение проблем при этом подходе происходит упрощенным образом и поиск альтернативы осуществляется, по крайней мере в начале процесса, в известных для менеджера или организации областях.

Анализ данных также упрощается, сдвигаясь с долгосрочных ориентиров на краткосрочные. Обмен информацией точен только отчасти и отражает во многом индивидуальные предубеждения, основанные на целях отдельных подразделений. Оценочные критерии сводятся до уровня прошлого опыта. Первая из альтернатив, превысившая этот уровень, кладется в основу выбора. Люди преследуют цели удовлетворенности, а не максимизации. Удовлетворенность при этом трактуется как курс действий, который достаточно хорош для организации в целом и требует минимум усилий ее членов. Примером может служить факт того, что очень часто инвестиции в организациях направляются туда, где можно получить удовлетворительную прибыль, без попытки найти лучший вариант из всех имеющихся.

3. Политическая модель организационных решений обычно отражает желания членов организации максимально реализовать в первую очередь свои индивидуальные интересы. Предпочтения устанавливаются еще на раннем этапе процесса, исходя из групповых целей. Обмен информацией носит спорадический характер. Определение проблемы, поиск альтернативы, сбор данных и оценочные критерии выступают скорее всего, как средства, используемые для того, чтобы склонить решение в чью-либо пользу. Решение в данном случае становится функцией распределения власти в организации и эффективности политики, используемой различными участниками процесса. Вместо заключения. Каким бы хорошим ни казался руководитель, но если он не умеет принимать решений, то он не может долго оставаться на посту руководителя.

Искусству принимать решения можно научиться и постоянно совершенствоваться. Однако, существует множество факторов, которые могут серьёзно мешать процессу принятия решений:

1. Организационные неувязки, а также ситуация, когда у руководителя нет ясного представления о разделении труда на предприятии, о своих полномочиях и о полномочиях своих подчиненных. Ведь именно круг полномочий является основой для принятия решений;

2. Для принятия решений нет достаточной информации или же она находится в такой форме, которая не годится в качестве основания для действий руководителя;

3. Руководитель не видит необходимости принятия решения или просто не способен его принимать. Причиной этому может быть страх перед риском, боязнь сделать ошибку или обыкновенная неопытность. Если организация не заботится о повышении ответственности руководителей по мере роста их компетентности, не создаёт условий для принятия ими самостоятельных реше-

ний, то в такой организации не будут расти и руководители, они попросту не научатся принимать грамотных и ответственных решений.

4. Неясен сам процесс принятия решений. Это значит, что у руководителя нет полного представления о том, что в организации действительно делается, и на какой стадии рассмотрения находятся различные дела. Факт принятия одного решения является лишь составной частью эффективного процесса принятия решений. Каждый руководитель любого ранга должен чётко представлять свою долю в этом широком процессе.

Процесс принятия решения в чистом виде может подразделяться на следующие составные части:

1. Изучение ситуации, предшествующей принятию решения;
2. Взвешивание различных вариантов решения;
3. Выявление последствий и перспектив при различных вариантах решения;
4. Оценка и сравнение перспектив при различных вариантах решения;
5. Выбор решения из разных вариантов;
6. Принятие решений;
7. Разработка мероприятий по выполнению принятого решения;
8. Контроль за его исполнением.

Следует подчеркнуть, что решение считается готовым только тогда, когда достигнуты желаемые результаты. Руководитель сам должен участвовать во всех этапах принятия решения, но прежде всего его роль заключается в выборе наиболее подходящего решения из предложенных вариантов и в принятии окончательного решения.

Руководитель обычно принимает решение один, но всё чаще практикуется принятие решений группой. Поэтому руководитель должен быть хорошо подготовлен и к работе с группой. Процесс принятия решений с точки зрения рационального использования времени следует усовершенствовать.

Важнейшими моментами такого усовершенствования можно считать следующие:

1. Следует принимать множество решений, которые имеют общие подходы при их реализации;
2. На этапе принятия окончательного решения, принятое решение должно быть безальтернативным;
3. Нельзя допускать наложения решений друг на друга, т.е. не следует принимать несколько решений по одному и тому же вопросу;
4. Решения нельзя переносить;
5. Обычное перепоручение исполнения решения от одного лица другому следует изжить;
6. Решение должно соответствовать уровню организации и сотрудничества;
7. По повторяющимся решениям составляются правила их принятия. Следует добавить, чтобы они были правильно поняты на практике и соответствовали времени их выполнения с учетом произошедших изменений;
8. Процесс принятия решений надо развивать в сторону участия и эффективности. При этом нельзя забывать, что принимать участие в принятии решений не означает только присутствие при окончательном его утверждении. Наиболее значимым является участие в предварительных мероприятиях; Решения должны быть эффективными. Это означает, что надо шире привлекать в процесс принятия решений руководителей и других лиц, имеющих прямое к ним отношение.

Принятие решений в условиях неопределенности

Оценка сложных системы в условиях нестохастической неопределенности

Особенностями оценки сложных систем в условиях неопределенностиявляются:

1. Наличие в управляющей системе в качестве элемента ЛПР, осуществляющему управление на основе субъективных моделей, которые приводят к большому разнообразию поведения системы.
2. Алгоритм управления строит сама система управления, преследуя помимо целей старшей системы свои цели, не всегда совпадающие с внешними.

3. На этом этапе оценки ситуации в ряде случаев исходят не из фактической ситуации, а из той модели, которую использует ЛПР.

4. В процессе принятия решений большую роль играют логические рассуждения ЛПР, не поддающиеся формализации классическими методами математики.

5. При выборе управляющего воздействия ЛПР может оперировать нечеткими понятиями, отношениями и высказываниями.

6. В большинстве классов задач управление АСУ отсутствуют объективные критерии оценивания достижения целевого и текущего состояния ОУ, а также статистических данных для определения вероятностных законов для конкретного принятого решения.

Таким образом, методы принятия решений, используемые для детерминированных и вероятностных решений, для данного класса задач неприменимы

Поэтому для оценки систем в условиях нестохастической неопределенности используются методы, в основе которых лежит матрица эффективности в виде:

a_i	n_j				$K(a_i)$
	n_1	n_2	…	n_k	
a_1 a_2 $\vdots$ a_m	k_{11} k_{21} $\vdots$ k_{m1}	k_{12} k_{22} $\vdots$ k_{m2}		k_{1k} k_{2k} $\vdots$ k_{mn}	

где a_i - вектор управляемых параметров, определяющих свойства системы;

n_j - вектор неуправляемых параметров, определяющих состояния обстановки;

k_{ij} - значение эффективности системы a_i для состояния обстановки n_j ;

$K(a_i)$ - эффективность системы.

В зависимости от характера неопределенности операции делятся на игровые и статистические.

В игровых операциях неопределенность вносит своими сознательными действиями противник (теория игр).

Условия статистически неопределенных операций зависят от объективной действительности (природы). Природа пассивно по отношению к лицу, принимающему решение – теория статических решений.

Прежде всего отметим принципиальное различие между стохастическими факторами, приводящими к принятию решения в условиях рыска, и неопределенными факторами, приводящими к принятию решения в условиях неопределенности. И те, и другие приводят к разбросу возможных исходов результатов управления. Но стохастические факторы полностью описываются известной стохастической информацией, эта информация и позволяет выбрать лучшее в среднем решение. Применительно к неопределенным факторам подобная информация отсутствует.

В общем случае неопределенность может быть вызвана либо противодействием разумного противника, либо недостаточной осведомленностью об условиях, в которых осуществляется выбор решения.

Принятие решений в условиях разумного противодействия является объектом исследования теории игр. Мы этот вопрос рассмотрели выше.

Рассмотрим принципы выбора решений при наличии недостаточной осведомленности относительно условий, в которых осуществляется выбор.

Если распределение вероятностей будущих состояний природы неизвестно, вся информация о природе сводится к перечню ее возможных состояний. Человек в играх с природой старается действовать осмотрительно, второй игрок (природа, например, покупательский спрос) действует случайно. Таким образом, в сложных структурах каждому допустимому варианту решений X_i вследствие различных внешних условий могут соответствовать различные внешние условия (состояния) B_j и результаты a_{ij} решений. Следующий пример иллюстрирует это положение.

Пусть из некоторого материала требуется изготовить изделие, долговечность которого при допустимых затратах невозможно определить. Нагрузки считаются известными.

Варианты решений таковы:

X_1 – выбор размеров из соображений максимальной долговечности, т.е. изготовление изделия с минимальными затратами в предположении, что материал будет сохранять свои характеристики в течение длительного времени;

Xn – выбор размеров в предположении минимальной долговечности;

Xi – промежуточные решения.

Условия (состояния), требующие рассмотрения, таковы:

B_1 – условия, обеспечивающие максимальную долговечность;

Bm – условия, обеспечивающие минимальную долговечность;

Bj – промежуточные условия.

Под результатом решения a_{ij} здесь можно понимать оценку, соответствующую варианту X_i и условиям B_j и характеризующую экономический эффект (прибыль), полезность или надёжность изделия. Семейство решений описывается некоторой матрицей *nxm*, которую называют матрицей решений (условия игры задаются матрицей *nxm*). По аналогии с теорией игр, эту матрицу будем называть также платёжной матрицей.

Таблица. Матрица решений (n×m

Условия / Варианты	B_1	B_2	B_3		B_j		B_m
X_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}		a_{1j}		a_{1m}
X_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}		a_{2j}		a_{2m}
X_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}		a_{3j}		a_{3m}
X_i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}		a_{ij}		a_{im}
X_n	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}		a_{nj}		a_{nm}

Конструктор старается выбрать решение с наилучшим результатом, но, так как ему неизвестно, с какими условиями он столкнётся, он вынужден принимать во внимание все оценки *aij*, соответствующие варианту *Xi*.

Оценочная функция

Чтобы прийти к однозначному и по возможности наивыгоднейшему варианту решений даже в том случае, когда каким-то вариантам решений X_i могут соответствовать различные условия B_j, можно ввести подходящие оценочные (целевые) функции. При этом матрица решений сводится к одному столбцу. Каждому варианту X_i приписывается, таким образом, некоторый результат a_{ir}, характеризующий, в целом, все последствия этого решения. Такой результат мы в дальнейшем будем обозначать тем же символом a_{ir}.

Рассмотрим некоторые оценочные функции, которые в данном примере мог бы выбрать конструктор.

Оптимистическая позиция:

$$\max_i a_{ir} = \max_i(\max_j a_{ij}). \qquad (1)$$

Из матрицы результатов решений выбирается вариант (строка), содержащий в качестве возможного следствия наибольший из всех возможных результатов. Наш конструктор становится на точку зрения азартного игрока. Он делает ставку на то, что выпадет наивыгоднейший случай, и, исходя из этого, выбирает размеры изделия.

Позиция нейтралитета:

$$\max_i a_{ir} = \max_i \left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right). \qquad (2)$$

Конструктор исходит из того, что все встречающиеся отклонения результата решения от "среднего" случая допустимы, и выбирает размеры, оптимальные с этой точки зрения.

Имеется ряд критериев, которые используются при выборе оптимальной стратегии. Рассмотрим некоторые из них.

Особые случаи

Схематическое сопоставление всех возможных полезностей a_{ij} различных решений в матрице облегчает поначалу их обозрение, не требуя при этом формальной оценки. Эта матрица может быть меньшего объёма и даже выродиться в единственный столбец, если будет представлена полная информация о том, с каким внешним состоянием B_j следует считаться. Это соответствует элементарному сравнению различных технических решений. Матрица решений может, однако, свестись и к единственной строке. В этом случае мы имеем дело с так называемой фатальной ситуацией принятия решений, когда в силу ограничений технического характера, внешних условий и других причин остаётся единственный вариант, хотя его дальнейшие последствия зависят от внешнего состояния B_j, и поэтому результат решения оказывается неизвестным.

Таблица. Матрица решений (n×2)

Условия / Варианты	B_1	B_2
X_1	a_{11}	a_{12}
X_2	a_{21}	a_{22}
X_i	a_{i1}	a_{i2}
X_n	a_{n1}	a_{n2}

Таблица. Фатальная ситуация в принятии решений

Условия / Варианты	B_1	B_2	B_3		B_j		B_m
X_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}		a_{1j}		a_{1n}

Случается и так, что некоторый вариант решения, например, оказывается настолько удачным, что для другого варианта X_l из матрицы выполняются неравенства $a_{kj} \geq a_{lj}$ для j=1, …, n. Тогда говорят, что решение X_k доминирует над решением. Решение X_k в этом случае с самого начала оказывается лучшим, а вариант X_l, напротив, с самого начала не представляет далее интереса.

Классические критерии принятия решений

Максиминный критерий Вальда. Согласно этому критерию игра с природой ведётся как игра с разумным, причём агрессивным противником, делающим всё для того, чтобы помешать нам достигнуть успеха. Оптимальной считается стратегия, при которой гарантируется выигрыш не меньший, чем "нижняя цена игры с природой":

$$\alpha = Z_{MM} = \max_i (\min_j a_{ij}). \qquad (3)$$

Правило выбора решения в соответствии с критерием Вальда (максиминным критерием):

Правило выбора в соответствии критерием Вальда. Матрица решений (платёжная матрица) дополняется ещё одним столбцом из наименьших результатов air каждой строки. Выбрать надлежит те варианты, в строках которых стоят наибольшие значения air этого столбца.

Выбранные таким образом варианты полностью исключают риск. Это означает, что принимающий решение не может столкнуться с худшим результатом, чем тот, на который он ориентируется. Какие бы условия ни встретились, соответствующий результат не может оказаться ниже Z_{MM}. Это свойство заставляет считать максиминный критерий одним из фундаментальных. Поэтому в технических задачах он применяется чаще всего, как сознательно, так и неосознанно. Однако положение об отсутствии риска стоит различных потерь. Продемонстрируем критерий Вальда на примере (см. таблицу 1).

Таблица . Пример вариантов решения без учёта риска

B / X	B_1	B_2	B_3	a_{ir}	$\max_i a_{ir}$
X_1	1	10	1	1	
X_2	1.1	1.1	1.2	1.1	1.1

Выбирая вариант X_2, предписываемый критерием Вальда, мы избегаем неудачного значения 1, реализующего в варианте X_1 при внешнем состоянии B_1, получая вместо него при этом состоянии немного лучший результат 1.1, зато в состоянии B_2 теряем выигрыш 10, получая всего только 1.1. Это пример показывает, что в многочисленных практических ситуациях пессимизм минимаксного критерия может оказаться невыгодным

Применение критерия Вальда бывает оправдано, если ситуация, в которой принимается решение, характеризуется следующими обстоятельствами:

- о возможности появления внешних состояний Bj ничего не известно;
- приходится считаться с появлением различных внешних состояний Bj;
- решение реализуется лишь один раз;
- необходимо исключить какой бы то ни было риск, т.е. ни при каких условиях Bj не допускается получать результат, меньший, чем Z_{MM}.

Критерий пессимизма-оптимизма Гурвица.

Представляется логичным, что при выборе решения вместо двух крайностей в оценке ситуации придерживаться некоторой промежуточной позиции, учитывающей возможность как наихудшего, так и наилучшего, благоприятного поведения природы. Такой компромиссный вариант и был предложен Гурвицем. Согласно этому подходу для каждого решения необходимо определить линейную комбинацию min и max выигрыша и взять ту стратегию, для которой эта величина окажется наибольшей, т.е. стараясь занять уравновешенную позицию, Гурвиц предложил критерий (HW), оценочная функция которого находится где-то между точками предельного оптимизма и крайнего пессимизма. Оценочная функция имеет две формы записи:

$$Z_{HW} = \max_i \left[\gamma \min_j a_{ij} + (1-\gamma) \max_j a_{ij} \right], \tag{4}$$

где γ — “степень пессимизма” ("коэффициент пессимизма", весовой множитель), $0 \le \gamma \le 1$.

Правило выбора согласно критерию Гурвица (HW – критерия) формулируется следующим образом:

Матрица решений дополняется столбцом, содержащим средние взвешенные наименьшего и наибольшего результатов каждой строки. Выбираются те варианты Xi, в строках которых стоят наибольшие элементы a_{ir} этого столбца.

При γ=1 критерий Гурвица тождественен критерию Вальда, а при γ =0 – в критерий крайнего оптимизма (критерий азартного игрока), рекомендующий выбрать ту стратегию, при которой самый большой выигрыш в строке максимален. В технических приложениях правильно выбрать этот множитель бывает так же трудно, как и выбрать критерий. Вряд ли возможно найти количественную характеристику для тех долей оптимизма и пессимизма, которые присутствуют при принятии решения. Поэтому чаще всего весовой множитель γ=0.5 без возражений принимается в качестве некоторой "средней" точки зрения.

На выбор значения степени пессимизма оказывает влияние мера ответственности: чем серьезнее последствия ошибочных решений, тем больше желание принимающего решение застраховаться, то есть степень пессимизма γ ближе к единице.

Рассмотрим применение критерия Гурвица для данных таблицы 1 и степени пессимизма γ=0.6.

Для стратегии X_1 минимальное значение равно 1, а максимальное – 10. Используя формулу 4, вычислим a_{1r}=0.6*1+0.4*10=4.6. Аналогично для второй стратегии. Находим максимальное значение столбца a_{ir}. В результате получим таблицу 2 .

Таблица 2 .

X \ B	B_1	B_2	B_3	a_{ir}	$\max\limits_i a_{ir}$
X_1	1	10	1	4.6	4.6
X_2	1.1	1.1	1.2	1.14	

Следовательно, по критерию Гурвица при γ=0.6 следует выбирать стратегию X_1.

Замечание. В литературе используется и такая форма критерия Гурвица:

$$Z_{HW} = \max_i \left[\gamma \max_j a_{ij} + (1-\gamma) \min_j a_{ij} \right], \qquad (5)$$

где γ - “степень оптимизма” ("коэффициент оптимизма ", весовой множитель), 0≤γ≤1.

При γ=0 критерий Гурвица тождественен критерию Вальда, а при γ=1 совпадает с максиминным решением.

Критерий Гурвица предъявляет к ситуации, в которой принимается решение, следующие требования:

- о вероятностях появления Bj ничего не известно;
- с появлением состояний Bj необходимо считаться;
- реализуется лишь малое количество решений;
- допускается некоторый риск.

Критерий Сэвиджа (критерий минимакса риска).

На практике, выбирая одно из возможных решений, часто останавливаются на том, осуществление которого приведет к наименее тяжелым последствиям, если выбор окажется ошибочным. Этот подход к выбору решения математически был сформулирован американским статистиком Сэвиджем (Savage) в 1954 году и получил название принципа Сэвиджа. Он особенно удобен для экономических задач и часто применяется для выбора решений в играх человека с природой.

По принципу Сэвиджа каждое решение характеризуется величиной дополнительных потерь, которые возникают при реализации этого решения, по сравнению с реализацией решения, правильного при данном состоянии природы. Естественно, что правильное решение не влечет за собой никаких дополнительных потерь, и их величина равна нулю.

При выборе решения, наилучшим образом соответствующего различным состояниям природы, следует принимать во внимание только эти дополнительные потери, которые по существу, будут являться следствием ошибок выбора.

Для решения задачи строится так называемая “матрица рисков”, элементы которой показывают, какой убыток понесет игрок (ЛПР) в результате выбора неоптимального варианта решения.

Риском игрока r_{ij} при выборе стратегии **i** в условиях (состояниях) природы **j** называется разность между максимальным выигрышем, который можно получить в этих условиях и выигрышем, который получит игрок в тех же условиях, применяя стратегию i.

Если бы игрок знал заранее будущее состояние природы j, он выбрал бы стратегию, которой соответствует максимальный элемент в данном столбце: $\max\limits_j a_{ij}$, и тогда риск: $r_{ij} = \max\limits_j a_{ij} - a_{ij}$.

Критерий Сэвиджа рекомендует в условиях неопределенности выбирать решение, обеспечивающее минимальное значение максимального риска:

$$Z_S = \min_i \max_j r_{ij} = \min_i \max_j \left(\max_i a_{ij} - a_{ij} \right). \tag{6}$$

Рассмотрим применение критерия Сэвиджа для данных таблицы 1.

Строим матрицу "рисков" для этого находим максимальные значения для каждого столбца таблицы 1. Они равны 1.1; 10 и 1.2 соответственно и находим значения рисков по формуле $r_{ij} = \max_j a_{ij} - a_{ij}$. Дополняем эту матрицу столбцом наибольших разностей. Выбираем те варианты, в строках которых стоит наименьшее для этого столбца значение. В результате получим таблицу 3.

Таблица 3. Матрица рисков

B \ X	B_1	B_2	B_3	a_{ir}	$\max_i a_{ir}$
X_1	0.1	0	0.2	0.2	0.2
X_2	0	8.9	0	8.9	

Критерий Сэвиджа рекомендует выбрать стратегию X_1 .

Критерий Лапласа.

В ряде случаев представляется правдоподобным следующее рассуждение: поскольку неизвестны будущие состояния природы, постольку можно считать их равновероятными. Этот подход к решению используется в критерии “*недостаточного основания*” Лапласа.

Для решения задачи для каждого решения подсчитывается математическое ожидание выигрыша (вероятности состояний природы полагаются равными $q_j = 1/n$, $j = 1:n$), и выбирается то решение, при котором величина этого выигрыша максимальна.

$$Z_L = \max_i a_{ir},$$

$$a_{ir} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot q_j = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.$$

Гипотеза о равновероятности состояний природы является довольно искусственной, поэтому принципом Лапласа можно пользоваться лишь в ограниченных случаях. В более общем случае следует считать, что состояния природы не равновероятны и использовать для решения критерий Байеса-Лапласа.

Критерий Байеса-Лапласа.

Этот критерий отступает от условий полной неопределенности - он предполагает, что возможным состояниям природы можно приписать определенную вероятность их наступления и, определив математическое ожидание выигрыша для каждого решения, выбрать то, которое обеспечивает наибольшее значение выигрыша:

$$Z_{BL} = \max_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot q_j.$$

Этот метод предполагает возможность использования какой-либо предварительной информации о состояниях природы. При этом предполагается как повторяемость состояний природы, так и повторяемость решений, и, прежде всего, наличие достаточно достоверных данных о прошлых состояниях природы. То есть, основываясь на предыдущих наблюдениях прогнозировать будущее состояние природы (*статистический принцип*).

Возвращаясь к нашей таблице 1 предположим, что q_1=0.4, q_2=0.2 и q_3=0.4. Тогда согласно критерию Байеса-Лапласа таблицу 1 дополняем столбцом математических ожиданий и среди этих значений выбираем максимальное. Получим таблицу 4.

Таблица 4.

B / X	B_1	B_2	B_3	a_{ir}	$\max_i a_{ir}$
X_1	1	10	1	2.8	2.8
X_2	1.1	1.1	1.2	1.14	

Оптимальным является решение X_1.

Критерий Байеса-Лапласа предъявляет к ситуации, в которой принимается решение, следующие требования:

- вероятности появления состояний Bj известны и не зависят от времени;
- решение реализуется (теоретически) бесконечно много раз;
- для малого числа реализаций решения допускается некоторый риск.

При достаточно большом количестве реализаций среднее значение постепенно стабилизируется. Поэтому при полной (бесконечной) реализации какой-либо риск исключён.

Исходная позиция применяющего – критерий оптимистичнее, чем в случае критерия Вальда, однако она предполагает более высокий уровень информированности и достаточно длинные реализации.

Перечисленные критерии не исчерпывают всего многообразия критериев выбора решения в условиях неопределенности, в частности, критериев выбора наилучших смешанных стратегий, однако и этого достаточно, чтобы проблема выбора решения стала неоднозначной:

Таблица 5. Оптимальные варианты, полученные с помощью различных критериев

Решение	**Критерии**					
Стратегии	Вальда	maxmax	Гурвица, γ=0.6	Сэвиджа	Лапласа	Байеса-Лапласа q_1=0.4, q_2=0.2, q_3=0.4
X_1		*	*	*	*	*
X_2	*					

Из таблицы 5 видно, что от выбранного критерия (а, в конечном счете - от допущений) зависит и выбор оптимального решения.

Выбор критерия (как и выбор принципа оптимальности) является наиболее трудной и ответственной задачей в теории принятия решений. Однако конкретная ситуация никогда не бывает настолько неопределенной, чтобы нельзя было получить хотя бы частичной информации относительно вероятностного распределения состояний природы. В этом случае, оценив распределение вероятностей состояний природы, применяют метод Байеса-Лапласа, либо проводят эксперимент, позволяющий уточнить поведение природы.

Поскольку различные критерии связаны с различными условиями, в которых принимается решение, лучшее всего для сравнительной оценки рекомендации тех или иных критериев получить дополнительную информацию о самой ситуации. В частности, если принимаемое решение относится к сотням машин с одинаковыми параметрами, то рекомендуется применять критерий Байеса-Лапласа. Если же число машин не велико, лучше пользоваться критериями минимакса или Сэвиджа.

Пример. В приморском городе решено открыть яхт-клуб. *Сколько следует закупить яхт* (из расчета: одна яхта на 5 человек), если предполагаемое число членов клуба колеблется от 10 до 25 человек. Годовой абонемент стоит 100 денежных единиц. Цена яхты - 170 денежных единиц. Аренда помещения и хранение яхт обходится в 730 денежных единиц в год.

Решение. Несомненно, что имеет смысл рассматривать количество приобретаемых яхт в диапазоне от двух до пяти (4 варианта) и количество потенциальных яхтсменов от 10 до 25. Для уменьшения объема перебора ограничимся вариантами 10, 15, 20, 25 (если полученные выводы для смежных вариантов будут существенно разниться, проведем дополнительный, уточняющий расчет). Итак: $X = \{X_i\} = (2, 3, 4, 5)$ – количество яхт $(i=1,2,3,4)$; $B = \{B_j\} = (10, 15, 20, 25)$ – количество членов яхт-клуба $(j=1,2,3,4)$.

Для того, чтобы начать поиск решения, построим матрицу решений, элементы которой показывают прибыль при принятии i -го решения при j –ом количестве членов яхт-клуба:

$$a_{ij} = 100\times min(5\times X_i\ ;\ B_j) - 170\times X_i - 730$$

т.е. решающее правило в нашей задаче формулируется как "доход – затраты".
Выполнив несложные расчеты, заполним матрицу решений $\{a_{ij}\}$ (см. табл. 6):

Таблица 6. Платёжная матрица

B / X	B_1=10	B_2=15	B_3=20	B_4=25
X_1=2	-70	-70	-70	-70
X_2=3	-240	260	260	260
X_3=4	-410	90	590	590
X_4=5	-680	-80	420	920

Например, $a_{11} = 100\times min(5\times 2,\ 10) - 170\times 2 - 730 = -70$

$a_{12} = 100\times min(5\times 2,\ 15) - 170\times 2 - 730 = -70$

$a_{13} = a_{14} = -70$ (спрос на яхты останется неудовлетворенным).

Отрицательные значения показывают, что при этих соотношениях спроса на яхты и их наличия яхт-клуб несет убытки.

Критерий Вальда (выбор осторожной, пессимистической стратегии) – для каждой альтернативы (количество яхт в клубе) выбирается самая худшая ситуация (наименьшее значение величины прибыли) и среди них отыскивается гарантированный максимальный эффект:

$$Z_{MM} = max(\mathbf{-70}; -240; -410; -580) = \mathbf{-70}$$

__*Вывод*__: принимая решение по критерию Вальда, яхт-клубу следует закупить 2 яхты и максимум ожидаемого убытка не превысит 70 д.е.

Критерий Гурвица (компромиссное решение между самым худшим исходом и излишне оптимистическим). Рассмотрим изменение решения нашей задачи в зависимости от значений коэффициента оптимизма (в таблице 7 выделены значения, удовлетворяющие критерию Гурвица при различных γ):

Таблица 7. Решения по Гурвицу для различных γ

γ / X	γ=0,2	γ=0,5	γ=0,8
X_1 = 2	**-70**	-70	-70
X_2 = 3	-140	10	160
X_3 = 4	-210	90	390
X_4 = 5	-380	**170**	**620**

__*Вывод*__: при γ= 0,5 следует закупить 5 яхт и ожидать прибыль порядка, не меньшую 170 д.е. (надеемся на широкую популярность нашего клуба и определенную финансовую состоятельность любителей), при γ= 0,2 не следует закупать более 2 яхт (мы более осторожны в своих прогнозах и, скорее всего, предпочтем отказаться от создания клуба).

Критерий Сэвиджа (нахождение минимального риска). При выборе решения по этому критерию сначала матрице полезности сопоставляется матрица сожалений *D* - для нашего примера, вычитанием (-70) из первого столбца матрицы полезности, 260 из второго столбца, 590 и 920 из третьего и четвертого столбцов соответственно, получим матрицу рисков (см. табл. 8):

Таблица 8. Матрица рисков

B / X	B_1=10	B_2 =15	B_3 =20	B_4 =25	a_{ir}
X_1 = 2	0	330	660	**990**	990
X_2 = 3	170	0	330	**660**	660
X_3 = 4	**340**	170	0	330	**340**
X_4 = 5	**510**	340	170	0	590

Наименьшее значение среди максимальных элементов строк (выделенные в таблице значения) равно:

$$Z_S=min(990;\ 660;\ 340;\ 510)=\mathbf{340}$$

<u>*Вывод*</u>: покупая 4 яхты для открываемого яхт-клуба, мы уверены, что в худшем случае убытки клуба не превысят 340 д.е.

Критерий принятия решения Байеса-Лапласа. Предположим, что есть статистические данные, позволяющие оценить вероятность того или иного спроса на членство в яхт-клубе: *q=(0,1; 0,2; 0,4; 0,3)*. Тогда математическое ожидание величины прибыли для каждого из рассматриваемых вариантов решения (предложение яхт в яхт-клубе):

$$a_{1r} = (-70\times0,1)+(-70\times0,2)+(-70\times0,4)+(-70\times0,3) =-70\ ,$$

$$a_{2r}= (-240\times0,1)+(260\times0,2)+(260\times0,4)+(260\times0,3) =210;$$

$$\mathbf{a_{3r} = 390};\ \ a_{4r} = 370.$$

<u>*Вывод*</u>: в условиях рассматриваемой ситуации наиболее целесообразно закупить 4 яхты (в этом случае максимальная ожидаемая прибыль яхт-клуба составит 390 денежных единиц).

Для применения *критерия Лапласа* находим:

$$a_{1r} = ((-70)+(-70)+(-70)+(-70))\ /\ 4 = -70\ ;$$

$$a_{2r} = ((-240)+(260)+(260)+(260))\ /\ 4 =135;$$

$$\mathbf{a_{3r} = 215};\ \ a_{4r} = 170.$$

<u>*Вывод*</u>: в условиях равновероятности возникновения той или иной величины спроса на членство в яхт-клубе следует закупить 4 яхты и при этом можно рассчитывать на прибыль в размере 215 д.е.

Рассмотренные критерии приводят к различным решениям и дают тем самым информацию к размышлению (принятое решение здесь будет существенно зависеть от психологии и интуиции субъекта решения). Это неудивительно, так как критерии основаны на различных гипотезах. вводя ту или иную гипотезу о поведении среды, мы тем самым "снимаем неопределённость", однако сама гипотеза является только предположением, а не знанием. Было бы странным, если различные предположения приводили всегда к одному и тому результату.

Принятие решений в условиях риска

Принятие решений в условиях риска характеризуется тем, что поведение природы (среды) имеет случайный характер. Это проявляется в том, что существует некоторая вероятностная мера, в соответствии с которой возникают (наступают) те или иные состояния природы. При этом лицо принимающее решение имеет определённую информацию о вероятностях появления состояний среды, которая по своему характеру может быть весьма разнообразна. Например, имеется три состояния среды B_1, B_2 и B_3, то дополнительная информация о появлении этих состояний может заключаться в том, что состояние B_1 наименее вероятно, а состояние B_3 более вероятно.

Следовательно, принятие решений в условиях риска предполагает, кроме задания функции реализации, задание некоторой дополнительной информации о вероятностях состояния среды. Если множество состояний природы B конечно (число состояний равно m), то вероятностная мера на нём может быть задана вероятностным вектором $q=(q_1, q_2, \ldots, q_m)$, где $q_j \geq 0$ и $\sum_{j=1}^{m} q_j = 1$.

Таким образом, матрица выигрышей в условиях риска может быть представлена в следующем виде (см. таблицу 1)

Таблица 1. Платёжная матрица с вероятностным вектором состояния среды

Решения	Состояния среды				
	q_1	…	q_j	…	q_m
	B_1	…	B_j		B_m
X_1	a_{11}		a_{1j}		a_{1m}
…					
Xi	a_{i1}		a_{ij}		a_{im}
…					
Xn	a_{n1}		a_{nj}		a_{nm}

Выбирая решение Xi, игрок знает, что получит один из выигрышей $a_{11}, \ldots, a_{1m}$ с вероятностями $q_1, \ldots, q_m$ соответственно. Следовательно, исходом для принимающего решение при выборе им решения Xi является случайная величина

$$\xi\text{i} = \begin{bmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{im} \\ q_1 & \cdots & q_m \end{bmatrix}.$$

Итак, сравнение двух решений X_1 и X_2 сводится к сравнению соответствующих им случайных величин .ξ_1 и ξ_2.

Выбор оптимального решения обычно основывается на одном из следующих критериев:

1) критерий Байеса-Лапласа – ожидаемого значения (прибыли или расходов);
2) комбинации ожидаемого значения и дисперсии;
3) критерий произведения;
4) наиболее вероятного события в будущем и другие.

Критерий ожидаемого значения (критерий Байеса-Лапласа)

На прошлой лекции мы рассмотрели критерий Байеса-Лапласа. Использование данного критерия (в литературе встречается другое название – критерий "ожидаемого среднего значения") обусловлено стремлением максимизировать ожидаемую прибыль (или минимизировать ожидаемые затраты). Использование ожидаемых величин предполагает возможность многократного решения одной и той же задачи, пока не будут получены достаточно точные расчётные формулы. Математически это выглядит так: пусть ξ – случайная величина с математическим ожиданием $M\xi$ и дисперсией $D\xi$. Если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – значения случайной величины (с.в.) ξ, то среднее арифметическое их (выборочное среднее) значений

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

имеет дисперсию $\frac{D\xi}{n}$. Таким образом, когда $n \to \infty$

$\frac{D\xi}{n} \to 0$ и $\overline{x} \to M\xi$.

Другими словами при достаточно большом объёме выборки разница между средним арифметическим и математическим ожиданием стремится к нулю (так называемая предельная теорема теории вероятности). Следовательно, использование критерия "ожидаемое значение" справедливо только в случае, когда одно и то же решение приходится применять достаточно большое число раз. Верно и обратное: ориентация на ожидания будет приводить к неверным результатам, для решений, которые приходится принимать небольшое число раз.

Прежде чем перейти к модификации критерия Байеса-Лапласа рассмотрим данный критерий подробнее.

Известно, что естественной числовой характеристикой случайной величины ξ является её математическое ожидание Mξ, к которому приближается среднее значение этой случайной величины при большом количестве испытаний.

Если у человека, выступающего против природы, есть статистические данные о закономерностях в конкретных проявлениях природы, то задача легко может быть решена вероятностными методами.

Таким образом, если вероятности состояний природы известны и не изменяются со временем (стационарны), то оптимальным следует считать решение, максимизирующее ожидаемый выигрыш (которое дает наибольшее математическое ожидание выигрыша против известной стратегии природы – состояния или условия).

Пример. Фирма купила станок за 100 денежных единиц. Для его ремонта можно купить специальное оборудование за 50 ед. или обойтись старым оборудованием. Если станок выходит из строя, его ремонт с помощью спецоборудования обходится в 10 ед., без спецоборудования – в 40 ед. Известно, что в течение срока эксплуатации станок выходит из строя не более трех раз: вероятность того, что станок не сломается – 0.3; сломается 1 раз – 0.4; сломается 2 раза – 0.2; сломается 3 раза – 0.1. Требуется определить целесообразность приобретения специализированного ремонтного оборудования.

Формализация. Первый игрок имеет две чистые стратегии: покупать (X_1) и не покупать (X_2) специализированное ремонтное оборудование. У природы – второго игрока – четыре состояния: станок не выйдет из строя, выйдет один раз, сломается два раза и три раза. Функция выигрыша - затраты фирмы на покупку и ремонт станка, задается платежной матрицей (см. таблицу 1):

Таблица 1.

Решения	**Выход станка из строя**			
	B_1, ни разу	**B_2,1 раз**	**B_3,2 раза**	**B_4,3 раза**
X_1, не купить	-100	-140	-180	-220
X_2, купить	-150	-160	-170	-180

Решение. Рассмотрим сначала эту задачу как антагонистическую игру. В матрице методом минимакса находим седловую точку: (X_2, B_4), таким образом, цена игры v= - 180 денежных единиц (см. таблицу 2).

Таблица 2.

Решения	**Выход станка из строя**				
	B_1,ни разу	**B_2,1 раз**	**B_3,2 раза**	**B_4,3 раза**	α_i
X_1, не купить	-100	-140	-180	-220	-220
X_2, купить	-150	-160	-170	-180	**-180**
βj	-100	-140	-170	**-180**	

Ответ: нужно купить специализированное оборудование.

Однако в играх с природой положение коренным образом меняется: уже в условии заложена устойчивая смешанная стратегия природы: q= (0,3; 0,4; 0,2; 0,1) и мы знаем, что именно этой стратегии придерживается природа.

Если же человек – первый игрок – будет продолжать играть оптимально, то его выигрыш составит $M\xi_2$=-150×0.3-160×0.4-170×0.2-180×0.1=-161, а если применит первую, неоптимальную стратегию, то математическое ожидание его выигрыша составит $M\xi_1$=-100×0.3 - 140×0.4 - 180×0.2 -220×0.1 =-144.

Таким образом, первому игроку выгодно играть не оптимально!

Таблица 3.

Решения	**Выход станка из строя**				
	q_1=0.3	**q_2=0.4**	**q_3=0.2**	**q_4=0.1**	**$M\xi_i$**
	B_1, ни разу	**B_2,1 раз**	**B_3,2 раза**	**B_4,3 раза**	
X_1, не купить	-100	-140	-180	-220	-144
X_2, купить	-150	-160	-170	-180	-161

Ответ: не покупать специализированное оборудование.

Существенное различие между значениями v(x*) и v(x') объясняется тем, что смешанная стратегия природы неоптимальна и она, "отклоняясь" от своей оптимальной стратегии "недополучает" 36 денежных единиц выигрыша.

Итак, в игре с природой ориентация на математическое ожидание выигрыша есть фактически ориентация на средний выигрыш, который получится при многократном повторении этой игры (при предположении, что условия игры не меняются). Разумеется, если игра в действительности многократно повторяется, то критерий среднего выигрыша (например, в экономических задачах – средней прибыли) можно считать оправданным. Однако разумно ли ориентироваться на этот критерий при единичном испытании?

Пример. Фирма I может выставить на продажу один из товаров TI_1или TI_2, а фирма II – один из товаров TII_1, TII_2, TII_3. Товары TI_1 и TII_1 являются конкурирующими (например, пиво и лимонад), а товары TI_1 и TII_3 дополнительными (например, пиво и вобла); остальные товары нейтральны. Прибыль фирмы I зависит от сочетания товаров, выставляемых на продажу обеими фирмами, и определяется таблицей 4. Известно, что фирма II выставляет на продажу товар TII_3 в три раза реже, чем TII_1 и в четыре раза реже, чем TII_2. Какой товар следует поставлять на продажу фирме I?

Таблица 4

Решения	**Состояния среды**		
	q_1=3/8	q_2=4/8	q_3=1/8
	B_1	B_2	B_3
X_1	8	18	40
X_2	18	15	14

Здесь решение выставить на продажу фирмой I товар TI_1, решение X_2 выставить на продажу фирмой I товар TI_2.

Вычислим математические ожидания для данной таблицы:

$M\xi_1$=8×3/8+18×4/8+40×1/8=17, $M\xi_2$=18×3/8+15×4/8+14×1/8=16. Оптимальной стратегией будет решение X_1, т.е. фирма I поставлять товар TI_1. Безусловно, выигрыш в 17 денежных единиц лучше, чем в 16. Однако при выборе решения X_1 мы получим не 17 денежных единиц, а один из выигрышей: 8, 18 или 40. При выборе решения X_2 мы получим не 16 денежных единиц, а один из выигрышей 18, 15 или 14. Составим таблицу, где указаны отклонения возможных выигрышей от их ожидаемых значений и вероятности этих отклонений.

Таблица 5. Значения отклонений

Решения	q_1=3/8	q_2=4/8	q_3=1/8	$M\xi$
	B_1	B_2	B_3	
X_1	-9	1	23	17
X_2	2	-1	-2	16

Из данной таблицы видно, что при равных ожидаемых выигрышах, по-разному ведут отклонения от ожидаемых выигрышей: для X_1 эти отклонения значительны, а для X_2 – сравнительно невелики.

Из проведённого анализа можно сделать вывод: *в условиях риска критерий Байеса-Лапласа (ожидаемого среднего выигрыша) не является адекватным и должен быть изменён с учётом возможных отклонений случайной величины от её среднего значения.*

В теории вероятностей в качестве меры отклонения случайной величины от её среднего значения обычно используют дисперсию $D\xi$ или среднеквадратичное отклонение $\sigma=\sqrt{D\xi}$. *В задачах принятия решений в условиях риска будем рассматривать в качестве показателя риска среднеквадратичное отклонение σ, т.к. σ.имеет такую же размерность, что и случайная величина* ξ, математическое ожидание $M\xi$.

Таким образом, для принятия решения в условиях риска выбор альтернативы X_i приводит к случайной величине ξ_i, которая может быть охарактеризована парой показателей ($M\xi$, σ_i). Теперь приступим к построению адекватного критерия сравнения альтернатив. Фактически здесь получается задача двухкритериальной оптимизации, где в качестве частных критериев выступают математическое ожидание $M\xi$ (значение данного критерия нужно максимизировать) и среднеквадратичное отклонение σ (значение данного критерия нужно минимизировать).

Предположим, что требуется выбрать одну оптимальное решение из множества допустимых решений, каждое из которых определяется парой показателей ($M\xi_i$, σ_i). Изобразив на координатной плоскости точки с координатами ($M\xi_i$, σ_i), получим картинку типа изображённой на рис. 1, т.е. мы получили пространство оценок. Левая часть рисунка (красные точки) значения математического ожидания мы взяли положительными, а σ отрицательные значения, т.к. этот критерий (σ) мы должны минимизировать. Парето-оптимальными оценками является правая верхняя граница и соответственно Парето оптимальными решениями X_1, X_2, X_9 и X_7.

В данном примере множество Парето-оптимальных решений есть X_1, X_2, X_9, X_7 и окончательный выбор оптимального решения проводится из этого множества. Есть два подхода: первый подход заключается в том, что строится множество Парето-оптимальных решений и из этого множества ЛПР выбирает единственное решение на основе неформальных дополнительных соображений. Рассмотрим второй подход на основе сужения множества Парето-оптимальных альтернатив.

1. *Выбор главного критерия* и назначение нижних границ по остальным критериям. Назначим нижнюю границу по критерию М и минимизировать критерий σ. В качестве нижней границы критерия М возьмём значение M_4 (см. рис. 1), то оптимальным будет решение X_2, так среди решений удовлетворяющих условию $Mi \geq M_4$, она наименее рискованна.

2. *Лексикографическая оптимизация* предполагает упорядочение критериев по важности. Пусть, например, М – важнейший критерий. Так как максимальное значение по критерию М имеет единственное решение X_7, то оно и является оптимальным. Здесь наглядно проявляется недостаток метода лексикографической оптимизации: учёт одного (важнейшего) критерия. Этот недостаток связан с необходимостью введения жесткого приоритета критериев и может быть снят за счёт ослабления "жесткости" приоритетов. В этом случае используют метод последовательных уступок (метод смены цели). В нашем случае в качестве уступки по критерию М величину Δ, указанную на рис. 1. Тогда результатом выбора на первом шаге будут альтернативы X_7, X_8, X_9. Среди них наилучшей по второму критерию будет X_9. Таким образом, несколько снизив требования по критерию М, мы значительно улучшили оценку по критерию σ (т.е. некоторое уменьшение ожидаемого выигрыша привело к существенному снижению риска).

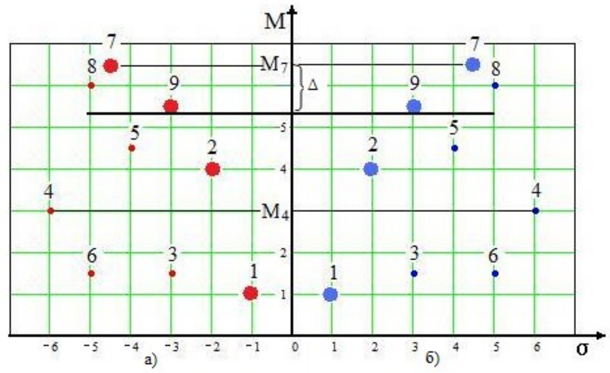


Рис. 1. Пространство оценок

Рассмотрим применение обобщенного критерия для нашей задачи. Возьмём в качестве обобщённого критерия функцию вида:

$f(M, \sigma) = M - \lambda \times \sigma$, (1)

где λ – некоторая постоянная величина. Фактически критерий (1) представляет аддитивный критерий оптимальности частных критериев M, σ с весовыми коэффициентами 1 и – λ. При $\lambda>0$ оценка случайной величины с помощью аддитивного критерия (1) меньше, чем её среднее значение, что характерно для осторожного человека, т.е. человека не склонного к риску. Напротив, при $\lambda<0$ оценка (1) выше, чем среднее значение, что характеризует человека, склонного к риску. Наконец, при $\lambda=0$ оценка случайной величины совпадает с её средним значением (т.е. возможные отклонения случайной величины от её среднего значения игнорируются) – это характеризует человека, безразличного к риску.

Содержательный смысл аддитивного критерия (1) при $\lambda>0$ состоит в том, что увеличение критерия $f(M, \sigma)$ может происходить как за счёт увеличения M, так и за счёт уменьшения σ. Таким образом, для человека, не склонного к риску, критерий (1) отражает стремление к увеличению ожидаемого выигрыша и уменьшению риска отклонения от него. При этом показатель λ характеризует субъективное отношение принимающего решение к риску. Следовательно, λ можно рассматривать как субъективный показатель меры несклонности к риску (субъективный показатель осторожности).

Выбор варианта производимого товара. Фирма может выпускать продукцию из следующих шести видов: зонтики (З), куртки (К), плащи (П), сумки (С), туфли (Т) и (Ш). Глава фирмы должен принять решение, какой из этих видов продукции выпускать в течение предстоящего летнего сезона. Прибыль фирмы зависит от того, каким будет лето – дождливым, жарким или умеренным, и определяется таблицей 6. Выбор какого варианта производства будет оптимальным?

При отсутствии дополнительной информации о состояниях среды в условиях неопределённости, и её решение возможно при принятии какой-либо гипотезы о поведении среды. Если принимающий решение имеет информацию о вероятностях наступления дождливого, жаркого и умеренного лета, то указанная задача становится задачей принятия в условиях риска. В рассматриваемой случае необходимая информация может быть взята из статистических данных (наблюдений за погодой в данной местности). Предположим, что вероятность дождливого, жаркого и умеренного лета равна соответственно 0.2, 0.5 и 0.3. Тогда получаем задачу принятия решения в условиях риска, заданную таблицей 7.

Таблица 6.

Решения	Состояния среды		
	Д	Ж	У
З	80	60	40
К	70	40	80
П	70	50	60
С	50	50	70

Т	75	50	50
Ш	35	75	60

Таблица 7.

Решения	Состояния среды		
	0.2	0.5	0.3
	Д	Ж	У
З	80	60	40
К	70	40	80
П	70	50	60
С	50	50	70
Т	75	50	50
Ш	35	75	60

Найдём ожидаемые выигрыши, соответствующие решениям З, К, П, С, Т, Ш. Имеем:

$M_З=0.2\times80+0.5\times60+0.3\times40=58$,

$M_к=0.2\times70+0.5\times40+0.3\times80=58$,

$M_П=0.2\times70+0.5\times50+0.3\times60=57$,

$M_С=0.2\times50+0.5\times50+0.3\times70=56$,

$M_Т=0.2\times75+0.5\times50+0.3\times50=55$,

$M_Ш=0.2\times35+0.5\times75+0.3\times60=62.5$.

Далее, определим дисперсии случайных величин $\xi_З$, $\xi_К$, $\xi_П$, $\xi_С$, $\xi_Т$, $\xi_Ш$:

$D\xi_З=196$, $D\xi_К=336$, $D\xi_П=61$, $D\xi_С=84$, $D\xi_Т=100$, $D\xi_Ш=231.5$. Среднеквадратичные отклонения рассматриваемых случайных величин таковы:

$\sigma_З=14.0$, $\sigma_К=18.3$, $\sigma_П=7.8$, $\sigma_С=9.2$, $\sigma_Т=10.0$, $\sigma_Ш=15.2$.

Составим таблицу значений критериев М и σ для каждой альтернативы (таблица 8)

таблица 8

Критерии / Решения	М	σ
З	58	14.0
К	58	18.3
П	57	7.8
С	56	9.2
Т	55	10.0
Ш	62.5	15.2

Представим рассматриваемые решения точками на координатной плоскости переменных М и σ, получим рис. 2, из которого Парето-оптимальные решения З, П, Ш. Окончательный выбор оптимальной альтернативы должен производиться из этого множества.

Сужение Парето-оптимального множества (в идеале – до одного элемента) может быть произведено только при наличии дополнительной информации о соотношении критериев М и σ. Как было сказано выше, это можно сделать методом главного критерия, методом последовательных уступок или с использованием лексикографического критерия.

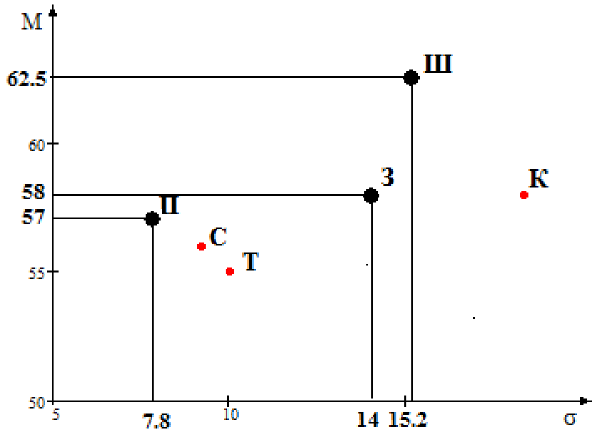


Рис. 2

Обзор критериев принятия решения в условиях риска

Критерий произведений

$$\max_i a_{ir} = \max_i \prod_j^m a_{ij}$$

Правило выбора в этом случае формулируется так :

Матрица решений $\|a_{ij}\|$ *дополняется новым столбцом, содержащим произведения всех результатов каждой строки. Выбираются те варианты, в строках которых находятся наибольшие значения этого столбца.*

Применение этого критерия обусловлено следующими обстоятельствами :

- вероятности появления состояния *Bj* неизвестны;
- с появлением каждого из состояний *Bj* по отдельности необходимо считаться;
- критерий применим и при малом числе реализаций решения;
- некоторый риск допускается.

Критерий произведений приспособлен в первую очередь для случаев, когда все a_{ij} положительны. Если условие положительности нарушается, то следует выполнять некоторый сдвиг $a_{ij}+a$ с некоторой константой $a> \left|\min_{ij} a_{ij}\right|$. Результат при этом будет, естественно зависеть от *a.* На практике чаще всего

a:= $\left|\min_{ij} a_{ij}\right|+1.$

Если же никакая константа не может быть признана имеющей смысл, то критерий произведений не применим.

$$\left|\min_{ij} a_{ij}\right|$$

Критерий "ожидаемое значение – дисперсия".

Критерий ожидаемого значения можно модифицировать так, что его можно будет применить и для редко повторяющихся ситуаций .

Если x – с. в. с дисперсией *DX*, то среднее арифметическое $\bar{x}$ имеет дисперсию DX/n, где n – число слагаемых в $\bar{x}$. Следовательно, если *DX* уменьшается, и вероятность того, что $\bar{x}$ близко к *MX*, увеличивается. Следовательно, целесообразно ввести критерий, в котором максимизация ожидаемого значения прибыли сочетается с минимизацией её дисперсии.

Замечание. Константу "*к*" можно рассматривать как уровень не склонности к риску, т.к. "*к*" определяет "степень возможности" дисперсии *Д(з)* по отношению к математическому ожиданию. Например, если предприниматель, особенно остро реагирует на большие отрицательные отклонения прибыли вниз от *М(з(Т)),* то он может выбрать "*к*" много больше 1. Это придаёт больший вес дисперсии и приводит к решению, уменьшающему вероятность больших потерь прибыли.

При $\kappa = 1$ получаем задачу

$$M(З(T)) + D(З(T)) = n\left\{\left(\frac{C_1}{T} + \frac{C_1^2}{T^2}\right)\sum_{t=1}^{T-1} p_t - \left(\frac{C_1}{T}\right)^2 \sum_{t=1}^{T-1} p_t^2 + \frac{C^2}{T}\right\}$$

Критерий предельного уровня.

Критерий предельного уровня не дает оптимального решения, максимизирующего, например, прибыль или минимизирующего затраты. Скорее он соответствует определению приемлемого способа действий.

Модели и методы принятия решений при нечеткой информации

Понятие **множество** относится к числу интуитивно постигаемых понятий, содержательно эквивалентное понятию «совокупность», «набор», «семейство», «класс» и другим обобщающим понятиям. Объекты, из которых состоит множество, называют его элементами.

Множества могут задаваться следующими способами:

Перечислением элементов (интенсиональным путем): $\{a_i\}, i = 1,\ldots,n$ или $\langle a_1,\ldots,a_n \rangle$,

где $a_i \in A$; $\in$ - знак вхождения элементов во множество;

Путем указания некоторого характеристического свойства A. Например, «множество натуральных чисел», «множество выпускаемой продукции данного завода» и т.д. В этом случае можно использовать запись следующего вида: $A = \{a$: a есть товар, выпускаемый данным заводом$\}$.

На множествах могут быть выделены подмножества. Вхождение подмножества во множество записывается $A \subset B$. Это означает, что все элементы подмножества A являются одновременно элементами множества B. Множество, в котором в данный момент нет ни одного элемента, называют пустым множеством и обозначают $\varnothing$.

Множество называется универсальным, если все рассматриваемые множества являются его подмножествами. При иллюстрации теоретико-множественных представлений, удобно применять диаграммы Эйлера-Венна. В этих диаграммах универсальное множество изображается в виде множества точек прямоугольника, а подмножества – в виде кругов внутри этого прямоугольника.

Понятие множества можно заменить понятием характеристической функции, вводя ее следующим образом:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Операциям пересечения $\cap$, объединения $\cup$ и дополнения $\neg$ множеств, взаимно однозначным образом, ставятся в соответствие операции над их характеристическими функциями, определяемым поэлементно (для всех $x \in X$):

$$(\chi_A \cap \chi_B)(x) = \chi_A(x) \wedge \chi_B(x), \qquad \chi_{\neg A}(x) = \neg\chi_A(x)$$

$$(\chi_A \cup \chi_B)(x) = \chi_A(x) \vee \chi_B(x),$$

где $\wedge$, $\vee$ и $\neg$ – булевы функции конъюнкции, дизъюнкции и отрицания.

Для отношения включения множеств выполняется: $A \subset B$, тогда и только тогда, когда $\chi_A(x) \le \chi_B(x)$ для всех $x \in X$.

Таким образом, вместо булевой алгебры множеств можно рассматривать алгебру характеристических функций.

Основные операции логики высказываний, формы их описания и истинность в зависимости от логических операций приведены в таблице 1, 2.

Таблица 1

Название операции	Форма	
	Аналитическая	Естественно-лингвистческая
Конъюнкция	$x_1 \wedge x_2$	x_1 **и** x_2
Дизъюнкция	$x_1 \vee x_2$	x_1 **или** x_2
Отрицание	$\neg\ x$	**не** x

Таблица 2

Переменные		Логические операции		
x_1	x_2	отрицание $\neg x_1$	дизъюнкция $x_1 \vee x_2$	конъюнкция $x_1 \wedge x_2$
0	0	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	1	0
1	1	0	1	1

Разработка теории нечетких множеств, созданная как расширение традиционной теории множеств, вызвана необходимостью моделирования таких явлений и понятий, в которых центральная роль отведена ЛПР. В настоящей главе представлены базовые понятия и определения теории нечетких множеств.

Известно, что, в определенном экономическом контексте, премию за риск можно определить на основе экспертных оценок. Например, эксперт может высказать следующие утверждения: к множеству среднерискованных проектов принадлежат те, чьи премии за риск менее 6%, а проекты с премией за риск более 9% , можно отнести к множеству высокорискованных. В промежутке, от 6% до 9%, проект, с разными степенями уверенности, может быть отнесен экспертом как к множеству среднерискованных, так и к множеству высокорискованных.

Но такая ситуация непримиримо противоречит классическому восприятию понятия “множество”, в соответствии с которым требуется дать однозначный ответ о принадлежности элементов к множеству: либо ”да”, либо ”нет”.

Таким образом, размытость границ понятий человеческого языка вызвала необходимость изучения нового математического объекта - “нечеткое множество”. Из сказанного следует, что элементы нечеткого множества обладают некоторым общим свойством в различной степени. Поэтому для нечеткого множества характерна такая ситуация: а) необходимо указать такие элементы, которые точно принадлежат множеству; б) определить элементы ему однозначно не принадлежащие; в) выявить элементы, которые входят в данное множество с разными степенями принадлежности.

Отметим основные особенности субъективного конструирования нечеткого множества “***молодой***” человек.

1. Задается универсальное множество – это возможный возраст человека. Обозначим универсальное множество через $U = (0;\, 130]$;
2. В U выделяем промежуток $[14;\, 21]$. Людей этого возраста мы однозначно относим к ***молодым***; т.е. “да”, люди этого возраста принадлежат множеству ***молодых*** людей;
3. В U выделяем промежуток $(0{,}14) \cup [30;\, 130]$. Людей этого возраста мы однозначно не относим к ***молодым***; т.е. “нет”, люди этого возраста не принадлежат множеству ***молодых*** людей;
4. В промежуточных случаях $(21;\, 30)$ каждому возрасту из этого промежутка ставится в соответствие степень принадлежности.

Например, степень принадлежности 25-летнего человека к множеству ***молодых*** эксперт, исходя из собственного опыта и знаний предметной области, назначает равным числу 0.6. Аналогично, другим возрастам из $(21;\, 30)$ эксперт приписывает соответствующие числа из промежутка $[0;\, 1]$. На рис.1 представлено построенное нечеткое множество.

Таким образом, сконструировано нечеткое множество, для которого характерным являются следующие особенности:

1) множество обозначено словом ***молодой***;

2) каждый элемент этого множества имеет свою степень принадлежности, которая изменяется от 0 до 1;

3) степень принадлежности интерпретируется как субъективная мера совместимости элемента с названием множества.

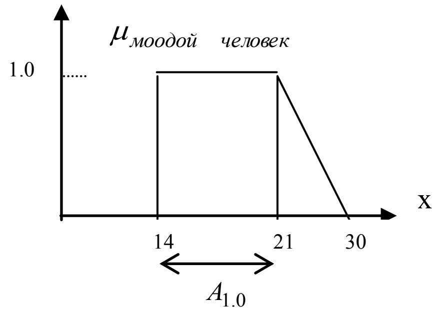


Рис.1. Функция принадлежности нечеткого множества

Для количественного выражения принадлежности элемента используется обобщение *характеристической функции* обычного, четкого множества. Применяя этот прием, Л.Заде ввел понятие *функции принадлежности* для нечетких множеств. Для нечеткого множества A функция принадлежности обозначается как $\mu_A(x)$.

Функция принадлежности нечеткого множества принимает любое значение из промежутка $[0;\,1]$, в то время как характеристическая функция $\chi_A(x)$ четкого множества принимает только два крайних значения: 0 или 1.

Функцию принадлежности нечеткого множества $A =$ ***молодой человек*** можно записать с помощью следующей формулы, которая позволяет количественно определять степени принадлежности элементов нечеткому множеству.

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, x \in [0;14) \\ 1, x \in [14;21] \\ \dfrac{30-x}{9}, x \in [21;30] \\ 0, x \in (30;130] \end{cases}$$

Если U - множество с конечным числом элементов $U = \{x_1,...,x_n\}$, то нечеткое множество $A \subseteq U$ записывается в виде

$$A = \left\{ \frac{\mu_A(x_1)}{x_1} + \ldots + \frac{\mu_A(x_n)}{x_n} \right\} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_A(x_i)}{x_i}$$

В данной записи элемент $\dfrac{\mu_A(x_i)}{x_i}$ означает пару $\{x_i;\ \mu_A(x_i)\}$; знак суммирования "+" не означает операцию сложения, а интерпретируется как множественное суммирование элементов.

***Пример* 1.** Пусть имеется высказывание: нечеткое множество A не содержит элемент x_2, содержит в небольшой степени x_1, в немного большей степени x_3, в значительной мере x_5, однозначно содержит элемент x_4.

Математический объект (нечеткое множество A), определяемый этим высказыванием, эксперт, исходя из своих предпочтений, может представить так

$$A = \left\{ \frac{0.2}{x_1}, \frac{0}{x_2}, \frac{0.3}{x_3}, \frac{1.0}{x_4}, \frac{0.8}{x_5} \right\}.$$

В “числителе” указывается степень принадлежности элемента x_i нечеткому множеству A. Графическое отображение этого нечеткого множества представлено на рис. 2.

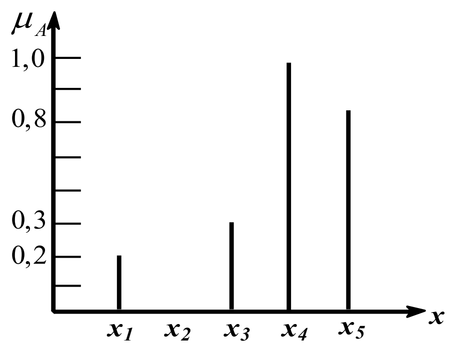


Рис.2. Функция принадлежности нечеткого множества.

Дадим определение нечеткого множества.

***Определение* 1**. *Нечетким множеством* A универсального множества U называется отображение $\mu_A : U \to [0;1]$.

Функция принадлежности μ_A приписывает каждому элементу $x^* \in U$ степень его принадлежности нечеткому множеству A, т.е. $\mu_A(x^*)$. Переменная x - называется *базовой переменной.*

Отметим, что значение $\mu_A(x^*)$ является субъективной экспертной оценкой совместимости элемента x^* с названием множества A, при этом:

$\mu_A(x)=1$ означает полную принадлежность элемента x к нечеткому множеству A;

$\mu_A(x)=0$ означает отсутствие принадлежности элемента x к нечеткому множеству A;

$0<\mu_A(x)<1$ означает частичную принадлежность элемента x к нечеткому множеству A.

Если U - множество с бесконечным числом элементов, то нечеткое множество $A \subset U$ записывается в виде $A = \int_U \frac{\mu_A(x)}{x}$.

***Определение* 2**. *Носителем* (основанием) S_A нечеткого множества A называют множество тех элементов U, у которых степени принадлежности не равны нулю:

$$S_A = \{x \in U : \mu_A(x) > 0\}.$$

В примере 1 $S_A = \{x_1, x_3, x_4, x_5\}$, т.к. элемент x_2 имеет нулевую степень принадлежности и потому не входит в носитель нечеткого множества.

Нечеткое множество *пусто*, $A=\varnothing$, если $\mu_A(x)=0, \ \forall x \in U$.

***Определение* 3**. Высота нечеткого множества обозначается $h(A)$ и определяется как $h(A)=\max\limits_{x\in A} \mu_A(x)$.

***Определение* 4**. Нечеткое множество называют *нормальным*, если его высота равна 1, $h(A)=1$.

В противном случае нечеткое множество называют с*убнормальным* и его можно нормализовать с помощью преобразования

$$\mu_{A_{нормализованное}}(x)=\frac{\mu_A(x)}{h(x)}=\frac{\mu_A(x)}{\max\limits_{x\in A}\mu_A(x)}.$$

***Определение* 5**. Нечеткое множество $A \subset U$ является выпуклым тогда и только тогда, когда для $\lambda \in [0;1]$ выполняется условие

$$\mu_A\big(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\big) \geq \min\big(\mu_A(x_1);\ \mu_A(x_2)\big);$$

нечеткое множество $A \subset U$ является вогнутым, если

$$\mu_A\left(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\right)\le \max\left(\mu_A(x_1);\, \mu_A(x_2)\right);$$

***Определение* 6**. α*-срезом* A_α нечеткого множества A называют множество тех элементов U, у которых степени принадлежности больше некоторого заданного числа $0\le\alpha\le 1$, $A_\alpha=\{x\in U:\mu_A(x)\ge\alpha\}$

Заметим, что α*-срез* A_α является обычным множество и если $\alpha_2<\alpha_1$, то $A_{\alpha_1}\subset A_{\alpha_2}$.

***Пример* 2.2.** В примере 1, α- срез (при $\alpha=0.8$) представляет собой обычное четкое множество $A_{0.8}=\{x_4,\, x_5\}$.

***Пример* 2.3.** На рис.1 α-срез (при $\alpha=1.0$) является отрезком $[14;\,21]$, $A_{1.0}=[14;\,21]$.

Иллюстрация α-срезов нечеткого множества представлена на рис 3.

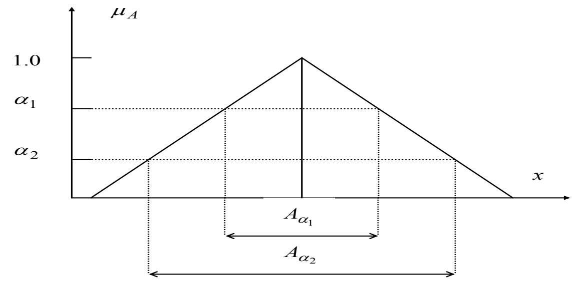


Рис.3. α*-срезы* A_α нечеткого множества A

Ясно, что при $\alpha=0$, α-срез A_α совпадает с носителем нечеткого множества S_A, $A_0=S_A$.

В заключение отметим, что в определении нечеткого множества, по существу, заложены две фундаментальные идеи:

- нечеткие понятия естественного языка предложено описывать функциями;
- построение этих функций осуществляются с помощью экспертов.

Операции на нечетких множествах

С нечеткими множествами производятся операции объединения, пересечения, дополнения и ряд других.

***Определение* 7**. Нечеткие множества A и B *равны*, $A=B$, тогда и только тогда, когда $\mu_A(x)=\mu_B(x)$; $A,\,B\in U$.

Чтобы учесть случай “A и B *почти равны*” вводится понятие степени равенства нечетких множеств

$$I(A=B)=1-\max\left|\,\mu_A(x)-\mu_B(x)\,\right|.$$

***Определение* 8**. Нечеткое множество A *содержится* в нечетком множестве B, $A\subset B$, тогда и только тогда, когда $\mu_A(x)\le\mu_B(x)$; $A,\,B\in U$.

Для определения количественной меры включения $A\subset B$, вводится понятие степени включения (рис.4)

$$I(A\subset B)=\min_{x\in\Theta}\mu_B(x)\,,\ \Theta=\left\{x\in U:\mu_A(x)\le\mu_B(x)\right\}$$

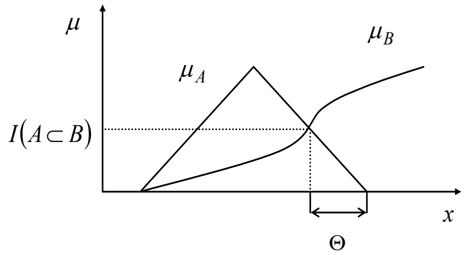


Рис.4. Степень включения

***Определение* 9**. *Объединением* нечетких множеств A и B универсального множества U называется нечеткое множество $D=A\cup B$, имеющее функцию принадлежности (рис.2.5)

$$\mu_{A\cup B}(x)=\max(\mu_A(x),\mu_B(x));\ A,\ B,\ D\in U;$$

***Определение* 10**. *Пересечением* нечетких множеств A и B называется нечеткое множество $D=A\cap B$, имеющее функцию принадлежности (рис.5)

$$\mu_{A\cap B}(x)=\min(\mu_A(x),\mu_B(x));\ A,\ B,\ D\in U.$$

***Определение* 11**. *Дополнением* нечеткого множества A называется нечеткое множество $\overline{A}$**,** имеющее функцию принадлежности (рис.6)

$$\mu_{\overline{A}}(x)=1-\mu_A(x);\ A,\ \overline{A}\in U$$

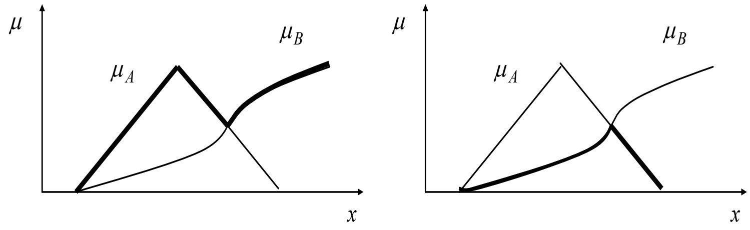


Рис.5. Объединение и пересечение нечетких множеств

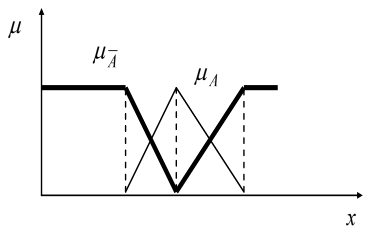


Рис.6. Дополнение нечеткого множества

***Определение* 12**. *Разностью* нечетких множеств A и B называется нечеткое множество $D=A-B$, имеющее функцию принадлежности

$$\mu_{A-B}(x)=\max(0,\mu_A(x)-\mu_B(x));\ A,\ B\in U.$$

Приведем сводку свойств основных операций над нечеткими множествами.

1. $A\cup B=B\cap A$; $A\cap B=B\cap A$; Коммутативность
2. $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$; $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$; Ассоциативность
3. $A\cup A=A$; $A\cap A=A$; Идемпотентность
4. $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$; $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$; Дистрибутивность
5. $A\cup\varnothing=A$; $A\cap\varnothing=\varnothing$; $A\cup U=U$; $A\cap U=U$;
6. $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$; $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ Законы Де Моргана
7. $A\cap\overline{A}\neq\varnothing$; $A\cup\overline{A}\neq U$
8. $(A\cup B)_\alpha=A_\alpha\cup B_\alpha$ и $(A\cap B)_\alpha=A_\alpha\cap B_\alpha$, $\forall\ \alpha$;

Однако, в общем случае, $(\overline{A})_\alpha\neq\overline{(A_\alpha)}$.

Введенные выше операции над нечеткими множествами основаны на использовании операций ***max*** и ***min***. В теории нечетких множеств находят применение операции пересечения, объединения и дополнения, позволяющие учесть разнообразные смысловые оттенки соответствующих им связок "***и***", "***или***", "***не***".

В качестве модели операции пересечения используется *треугольная норма.*

Треугольной нормой (*T-нормой*) называется двуместная действительная функция $T:[0;1]\times[0;1]\to[0;1]$, удовлетворяющая следующим условиям:

$T(0,0)=0$; $T(1,\mu_A)=\mu_A$; $T(\mu_A,1)=\mu_A$ - *ограниченность*;

$T(\mu_A,\mu_B)\le T(\mu_C,\mu_D)\le$, если $\mu_A\le\mu_C$, $\mu_B\le\mu_D$ - *монотонность*;

$$T(\mu_A,\mu_B)=T(\mu_B,\mu_A) \text{ - } \textit{коммутативность};$$
$$T(\mu_A,T(\mu_B,\mu_C))=T(T(\mu_A,\mu_B),\mu_C) \text{ - } \textit{ассоциативность};$$

Примеры T -норм: $T(\mu_A,\mu_B)=\mu_{A\cap B}(x)$.

$$\mu_{A\cap B}(x)=\mu_A(x)\cdot\mu_B(x); \quad \mu_{A\cap B}(x)=\max(0,\ \mu_A(x)+\mu_B(x)-1);$$

$$\mu_{A\cap B}(x)=T_w(\mu_A,\mu_B)=\begin{cases}\mu_A(x),\ \textit{если}\ \mu_B(x)=1\\ \mu_B(x),\ \textit{если}\ \mu_A(x)=1\\ 0,\ \textit{если}\ \mu_A(x),\ \mu_B(x)<1\end{cases}$$

Произвольная T *-норма* ограничена следующим образом:

$$T_w(\mu_A,\mu_B)\le T(\mu_A,\mu_B)\le\min(\mu_A,\mu_B)$$

В качестве модели операции объединения используется *треугольная конорма.*

Треугольной конормой ($\perp$*-конормой*) называется двуместная действительная функция $\perp:[0;1]\times[0;1]\to[0;1]$, со свойствами:

$$\perp(1,1)=1;\ \perp(0,\ \mu_A)=\mu_A;\ \perp(\mu_A,0)=\mu_A \text{ - } \textit{ограниченность};$$
$$\perp(\mu_A,\mu_B)\ge\perp(\mu_C,\mu_D), \text{ если } \mu_A\ge\mu_C,\ \mu_B\ge\mu_D \text{ - } \textit{монотонность};$$
$$\perp(\mu_A,\mu_B)=\perp(\mu_B,\mu_A) \text{ - } \textit{коммутативность};$$
$$\perp(\mu_A,\perp(\mu_B,\mu_C))=\perp(\perp(\mu_A,\mu_B),\mu_C) \text{ - } \textit{ассоциативность};$$

Примеры $\perp$-конорм: $\mu_{A\cup B}(x)=\mu_A(x)+\mu_B(x)-\mu_A(x)\cdot\mu_B(x)\ \ \perp(\mu_A,\mu_B)=\mu_{A\cup B}(x)$;

$$\mu_{A\cup B}(x)=\min(1,\ \mu_A(x)+\mu_B(x));$$

$$\mu_{A\cup B}(x)=\perp_w(\mu_A,\mu_B)=\begin{cases}\mu_A(x),\ \textit{если}\ \mu_B(x)=0\\ \mu_B(x),\ \textit{если}\ \mu_A(x)=0\\ 1,\ \textit{если}\ \mu_A(x),\ \mu_B(x)>0\end{cases}$$

Произвольная $\perp$*-конорма* ограничена следующим образом:

$$\max(\mu_A,\mu_B)\le\perp(\mu_A,\mu_B)\le\perp_w(\mu_A,\mu_B)$$

Специальные операции на нечетких множествах

Приведем некоторые специальные операции.

1. Операция *концентрирования* $CON(A)=A^2$. Ее функция принадлежности имеет вид $\mu_{A^2}(x)=(\mu_A(x))^2$.

2. Операция *растяжения* $DIL(A)=A^{0.5}$, $\mu_{A^{0.5}}(x)=(\mu_A(x))^{0.5}$.

Пример . Пусть $U=\{1,2,3,4\}$ и $A=\{\frac{0.7}{2}+\frac{0.9}{3}+\frac{1.0}{4}\}$, тогда

$CON(A)==\{\frac{0.49}{2}+\frac{0.81}{3}+\frac{1.0}{4}\}$; $DIL(A)=\{\frac{0.84}{2}+\frac{0.95}{3}+\frac{1.0}{4}\}$

3. *Декартово (прямое) произведение* нечетких множеств.

Пусть $A_1,...,A_n$- нечеткие подмножества универсальных множеств $U_1,...,U_n$, соответственно. Декартово (прямое) произведение $A=A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$ является нечетким подмножеством множества $U=U_1\times U_2\times\ldots\times U_n$, функция принадлежности которого имеет следующий вид $\mu_A(x_1,...,x_n)=\min(\mu_{A_1}(x_1),...,\mu_{A_n}(x_n))$, $x_i\in U_i$.

Пример . Пусть $U=\{1,2,3,4\}$, $A=\{\frac{0.7}{2}+\frac{0.9}{3}\}$, $B=\{\frac{0.8}{3}+\frac{0.5}{4}\}$, тогда

$$A\times B=\{\frac{\min(0.7;0.8)}{(2;3)}+\frac{\min(0.7;0.5)}{(2;4)}+\frac{\min(0.9;0.8)}{(3;3)}+\frac{\min(0.9;0.5)}{(3;4)}\}==\{\frac{0.7}{(2;3)}+\frac{0.5}{(2;4)}+\frac{0.8}{(3;3)}+\frac{(0.5)}{(3;4)}\}.$$

4. Операция *контрастной интенсивности* нечеткого множества A определяется соотношением

$$INT(A)=\begin{cases}2(\mu_A(x))^2,\ 0\le\mu_A(x)\le 0.5\\ 1-2(1-\mu_A(x))^2,\ 0.5\le\mu_A(x)\le 1\end{cases}$$

5. Операция *осреднения*.

В качестве таковых применяются, например, среднее арифметическое $O(\mu_A,\mu_B)=\dfrac{\mu_A+\mu_B}{2}$ и среднее геометрическое функций принадлежности $O(\mu_A,\mu_B)=\sqrt[2]{\mu_A\cdot\mu_B}$.

Декомпозиция нечетких множеств и принцип обобщения

Декомпозиция нечеткого множества. Нечеткое множество A с функцией принадлежности $\mu_A(x)$ может быть представлено как объединение α – уровневых множеств (α – срезов нечеткого множества A): $A=\bigcup\limits_{\alpha}\alpha A_\alpha$, или в терминах функции принадлежности $\mu_A(x)=\max\limits_{0<\alpha\le 1}\alpha\mu_{A_\alpha}(x)$. Этим самым мы осуществляем операцию *декомпозиции* нечеткого множества.

Пример . Запишем α – срезы нечеткого множества

$$A=\left\{\frac{0.3}{x_1},\frac{0.5}{x_2},\frac{1.0}{x_3}\right\}.$$

При $0<\alpha\le 0.3$, мы имеем $A_{0.3}=\{x_1,x_2,x_3\}$. Здесь в α – уровневое множество вошли все элементы нечеткого множества A. При $0.3<\alpha\le 0.5$, получаем $A_{0.5}=\{x_2,x_3\}$, а в случае $0.5<\alpha\le 1.0$, очевидно, что $A_{1.0}=\{x_3\}$. Теперь, в соответствии с утверждением о декомпозиции, мы можем провести декомпозицию нечеткого множества и записать, что

$$A=\bigcup_{\alpha}\alpha A_\alpha=\{0.3A_{0.3};0.5A_{0.5};1.0A_{1.0}\}=\left\{\frac{0.3}{x_1},\frac{0.3}{x_2},\frac{0.3}{x_3},\frac{0.5}{x_2},\frac{0.5}{x_3},\frac{1.0}{x_3}\right\}=$$
$$=\left\{\frac{0.3}{x_1},\frac{\max(0.3;0.5)}{x_2},\frac{\max(0.3;0.5;1.0)}{x_3}\right\}=\left\{\frac{0.3}{x_1},\frac{0.5}{x_2},\frac{1.0}{x_3}\right\}=A.$$

Принцип обобщения. Данный принцип относится к одному из основополагающих положений теории нечетких множеств.

Сущность этого принципа состоит в следующем. Предполагается заданной некоторая строго монотонная функция $y=f(x)$, U и V область определения и область значений этой функции.

Принцип обобщения утверждает: пусть нам известно нечеткое множество $A=\left\{\dfrac{\mu_A(x)}{x}\right\}$ с функцией принадлежности $\mu_A(x)$, $A\in U$. Тогда можно построить нечеткое множество $B=f(A)$, функция принадлежности которого имеет следующий вид: $\mu_B(y)=\max\limits_{x:y=f(x)}\mu_A(x)$, $x\in S_A$; если же $x\notin S_A$, то $\mu_B(y)=0$;

Таким образом, если мы имеем $A=\left\{\dfrac{\mu_A(x)}{x}\right\}$, $y=f(x)$, тогда можно сконструировать $B=\left\{\dfrac{\mu_B(y)}{y}\right\}=\left\{\dfrac{\mu_B(y)}{f(x)}\right\}$.

Если нарушено условие строгой монотонности функции $y=f(x)$, то нечеткое множество $B=f(A)$, где

$$\mu_B(y)=\begin{cases}\max\limits_{x\in f^{-1}(y)}\mu_A(x),\ \textit{если}\ f^{-1}(y)\ne\varnothing\\ 0,\ \textit{если}\ f^{-1}(y)=\varnothing\end{cases}$$

***Пример* .** Пусть $f: U_1 \times ... \times U_n \to Y$ - четкое отображение, $A_i \subseteq U_i$, - нечеткие множества. Принцип обобщения гласит

$$\mu_B(y) = \begin{cases} \max\limits_{(x_1,...,x_n) \in f^{-1}(y)} \min\big(\mu_{A_1}(x_1),...,\mu_{A_n}(x_n)\big), \text{ } если \text{ } f^{-1}(y) \neq \varnothing \\ 0, \text{ } если \text{ } f^{-1}(y) = \varnothing \end{cases}$$

Здесь нечеткое множество B сформировано как $B = f(A_1,...,A_n)$

Нечеткая и лингвистическая переменные

Нечеткая переменная задается тройкой $\langle \mu, U, A \rangle$, здесь μ наименование нечеткой переменной; U – область определения переменной; A – нечеткое множество на U, описывающее ограничения на значения переменной μ.

Лингвистическая переменная -это кортеж вида $\langle \beta, T, U, G, M \rangle$, здесь β - наименование лингвистической переменной; T – множество ее значений, которые являются нечеткими переменными с областью определения U; T называют базовым “терм – множеством” лингвистической переменной; G – синтаксическая процедура, позволяющая оперировать элементами T и генерировать новые значения (термы); M – семантическая процедура, позволяющая преобразовать новый терм в соответствующую нечеткую переменную.

Пример. Пусть лингвистическая переменная $\beta =$ *“спрос”* имеет терм – множество $T = \{$*“высокий”, ”средний”, ”низкий”*$\}$. Каждый терм является нечетким множеством, который характеризуется функцией принадлежности, заданной на U. Под процедурой G будет пониматься образование новых термов с помощью логических связок “***или***”, ”***и***”, ”***не***”. Например, “***не*** высокий ***или*** средний”. Под процедурой M понимается процесс построения функции принадлежности нового нечеткого множества “***не*** высокий ***или*** средний”.

Рациональный выбор на основе *max-min* свертки

Элементы теории нечетких множеств успешно применяются в задачах принятия решений.

Под принятием рационального решения мы будем понимать выбор допустимого решения (альтернативы), которая лучше или не хуже других, в некотором конкретном смысле, отражающем интересы лица принимающего решение.

Пусть имеется множество альтернатив $A = \{x_1, x_2,...,x_m\}$ и множество критериев $C = \{C_1,...,C_n\}$. При этом оценки альтернатив по каждому критерию представлены нечетким множеством

$C_i = \left\{ \dfrac{\mu_{C_i}(x_1)}{x_1},...,\dfrac{\mu_{C_i}(x_m)}{x_m} \right\}$. Правило выбора лучшей альтернативы определяется как пересечение $D = C_1 \cap ... \cap C_n$. Тогда выбор альтернативы $x^* = \arg \max\limits_{i=1,...,m} \mu_D(x_i)$ можно считать рациональным. При этом предполагается, что у лица принимающего решения не было никакой другой информации относительно множества альтернатив.

Если критерии C_i имеют различную важность, то их вклад в общее решение определяется как взвешенное пересечение

$$D = C_1^{\eta_1} \cap ... \cap C_n^{\eta_n}; \; x^* = \arg \max_{i=1,...,m} \mu_D(x_i)$$

Коэффициенты важности критериев $\eta_i = n \cdot \omega_i$ вычисляются с помощью коэффициентов Саати ω_i, определяемых по методу Саати.

Метод Саати. Рассмотрим основные положения метода в ходе решения следующей задачи.

Пусть имеется три критерия C_1, C_2, C_3, для которых следует определить их коэффициенты важности Саати $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, используя знания экспертов. Экспертом осуществляется попарное сравнение критериев C_1, C_2, C_3 относительно некоторой цели (G), а результаты сравнения записываются в опросную матрицу

$$
\begin{array}{cc}
(G) & \begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & C_3 \end{array} \\
\begin{array}{c} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{array} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Процедура заполнения матрицы состоит в следующем. Эксперт должен ответить на вопрос: “Во сколько раз критерий C_i превосходит критерий C_j ?”. При этом при заполнении матрицы требуется соблюдение следующих соотношений: $a_{ii} = 1$; $a_{ij} = 1/a_{ji}$, $i \neq j$.

Для количественной оценки ответа на поставленный вопрос используется эмпирическая шкала Саати:

	Смысл a_{ij}		Значение a_{ij}
C_i	одинаково значимо с	C_j	1
C_i	слабо превосходит	C_j	3
C_i	превосходит	C_j	5
C_i	значительно превосходит	C_j	7
C_i	абсолютно превосходит	C_j	9

Значения шкалы 2, 4, 6, 8 отражают промежуточные степени превосходства.

Обработка опросной матрицы проводится в соответствии со следующей вычислительной схемой:

1. Вычисляются коэффициенты важности критериев

$a = a_{11} + a_{12} + a_{13}$; $b = a_{21} + a_{22} + a_{23}$; $c = a_{31} + a_{32} + a_{33}$;

$$\omega_1 = \frac{a}{a+b+c};\ \omega_2 = \frac{b}{a+b+c};\ \omega_3 = \frac{c}{a+b+c};$$

Замечание. Здесь ω_i – можно трактовать как степень совместимости критериев C_i с поставленной целью G, $\mu_G(C_i)$. То есть метод Саати позволяет строить функцию принадлежности нечетких множеств.

2. Для определения степени согласованности построенной матрицы вычисляется индекс согласованности

$ИС = \dfrac{\lambda - n}{\sigma \cdot (n-1)}$, здесь n – число рассматриваемых критериев, $n = 3$

$$\lambda \approx \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{y_1}{\omega_1} + \frac{y_2}{\omega_2} + \ldots + \frac{y_n}{\omega_n} \right);\ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix};$$

σ – случайный индекс, зависящий от количества сравниваемых критериев. Его значение берется из таблицы

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
σ	0,58	0,90	1,12	1,24	1,32	1,41	1,45	1,49	1,51	1,48	1,56	1,57

В случае согласованного опроса должно быть выполнено неравенство $ИС \leq 0.2$. Это будет означать, что процедура опроса успешно завершена. В случае не выполнения этого неравенства, опрос эксперта проводится повторно, либо проверяется корректность поставленной задачи.

Пример. Разработаны три стратегии поддержки сбыта продукции (альтернативы): a_1, a_2, a_3. Необходимо выбрать стратегию с учетом трех факторов (критериев): C_1 - реклама; C_2 - стимулирование продаж; C_3 - public relation. Использовать метод ***max–min*** свертки.

Сначала рассчитаем весовые коэффициенты важности Саати ω_i для каждого из факторов. При этом будем использовать знания эксперта, отраженные в опросной матрице

$$
\begin{array}{c|c}
(C) & C_1 \quad C_2 \quad C_3 \\
\begin{matrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1.00 & 3.00 & 5.00 \\ 1/3 & 1.00 & 2.00 \\ 1/5 & 1/2 & 1.00 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Обработку матрицы осуществим в соответствии с предложенной вычислительной схемой.

Вычислим коэффициенты важности альтернатив

$$a = 1.0 + 3.0 + 5.0 = 9.0;\ b = 0.33 + 1.0 + 2.0 = 3.33;\ c = 0.2 + 0.5 + 1.0 = 1.7;$$

$$a + b + c = 9.0 + 3.33 + 1.7 = 14.03;$$

$$\omega_1 = \frac{9.0}{14.03} = 0.64;\ \omega_2 = \frac{3.33}{14.03} = 0.24;\ \omega_3 = \frac{1.7}{14.03} = 0.12;$$

Определим индекс согласованности $ИС$ опросной матрицы

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.00 & 3.00 & 5.00 \\ 1/3 & 1.00 & 2.00 \\ 1/5 & 1/2 & 1.00 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.64 \\ 0.24 \\ 0.12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.96 \\ 0.69 \\ 0.37 \end{pmatrix};\ \lambda \approx \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1.96}{0.64} + \frac{0.69}{0.24} + \frac{0.37}{0.12} \right) = 3.007;$$

$$ИС = \frac{\lambda - n}{\sigma \cdot (n-1)} = \frac{3.05 - 3}{0.58 \cdot 2} = 0.006.$$

$ИС \le 0.2$, поэтому процедура опроса эксперта успешно завершена.

Теперь перейдем к решению задачи многокритериального выбора на основе ***max-min*** свертки.

Пусть оценки альтернатив по каждому критерию представлены следующими нечеткими множествами

$$C_1 = \left\{ \frac{0.5}{a_1}, \frac{0.1}{a_2}, \frac{1.0}{a_3} \right\},\ C_2 = \left\{ \frac{0.7}{a_1}, \frac{0.5}{a_2}, \frac{0.2}{a_3} \right\},\ C_3 = \left\{ \frac{0.3}{a_1}, \frac{0.5}{a_2}, \frac{1.0}{a_3} \right\},$$

Коэффициенты важности критериев находят путем умножения количества критериев $n = 3$ на весовые коэффициенты Саати

$$\eta_i = 3 \cdot \omega_i;\ \eta_1 = 3 \cdot 0.64 = 1.92;\ \eta_2 = 3 \cdot 0.24 = 0.72;\ \eta_3 = 3 \cdot 0.12 = 0.36.$$

Построим функцию принадлежности нечеткого множества D в соответствии с приведенной выше формулой

$$\mu_D(x_1) = \min(0.5^{1.92},\ 0.7^{0.72},\ 0.3^{0.36}) = 0.26$$

$$\mu_D(x_2) = \min(0.1^{1.92},\ 0.5^{0.72},\ 0.5^{0.36}) = 0.01$$

$$\mu_D(x_3) = \min(1.0^{1.92},\ 0.2^{0.72},\ 1.0^{0.36}) = 0.31.$$

Тогда выбор стратегии (альтернативы)

$$x^* = \arg \max_{i=1,\dots,\ m} \mu_D(x_i) = \arg\ \max(0.26;\ 0.01;\ 0.31) = x_3$$

можно считать рациональным.

Следовательно, $x^* = x_3$, и наиболее предпочтительным является третий инвестиционный проект.

Операции на нечетких отношениях

Пусть U и V - два универсальных множества. Бинарным нечетким отношением между U и V называется нечеткое подмножество прямого произведения $U \times V$ обозначаемое

$$R = \begin{cases} \bigcup\limits_{(u,v)\in U\times V} \dfrac{\mu_R(u,v)}{(u,v)}, & \mathrm{U}\times V - \text{дискретное} \\ \int\limits_{(u,v)\in U\times V} \dfrac{\mu_R(u,v)}{(u,v)}, & \text{иначе} \end{cases}$$

Символы $\bigcup, \int$ использованы для обозначения объединения элементов $\dfrac{\mu_R(u,v)}{(u,v)}$; $\mu_R : U \times V \to [0,1]$ называется функцией принадлежности нечеткого отношения R. Ее интерпретация аналогична интерпретации функции принадлежности нечеткого множества.

$S_R = (\,(u,v) \in U \times V : \mu_R(u,v) > 0)$ - носитель R. Переменные u, v называются базовыми.

Задать бинарное нечеткое отношение R означает указать пары элементов $(u,v) \in U \times V$, которые однозначно относятся к R или связаны отношением R. Затем указать пары (u,v), однозначно не связанные отношением R. Наконец, определить пары (u,v), имеющие промежуточные степени принадлежности $\mu_R(u,v)$, которые интерпретируются как сила связи между элементами $u \in U$ и $v \in V$.

Если для бинарных отношений имеет место равенство $U = V$, то говорят, что задано бинарное нечеткое отношение R *на* U.

Пример . Примерами нечетких отношений могут служить: "u **примерно** равно v"; "u **много** больше v"; "u **предпочтительнее** v", $u, v \in U$.

Пример . Функция принадлежности нечеткого отношения "u ***много*** больше v" может быть определена в виде

$$\mu_R(u,v) = \begin{cases} 1 - \exp(-k(v-u)^2), \ \mathrm{v} > \mathrm{u}, \ \mathrm{k} > 1, \\ 0, \ \text{иначе} \end{cases}, \ u, v \in U$$

Нечеткие бинарные отношения удобно представлять в виде матрицы.

Пример. Пусть $U = \{u_1, u_2, u_3\}$ - процентная ставка, $V = \{v_1, v_2, v_3\}$ -активы банка. Составим отношение $R =$ “банк *предпочтительный* для размещения вклада”:

$$\begin{array}{c|ccc|} & v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & 0.1 & 0.7 & 1.0 \\ R = u_2 & 0.6 & 0.4 & 0.2 \\ u_3 & 0.8 & 0.3 & 0.9 \end{array}$$

Рассмотрим *основные операции* над нечеткими отношениями.

Следует подчеркнуть, что нечеткое отношение R - это нечеткое множество, поэтому остаются в силе, введенные ранее, определения операций объединения, пересечения и дополнения:

$$\mu_{R_1 \cup R_2}(u,v) = \max(\mu_{R_1}(u,v), \mu_{R_2}(u,v));$$

$$\mu_{R_1 \cap R_2}(u,v) = \min(\mu_{R_1}(u,v), \mu_{R_2}(u,v));$$

$$\mu_{\overline{R}}(u,v) = 1 - \mu_R(u,v);.$$

***Определение* 1**. Нечеткое отношение, обратное к R, обозначается R^{-1} и определяется выражением: $\mu_{R^{-1}}(v,u) = \mu_R(u,v)$. Очевидно, что $(R^{-1})^{-1} = R$.

При матричном представлении нечеткого отношения R, обратное отношение R^{-1} получают из R, заменой столбцов на строки.

***Определение* 2**. R_1 содержится в R_2, $R_1 \subset R_2$ тогда и только тогда, когда $\mu_{R_1}(u,v) \le \mu_{R_2}(u,v)$

***Определение* 3**. R_1 и R_2 совпадают, $R_1 = R_2$, тогда и только тогда, когда $\mu_{R_1}(u,v) = \mu_{R_2}(u,v)$.

Пример . Пусть заданы матрицы нечетких отношений

$$R_1 = \begin{vmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.4 & 1.0 \end{vmatrix}, \quad R_2 = \begin{vmatrix} 0.4 & 0.4 \\ 0.6 & 0.8 \end{vmatrix}$$

построим их объединение:

$$R_1 \bigcup R_2 = \begin{vmatrix} 0.7 \vee 0.4 & 0.2 \vee 0.4 \\ 0.4 \vee 0.6 & 1.0 \vee 0.8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.7 & 0.4 \\ 0.6 & 1.0 \end{vmatrix}$$

пересечение:

$$R_1 \bigcap R_2 = \begin{vmatrix} 0.7 \wedge 0.4 & 0.2 \wedge 0.4 \\ 0.4 \wedge 0.6 & 1.0 \wedge 0.8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.4 & 0.2 \\ 0.4 & 0.8 \end{vmatrix}$$

дополнение:

$$\overline{R_1} = \begin{vmatrix} 1-0.7 & 1-0.2 \\ 1-0.4 & 1-1.0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.3 & 0.8 \\ 0.6 & 0 \end{vmatrix}$$

инверсия:

$$R_2^{-1} = \begin{vmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.4 & 0.8 \end{vmatrix}$$

Первая проекция нечеткого отношения R на U обозначается R_U и определяется так: $\mu_{R_U}(u) = \max\limits_{v} \mu_R(u,v)$

Вторая проекция нечеткого отношения R на V обозначается R_V и определяется так: $\mu_{R_V}(v) = \max\limits_{u} \mu_R(u,v)$

Пример. Задана матрица отношения R. Вычислим ее проекции R_U, R_V.

$$\begin{array}{ccccc} & & v_1 & v_2 & v_3 \\ & u_1 & 0.1 & 0.7 & 1.0 \\ R = & u_2 & 0.6 & 0.4 & 0.2 \\ & u_3 & 0.8 & 0.3 & 0.9 \end{array}$$

$$R_U = \left\{ \frac{0.7}{u_1}, \frac{0.6}{u_2}, \frac{0.9}{u_3} \right\}; \; R_V = \left\{ \frac{0.8}{v_1}, \frac{0.7}{v_2}, \frac{1.0}{v_3} \right\}.$$

Действительно, первая проекция:

$$R_U = \left\{ \frac{\max(0.1; 0.7; 1.0)}{u_1}, \frac{\max(0.6; 0.4; 0.2)}{u_2}, \frac{\max(0.8; 0.3; 0.9)}{u_3} \right\}$$

вторая проекция:

$$R_V = \left\{ \frac{\max(0.1; 0.6; 0.8)}{v_1}, \frac{\max(0.7; 0.4; 0.3)}{v_2}, \frac{\max(1.0; 0.2; 0.9)}{v_3} \right\}.$$

Цилиндрическое продолжение обозначается $\vec{A}$ и определяется так: $\mu_{\vec{A}}(u,v) = \mu_A(v), \; \forall u \in U$, A – нечеткое множество.

Пример. Пусть задано нечеткое множество A с функцией принадлежности $\mu_A(v_1) = 0.4; \mu_A(v_2) = 0.8; \mu_A(v_3) = 1.0;$

Построим цилиндрическое продолжение $\vec{A}$:

v_1

$v_2 \quad v_3$

$$\vec{A} = \begin{array}{c|ccc|} u_1 & 0.4 & 0.8 & 1.0 \\ u_2 & 0.4 & 0.8 & 1.0 \\ u_3 & 0.4 & 0.8 & 1.0 \end{array}$$

В теории нечетких множеств важную роль играет понятие *комбинации двух нечетких отношений*. Рассмотрим три четких множества U, V, W и два нечетких отношения $R \subset U \times V$, $S \subset V \times W$ с функциями принадлежности $\mu_R(u,v)$, $\mu_S(v,w)$.

***Определение* 4**. *Композиция* типа $Sup - T$ нечетких отношений R и S обозначается $R \circ S$ и определяется выражением:

$$\mu_{R \circ S}(u,w) = \sup_{v \in V} (\mu_R(u,v) \overset{T}{*} \mu_S(v,w)), \; R \circ S \subset U \times W$$

Пусть V имеет конечное количество элементов и в качестве $T-$нормы выбрано $\min$, то такая композиция носит название $\max - \min$ - композиции

$$\mu_{R \circ S}(u,w) = \max_{v \in V} \min(\mu_R(u,v), \mu_S(v,w))$$

Пример. Для проведения социологического исследования выбрано шесть групп людей из разных социальных слоев: A, B, C, D, E, F по признаку "качество жизни". По мнению ЛПР нечеткие отношения сходства между $\{A, B\}$ и $\{C, D\}$ с одной стороны, $\{C, D\}$ и $\{E, F\}$ - с другой, описываются следующими матрицами

$$R = \begin{array}{c|cc|} & C & D \\ A & 0.8 & 0.6 \\ B & 0.2 & 0.9 \end{array}, \quad S = \begin{array}{c|cc|} & E & F \\ C & 0.3 & 0.8 \\ D & 0.5 & 0.7 \end{array}$$

Тогда $R \circ S$ нечеткое отношение сходства между $\{A, B\}$ и $\{E, F\}$, которое рассчитывается по приведенной ранее формуле:

$$R \circ S = \begin{array}{c|cc|} & E & F \\ A & (0.8 \wedge 0.3) \vee (0.6 \wedge 0.5) & (0.8 \wedge 0.8) \vee (0.6 \wedge 0.7) \\ B & (0.2 \wedge 0.3) \vee (0.9 \wedge 0.5) & (0.2 \wedge 0.8) \vee (0.9 \wedge 0.7) \end{array} = \begin{array}{c|cc|} & E & F \\ A & 0.5 & 0.8 \\ B & 0.5 & 0.7 \end{array}$$

Перечислим некоторые свойства нечетких отношений.

Обозначим $R^2 = R \circ R$. Тогда $R^{m+n} = R^m \circ R^n$ и $R^{m \cdot n} = \left(R^m\right)^n$.

$R \circ (S \cup P) = (R \circ S) \cup (R \circ P)$. $R \circ (S \cap P) = (R \circ S) \cap (R \circ P)$. Кроме того, если $S \subset P$, то $R \circ S \subset R \circ P$.

Для практических приложений особенно важна композиция нечеткого множества $A \subset U$ с нечетким отношением $R \subset U \times V$, обозначаемая $A \circ R = B$, $B \subset V$. Функция принадлежности нечеткого множества B задается выражением

$$\mu_B(v) = \sup_{u \in U} \left\{ \mu_A(u) \overset{T}{*} \mu_R(u,v) \right\}$$

Конкретная форма записи зависит от T – нормы и от свойств множества U. Определим четыре случая.

Если $T(a,b)=\min(a,b)$, то получаем $\sup-\min$ композицию

$$\mu_B(v)=\sup_{u\in U}\{\min[\mu_A(u),\mu_R(u,v)]\}$$

Если $T(a,b)=\min(a,b)$ и U содержит конечное число элементов, то получаем $\max-\min$ композицию

$$\mu_B(v)=\max_{u\in U}\{\min[\mu_A(u),\mu_R(u,v)]\}$$

Если $T(a,b)=a\cdot b$, то получаем $\sup-$ *product* композицию

$$\mu_B(v)=\sup_{u\in U}\{[\mu_A(u)\cdot\mu_R(u,v)]\}$$

Если $T(a,b)=a\cdot b$ и U содержит конечное число элементов, то получаем $\max-$ *product* композицию

$$\mu_B(v)=\max_{u\in U}\{[\mu_A(u)\cdot\mu_R(u,v)]\}$$

Свойства нечетких отношений

Нечеткое отношение R на U называется *рефлексивным*, если $\mu_R(u,u)=1,\ \forall u\in U$.

Нечеткое отношение R на U называется *антирефлексивным*, если $\mu_R(u,u)=0,\ \forall u\in U$.

Нечеткое отношение R на U называется *симметричным*, если $\mu_R(u,v)=\mu_R(v,u),\ \ u\neq v$; $u,v\in U$.

Нечеткое отношение R на U называется *антисимметричным*, если $u\neq v,\ \mu_R(u,v)>0\Rightarrow\mu_R(v,u)=0$, $u,v\in U$.

Пример. Нечеткое отношение "u **близко** к v", $u,v\in U$ является рефлексивным и симметричным отношением.

Пример. Нечеткое отношение $R=\begin{vmatrix}1.0 & 0.2 & 0.4\\ 0.3 & 1.0 & 0.8\\ 0.9 & 0.9 & 1.0\end{vmatrix}$ рефлексивно (диагональные элементы равны 1).

Пример. Нечеткое отношение "u **много больше** к v", $u,v\in U$ является *антирефлексивным и антисимметричным.*

Пример. Нечеткие отношения R_1 и R являются примерами симметричного и антисимметричного нечеткого отношения:

$$R_1=\begin{vmatrix}1.0 & 0.2 & 0.8\\ 0.2 & 1.0 & 0.4\\ 0.8 & 0.4 & 1.0\end{vmatrix};\ R=\begin{vmatrix}0.0 & 0.8 & 0.0 & 0.0\\ 0.0 & 0.3 & 0.0 & 0.7\\ 0.7 & 0.5 & 1.0 & 0.0\\ 0.0 & 0.0 & 0.3 & 0.4\end{vmatrix}.$$

В случае, когда рассматривается антисимметричное отношение, следует обратить внимание на следующее: отношение, полученное как пересечение R и ему обратное R^{-1}, $R\cap R^{-1}$ является матрицей, на главной диагонали которой лежат любые числа из интервала [0,1], а вне главной диагонали все элементы равны нулю. В нашем примере антисимметричного отношения:

$$R\cap R^{-1}=\begin{vmatrix}0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0\\ 0.0 & 0.3 & 0.0 & 0.0\\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0\\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.4\end{vmatrix}.$$

Нечеткое отношение R на U называется $\max-\min$ - *транзитивным* нечетким отношением если

$$\mu_R(u,w) \ge \sup_v \min(\mu_R(u,v), \mu_R(v,w)), \quad \forall\, u,v,w \in U .$$

Если принять во внимание определение композиции нечетких отношений, то это условие означает, что $R \supset R \circ R$. Установлено, что для рефлексивного нечеткого отношения R, транзитивность означает выполнение равенства $R = R \circ R$ или $R = R^2$.

Транзитивное замыкание нечеткого отношения R на U, $\hat{R}$, определяется выражением $\hat{R} = R \cup R^2 \cup \ldots \cup R^k$, $k \le n$, n - мощность множества U.

Транзитивное замыкание представляет собой транзитивное нечеткое отношение, а транзитивное нечеткое отношение совпадает со своим транзитивным замыканием.

Пример. Пусть на U задана матрица нечеткого отношения $R = \begin{vmatrix} 1.0 & 0.8 & 0.7 \\ 0.8 & 1.0 & 0.7 \\ 0.7 & 0.7 & 1.0 \end{vmatrix}$, которое рефлексивно и симметрично.

Для проверки транзитивности нам необходимо убедиться в справедливости равенства $R = R^2$.

Получим явный вид матрицы $R^2 =$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0.8 & 0.7 \\ 0.8 & 1 & 0.7 \\ 0.7 & 0.7 & 1 \end{vmatrix} \circ \begin{vmatrix} 1 & 0.8 & 0.7 \\ 0.8 & 1.0 & 0.7 \\ 0.7 & 0.7 & 1.0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 1 \vee 0.8 \vee 0.7 & 0.8 \vee 0.8 \vee 0.7 & 0.7 \vee 0.7 \vee 0.7 \\ 0.8 \vee 0.8 \vee 0.7 & 0.8 \vee 1 \vee 0.7 & 0.7 \vee 0.7 \vee 0.7 \\ 0.7 \vee 0.7 \vee 0.7 & 0.7 \vee 0.7 \vee 0.7 & 0.7 \vee 0.7 \vee 1.0 \end{vmatrix} = = \begin{vmatrix} 1 & 0.8 & 0.7 \\ 0.8 & 1.0 & 0.7 \\ 0.7 & 0.7 & 1.0 \end{vmatrix} \cdot$$

Следует заметить, что нечеткие отношения R обладают свойствами рефлексивности, антирефлексивности, симметричности, антисимметричности, транзитивности тогда и только тогда, когда этими свойствами обладают α - срезы этого нечеткого отношения.

Пример . Пусть задана матрица нечеткого рефлексивного, симметричного и транзитивного отношения

$R = \begin{vmatrix} 1.0 & 0.8 & 0.7 \\ 0.8 & 1.0 & 0.7 \\ 0.7 & 0.7 & 1.0 \end{vmatrix}$. Построив α - срезы этого отношения R_α, нетрудно убедиться, что все они являются рефлексивными, симметричными и транзитивными отношениями.

Действительно, при $\alpha \in (0;0.7]$, *получаем* $\mathrm{R}_\alpha = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$;

при $\alpha \in (0.7;0.8]$, *имеем* $\mathrm{R}_\alpha = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$;

при $\alpha \in (0.8;1.0]$, *имеем* $\mathrm{R}_\alpha = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

Классификация нечетких отношений

Нечетким отношением сходства R на U называется нечеткое отношение, обладающее свойствами рефлексивности и симметричности.

Пример. Нечеткое отношение "u, v – **близки** друг к другу", с функцией принадлежности $\mu_R(u,v) = \exp(-(u-v)^2)$, является симметричным и рефлексивным.

Действительно, $\mu_R(u,v) = \mu_R(v,u)$ и $\mu_R(u,u) = 1$. Следовательно, R является отношением сходства.

Нечетким отношением подобия (*близости*) называется нечеткое отношение, обладающее свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности.

Пример. Нечеткое отношение $R = \begin{vmatrix} 1.0 & 0.8 & 0.7 \\ 0.8 & 1.0 & 0.7 \\ 0.7 & 0.7 & 1.0 \end{vmatrix}$ является отношением подобия.

Известно, что транзитивное замыкание отношения сходства является отношением подобия (близости).

Важную роль в принятии решений при нечеткой информации играет нечеткое отношение *предпочтения*.

Нечетким отношением предпочтения R на U называется нечеткое отношение, обладающее свойством рефлексивности.

При этом $\mu_R(u,v)$ интерпретируется как субъективная степень выполнения предпочтения: "*u не хуже v*", обозначаемое $u \succ v$. Если $\mu_R(u,v)=0$, то могут иметь место два случая: либо $\mu_R(v,u)>0$, т.е. $v \succ u$ $u,v \in U$, либо $\mu_R(v,u)=0$ т.е. u, v не сравнимы между собой.

Определение нечеткого отношения предпочтения обычно дополняет требование *линейности* для нечетких отношений. В этом случае, на множестве U нет несравнимых между собой элементов. Т.е. если *при* $u \neq v$ *имеем* $\mu_R(u,v)=0$, то обязательно $\mu_R(v,u)>0$.

С понятием нечеткого отношения предпочтения связаны нечеткие отношения: *строгого предпочтения.*

Нечетким отношением строгого предпочтения R на U называется отношение, обладающего свойствами антирефлексивности и антисимметричности.

Оно определяется как нечеткое отношение $R^S = R^P - (R^P)^{-1}$, функция принадлежности которого

$$\mu_{R^S}(u,v) = \max(0, \mu_{R^P}(u,v) - \mu_{R^P}(v,u)), \quad \forall v,u \in U,$$

здесь R^P - нечеткое отношение *предпочтения*, заданное на U.

Известно, что если R^P - транзитивно, то тем же свойством транзитивности обладает R^S. А $\mu_{R^S}(u,v)$ интерпретируется как степень, с которой элемент v строго доминируется элементом u.

Пример. Задано отношение нестрогого предпочтения R. Построить R^S - строгое отношение предпочтения.

Решение. По определению $R^S = R - R^{-1}$, поэтому составим разность $R - R^{-1}$, заменяя в ней отрицательные числа на нули:

$$R = \begin{vmatrix} 1.0 & 0.1 & 0.5 \\ 0.6 & 1.0 & 0.2 \\ 0.3 & 0.1 & 1.0 \end{vmatrix}; \quad R^{-1} = \begin{vmatrix} 1.0 & 0.6 & 0.3 \\ 0.1 & 1.0 & 0.1 \\ 0.5 & 0.2 & 1.0 \end{vmatrix}; \quad R^S = \begin{vmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.2 \\ 0.5 & 0.0 & 0.1 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{vmatrix}$$

Используя отношение строгого предпочтения R^S, с функцией принадлежности $\mu_{R^S}(u,v)$, $u,v \in U$, вводится понятие *нечеткого множества недоминируемых* элементов $R^{н.д}$ Орловского.

Нечеткое множество недоминируемых элементов Орловского задается функцией принадлежности

$$\mu_R{}^{н.д}(u) = 1 - \max_v \mu_{R^S}(v,u), \; u,v \in U$$

Методы принятия решений в нечеткой среде

Необходимо выбрать один из трех конкурентоспособных товаров x_1, x_2, x_3, принимая во внимание три характеристики товара: c_1 - стоимость; c_2 - потребительские и c_3 - социальные характеристики.

Опишем этапы решения этой задачи.

Этап 1. Эксперт проводит попарное сравнение трех товаров сначала по первой, затем по второй и третьей характеристикам. В результате получаем три нечетких отношения предпочтения.

$$R_{C_1}=\begin{vmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}\quad R_{C_2}=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{vmatrix}\quad R_{C_3}=\begin{vmatrix}1&1&0\\1&1&0\\1&0&1\end{vmatrix}$$

Этап 2. Строится пересечение отношений $Q=R_{C_1}\cap R_{C_2}\cap R_{C_3}$ а также нечеткое отношение строгого предпочтения Q^S, с функцией принадлежности

$$\mu_{Q^S}(y,x)=\max(0,\mu_Q(y,x)-\mu_Q(x,y)).$$

$$Q=\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix};\quad Q^{-1}=\begin{vmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{vmatrix};\quad Q^S=\begin{vmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{vmatrix}.$$

Элементы матрицы Q^S получены так: из элементов Q^{-1} вычитаем элементы Q, если при этом получаются отрицательные числа, то заменяем их нулями.

Этап 3. Строится множество недоминируемых альтернатив $Q^{н.д}$, с функцией принадлежности $\mu_{Q^{н.д}}(x)=1-\max\limits_y \mu_{Q^S}(y,x)$. Из этого общего выражения имеем $\mu_{Q^{н.д}}(x_1)=1-\max(0,0,0)=1$; $\mu_{Q^{н.д}}(x_2)=1-\max(1,0,0)=0$; $\mu_{Q^{н.д}}(x_3)=1-\max(0,0,0)=1$.

Таким образом $Q^{н.д}=\left\{\dfrac{1.0}{x_1},\dfrac{0}{x_2},\dfrac{1.0}{x_3}\right\}$.

Этап 4. Строится свертка $P=\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i R_i$, $\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i=1$, ω_i - коэффициенты важности характеристик.

В примере полагаем, что они одинаково важные $P=\dfrac{1}{3}R_1+\dfrac{1}{3}R_2+\dfrac{1}{3}R_3=\begin{vmatrix}1&1&2/3\\1/3&1&1/3\\0&0&1\end{vmatrix}$. Далее вычисляется $P^{н.д}=\left\{\dfrac{1}{x_1},\dfrac{2/3}{x_2},\dfrac{1/3}{x_3}\right\}$. Наконец, определяется пересечение $L=Q^{н.д}\cap P^{н.д}=\left\{\dfrac{1}{x_1},\dfrac{0}{x_2},\dfrac{1/3}{x_3}\right\}$. Поскольку $\mu_L(x_1)=1$, то выбор $x^*=arg\max\limits_x \mu_L(x)=x_1$ считается рациональным.

Теоретические основы выбора альтернатив

Выбор как реализация цели

Выбор является действием, придающим всей деятельности целенаправленность. Именно выбор реализует подчиненность всей деятельности определенной цели или совокупности целей. Рано или поздно наступает момент, когда дальнейшие действия могут быть различными, приводящими к разным результатам, а реализовать можно только одно действие, причем вернуться к ситуации, имевшей место в этот момент, уже (как правило) нельзя.

Способность сделать правильный выбор в таких условиях – очень ценное качество, которое присуще людям в разной степени. Великие полководцы, выдающиеся политики, гениальные инженеры и ученые, талантливые администраторы отличались и отличаются от своих коллег или конкурентов прежде всего умением принимать лучшие решения, делать лучший выбор.

Естественно стремление понять, что такое “хороший выбор”, выработать рекомендации, как приблизиться к наилучшему решению, а если возможно, то и предложить алгоритм получения такого решения. Работа многих исследователей в этом направлении выявила характерную ситуацию, типичную для моделирования (в данном случае – моделирования процессов принятия решений): полная формализация нахождения наилучшего решения возможна, но лишь для хорошо изученных (хорошо структурированных) задач; для решения слабо структурированных задач полностью формальных алгоритмов не существует (если не считать тривиального и далеко не всегда приемлемого алгоритма перебора, т.е. метода проб и ошибок), но опытные и способные специалисты часто делают выбор, оказывающийся хорошим. Современная тенденция практики выбора в естественных ситуациях состоит в сочетании способности человека решать неформализованные задачи с возможностями формальных методов и компьютерного моделирования (например, диалоговые системы поддержки решений, экспертные системы, информационно-поисковые системы, системы управления базами данных, автоматизированные системы управления и т.п.) .

Задачи выбора чрезвычайно многообразны, различны и методы их решения. Прежде всего введем понятия, общие для всех задач выбора.

Будем представлять принятие решения как действие над множеством альтернатив, в результате которого получается подмножество выбранных альтернатив (обычно это одна альтернатива, что не обязательно, а иногда и невозможно). Сужение множества альтернатив возможно, если имеется способ сравнения альтернатив между собой и определения наиболее предпочтительных.

Каждый такой способ будем называть критерием предпочтения. Обратим внимание на то, что при таком описании выбора считают сами собой разумеющимися, уже пройденными, два чрезвычайно важных этапа:

1) порождение множества альтернатив, на котором предстоит осуществлять выбор;

2) определение целей, ради достижения которых производится выбор.

В практике системного анализа реализация этих этапов связана с определенными трудностями, для преодоления которых необходимы свои приемы и методы.

Множественность задач выбора

Отметим сразу, что проблема выбора далеко нетривиальна и допускает существенно различающиеся математические постановки задач. Дело в том, что каждая компонента ситуации выбора может реализовываться в качественно различных вариантах. Отметим основные их этих вариантов:

множество альтернатив *может быть конечным, счетным или континуальным;*

оценка альтернатив *может осуществляться по одному или по нескольким критериям, которые в свою очередь могут иметь как количественный, так и качественный характер;*

режим выбора *может быть однократным (разовым) или повторяющимся, допускающим обучение на опыте;*

последствия выбора *могут быть точно известны (*выбор в условиях определенности*), иметь вероятностный характер, когда известны вероятности возможных исходов после сделанного выбора (*выбор в условиях риска*), или иметь неоднозначный исход, не допускающий введения вероятностей (*выбор в условиях неопределенности*);*

ответственность за выбор *может быть односторонней (в частном случае индивидуальной) или многосторонней. Соответственно различают индивидуальный и групповой выбор;*

степень согласованности целей *при многостороннем выборе может варьироваться от полного совпадения интересов сторон (*кооперативный выбор*) до их противоположности (*выбор в конфликтной ситуации*). Возможны также промежуточные случаи, например* компромиссный выбор, коалиционный выбор, выбор в условиях нарастающего конфликта *и т.д.*

Различные сочетания перечисленных вариантов и приводят к многообразным задачам выбора, которые изучены не в одинаковой степени.

На примере описания выбора видно, как об одном и том же явлении можно говорить на языках различной общности. К настоящему моменту сложились три основных языка описания выбора.

Критериальный язык описания выбора

Самым простым, наиболее развитым (и, быть может, поэтому чаще употребляемым в приложениях) является **критериальный язык**. Это название связано с основным предположением, состоящим в том, что каждую отдельно взятую альтернативу можно оценить конкретным числом (значением критерия), и сравнение альтернатив сводится к сравнению соответствующих им чисел.

Пусть x – некоторая альтернатива из множества X. Считается, что для всех $x \in X$ может быть задана функция $q(x)$, которая называется *критерием* (*критерием качества, целевой функцией, функцией предпочтения, функцией полезности* и т. д.) и обладает тем свойством, что если альтернатива x_1 предпочтительнее альтернативы x_2 (будем обозначать это $x_1 > x_2$), то $q(x_1) > q(x_2)$ и обратно.

Если теперь сделать еще одно важное предположение, что выбор любой альтернативы приводит к однозначно известным последствиям (т.е. считать, что выбор осуществляется в условиях определенности) и заданный критерий q(x) численно выражает оценку этих последствий, то наилучшей альтернативой x^* является, естественно, та, которая обладает наибольшим значением критерия:

$$x^*=\text{argmax}\{q(x)\}, \qquad (1)$$

Задача отыскания x*, простая по постановке, часто оказывается сложной для решения, поскольку метод ее решения определяется как характером множества X, так и характером критерия q(x).

Однако сложность отыскания наилучшей альтернативы существенно возрастает, так как на практике оценивание любого варианта единственным числом обычно оказывается неприемлемым упрощением. Более полное рассмотрение альтернатив приводит к необходимости оценивать их не по одному, а по нескольким критериям, качественно различающимся между собой. Например, при выборе конструкции самолета проектировщикам следует учитывать множество критериев: технических (высотность, скорость, маневренность, грузоподъемность, длительность полета и т.д.), технологических (связанных с будущим процессом серийного изготовления самолетов), экономических (определяющих затраты на производство, эксплуатацию и обслуживание машин, их конкурентоспособность), социальных (в частности, уровень шума, загрязнение атмосферы), эргономических (условия работы экипажа, уровень комфорта для пассажиров) и пр. Даже в обыденной жизни при выборе мы почти никогда не используем единственный критерий: вспомните хотя бы затруднения при выборе подарка ко дню рождения или при выборе места для стоянки в турпоходе.

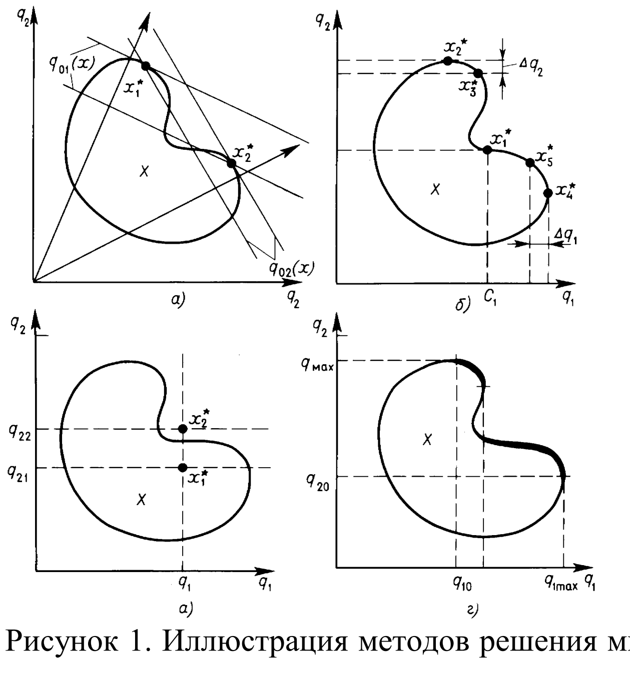


Рисунок 1. Иллюстрация методов решения многокритериальных задач: а) оптимизация по одному

“суперкритерию”, являющемуся линейной комбинацией частных критериев; б) метод уступок; в) задание уровней притязания; г) нахождение паретовского множества альтернатив

Итак, пусть для оценивания альтернатив используется несколько критериев qi(x), i = 1, ..., p. Теоретически можно представить себе случай, когда во множестве X окажется одна альтернатива, обладающая наибольшими значениями всех p критериев; она и является наилучшей. Однако на практике такие случаи почти не встречаются, и возникает вопрос, как же тогда осуществлять выбор (так, например, на рис. 1 множеству X соответствуют внутренние точки фигуры на плоскости значений двух критериев q1 и q2; оба критерия желательно максимизировать).

Сведение многокритериальной задачи к однокритериальной

Пусть для оценивания альтернатив используется несколько критериев *qi*(x); i = 1...p. Как же тогда осуществлять выбор? Рассмотрим наиболее употребительные способы решения многокритериальных задач. Первый способ состоит в том, чтобы многокритериальную задачу свести к однокритериальной. Это означает введение суперкритерия, т.е. скалярной функции векторного аргумента:

$$q0(x)= q0[q1(x), q2(x), ..., qp(x)]. \qquad (2)$$

Суперкритерий позволяет упорядочить альтернативы по величине q0, выделив тем самым наилучшую (в смысле этого критерия). Вид функции q0 определяется тем, как мы представляем себе вклад каждого критерия в суперкритерий. Обычно используют аддитивные или мультипликативные функции:

$$q_0 = \sum\{\alpha_i \cdot q_i/S_i\}, \qquad (3)$$

$$1 - q_0 = \prod\{1 - [\beta_i \cdot q_i/S_i]\} \qquad (4)$$

Коэффициенты S_i обеспечивают, во-первых, безразмерность числа Q_i/S_i (частные критерии могут иметь разную размерность) и, во-вторых, в необходимых случаях (как в формуле 4) выполнения условия $B_i \cdot Q_i/S_i < 1$. Коэффициенты A_i и B_i отражают относительный вклад частных критериев в суперкритерий.

Итак, при данном способе задача сводится к максимизации суперкритерия:

$$x^* = argmax\{q_0[q_1(x), ..., q_p(x)]\} \qquad (5)$$

Очевидные достоинства объединения нескольких критериев в один суперкритерий сопровождаются рядом трудностей и недостатков, которые необходимо учитывать при использовании этого метода. Оставив в стороне трудности построения самой функции и вычислительные трудности ее максимизации, обратим внимание на следующий очень важный момент. Упорядочение точек в многомерном пространстве в принципе не может быть однозначным и полностью определяется видом упорядочивающей функции. Суперкритерий играет роль этой упорядочивающей функции, и его даже «небольшое» изменение может привести к тому, что оптимальная в новом смысле альтернатива окажется очень сильно отличающейся от старой.

Условная максимизация

Недостатки свертывания нескольких критериев заставляют искать другие подходы к решению задач многокритериального выбора. Рассмотрим второй способ решения таких задач. Он заключается в использовании того факта, что частные критерии обычно неравнозначны между собой. Наиболее явное выражение этой идеи состоит в выделении основного, главного критерия и рассмотрении остальных как дополнительных, сопутствующих. Такое различие критериев позволяет сформулировать задачу выбора как задачу нахождения условного экстремума основного критерия:

$$x^* = \arg\{\max q_1(x) | q_i(x) = C_i,\ i=2,3,\ldots p\} \qquad (6)$$

при условии, что дополнительные критерии остаются на заданных им уровнях.

В некоторых задачах оказывается возможным или даже необходимым задавать ограничения на сопутствующие критерии не столь жестко. Например, если сопутствующий критерий характеризует стоимость затрат, то вместо фиксации затрат разумнее задавать их верхний уровень, т.е. формулировать задачу с ограничениями типа неравенств:

$$x^* = \arg\{\max q_1(x) | q_i(x) \le C_i,\ i=2,3\ldots,p\} \qquad (7)$$

Отметим, что такое, казалось бы, незначительное изменение постановки задачи требует принципиально иных методов ее решения.

Поиск альтернативы с заданными свойствами

Третий способ многокритериального выбора относится к случаю, когда заранее могут быть указаны значения частных критериев (или их границы). Задача состоит в том, чтобы найти альтернативу, удовлетворяющую этим требованиям, либо, установив, что такая альтернатива во множестве отсутствует, найти в альтернативу, которая подходит к поставленным целям ближе всего.

Удобным свойством является возможность задавать желательные значения q_i^* критериев так точно, как и в виде верхних или нижних границ. Назначаемые значения величин q_i^* иногда называют уровнями притяжения, а точки их пересечения в p-мерном пространстве критериев — целью или опорной точкой.

Теперь идея оптимизации состоит в том, чтобы, начав с любой альтернативы, приближаться к x^* по некоторой траектории в пространстве.

Это достигается введением числовой меры близости между очередной альтернативой x и целью x^*, т.е. между векторами $q(x)=[q_1(x)<\ldots q_p(x)]$ и $q^*(x)=[q_1^*(x)<\ldots q_p^*(x)]$. Можно по-разному количественно писать эту близость, что и определяет методы решения задачи.

Нахождение паретовского множества

Четвертый полностью формализуемый способ многокритериального выбора состоит в отказе от выделения единственной «наилучшей» альтернативы и соглашении о том, что 1 предпочтение одной альтернативе перед другой можно отдавать только если первая по всем критериям лучше второй. Если же предпочтение хотя бы по одному критерию расходится с предпочтением по другому, то такие альтернативы признаются несравнимыми. В результате по парного сравнения альтернатив все худшие по всем критериям альтернативы отбрасываются, а все оставшиеся несравнимые между собой принимаются. Если все максимально достижимые значения частных критериев не относятся к одной и той же альтернативе, то принятые альтернативы образуют множество Парето и выбор на этом заканчивается. При необходимости же выбора единственной альтернативы следует привлекать дополнительные соображения: вводить новые добавочные критерии и ограничения, бросить жребий, либо прибегать к услугам экспертов.

Мы обсудили наиболее употребительные способы описания выбора в терминах критериального языка. Возможны и другие постановки задач на этом языке; наша цель состояла в том, чтобы дать лишь общее представление об их многообразии. Математические аспекты решения задач оптимизации рассматриваются в специализированных монографиях и учебниках.

Для обозримости и облегчения запоминания приведем схему совокупности изложенных способов (рисунок .2)

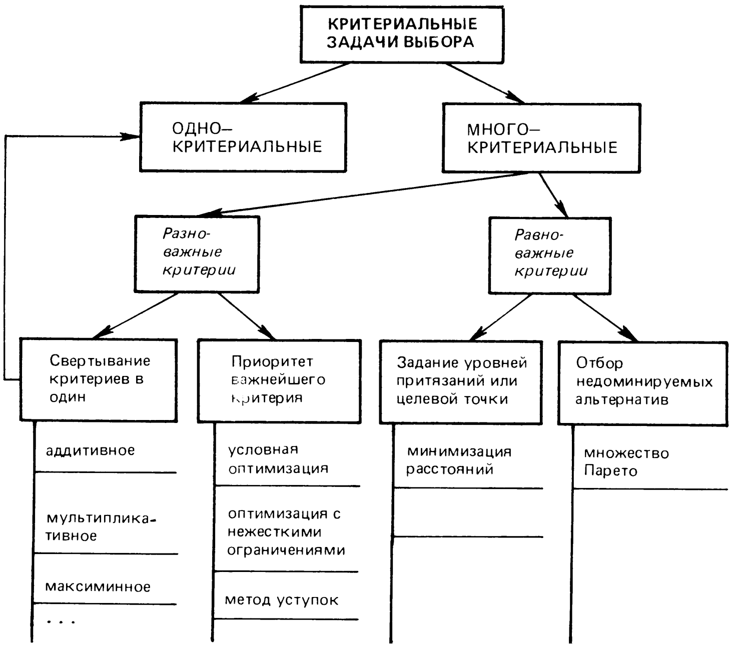


Рисунок 2. Классификация задач выбора и способов их решения при их описании на критериальном языке

Второй, более общий язык, на котором описывается выбор, — это **язык бинарных отношений**. Его большая, нежели у критериального языка, общность основана на учете того факта, что в реальности дать оценку отдельно взятой альтернативе часто затруднительно или невозможно; однако если рассматривать ее не в отдельности, а в паре с другой альтернативой, то находятся основания сказать, какая из них более предпочтительна.

Таким образом, основные предположения этого языка сводятся к следующему:

1) отдельная альтернатива не оценивается, т.е. критериальная функция не вводится;

2) для каждой пары альтернатив (x, y) некоторым образом можно установить, что одна из них предпочтительнее другой либо они равноценны или несравнимы (чаще всего последние два понятия отождествляются);

3) отношение предпочтения внутри любой пары альтернатив не зависит от остальных альтернатив, предъявленных к выбору.

Поскольку в общем случае не все возможные пары (x, y) удовлетворяют условиям накладываемым отношением R, бинарное отношение является некоторым подмножеством полного бинарного отношения, т.е. R ∈Математически бинарное отношение R на множестве X определяется как определенное подмножество упорядоченных пар (x, y). Удобно использовать обозначение xRy, если x находится в отношении R с y, x!Ry в противном случае. Множество всех пар {(x, y), x, y

Задать отношение — это значит тем или иным способом указать все пары (x, y), для которых выполнено отношение R.

Существует четыре разных способа задания отношений (рис. 3) преимущества каждого проявляются при разных характеристиках множества X.

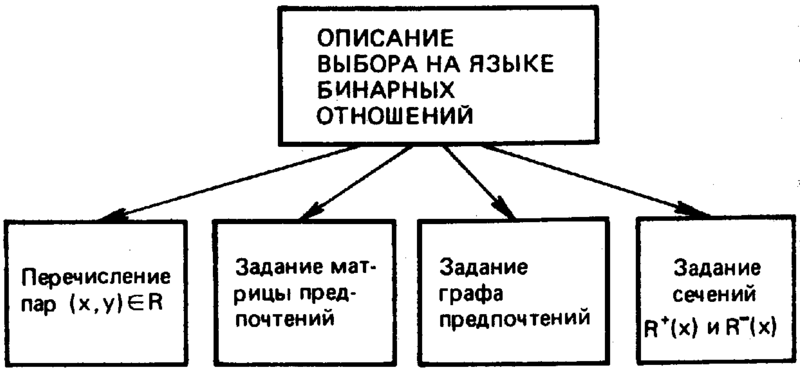


Рисунок 3. Способы описания выбора на языке бинарных отношений

Первый, очевидный, способ состоит в непосредственном перечислении таких пар. Ясно, что он приемлем лишь в случае конечного множества X.

Второй удобный способ задания отношения R на конечном множестве — матричный. Все элементы нумеруются, и матрица отношения R определяется своими элементами $a_{ij}(R) = \{1: x_iRx_j; 0: x_iRx_j\}$ для всех i и j. Известным примером такого задания отношений являются турнирные таблицы (если ничьи обозначить нулями, как и проигрыш, то матрица изобразит отношение "x_i, — победитель x_j").

Третий способ — задание отношения графом. Вершинам графа G (R) ставят в соответствие (пронумерованные) элементы множества X, и если x_iRx_j, то от вершины x_i проводят направленную дугу к вершине x_j; если же x_iRx_j, то дуга отсутствует.

Для определения отношений на бесконечных множествах используется четвертый способ — задание отношение R сечениями. Множество

$$R^+(x) = \left\{ y \in X \mid (y, x) \in R \right\}$$

называется верхним сечением отношения R, а множество

$$R^-(x) = \left\{ y \in X \mid (x, y) \in R \right\}$$

X, с которыми заданный элемент x находится в отношении R. Отношение однозначно определяется одним из своих сечений. ∈ X, а нижнее сечение — множество всех y ∈ X, которые находятся в отношении yRx с заданным элементом x ∈- нижним сечением. Иначе говоря, верхнее сечение — это множество всех y

Для теории выбора особое значение среди всех бинарных отношений имеют отношения, которые соответствуют предпочтению одной альтернативы перед другой или случаю невозможности отдать предпочтение одной из двух альтернатив. Эти отношения можно задать через строго определяемые отношения эквивалентности, порядка и доминирования. Для их определения нам понадобятся некоторые свойства отношений вообще.

Бинарное отношение R на множестве называется:

- X;∈рефлексивным, если xRx для каждого x
- X (т.е. R может выполняться только для несовпадающих элементов);∈x ∀ антирефлексивным, если x!Rx
- симметричным, если xRy -> X;∈x, v ∀yRx
- асимметричным, если xRy -> X (ясно, что асимметричное отношение R антирефлексивно);∈ x, y ∀y!Rx
- X (xRy, yRx) -∈антисимметричным, если для всех x, y > x = y;
- X (xRy, yRz) -∈транзитивным, если для всех x, y, z > xRz;
- отрицательно транзитивным, если отношение R транзитивно;
- сильно транзитивным, если отношение одновременно транзитивно и отрицательно транзитивно.

Для определения отношений на бесконечных множествах используется четвертый способ – задание отношения R *сечениями*. Множество

$R^+(x) = \{y \in X \mid (y, x\in)\ R\}$

называется **верхним сечением** отношения R, а множество

$R^-(x) = \{y \in X \mid (x, y\in)\ R\}$

– **нижним сечением**. Иначе говоря, верхнее сечение – это множество всех $y \in X$, которые находятся в отношении yRx с заданным элементом $x \in X$, а нижнее сечение – множество всех $y \in X$, с которыми заданный элемент x находится в отношении R. Отношение однозначно определяется одним из своих сечений.

Приведенные ниже примеры иллюстрируют все четыре способа представления конкретных отношений.

Пример 1. Полное бинарное отношение U:

1) в U входят все пары (x_i, x_j), $x_s \in X$;

2) $a_{ij}(U) = 1$ для всех i и j;

3) граф $G(U)$ такой, что его дуги соединяют любую пару вершин (стрелки направлены в обе стороны, поскольку $x_i\ U\ x_j$ и $x_j\ U\ x_i$, а каждая вершина имеет петлю: $x_i\ U\ x_i$);

4) $R^+(x) = R^-(x) = X$ для любого $x \in X$.

Пример 2. Диагональное отношение E:

1) в E входят только пары с одинаковыми номерами: $x_i\ E\ x_j$ верно только при $i = j$;

2) $a_{ij}(E) = \{$ 1: $i = j$; 0: i ??j $\}$;

3) граф $G(E)$ такой, что каждая его вершина имеет петлю, а остальные дуги отсутствуют;

4) $R^+(x) = R^-(x) = x$ для любого $x \in X$.

Для теории выбора особое значение среди всех бинарных отношений имеют отношения, которые соответствуют предпочтению одной альтернативы перед другой или случаю невозможности отдать предпочтение одной из двух альтернатив. Эти отношения можно задать через строго определяемые отношения эквивалентности, порядка и доминирования.

Теперь можно охарактеризовать отношения, используемые в теории выбора.

Отношение R на множестве X называется *отношением эквивалентности* (обозначение), если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно. Примеры отношений эквивалентности: “быть четным”, “иметь одинаковый остаток от деления на 3” – на множестве натуральных чисел; “быть одноклассниками” – на множестве учеников данной школы; “быть подобными” – на множестве многоугольников. Задание отношения эквивалентности равносильно разбиению множества X на непересекающиеся классы ([redacted] при i ? j) эквивалентных элементов: x y <u>тогда и только тогда</u>, когда $x, y \in X_i$ (т.е. если x и y принадлежат одному *классу эквивалентности*) .

Отношением нестрогого порядка) называется рефлексивное, антисимметричное и транзитивное отношение.≤(обозначение **Отношением строгого порядка** (обозначение <) называется антирефлексивное, асимметричное и транзитивное отношение. Отношение нестрогого порядка можно рассматривать как объединение отношений < и .

Наконец, **отношением доминирования** называется отношение, обладающее антирефлексивностью и асимметричностью. Говорят, что “x доминирует y” (обозначается x » y), когда x в каком-то смысле превосходит y. (Очевидно, строгий порядок – частный случай доминирования, при котором имеет место еще транзитивность.)

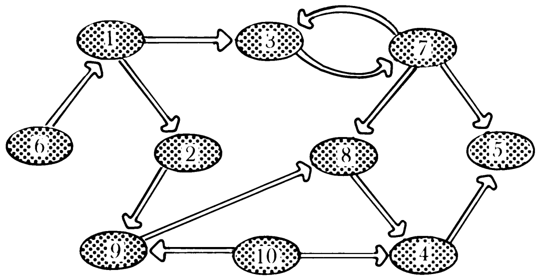


Рисунок 4. Пример графа предпочтений

Хотя при подробном рассмотрении выбора потребуются и другие факты теории отношений, введенные понятия позволяют составить представление о возможностях данного языка.

В случае конечных множеств *X* очень удобно находить наилучшие альтернативы с помощью графа предпочтений, стрелки которого направлены в сторону менее предпочтимой альтернативы (рис. 4) . Выделив вершины графа, из которых стрелки только исходят (альтернативы 6 и 10 на рис. 4), мы находим недоминируемые, т.е. наилучшие, альтернативы. Можно показать, что если граф сильно транзитивен (т.е. транзитивен и по наличию, и по отсутствию стрелок) и антирефлексивен (отсутствуют петли), то описываемый выбор сводится к однокритериальному выбору. Другие типы графов описывают другие ситуации выбора.

Несмотря на то что язык бинарных отношений введен для описания более общих и сложных ситуаций, нежели те, которые описываются критериальным языком, в чисто познавательных целях поучительно проследить, как уже известная нам ситуация выглядит в новом представлении.

Например, многомерное критериальное пространство может быть поставлено в соответствие евклидову пространству. Введение на этом пространстве бинарных отношений требует учета его свойств. В частности, начинают играть роль отношения инвариантные (относительно переноса), для которых верхнее сечение в любой точке может быть получено параллельным переносом верхнего сечения в любой другой точке. Примером инвариантного отношения является отношение Парето P:

$$(\forall x, y \in X)\ [xPy] \Rightarrow \left\{ (\forall_j = \overline{1, m})\ [x_j \geqslant y_j] \text{ и } (\ j_0 = \overline{1, m})\ [x_{j_0} > y_{j_0}] \right\}$$

Верхнее сечение отношения P есть первый квадрант с началом в точке теперь понятно, как находится паретовское множество альтернатив: в паретовское множество включаются альтернативы, верхнее сечение которых пусто (на рис.5. они отмечены кружками).

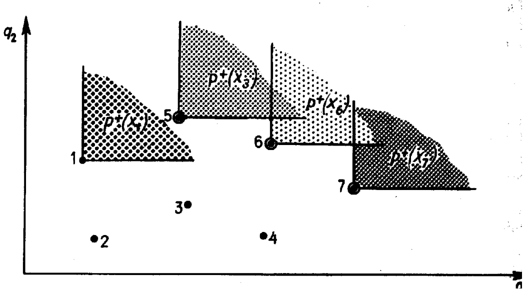


Рисунок 5.Описание паретовского множества как множества таких альтернатив, для которых верхнее сечение P+ (x) пусто

Множество X∈ X называется мажорантой по отношению R на X, если для всех y ∈B общем же случае выделение наиболее предпочтительных альтернатив возможно с помощью понятия оптимальности по отношению, позволяющего придавать разный смысл понятию "наилучший" (задавая разные отношения R). Элемент x $_{+}$(R) всех мажорант называется множеством R-оптимальных элементов.

Важно обсудить ситуацию, возникшую при описании выбора на языке бинарных отношений в результате создания теории полезности. П. Фишберн строго доказал теорему, смысл которой довольно ясен:

если множество X конечно и между его элементами имеется отношение строгого порядка, то можно построить такую вещественную функцию и (х) на X, для которой $(x<y) \Rightarrow [u(x)<u(y)]$ (в левой части < означает отношение предпочтения, в правой — знак "меньше").

Функция *и* (х) называется функцией полезности. Ясно, что такая функция не единственна: произвольное монотонное преобразование сохраняет ее упорядочивающее свойство. Этот результат затем был обобщен на счетные и континуальные множества X, на нестрогий порядок и на многокритериальный случай (аддитивные функции полезности). Определение функции и (х) позволяет перейти от языка бинарных отношений к критериальному языку, взяв и (х) в качестве критериальной функции. Были развиты методы, позволяющие сузить класс функций полезности, например, благодаря рассмотрению иерархических парных предпочтений, повышая тем самым "точность определения *и* (х)".

Создается впечатление, что от качественных порядковых измерений можно перейти к количественным. На самом деле мы здесь вновь сталкиваемся с такой ситуацией, когда "оцифровка" порядковой шкалы не делает ее числовой шкалой. Для воспроизводства упорядочения фиксированного попарно упорядоченного множества X, конечно, можно воспользоваться числовой функцией и (х); однако стоит дополнить X альтернативами, которые не рассматривались при первом упорядочении, как функцию и (х) потребуется определять заново. Более того, если два разных эксперта дадут разные упорядочения множества X, то можно доопределить функции полезности для каждого из них, но сравнивать их численно иначе как в отношении порядка не имеет смысла, хотя обе они определены на одном множестве.

В тех случаях, когда количественная величина по каким-то причинам измеряется в порядковой шкале, оцифровка порядковых данных могла бы иметь смысл. Однако во многих приложениях теории полезности мы имеем дело с измерениями, которые в принципе не могут выйти из разряда порядковых.

Язык функций выбора

Некоторые особенности выбора привели к построению третьего, ещё более общего языка его описания. Во-первых, нередко приходится сталкиваться с ситуациями, когда предпочтение между двумя альтернативами зависит от остальных альтернатив. Например, предпочтение покупателя между чайником и кофеваркой может зависеть от наличия в продаже кофемолки. Во-вторых, возможны такие ситуации выбора, когда понятие предпочтения вообще лишено смысла. Например, по отношению к множеству альтернатив довольно обычными являются правила выбора "типичного", выбора "среднего", выбора "наиболее отличного, оригинального", теряющие смысл в случае двух альтернатив.

Функция выбора как отображение совокупности множеств в совокупность множеств (поскольку для выбора могут предлагаться любые подмножества X⊆Язык функций выбора описывает выбор как операцию над произвольным множеством альтернатив X, которая ставит этому множеству в соответствие некоторое его подмножество С (X): С (X) $_{i}$ X) без поэлементного отображения одного множества на другое и без отображения множеств на числовую ось является своеобразным и пока еще не полно изученным математическим объектом. Конечно, накладывая на функцию выбора определенные требования, мы можем на этом языке описывать и те варианты выбора, которые отражаются в предыдущих языках. Однако главное достоинство нового языка — возможность рассмотрения более сложных правил выбора. На такую возможность указывает хотя бы различие числа возможных функций выбора и числа возможных графов предпочтения на множестве п альтернатив. Число графов, отличающихся наличием или отсутствием хотя бы одной дуги, равно $2\subseteq^{n*n}$. Если для выбора предлагаются k из п альтернатив, то число функций выбора равно 2^k (каждая из альтернатив может либо входить в С (X_k), либо нет). Разнообразие функций выбора намного превосходит разнообразие графов предпочтения. Кроме того, здесь сразу допускается отказ от выбора, т.е. пустой выбор С (X_i) = ф, что также расширяет множество правил выбора.

Различие между классами правил выбора можно выразить через различные ограничения, которым подчиняется тот или иной тип функции выбора. Отдельные ограничения и их комбинации дают уже известные нам правила выбора, другие определяют новые правила, которые предстоит изучить. Приведем некоторые из таких ограничений:

Аксиома наследования (Н):

$$X' \subseteq X \Rightarrow C(X') \supseteq C(X) \cap X'.$$

Смысл этой аксиомы сводится к требованию, чтобы в выбор на подмножестве X' вошли все те альтернативы из X', которые входил” в выбор на X (возможно, еще и другие; рис. 6, а).

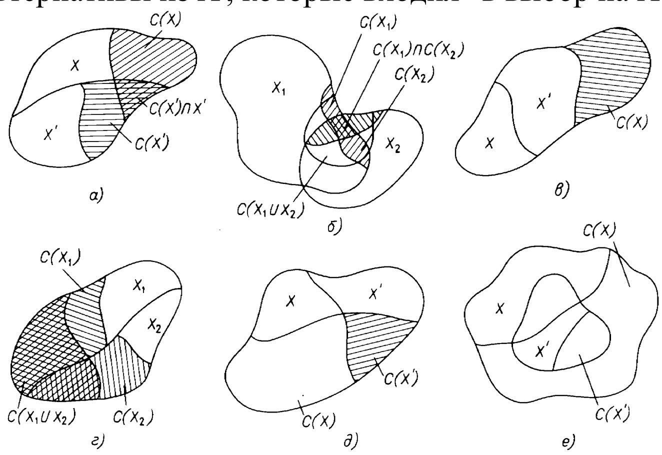


Рисунок 6. Иллюстрация различных аксиом, накладываемых на функции выбора

Аксиома согласия (С):

$$\bigcap_i C(X_i) \subseteq C(\bigcup_i X_i).$$

Это означает, что в выбор из объединения множеств обязательно должны входить альтернативы, общие для выборов из всех множеств (и, возможно, другие альтернативы; рис. 6, б).

Оказывается, совместное подчинение функции выбора аксиомам Н и С дает выбор, описываемый в языке бинарных отношений.

Аксиома отбрасывания (О):

$$C(X) \subseteq X' \subseteq X \Rightarrow C(X') = C(X).$$

Это означает, что если отбросить любую часть отвергнутых при выборе альтернатив, то выбор на оставшемся множестве не изменится (рис. 6, в); поэтому данную аксиому называют также условием независимости от отвергнутых альтернатив.

Совместное наложение на выбор аксиом Н, С и О приводит к случаю выбора паретовского множества.

Аксиома Плотта (КС):

$$C(X_1 \cup X_2) = C(C(X_1) \cup C(X_2)).$$

Это отражает требования, накладываемые при многоступенчатых выборах, когда считается, например, что определить чемпиона мира можно путем соревнований между чемпионами стран и результат окажет тем же, если соревноваться будут не только чемпионы (рис. 6, г). Поэтому эту аксиому называют еще условием независимости от пути Функции выбора, удовлетворяющие ей, называются квазисумматорными.

Можно показать, что требование КС эквивалентно совместному выполнению Н и О; следовательно, соединение требований КС и С тоже приводит к паретовскому выбору.

Аксиома предпочтения (П):

$$X' \subseteq X \Rightarrow C(X) \cap X' = C(X').$$

Она требует, чтобы при сужении множества альтернатив в выборе оставались только те альтернативы, которые входили в выбор ранее (рис. 6, д). Это столь жесткое ограничение, что оно эквивалентно скалярному критериальному выбору.

Ясно, что некоторые из введенных аксиом можно ослаблять или усиливать (например, П есть усиление Н). Аксиому Плотта можно усилить до аксиомы сумматорности: С (X_1 $X\cup_2$) = C(X_1

$C(X\cup)\ _2)$; можно накладывать новые, независимые требования (например, аксиома мультипликаторности $C\ (X_1\ \ X\cap_2) = C(X_1\ C(X\cap)\ _2)$, аксиома монотонности $X_1\ \ X\subseteq_2$ -> $C(X_1\ C(X\subseteq)\ _2)$; (рис. 6, е), получая при этом различные типы выбора. Наоборот, можно, изучив ограничения того или иного реального правила выбора, искать свойства класса функций выбора, удовлетворяющего этим ограничениям.

Язык функций выбора является весьма общим и потенциально может описать любой выбор. Однако его теория находится в начальной стадии развития и пока еще занимается преимущественно описанием старых ситуаций в новых терминах.

Групповой выбор

В человеческом обществе единоличное принятие решений является не единственной формой выбора. “Ум – хорошо, а два – лучше”, гласит поговорка, имеющая в виду тот случай, когда оба ума с одинаковыми намерениями пытаются найти хороший выбор. Этот случай мы и рассмотрим в данном параграфе (выбор в условиях конфликта будет рассмотрен в дальнейшем).

Описание группового выбора

Итак, пусть на множестве альтернатив X задано n в общем случае различных индивидуальных предпочтений (для определенности будем говорить о бинарных отношениях) $R_1, R_2, ..., R_n$. Ставится *задача о выработке некоторого нового отношения* R, *которое согласует индивидуальные выборы, выражает в каком-то смысле “общее мнение” и принимается за групповой выбор*. Очевидно, что это отношение должно быть какой-то функцией индивидуальных выборов: $R = F(R_1, ..., R_n)$. Различным принципам согласования будут отвечать разные функции F. В принципе, т.е. теоретически, функции F могут быть совершенно произвольными, учитывать не только индивидуальные выборы, но и другие факторы, в том числе и исход некоторых случайных событий (например, бросания жребия), и главный вопрос состоит в том, чтобы правильно отобразить в функции F особенности конкретного варианта реального группового выбора.

Различные правила голосования

Один из наиболее распространенных принципов согласования – **правило большинства**: *принятой всеми считается альтернатива, получившая наибольшее число голосов*. Правило большинства привлекательно своей простотой и демократичностью, но имеет особенности, требующие осторожного обращения с ним. Прежде всего *оно лишь обобщает индивидуальные предпочтения, и его результат не является критерием истины*. Только дальнейшая практика показывает, правильным или ошибочным было решение, принятое большинством голосов; само голосование – лишь форма согласования дальнейших действий*. Во-вторых, даже в простейшем случае выбора одной из двух альтернатив легко представить себе ситуацию, когда правило большинства не срабатывает: разделение голосов поровну при четном числе голосующих. Это порождает варианты: “председатель имеет два голоса”, “большинство простое (51 %)“, “подавляющее большинство (около 3/4)“, “абсолютное большинство (близкое к 100 %)“, наконец, “принцип единогласия (консенсус, право вето)“.

Язык функций выбора (“глобальных функций множеств”) описывает результат выбора как некоторое подмножество множества альтернатив. Такое соответствие двух множеств без их поэлементного соответствия является новым понятием, расширяющим смысл термина “функция”. Оно позволяет описывать произвольные ситуации выбора, чего нельзя было сделать с помощью предыдущих двух языков.

Коллективный выбор при любом правиле его осуществления сопряжен с риском оказаться в парадоксальной ситуации. Знание парадоксов голосования необходимо для предотвращения искажения демократического характера этой процедуры.

Подчеркнем, что при любом из этих вариантов подразумевается отказ от принятия решения, если ни одна из альтернатив не получила необходимого процента голосов. Поскольку в реальной жизни отказ от дальнейших действий, следующих за решением, бывает недопустим, а переход к принятию за групповой выбор выбора отдельного лица (“диктатора”) – нежелательным, разрабатываются различные приемы, сокращающие число ситуаций, приводящих к отказу.

Например, если два эксперта дали противоположные предпочтения между двумя вариантами a и b, то можно сделать выбор, сравнивая “силу предпочтения” каждого эксперта. При возможности введения количественного критерия оценки это сводится к арифметической операции, но и при порядковом сравнении есть возможность оценки “силы предпочтения”. В криминалистической практике в таких случаях экспертам предлагается в одном ряду с a и b упорядочить по предпочтению еще несколько альтернатив, скажем c, d и e. Пусть первый эксперт дал упорядочение (c, d, a, b, e), а второй – (b, c, d, e, a). Тогда можно сделать вывод, что степень предпочтения b по сравнению с a у второго эксперта больше, чем степень предпочтения a перед bу первого, и принять решение в пользу b (за этим приемом стоит ряд предположений – сравнимость интенсивностей предпочтений, одинаковая компетентность экспертов и т.д., требующих проверки в ответственных случаях) .

Даже для консенсуса, требующего единогласия, разработаны приемы, облегчающие его достижение. Если же не удавалось достичь консенсуса не только по поводу самих альтернатив, но и относительно способа их проверки, то, по мнению Акоффа, следует найти консенсусное решение, что же делать дальше. Интересно его наблюдение, что в таких случаях обычно принималось решение поручить выбор одному из авторитетных и ответственных лиц (мы еще вернемся к этому моменту). Фактически это переход от демократического, но не давшего решения правила голосования к недемократическому, но приводящему к какому-то решению “диктаторскому” принципу. Такое экспериментальное наблюдение имеет и теоретическое объяснение, излагаемое ниже на качественном уровне.

Марковские модели принятия решений

В данном разделе рассматриваются многостадийные задачи принятия решений с конечным числом состояний $\boldsymbol{S_j}$ ($\boldsymbol{j}$ =1,..., $\boldsymbol{m}$) оптимизируемой системы $\boldsymbol{S}$. Предполагается, что в дискретные моменты времени $\boldsymbol{t}_1$, $\boldsymbol{t}_2$, ... система переходит в новое состояние в соответствии с некоторой матрицей переходных вероятностей:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mm} \end{bmatrix}.$$

Элемент $\boldsymbol{p_{ij}}$ матрицы означает вероятность перехода системы из "старого" состояния $\boldsymbol{S_i}$ в "новое" состояние $\boldsymbol{S_j}$, при этом сумма элементов любой строки матрицы равна 1.

Такая модель, описывающая процесс поведения системы, при котором вероятность перехода системы в любое возможное состояние в каждый момент времени определяется только её состоянием в предыдущий момент времени и не зависит от более ранней предыстории, называется ***марковской.***

.

С помощью аппарата марковских моделей могут быть описаны многие практические ситуации. Рассмотрим конкретный пример.

Пример. Некоторая фирма занимается промышленной разработкой программного обеспечения для компьютерных систем.

В начале каждого года руководители фирмы решают задачу замены оборудования, включающего технические и программные средства, используемые в производственном процессе и обеспечивающие необходимую технологическую среду разработки.

В результате экспертной оценки определяются: состояние оборудования фирмы (это система $\boldsymbol{S}$), которое оценивается как "хорошее" (1), "удовлетворительное" (2) или "плохое" (3), и таким образом, система может находиться в одном из трёх указанных состояний; матрица переходных вероятностей может иметь вид:

$$P^1 = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Здесь, например, число 0,3 означает вероятность того, что по экспертным оценкам система, пребывающая в начале года в "хорошем" состоянии, в течение года и в начале следующего года проявит себя как система в "плохом" состоянии.

Будем полагать, что матрица переходных вероятностей не меняется, и предположим, что в зависимости от состояний, в которых последовательно оказывается система ("хорошее", "удовлетворительное", "плохое"), может быть вычислен доход фирмы за годичный период $t_{i+1} - \mathbf{t}_i$, при этом, в зависимости от состояния, доход может быть как положительным, так и отрицательным.

Для моделирования такой ситуации можно матрице переходных вероятностей $\boldsymbol{P}^1$ поставить в соответствие матрицу доходов $\boldsymbol{R}^1$:

$$R^1 = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Элемент r_{ij} матрицы означает локальный выигрыш – доход, полученный за период $t_{i+1} - \mathbf{t}_i$ при переходе системы из состояния i в состояние j.

Так, число 5 означает доход, выраженный в некоторых условных единицах, при сохранении системой "удовлетворительного" состояния. Отрицательные значения отражают потери (проигрыш).

Ясно, что со временем оборудование устаревает и нуждается в обновлении в соответствии с новыми международными стандартами и требованиями рынка. В результате при постоянных матрицах $\boldsymbol{P}^1$ и $\boldsymbol{R}^1$ система может деградировать, неизменно оставаясь в плохом состоянии и принося одни убытки.

В реально работающих фирмах по результатам экспертного анализа проводится периодическое обновление оборудования с изменением технологического окружения и обучением персонала. Данный процесс моделируется изменением матриц переходных вероятностей и доходов. В нашем примере они, например, могут измениться следующим образом:

вместо записанных ранее матриц

$$P^1 = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad R^1 = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

могут быть использованы матрицы

$$P^2 = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,6 & 0,1 \\ 0,1 & 0,6 & 0,3 \\ 0,05 & 0,4 & 0,55 \end{bmatrix}; \qquad R^2 = \begin{bmatrix} 6 & 5 & -1 \\ 7 & 4 & 0 \\ 6 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Здесь в изменённой <u>матрице переходных вероятностей</u> учтены вероятности перехода в как в более "хорошие", так и в более "плохие" состояния (например, элемент $\boldsymbol{p}_{11}$ матрицы $\boldsymbol{R}^2$ оказывается больше соответствующего элемента матрицы $\boldsymbol{R}^1$, а элемент $\boldsymbol{p}_{13}$ меньше соответствующего элемента), а в изменённой <u>матрице доходов</u> учтены затраты на реорганизацию и модификацию (например, элемент $\boldsymbol{r}_{11}$ матрицы $\boldsymbol{R}^2$ оказывается меньше соответствующего элемента матрицы $\boldsymbol{R}^1$).

На каждом этапе можем принять решение не проводить модернизацию фирмы и иметь матрицы $\boldsymbol{P}^1$ и $\boldsymbol{R}^1$ или принять решение о необходимых изменениях и использовать матрицы $\boldsymbol{P}^2$, $\boldsymbol{R}^2$. Возникает проблема выбора, требующая принятия решений с целью максимизации ожидаемого фирмой дохода. Это многоэтапная задача принятия решений, так как выбор осуществляется каждый раз в заданные дискретные моменты времени.

С привлечением уже рассмотренного примера обсудим основные моменты выбора оптимального решения.

Предположим, что планирование стратегии поведения фирмы осуществляется на конечный период времени. Покажем, что решение может быть основано на уже известном методе динамического программирования (метод Беллмана) в соответствии с общей концепцией анализа и оптимизации многошаговых задач.

Пусть период $t_{i+1}- \mathbf{t}_i$ соответствует одному году, а планирование проводится на трехлетний период. Для наглядности соответствующее дерево решений можно представить графически (рис. 1).

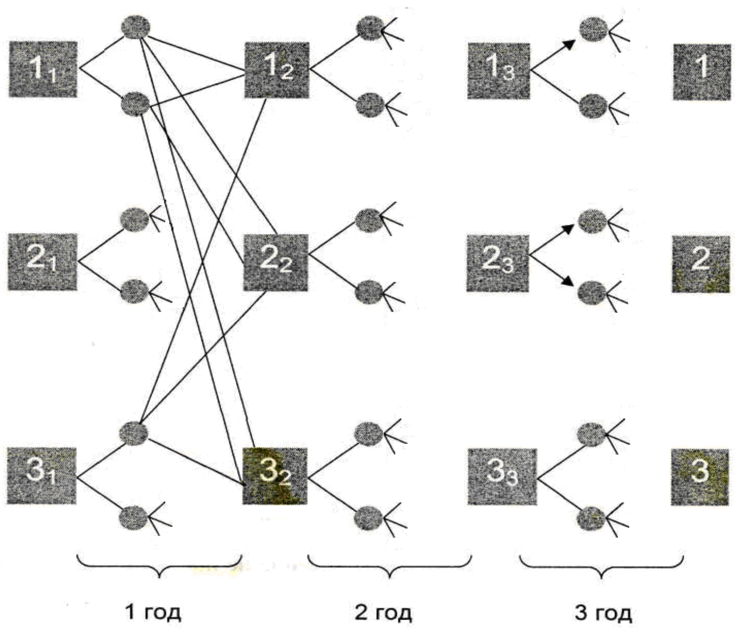


Рис. 1. Дерево решений

Как обычно, квадратики означают решающие вершины. Каждый квадратик соответствует тому или иному состоянию системы в определенный момент времени.

Знак $\boldsymbol{i}$ с индексом $\boldsymbol{j}$ внутри квадрата означает, что в моменты времени $\boldsymbol{j}$ = 1, 2, 3 (номер этапа) система находится в состоянии $\boldsymbol{i}$ = 1, 2, 3 (соответственно, "хорошее", "удовлетворительное" или "плохое" состояние).

Две линии, исходящие из каждой "решающей" вершины, соответствуют двум альтернативам на каждом этапе: $\boldsymbol{x}_1$ – проводить модернизацию (это верхняя линия, будем называть её направлением 1) или $\boldsymbol{x}_2$ – не проводить (это нижняя линия, будем называть направлением 2). Кружочки означают "случайные" вершины, переход из которых осуществляется в соответствии с выбранной матрицей переходных вероятностей.

Согласно общей алгоритмической схеме динамического программирования, задачу можно решать как с начала, так и с конца. Однако это допустимо лишь в рассмотренных ранее случаях, когда локальные выигрыши оказываются независимыми от порядка рассмотрения этапов.

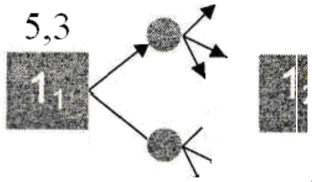
В рассматриваемом примере локальные выигрыши зависят от порядка следования этапов (годичных периодов). Поэтому, соответственно естественному порядку следования этапов, требуется двигаться по решающим вершинам слева направо.

Начнем с вершины 1_1. Тогда при принятии решения $\boldsymbol{x}_1$ (без модернизации) ожидаемый доход (1-е строки матриц $\boldsymbol{P}^1$ и $\boldsymbol{R}^1$) равен

$$d_1(1_1) = 0{,}2\times7 + 0{,}5\times6 + 0{,}3\times3 = 5{,}3.$$

При выборе $\boldsymbol{x}_2$ (модернизация) имеем (1-е строки матриц $\boldsymbol{P}^2$ и $\boldsymbol{R}^2$):

$$d_2(1_1) = 0{,}3\times6 + 0{,}6\times5 + 0{,}1\times(-1) = 4{,}7.$$

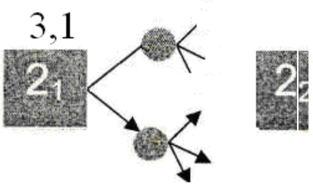


Число 5,3 больше, чем 4,7, поэтому если мы окажемся в вершине 1_1, то пойдем по направлению 1 (без модернизации), которое помечается стрелками, а сама вершина числом 5,3.

Далее переходим к вершине 2_1. Получаем значения двух доходов в зависимости от принимаемых решений (2-е строки матриц):

$d_1(2_1) = 0{,}5\times5 + 0{,}5\times1 = 3{,}0;$

$d_2(2_1) = 0{,}1\times7 + 0{,}6\times4 + 0{,}3\times0 = 3{,}1,$



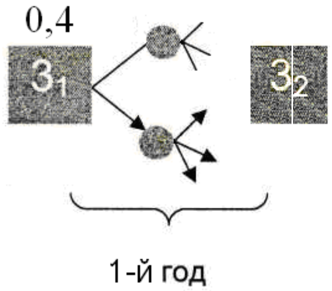
с учётом этого, направление 2 линии, исходящей из вершины 2_1, помечается стрелками, а сама вершина числом 3,1.

Для вершины 3_1 получим:

$d_1(3_1) = 1\times(-1) = -1{,}0;$

$d_2(3_1) = 0{,}05\times6 + 0{,}4\times3 + 0{,}55\times(-2) = 0{,}4,$

в связи с чем направление 2 линии, исходящей из вершины 3_1, помечается стрелками, а сама вершина числом 0,4.



Полученные числа 5,3, 3,1, 0,4 характеризуют один акт изменения состояния и получаемый при этом локальный доход.

Значения всех полученных локальных доходов потребуются в дальнейших расчетах.

Переходим теперь к началу второго года. Начнем с вершины 1_2. При выборе направления (решения) 1 имеем:

$$d_1(1_2) = 5{,}3 + 0{,}2\times5{,}3 + 0{,}5\times3{,}1 + 0{,}3\times0{,}4 = 8{,}03.$$

Здесь число 5,3 отражает рассчитанный ранее условно оптимальный локальный доход 1-го года, а другие слагаемые характеризуют ожидаемый интегральный доход 1-го и 2-го годов (получаемый с учётом рассчитанных условно оптимальных доходов для всех состояний оборудования и данных 1-й строки матрицы P^1).

Для третьего этапа аналогично получаем:

$d_1(1_3) = 10{,}5;$ $d_2(2_3) = 10{,}92;$

$d_1(2_3) = 6{,}57;$ $d_2(2_3) = 7{,}98;$

$d_1(3_3) = 2{,}13;$ $d_2(3_3) = 4{,}26.$

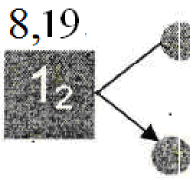
Числа 10,92; 7,98 и 4,26 означают оптимальный ожидаемый доход, если, соответственно, система находилась первоначально в состояниях 1, 2 или 3.

Теперь, двигаясь от конца дерева решений к началу, можно "прочитать" оптимальное решение: если в начале первого года мы окажемся в состоянии 1, нецелесообразно проводить модернизацию оборудования фирмы. Во всех других случаях целесообразно решение, связанное с модернизацией оборудования.

Таким образом, поставленная задача решена, и следует лишь отметить, что в теории марковских процессов принятия решений рассматриваются также модели с бесконечным числом этапов.

Для второго варианта решения для этой же вершины имеем (с использованием локального дохода 4,7 и 1-й строки матрицы P^2):

$$d_2(1_2) =$$
$$= 4{,}7 + 0{,}3\times5{,}3 + 0{,}6\times3{,}1 + 0{,}1\times0{,}4 = 8{,}19.$$

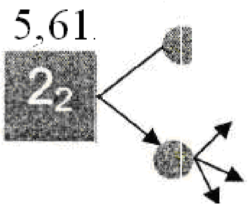


Число 8,19 больше, чем 8,03, поэтому вершину 1_2 помечаем числом 8,19 и выделяем нижние стрелки.

Для вершины 2_2 проводим аналогичные расчеты: $d_1(2_2) =$

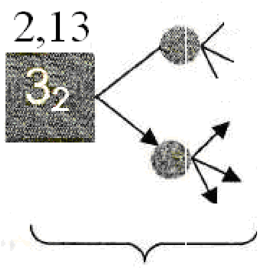
$$= 3{,}0 + 0\times5{,}3 + 0{,}5\times3{,}1 + 0{,}5\times0{,}4 = 4{,}75.$$
$$d_2(2_2) =$$
$$= 3{,}1 + 0{,}1\times5{,}3 + 0{,}6\times3{,}1 + 0{,}3\times0{,}4 = 5{,}61.$$

Выбираем число 5,61 и выделяем нижние стрелки. Для вершины 3_2 имеем:



$$d_1(3_2) =$$
$$= -1 + 0\times5{,}3 + 0\times3{,}1 + 1\times0{,}4 = -0{,}6.$$
$$d_2(3_2) =$$
$$=0{,}4 + 0{,}05\times5{,}3 + 0{,}4\times3{,}1 + 0{,}55\times0{,}4 = 2{,}13.$$

Выбираем число 2,13 и выделяем нижние стрелки.



2 год

Модель ДП с конечным числом этапов

При условии, что количество этапов в задаче выбора наилучшей стратегии ограничено, эту задачу можно представить как задачу динамического программирования с конечным числом этапов. Пусть число состояний для каждого этапа равно m. Обозначим через [redacted] оптимальный ожидаемый доход, полученный на этапах от n до N включительно, при условии, что система находилась вначале этапа n в состоянии i.

Обратное рекуррентное уравнение, связывающее [redacted] и [redacted], запишем в виде:

[redacted],

где [redacted] для все xj.

k– альтернативы.

[redacted] - вероятности перехода системы из i в j при альтернативе k.

[redacted] - элемент матрицы доходов R при переходе системы из i в j при альтернативе k.

[redacted] - доход, который был получен на этапе n+1, когда система была в состоянии j.

Приведенное уравнение основано на том, что накапливающийся доход [redacted] получается в результате перехода из состояния i на этапе n в состояниеjэтапеn+1с вероятностью [redacted]. Введя обозначение

[redacted],

рекуррентное уравнение динамического программирования можно записать следующим образом:

[redacted].

Для промежуточных значений функция состояния:

[redacted].

Метод анализа иерархий

В 1970 г. Томас Саати (США) разработал метод анализа иерархий (Analityc hierarchy process). Относится к классу критериальных методов. Получил широкое распространение и до сих пор активно используется в управленческой практике. Приводит ЛПР не к «правильному» решению, а к варианту, наилучшим образом согласующемуся с его пониманием сути проблемы и требованиями к ее решению.

Общая характеристика метода анализа иерархий

Метод Анализа Иерархий (МАИ) – математический инструмент системного подхода к решению проблем принятия решений. МАИ не предписывает лицу, принимающему решение (ЛПР), какого-либо «правильного» решения, а позволяет ему в интерактивном режиме найти такой вариант (альтернативу), который наилучшим образом согласуется с его пониманием сути проблемы и требованиями к ее решению. Этот метод разработан американским ученым Томасом Л. Саати в 1970 году, с тех пор он активно развивается и широко используется на практике. Метод анализа иерархий можно применять не только для сравнения объектов, но и для решения более сложных проблем управления, прогнозирования и др.

Основным **достоинством метода анализа иерархий** является высокая универсальность – метод может применяться для решения самых разнообразных задач: анализа возможных сценариев развития ситуации, распределения ресурсов, составления рейтинга клиентов, принятия кадровых решений и др.

Недостатком метода анализа иерархий является необходимость получения большого объема информации от экспертов. Метод в наибольшей мере подходит для тех случаев, когда основная часть данных основана на предпочтениях лица, принимающего решения, в процессе выбора наилучшего варианта решения из множества существующих альтернатив.

В типичной ситуации принятия решения:

- рассматриваются несколько вариантов решения,
- задан критерий, по которому определяется в какой мере то или иное решение является подходящим,
- известны условия, в которых решается проблема, и причины, влияющие на выбор того или иного решения.

Постановка задачи в процессе применения метода анализа иерархий: Пусть имеется множество альтернатив (вариантов решений): B_1, B_2, … B_k. Каждая из альтернатив оценивается списком критериев: K_1, K_2, … K_n. Требуется определить наилучшее решение.

Этапы применения метода анализа иерархий:

1. Предварительное ранжирование критериев, в результате которого они располагаются в порядке убывания важности (значимости).

2. Попарное сравнение критериев по важности по девятибалльной шкале с составлением соответствующей матрицы (таблицы) размера (n x n). Система парных сведений приводит к результату, который может быть представлен в виде обратно симметричной матрицы. Элементом матрицы a(i,j) является интенсивность проявления элемента иерархии i относительно элемента иерархии j, оцениваемая по шкале интенсивности от 1 до 9, где оценки имеют следующий смысл:

- равная важность – 1;
- умеренное превосходство – 3;
- значительное превосходство – 5;
- сильное превосходство – 7;
- очень сильное превосходство – 9;
- в промежуточных случаях ставятся четные оценки: 2, 4, 6, 8 (например, 4 – между умеренным и значительным превосходством).

При этом при проведении попарных сравнений в основном ставятся следующие вопросы при сравнении элементов А и Б:

- какой из них важнее или имеет большее воздействие ?
- какой из них более вероятен?
- какой из них предпочтительнее ?

Затем формируется матрица (схема представлена в Таблице 2). В процессе заполнения матрицы если элемент i важнее элемента j, то клетка (i, j), соответствующая строке i и столбцу j , заполняется целым числом, а клетка (j, i), соответствующая строке j и столбцу i, заполняется обратным числом (дробью).

Например, если $К_1$ умеренно превосходит $К_4$, то в клетку (1;4) (на пересечении первой строки и четвертого столбца) ставится число 3, а в клетку (4;1) (четвертая строка первый столбец) – обратная величина, равная 1/3. Если же элемент j более важен, чем элемент i, то целое число ставится в клетку (j, i), а обратная величина – в клетку (i, j). Если считается, что i, j одинаковы, то в обе клетки ставится единица.

Заполнение таблицы (см.примерная схема в табл.2) проводится построчно с наиболее важного критерия. Сначала проставляют целочисленные оценки, тогда соответствующие им дробные оценки получаются из них автоматически (как обратные к целым числам). Чем важнее критерий, тем больше целочисленных оценок будет в соответствующей ему строке матрицы, и сами оценки имеют большие значения. Так как каждый критерий равен себе по важности, то главная диагональ матрицы всегда будет состоять из единиц. Очевидно, что сумма компонентов равна единице. Каждый компонент НВП представляет собой оценку важности соответствующего критерия (например, 1-й компонент представляет собой оценку важности первого критерия).

. Иерархическое представление проблемы

Метод анализа иерархий, или подход аналитической иерархии предполагает декомпозицию проблемы на простые составляющие части и обработку суждений ЛПР. В результате определяется относительная значимость исследуемых альтернатив для всех критериев, находящихся в иерархии. Относительная значимость выражается численно в виде векторов приоритетов. Полученные таким образом значения векторов являются оценками в шкале отношений и соответствуют так называемым жестким оценкам.

Постановка задачи, решаемой с помощью метода АНР, заключается обычно в следующем.

Дано: общая цель решения задачи; критерии оценки альтернатив; альтернативы. *Требуется:* выбрать наилучшую альтернативу.

Подход АНР состоит из совокупности этапов:

1. Структуризация задачи виде иерархической структуры с несколькими уровнями: цели – критерии – альтернативы.
2. Попарное сравнение элементов каждого уровня лицом, принимающим решения. Результаты сравнения имеют числовой характер.
3. Вычисление коэффициентов важности для элементов каждого уровня. Проверка согласованности суждений ЛПР.

4. Подсчет количественной оценки качества альтернатив. Выбор лучшей альтернативы.

Структуризация задачи в виде иерархии

Построение иерархии начинается с очерчивания проблемы исследования. Далее строится иерархия, включающая цель на верхнем уровне, промежуточные уровни (например, критерии) и альтернативы, формирующие самый нижний иерархический уровень (рисунок 3).

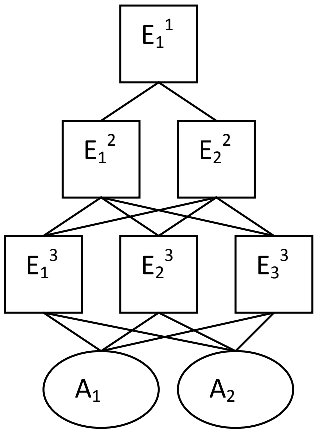


Рис. 3. Иерархическое представление проблемы

Верхний индекс у элементов указывает уровень иерархии, а нижний – их порядковый номер.

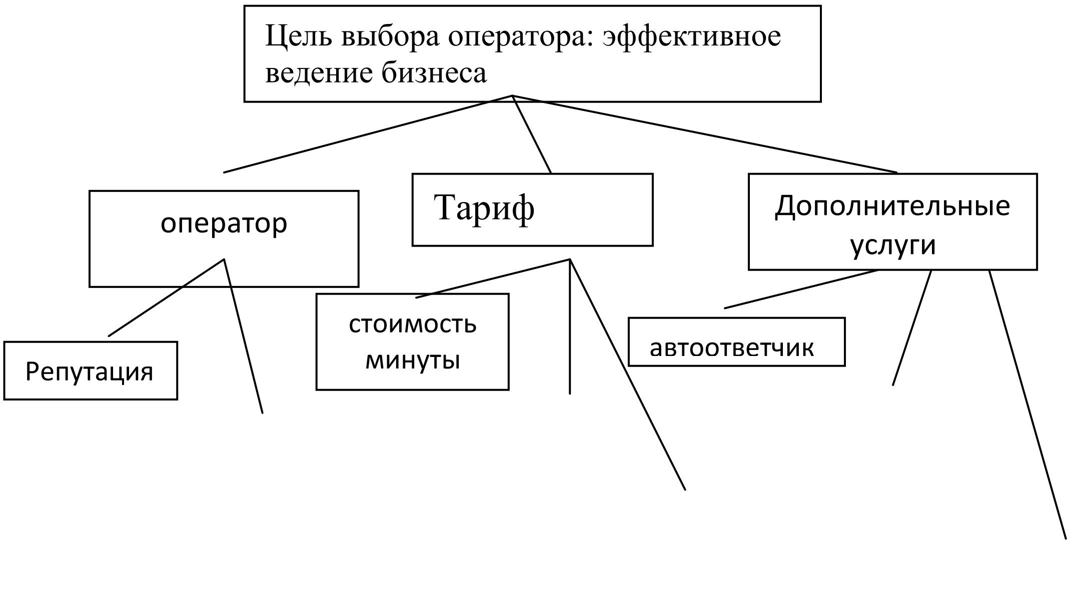
Рассмотрим процесс построения иерархической структуры на примере.

Пример: В современном мире для эффективного руководства необходимо иметь максимум информации, причем оперативной и постоянно обновляемой, также необходимо быстро принимать решения и с оптимальной скоростью притворять их в жизнь, доводить до подчиненных. В связи с этим современный бизнес просто немыслим без передовых средств связи, в частности, мобильного телефона. Телефон стал неотъемлемым атрибутом делового человека.

Для эффективного использования сотовой связи необходимо правильно выбрать оператора связи. При выборе оператора нужно учесть ряд критериев:

- доступность в любое время, в любом месте;
- средняя стоимость услуг;
- удобство оплаты;
- спектр предоставляемых дополнительных услуг;
- и пр.

Учитывая все это, структура решаемой проблемы: выбор оператора связи из имеющихся на рынке, - может быть представлена в виде иерархической структуры, представленной на рисунке 4.



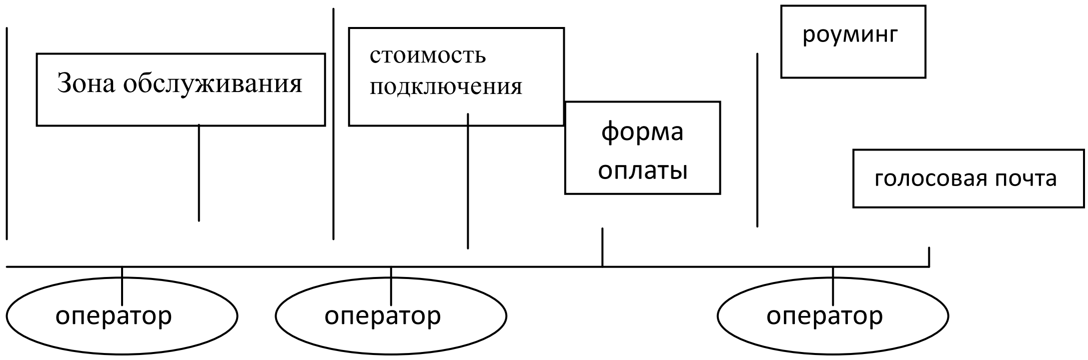


Рис. 4. Иерархическая схема проблемы выбора оператора сотовой связи

Во многих случаях на уровне альтернатив должны быть указаны цифры. Необходимо сопоставить эти зачастую совершенно разнородные величины так, чтобы выявить предпочтения ЛПР. После построения иерархии устанавливается метод сравнения ее элементов. Существует несколько методов сравнения элементов, выбор которых обусловлен характером связей альтернатив с уровнем критериев, количеством альтернатив, временем поступления альтернатив и прочими соображениями ЛПР.

Парное сравнение альтернатив (метод парных сравнений)

Для установления относительной важности элементов иерархии используется шкала отношений. Данная шкала позволяет ЛПР ставить в соответствие степеням предпочтения одного сравниваемого объекта перед другим некоторые числа (таблица 2).

Таблица 2. Шкала отношений

Степень значимости	**Определение**	**Объяснение**
1	Одинаковая значимость	Два действия вносят одинаковый вклад в достижение цели
3	Некоторое преобладание значимости одного действия над другим	Существуют соображения в пользу предпочтения одного из действий, однако эти соображения недостаточно убедительны
5	Существенная или сильная значимость	Имеются надежные данные или логические суждения для того, чтобы показать предпочтительность одного из действий
7	Очевидная или очень сильная значимость	Убедительное свидетельство в пользу одного действия перед другим
9	Абсолютная значимость	Свидетельства в пользу предпочтения одного действия перед другим в высшей степени убедительны
2, 4, 6, 8	Промежуточные значения между двумя соседними суждениями	Ситуация, когда необходимо компромиссное решение
Обратные величины приведенных выше величин	Если действию i при сравнением с действием j приписывается одно из определенных выше чисел, то действию j при сравнении с действием i приписывается обратное значение	Если согласованность была постулирована при получении N числовых значений для образования матрицы

При использовании указанной шкалы ЛПР, сравнивая два объекта в смысле достижения цели, расположенной на вышележащем уровне иерархии, должен поставить число в интервале от 1 до 9 или обратное значение.

Для этого в иерархии выделяют элементы двух типов: элементы – родители и элементы – потомки. Элементы – потомки воздействуют на соответствующие элементы вышестоящего уровня иерархии, являющиеся по отношению к первым элементами – родителями. Матрицы парных сравнений строятся для всех элементов – потомков, относящихся к определенному родителю. Парные сравнения производятся в терминах доминирования одного элемента над другим в соответствии со шкалой отношений.

Если элемент E_1 доминирует над элементом E_2, то клетка матрицы, соответствующая строке E_1 и столбцу E_2, заполняется целым числом, а клетка, соответствующая строке E_2 и столбцу E_1, заполняется обратным к нему числом.

При проведении парных сравнений следует отвечать на вопросы: какой из двух сравниваемых элементов важнее или имеет большее воздействие, какой более вероятен и какой предпочтительнее.

При сравнении критериев обычно спрашивают, какой из критериев более важен; при сравнении альтернатив по отношению к критерию – какая из альтернатив более предпочтительна или более вероятна.

Рассмотрим процесс построения матрицы парных сравнений не примере.

Пример. Провести анализ провайдеров на предмет их желательности с точки зрения определенного человека. Этот человек, руководствуется пятью независимыми (будем считать что это так) характеристиками: тарифы, скорость сети, доступность сети, удобство оплаты, дополнительные услуги. В качестве альтернатив человек рассматривает следующие компании: Comstar, Зебра Телеком, РОЛ и МТУ.

Иерархическая схема может быть представлена следующим образом (рисунок 5):

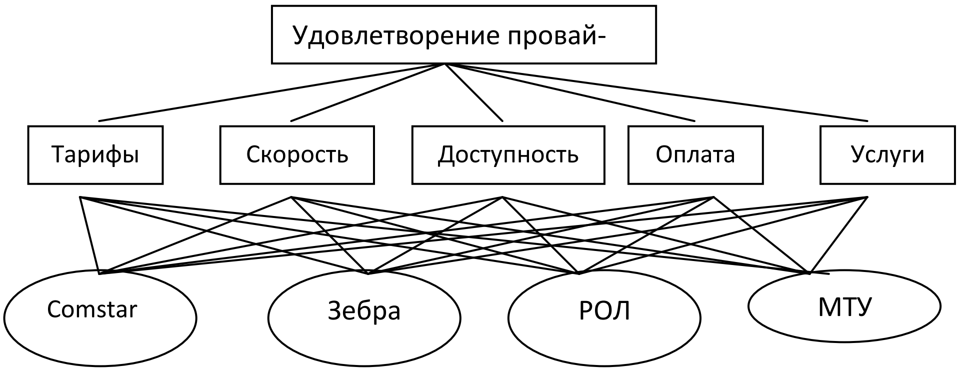


Рис. 5. Иерархическая схема проблемы выбора провайдера

После построения иерархии строятся матрицы парных сравнений. При сравнении элементов, принадлежащих одному уровню иерархии, ЛПР выражает свое мнение, используя одно из приведенных в таблице 2 определений. В матрицу сравнений заносится соответствующее число.

Начнем построение матриц парных сравнений с матрицы «Удовлетворение провайдером», которая покажет относительную важность характеристик при выборе компании.

$$[\textit{Удовлетворение провайдером}] = \begin{array}{c|ccccc} & Т & С & Д & О & У \\ \hline Т & 1 & 1/7 & 5 & 1/3 & 1/9 \\ С & 7 & 1 & 7 & 4 & 8 \\ Д & 1/5 & 1/7 & 1 & 1/6 & 1/3 \\ О & 3 & 1/4 & 6 & 1 & 4 \\ У & 9 & 1/8 & 3 & 1/4 & 1 \end{array}$$

При построении матрицы человек задавался вопросом, какая характеристика для него наиболее важна при выборе провайдера.

При сравнении любого критерия с самим собой не возникает вопросов о доминирующем воздействии одного из критериев, т.е. соответствующая позиция в матрице заполняется единицей, что соответствует одинаковой степени значимости критериев (см. таблицу 2 – шкала отношений).

Рассмотрим первую строку матрицы. В позиции один два, при сравнении важности тарифов и скорости, ЛПР поставил значение равное $\frac{1}{7}$. Это означает, что скорость доминирует по предпочтению над тарифами. «При выборе провайдера для меня скорость <u>во много крат важнее</u> чем тарифы» – говорит ЛПР. Семерка отвечает очевидной или очень сильной значимости одного сравниваемого объекта по сравнению с другим, согласно шкале отношений.

Цифра пять в позиции один три говорит о том, что для ЛПР тарифы важней доступности сети, в то время $\frac{1}{3}$ на пересечении строки тарифов и столбца оплаты отвечает случаю, когда удобство оплаты для ЛПР немного важнее расценок провайдера.

Иерархию в какой-либо рассматриваемой проблеме можно выявить посредством анкетирования, синтезировать результат и продолжить дело с помощью анкеты для выявления суждений.

Рассмотрим, как могут быть получены матрицы суждения для одной матрицы. Тот же метод может быть применен для иерархии. В качестве примера возьмем иерархическую структуру, представленную на рисунке 6.

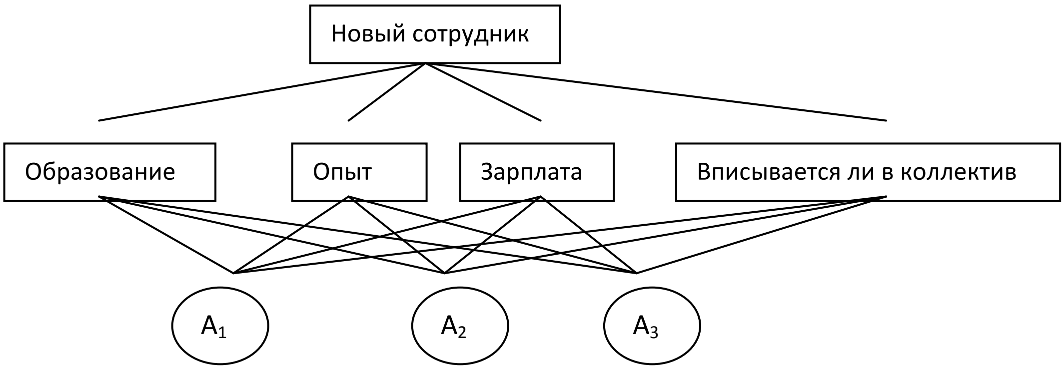


Рис. 6 Иерархическая схема задачи выбора нового сотрудника

Обозначим значения шкалы, располагая их в ряд от одного крайнего значения к равенству и затем вновь повышая до второго крайнего значения (таблица 3). В левом столбце перечисли все альтернативы, которые нужно сравнивать по степени превосходства с другими альтернативами из правого столбца. Эксперты должны отметить суждения, которые выражают превосходство элемента из левого столбца над соответствующим элементом из правого столбца, расположенном в той же строке. Если такое превосходство в действительности имеет место, то одна из позиций левее равенства будет отмечена. В противном случае будет отмечено равенство или некоторая позиция справа.

Таблица 3. Сравнение альтернатив относительно критерия "образование"

	Абсолютное	Очень сильное	Сильное	Слабое	Равенство	Слабое	Сильное	Очень сильное	Абсолютное	
A_1	_	_	_	_	_	_	_	_	_	A_2
A_1	_	_	_	_	_	_	_	_	_	A_3
A_2	_	_	_	_	_	_	_	_	_	A_3

Такая таблица составляется и заполняется для каждого критерия (четыре анкеты для сравнения альтернатив по каждому из критериев) и для сравнения критериев относительно цели (одна анкета в которой ЛПР решает какие критерии для него наиболее значимые).

После заполнения экспертами анкет, по ним составляются матрицы парных сравнений. Например анкета имеет вид, представленный в таблице 4:

Таблица 4. Сравнение альтернатив относительно критерия "образование", составленное первым экспертом по резюме кандидатов

	Абсолютное	Очень сильное	Сильное	Слабое	Равенство	Слабое	Сильное	Очень сильное	Абсолютное	
A_1	_	x	_	_	_	_	_	_	_	A_2
A_1	_	_	_	x	_	_	_	_	_	A_3
A_2	_	_	_	_	_	_	x	_	_	A_3

Матрица парных сравнений для анкеты из таблицы 4 имеет вид:

$$[образование]_1 = \begin{array}{c|ccc} & A_1 & A_2 & A_3 \\ \hline A_1 & 1 & 7 & 3 \\ A_2 & \frac{1}{7} & 1 & \frac{1}{5} \\ A_3 & \frac{1}{3} & 5 & 1 \end{array}$$

Для агрегирования мнений экспертов принимается среднегеометрическое, вычисляемое по следующей формуле:

$$a_{ij}^{агр} = \sqrt[n]{a_{ij}^{(1)} \cdot a_{ij}^{(2)} \cdot \ldots \cdot a_{ij}^{(n)}},\ где$$

$$a_{ij}^{(k)} - оценка\ элемента,\ принадлежащего\ i - ой\ строке\ и\ j - ому\ столбцу\ матрицы$$

$$парных\ сравнений\ k - ого\ эксперта$$

Логичность критерия становится очевидной, если два равноценных эксперта указывают при сравнении объектов соответственно оценки a и $\frac{1}{a}$, что при вычислении агрегированной оценки дает единицу и свидетельствует об эквивалентности сравниваемых объектов.

В достаточно ответственных задачах при оправданных задачах на экспертизу осреднение суждений экспертов проводится с учетом их квалификации. Для определения весовых коэффициентов экспертов используют иерархическую структуру критериев, представленную на рисунке 7.

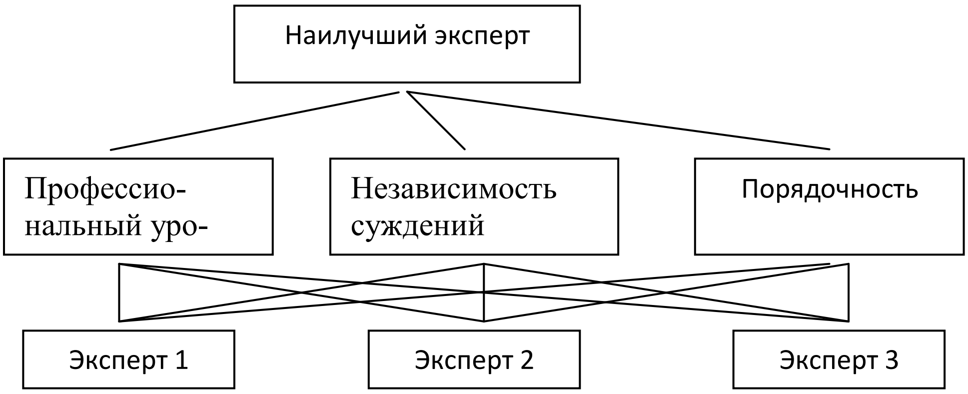


Рис. 7 Иерархия для ранжирования экспертов

Расчет агрегированной оценки в случае привлечения n экспертов, имеющих различную значимость, осуществляется по формуле:

$$a_{ij}^{агр} = a_{ij}^{\alpha_1} \cdot a_{ij}^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot a_{ij}^{\alpha_n},\ где$$

$$a_{ij}^{\alpha_k} - оценка\ объекта,\ проведенная\ k - ым\ экспертом\ с\ весовым$$

$$коэффициентом\ \alpha_k.\ При\ этом\ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$$

<u>Пример</u>. Предположим, что в случае с выбором нового кандидата на работу, первый эксперт, которым мог быть начальник отдела управления кадрами, по результатам резюме заполнил анкету, которая приведена в таблице 4. Во время проведения собеседования с каждым из претендентов, второй эксперт, например один из директоров, заключил, что по уровню образования кандидатам соответствует анкета, заполненная следующим образом (таблица 5):

Таблица 5. Сравнение альтернатив относительно критерия "образование", составленное вторым экспертом по результатам собеседования с кандидатами

	Абсолютное	Очень сильное	Сильное	Слабое	Равенство	Слабое	Сильное	Очень сильное	Абсолютное	
A_1	_	x	_	_	_	_	_	_	_	A_2
A_1	_	_	x	_	_	_	_	_	_	A_3

A_2	_	_	_	_	_	x	_	_	_	A_3

Матрица парных сравнений для анкеты в таблице 5, имеет вид:

$$[образование]_2 = \begin{array}{c|ccc} & A_1 & A_2 & A_3 \\ \hline A_1 & 1 & 7 & 5 \\ A_2 & \frac{1}{7} & 1 & \frac{1}{3} \\ A_3 & \frac{1}{5} & 3 & 1 \end{array}$$

Для объединения оценок суждений двух экспертов строится матрица с средним геометрическим оценок. В данной задаче такой подход не совсем правомерен. Однако, будем считать что суждения двух экспертов обладают одинаковой степенью значимости. Результирующая матрица имеет вид:

$$[образование] = \begin{array}{c|ccc} & A_1 & A_2 & A_3 \\ \hline A_1 & 1 & \sqrt{7\cdot 7} & \sqrt{3\cdot 5} \\ A_2 & \sqrt{\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{7}} & 1 & \sqrt{\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}} \\ A_3 & \sqrt{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}} & \sqrt{5\cdot 3} & 1 \end{array}$$

При построении матриц парных сравнений важным вопросом является согласованность, или однородность матрицы. Согласованность – это следование логике при высказывании суждений экспертом. Для более наглядной иллюстрации понятия «согласованности» приведем пример.

В практических задачах количественная и транзитивная (порядковая) однородность нарушается, поскольку человеческие ощущения нельзя выразить точной формулой. Для улучшения однородности в числовых суждениях, какая бы величина a_{ij} ни была взята для сравнения i-го элемента с j-ым, a_{ji} приписывается значение обратной величины, т.е. $a_{ji} = \frac{1}{a_{ij}}$.

<u>Определение.</u> Квадратную матрицу $A_{n\times n}$ в которой все элементы $a_{ji} = \frac{1}{a_{ij}};\ i,\ j = \overline{1, n}$, называют обратносимметрической.

При построении матриц парных сравнений не следует искусственно выстраивать матрицу исходя из условий согласованности. Такой подход может исказить предпочтения ЛПР. Однако во многих задачах, однородность матриц должна быть высокой. Для оценки однородности используют то свойство, что при нарушении однородности ранг матрицы отличен от единицы и она имеет несколько собственных значений. При небольших отклонениях суждения от однородности одно из собственных значений будет существенно большие остальных и приблизительно равно порядку матрицы. Это свойство вытекает из следующих двух теорем.

<u>Теорема 1.</u> В положительной обратносимметрической квадратной матрице $\lambda_{\max} \geq n$.

<u>Теорема 2.</u> Положительная обратносимметрическая квадратная матрица А согласованна тогда и только тогда, когда $\lambda_{\max} = n$.

Таким образом, для оценки однородности суждений эксперта можно использовать отклонение величины максимального собственного значения $\lambda_{\max}$ от порядка матрицы n.

Согласованность суждения оценивается индексом однородности (индексом согласованности) или отношением однородности (отношением согласованности) в соответствии со следующими формулами:

$$ИО = ИС = \frac{\lambda_{\max} - n}{n-1}$$

$$OO = OC = \frac{ИО}{M(uo)}$$

$M(uo)$ - среднее значение индекса однородности случайным образом составленной матрицы парных сравнений, которое основано на экспериментальных данных. Значение есть табличная величина, входным параметром выступает размерность матрицы (таблица 6).

Таблица 6. Среднее значение индекса однородности в зависимости от порядка матрицы

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$M(uo)$	0	0	0,58	0,90	1,12	1,24	1,32	1,41	1,45	1,49	1,51

В качестве допустимого используется значение $OO \le 0{,}10$. Если для матрицы парных сравнений $OO > 0{,}10$, то это свидетельствует о существенном нарушении логики суждений, допущенном экспертом при заполнении матрицы, поэтому эксперту предлагается пересмотреть данные, использованные для построения матрицы, чтобы улучшить однородность.

Вычисление коэффициентов важности для элементов каждого уровня

Ранжирование элементов, анализируемых с помощью матрицы парных сравнений, осуществляется на основании главных собственных векторов, получаемых в результате обработки матриц.

Определение. Пусть задана квадратная матрица $A_{n\times n}$. Число λ называется собственным значением, а ненулевой вектор W собственным вектором квадратной матрицы A, если они связаны между собой соотношением $AW = \lambda W$.

Собственные значения квадратной матрицы $A_{n\times n}$ могут быть вычислены как корни уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$, а собственные векторы – как решение соответствующих однородных систем $(A - \lambda E)W = 0$.

Определение. Собственный вектор отвечающий максимальному собственному значению называется главным собственным вектором.

Пример. Рассмотрим следующую матрицу парных сравнений:

$$[A] = \begin{array}{c|ccc} & A_1 & A_2 & A_3 \\ \hline A_1 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ A_2 & 3 & 1 & 3 \\ A_3 & 2 & \frac{1}{3} & 1 \end{array}$$

Вычислим для данной матрицы главный собственный вектор.

$\det(A - \lambda E) = 0$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 3 & 1-\lambda & 3 \\ 2 & \frac{1}{3} & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)\cdot\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ \frac{1}{3} & 1-\lambda \end{vmatrix} - 3\cdot\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 1-\lambda \end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 1-\lambda & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)\cdot\left[(1-\lambda)^2 - 1\right] - 3\cdot\left(\frac{1-\lambda}{3} - \frac{1}{6}\right) + 2\cdot\left(1 - \frac{1-\lambda}{2}\right) = 0$$

При решении данного уравнения получено максимальное собственное значение $\lambda_{\max} = 3{,}05$. Для вычисления главного собственного вектора необходимо решить систему линейных уравнений:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = 3{,}05 \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \qquad W = \begin{pmatrix} 0{,}157 \\ 0{,}594 \\ 0{,}249 \end{pmatrix}$$

Полученный главный собственный вектор ранжирует альтернативы и назначает им веса. Таким образом, вторая альтернатива наиболее предпочтительная, затем идет третья и первая. Заметим, что сумма координат полученного вектора равна единице. Таким образом можно говорить об относительной важности того или иного сравниваемого критерия или альтернативы.

Квадратная матрица имеет не более n различных собственных значений. Вычислить главный собственный вектор положительной квадратной матрицы A с точностью до некоторого постоянного сомножителя C можно по формуле:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{A^k e}{e^T A^k e} = CW ,$$

где $e = (1, 1, \ldots, 1)^T$ *– ветор составленный из n единиц*.

Максимальное собственное значение вычисляется по формуле: $\lambda_{\max} = e^T AW$.

Как видно из вышеприведенного примера, вычисление собственных векторов и собственных значений «в лоб» не является тривиальной задачей. При вычислении максимального собственного значения матриц порядка больше двух практически всегда требуется прибегать к приближенным методам. Такой подход существенно усложняет задачу, так как в случае одной иерархии число матриц парных сравнений может быть очень велико. В случае, когда человек не владеет численными методами метод иерархической иерархии вообще может быть им отклонен.

Для вычисления собственных векторов и собственных значений матриц целесообразно использовать вычислительные средства и современные программные продукты. Однако, при отсутствии вычислительных мощностей, приближенное значение главного собственного вектора можно получить суммированием элементов каждой строки и последующим делением каждой суммы на сумму элементов всей матрицы.

<u>Пример.</u> Рассмотрим матрицу парных сравнений и вычислим приближенное значение главного собственного вектора:

$$[A] = \begin{array}{c|ccc} & A_1 & A_2 & A_3 \\ \hline A_1 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ A_2 & 3 & 1 & 3 \\ A_3 & 2 & \frac{1}{3} & 1 \end{array}$$

Просуммируем элементы каждой строки и найдем сумму всех элементов матрицы:

$$W_S = \begin{pmatrix} 1\frac{5}{6} \\ 7 \\ 3\frac{1}{3} \end{pmatrix} \qquad S = 1\frac{5}{6} + 7 + 3\frac{1}{3} = 12\frac{1}{6}$$

Нормализуя вектор W_S делением каждой координаты на величину S, получаем приближенное значение главного собственного вектора:

$$\hat{W} = \begin{pmatrix} 0{,}151 \\ 0{,}575 \\ 0{,}274 \end{pmatrix}$$

Приближенное значение максимального собственного значения можно найти по формуле $\lambda_{\max} = e^T AW$, рассмотренной выше:

$$\lambda_{\max} = (1\ \ 1\ \ 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}151 \\ 0{,}575 \\ 0{,}274 \end{pmatrix} \approx 3{,}10$$

При таком вычислении главного собственного вектора и максимального собственного значения может оказаться, что согласованная в действительности матрица является несогласованной по вычислениям и наоборот.

Пример. Вычислим отношение согласованности рассматриваемой выше матрицы, взяв в качестве максимального собственного значения его точное и приближенное число.

$$ИС = \frac{3{,}05 - 3}{3 - 1} = 0{,}025 \qquad ОС = \frac{0{,}025}{0{,}58} \approx 0{,}04$$

$$ИС_{\approx} = \frac{3{,}10 - 3}{2} = 0{,}05 \qquad ОС_{\approx} = \frac{0{,}05}{0{,}58} \approx 0{,}09$$

При большей погрешности метода вычисления главного собственного вектора, отношение согласованности матрицы парных сравнений могло оказаться больше $0{,}10$.

Желательно использовать процедуры точного нахождения собственных значений и векторов матриц. Такое пожелание превращается в требование в особо ответственных задачах.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ

Практическая работа 1. Анализ решений (в условиях неопределенности).

Принятие решения в условиях неопределенности требует определения альтернативных действий, которым соответствуют расходы или доходы, висящие от (случайных) состояний природы. Матрицу в задаче принятия решений с m возможными действиями и n состояниями природы можно представить следующим образом.

	s_1	s_2	…	s_n
a_1	$v(a_1, s_1)$	$v(a_1, s_2)$	…	$v(a_1, s_n)$
a_2	$v(a_2, s_1)$	$v(a_2, s_2)$	…	$v(a_2, s_n)$
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
a_m	$v(a_m, s_1)$	$v(a_m, s_2)$	…	$v(a_m, s_n)$

Существует 4 критерия для анализа ситуации, связанной с принятием решений.

1. Критерий Лапласа.
2. Минимаксный критерий.
3. Критерий Сэвиджа.
4. Критерий Гурвица.

Эти критерии отличаются по степени консерватизма, который проявляет индивидуум, принимающий решение, перед лицом неопределенности.

Критерий Лапласа опирается на принцип недостаточного обоснования, который гласит, что поскольку распределение вероятностей состояния неизвестно, нет причин считать их различными. Следовательно, используется оптимистическое предположение, что вероятности всех состояний природы равны между собой, то есть

$$P(s_1) = P(s_2) = \dots = P(s_n) = \frac{1}{n}.$$

Если при этом $v(a_i, s_j)$ представляет получаемую прибыль, то наилучшим решением является то, которое обеспечивает $\max\limits_{a_i}\left\{\frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} v(a_i, s_j)\right\}.$

Если величина $v(a_i, s_j)$ представляет собой расходы лица, принимающего решение, то оператор “max” заменяется на ”min”.

Минимаксный (максиминный) критерий основан на консервативном осторожном поведении лица, принимающего решение, и сводится к выбору наилучшей альтернативы из наихудших или, наоборот из наихудших альтернатив наилучшую. Если величина $v(a_i, s_j)$ представляет получаемую прибыль, то в соответствии с максиминным критерием, в качестве оптимального выбирается решение, обеспечивающее

$$\max_{a_i}\left\{\min_{s_j} v(a_i, s_j)\right\}.$$

Если величина $v(a_i, s_j)$ представляет потери, используется минимаксный критерий, который определяется следующим соотношением

$$\min_{a_i}\left\{\max_{s_j} v(a_i, s_j)\right\}.$$

Критерий Сэвиджа стремится смягчить консерватизм минимаксного (максиминного) критерия путем замены матрицы платежей (выигрышей или проигрышей) $v(a_i, s_j)$ матрицей потерь $r(a_i, s_j)$, которая определяется следующим образом:

$$r(a_i, s_j) = \begin{cases} \max\limits_{a_k}\{v(a_k, s_j)\} - v(a_i, s_j), & \text{если } v - \text{доход} \\ v(a_i, s_j) - \min\limits_{a_k}\{v(a_k, s_j)\}, & \text{если } v - \text{потери} \end{cases}$$

Критерий Гурвица охватывает ряд различных подходов к принятию решений – от наиболее оптимистичного до наиболее пессимистичного (консервативного). Для описания склонности лица к оптимизму используется параметр оптимизма $0 \le \alpha \le 1$ Пусть величины $v(a_i, s_j)$ представляют доходы.

Тогда решению, выбранному по критерию Гурвица, соответствует:

$$\max_{a_i}\left\{\alpha \cdot \max_{s_j} v(a_i, s_j) + (1-\alpha)\min_{s_j} v(a_i, s_j)\right\}$$

Если $\alpha = 0$, критерий Гурвица становится консервативным, так как его применение эквивалентно применению обычного минимаксного критерия. Если $\alpha = 1$, критерий Гурвица становится слишком оптимистичным, ибо рассчитывает на наилучшее из наилучших условий. Степень оптимизма (или пессимизма) можно конкретизировать надлежащим выбором величины α из интервала $[0,1]$. При отсутствии ярко выраженной склонности к оптимизму или пессимизму выбор $\alpha = 0,5$ представляется разумным. Если величины $v(a_i, s_j)$ представляют потери, то критерий принимает следующий вид:

$$\min_{a_i}\left\{\alpha\cdot\min_{s_j} v(a_i,s_j)+(1-\alpha)\max_{s_j} v(a_i,s_j)\right\}$$

Пример: В некотором городе планируется построить санаторий. Организаторы посчитали, что количество отдыхающих в зависимости от времени года может быть различно и составлять 150, 200, 300 или 350 человек.

Пусть переменные $a_1 - a_4$ представляют собой возможные по количеству отдыхающих размеры санатория, а переменные $s_1 - s_4$ соответствуют различным уровням обслуживания отдыхающих.

Матрица затрат (в тыс. рублей) выглядит следующим образом:

	s1	s2	s3	s4
a1	100	120	160	185
a2	120	110	145	170
a3	140	145	140	175
a4	170	165	150	190

Определить оптимальный размер санатория, характеризующийся наименьшими затратами.

Решение: Критерий Лапласа . При заданных вероятностях $P\{s_j\}=1/4,\quad j=1,2,3,4$, ожидаемые значени затрат для различных возможных решений вычисляются следующим образом:

$$M_1\{a_1\}=1/4\cdot(100+120+160+185)=141{,}25$$

$$M_2\{a_2\}=1/4\cdot(120+110+145+170)=136{,}25$$ ←оптимум

$$M_3\{a_3\}=1/4\cdot(140+145+140+175)=150$$

$$M_4\{a_4\}=1/4\cdot(170+165+150+190)=168{,}75$$

Так как исходная матрица представляет собой расходы, то оптимальное решение достигается при реализации альтернативы, характеризующейся минимальными затратами.

Вывод: наименьший уровень расходов был получен при использовании альтернативы a_2, организаторы решают построить санаторий на 200 отдыхающих.

Минимаксный критерий .

Эту же задачу можно решить с помощью минимаксного критерия $\min_{a_i}\left\{\max_{s_j} v(a_i,s_j)\right\}$,так как в данном случае рассматривается матрица расходов.

	s1	s2	s3	s4	$\max_{s_j} v(a_i,s_j)$	
a1	100	120	160	185	185	
a2	120	110	145	170	170	←минимакс
a3	140	145	140	175	175	
a4	170	165	150	190	190	

Вывод: наименьший уровень расходов получен при использовании a_2 альтернативы, организаторы решают построить санаторий на 200 отдыхающих.

Критерий Сэвиджа

Для случая исследования расходов, согласно критерию Сэвиджа, составляется матрица сожалений, элементы которой определяются по данным исходной матрицы из соотношения:

$$r(a_i, s_j) = v(a_i, s_j) - \min_{a_k} \{v(a_k, s_j)\}, \text{ если } \quad v - \text{потери}$$

где $\min_{a_k} \{v(a_k, s_j)\}$ минимальное значение элемента в столбце матрицы

	s1	s2	s3	s4
a1	100	120	160	185
a2	120	110	145	170
a3	140	145	140	175
a4	170	165	150	190
$\min_{a_k} \{v(a_k, s_j)\}$	100	110	140	170

Матрица сожалений в данном случае имеет следующий вид:

	s1	s2	s3	s4	Максимум строк	
a1	0	10	20	15	20	←минимакс
a2	20	0	5	0	20	←минимакс
a3	40	35	0	5	40	
a4	70	55	10	20	70	

Вывод: наименьший уровень расходов получен при использовании a_1 или a_2 альтернатив, организаторы могут выбрать любую из этих двух альтернатив.

Критерий Гурвица. Для отражения своего мнения по рассматриваемому процессу принятия решения примем показатель оптимизма $\alpha = 0{,}25$ (высказывается точка зрения направленная к оптимизму)

Оптимальное решение ищется из соотношения

$$\min_{a_i} (\alpha \min_{s_j} v(a_i, s_j) + (1 - \alpha) \max_{s_j} v(a_i, s_j)) .$$

Тогда получаем:

	s1	s2	s3	s4	$\min_{s_j} \{v(a_i, s_j)\}$	$\max_{s_j} \{v(a_i, s_j)\}$	$\alpha \min_{s_j} v(a_i, s_j) + (1 - \alpha) \max_{s_j} v(a_i, s_j)$
a1	100	120	160	185	100	185	$0{,}25 \cdot 100 + (1 - 0{,}25) \cdot 185 = 163{,}75$
a2	120	110	145	170	110	170	$0{,}25 \cdot 110 + (1 - 0{,}25) \cdot 170 = 155$
a3	140	145	140	175	140	175	$0{,}25 \cdot 140 + (1 - 0{,}25) \cdot 175 = 166{,}25$
a4	170	165	150	190	150	190	$0{,}25 \cdot 150 + (1 - 0{,}25) \cdot 190 = 180$

Вывод: наименьший уровень расходов получен при использовании a_2 альтернативы, организаторы решают построить санаторий на 200 отдыхающих.

Индивидуальное задание

Задача. Национальная школа выживания подбирает место для строительства летнего лагеря в центре Аляски в целях тренировки людей на выживание в условиях дикой природы. Школа считает, что число участников сбора может быть 200, 250, 300 или 350 человек. Стоимость летнего лагеря будет минимальной, поскольку он строится для удовлетворения только определенных небольших потребностей. Отклонения в сторону уменьшения или увеличения относительно идеальных уровней потребностей влекут за собой дополнительные затраты, обусловленные строительством избыточных (неиспользуемых) мощностей или потерей возможности получить прибыль в случае, когда некоторые потребности не удовлетворяются. Пусть переменные $a_1 - a_4$ представляют возможные размеры лагеря (на 200, 250, 300 или 350 человек), а переменные $s_1 - s_4$ – соответствующее число участников сбора. Следующая таблица содержит матрицу стоимостей (в тысячах долларов), относящуюся к описанной ситуации.

	s_1	s_2	s_3	s_4
a_1	5	10	18	25
a_2	8	7	12	23
a_3	21	18	12	21
a_4	30	22	19	15

Задача. Хенк – прилежный студент, который обычно получает хорошие отметки благодаря, в частности, тому, что имеет возможность повторить материал в ночь перед экзаменом. Перед завтрашним экзаменом Хенк столкнулся с небольшой проблемой. Его сокурсники организовали на всю ночь вечеринку, в которой он хочет участвовать. Хенк имеет три альтернативы:

a_1 – участвовать в вечеринке всю ночь,

a_2 – половину ночи участвовать в вечеринке, а половину – учиться,

a_3 – учиться всю ночь.

Профессор, принимающий завтрашний экзамен, непредсказуем, и экзамен может быть легким (s_1), средним (s_2) или трудным (s_3). В зависимости от сложности экзамена и времени, затраченного Хенком на повторение, можно ожидать следующие экзаменационные баллы.

	s_1	s_2	s_3
a_1	85	60	40
a_2	92	85	81
a_3	100	88	82

Порекомендуйте Хенку, какой выбор он должен сделать (основываясь на каждом из четырех критериев принятия решений в условиях неопределенности).

Задача. В приближении посевного сезона фермер Мак-Кой имеет четыре альтернативы:

a_1 – выращивать кукурузу,

a_2 – выращивать пшеницу,

a_3 – выращивать соевые бобы,

a_4 – использовать землю под пастбища.

Платежи, связанные с указанными возможностями, зависят от количества осадков, которые условно можно разделить на четыре категории:

s_1 – сильные осадки,

s_2 – умеренные осадки,

s_3 – незначительные осадки,

s_4 – засушливый сезон.

Платежная матрица (в тыс. долл.) оценивается следующим образом.

	s_1	s_2	s_3	s_4
a_1	–20	60	30	–5
a_2	40	50	35	0
a_3	–50	100	45	–10
a_4	12	15	15	10

Что должен посеять Мак-Кой?

Контрольные вопросы.

1. Что показывает платежная матрица и как она строиться?
2. Какие вы знаете методы принятия решений в условиях полной неопределенности?
3. Зависят ли решения, принятые ЛПР с использованием того или иного метода, от его субъективных предпочтений?
4. Совпадают ли наилучшие решения, принятые различными методами (Лапласа, Вальда,

Сэвиджа, Гурвица)?

5. Чем отличаются критерии Гурвица, Вальда и Сэвиджа?

Практическая работа 2. Анализ решений (в условиях риска).

Модели принятия решений с использованием критериев риска

Процесс принятия решений с помощью дерева решений в общем случае предполагает выполнение следующих пяти этапов.

Этап 1. **Формулирование задачи.** Прежде всего необходимо отбросить не относящиеся к проблеме факторы, а среди множества оставшихся выделить существенные и несущественные. Это позволит привести описание задачи принятия решения к поддающейся анализу форме. Должны быть выполнены следующие основные процедуры: определение возможностей сбора информации для экспериментирования и реальных действий; составление перечня событий, которые с определенной вероятностью могут произойти; установление временного порядка расположения событий, в исходах которых содержится полезная и доступная информация, и тех последовательных действий, которые можно предпринять.

Этап 2 **Построение дерева решений,** т.е. графическое представление последовательности возможных альтернативных действий с учетом соответствующих внешних условий, начиная с «корня» и завершая «листочками».

Этап 3. **Оценка вероятностей состояний среды,** т.е. сопоставление шансов возникновения каждого конкретного события. Следует отметить, что указанные вероятности определяются либо на основании имеющейся статистики, либо экспертным путем.

Этап 4. **Установление выигрышей** (или **проигрышей,** как выигрышей со знаком минус) для каждой возможной комбинации альтернатив (действий) и состояний среды.

Этап 5. **Решение задачи,** состоящее в определении на дереве решений «веточки», для которой установленный на этапе 4 выигрыш является максимальным.

Прежде чем продемонстрировать процедуру применения дерева решений, введем ряд определений. В зависимости от отношения к риску решение задачи может выполняться с позиций так называемых «объективистов» и «субъективистов».

Поясним эти понятия на следующем примере.

Пусть предлагается лотерея: за 10 руб. (стоимость лотерейного билета) игрок с равной вероятностью p=0,5 может ничего не выиграть или выиграть 100 руб. Один индивид пожалеет и 10 руб. за право участия в такой лотерее, т.е. просто не купит лотерейный билет, другой готов заплатить за лотерейный билет 50 руб., а третий заплатит даже 60 руб. за возможность получить 100 руб. (например, когда ситуация складывается так, что, игрок может достичь своей цели, только имея 100 руб., поэтому возможная потеря последних денежных средств, а у него их ровно 60 руб., не меняет для него ситуации).

Безусловным денежным эквивалентом (БДЭ) игры называется максимальная сумма денег, которую ЛПР готов заплатить за участие в игре (лотерее), или, что то же, та минимальная сумма денег, за которую он готов отказаться от игры. Каждый индивид имеет свой БДЭ.

Индивида, для которого БДЭ совпадает с *ожидаемой денежной оценкой* (ОДО) игры, т.е. со средним выигрышем в игре (лотерее), условно называют объективистом, индивида, для которого БДЭ не равно ОДО, — субъективистом. Ожидаемая денежная оценка рассчитывается как сумма произведений размеров выигрышей на вероятности этих выигрышей. Например, для нашей лотереи ОДО=0,5х0 + 0,5х100 = 50 руб. Если субъективист склонен к риску, то его БДЭ>ОДО. Если не склонен, то БДЭ<ОДО. Вопрос об отношении к риску более строго рассматривается в рамках теории Неймана-Моргенштерна.

Предположим, что решения принимаются с позиции объективиста.

Рассмотрим процедуру принятия решения на примере следующей задачи.

Задача . Руководство некоторой компании решает, создавать ли для выпуска новой продукции крупное производство, малое предприятие или продать патент другой фирме. Размер выигрыша, который компания может получить, зависит от благоприятного или неблагоприятного состояния рынка (табл. 1).

Таблица 1

Номер стратегии	**Действия компании**	**Выигрыш, руб., при состоянии экономической среды**	
		благоприятном	**неблагоприятном**
1	Строительство крупного предприятия (*a1*)	200 000	-180 000
2	Строительство малого предприятия (*a2*)	100 000	-20 000
3	Продажа патента (*a3*)	10 000	10 000

Примечание. Вероятность благоприятного и неблагоприятного состояний экономической среды равна 0,5.

На основе данной таблицы выигрышей (потерь) можно построить дерево решений (рис. 1).

Процедура принятия решения заключается в вычислении для каждой вершины дерева (при движении справа налево) ожидаемых денежных оценок, отбрасывании неперспективных ветвей и выборе ветвей, которым соответствует максимальное значение ОДО.

Определим средний ожидаемый выигрыш (ОДО):

для вершины 1 *ОДО1 = 0,5 х 200 000 + 0,5(–180 000) = 10 000 руб.;*

для вершины 2 *ОДО2 = 0,5 х 100 000 + 0,5(–20 000) = 40 000 руб.;*

для вершины 3 *ОДО3 = 10 000 руб.*

Вывод. Наиболее целесообразно выбрать стратегию *a2*, т.е. строить малое предприятие, а ветви (стратегии) *a1* и *a3* дерева решений можно отбросить. ОДО наилучшего решения равна 40 000 руб. Следует отметить, что наличие состояния с вероятностями 50% неудачи и 50% удачи на практике часто означает, что истинные вероятности игроку скорее всего неизвестны и он всего лишь принимает такую гипотезу (так называемое предположение «fifty—fifty» — пятьдесят на пятьдесят).

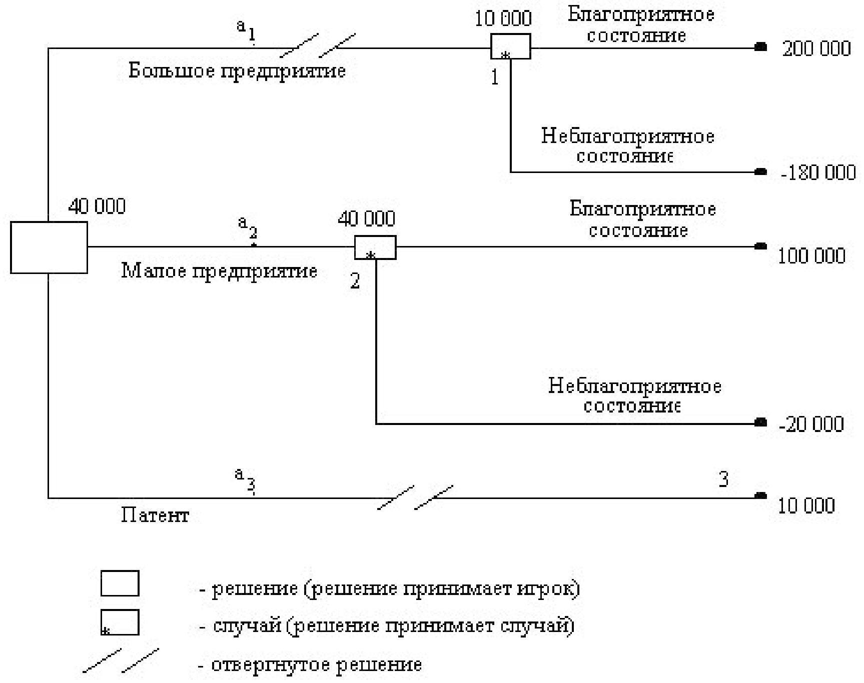


Рис. 1. Дерево решений без дополнительного обследования конъюнктуры рынка

Индивидуальная работа

Задача. Фермер Мак-Кой может выращивать либо кукурузу, либо соевые бобы. Вероятность того, что цены на будущий урожай этих культур повысятся, останутся на том же уровне или понизятся, равна соответственно 0,25, 0,30 и 0,45. Если цены возрастут, урожай кукурузы даст 30 000 долл. чистого дохода, а урожай соевых бобов – 10 000 долл. Если цены останутся неизменными, Мак-Кой лишь покроет расходы. Но если цены станут ниже, урожай кукурузы и соевых бобов приведет к потерям в 35 000 и 5 000 долл. соответственно. Представьте данную задачу в виде дерева решений. Какую культуру следует выращивать Мак-Кою?

Задача. Предположим, у вас имеется возможность вложить деньги либо в 7,5%-ные облигации, которые продаются по номинальной цене, либо в специальный фонд, который выплачивает лишь 1% дивидендов. Если существует вероятность инфляции, процентная ставка возрастет до 8%, и в этом случае номинальная стоимость облигаций увеличится на 10%, а цена акций фонда – на 20%. Если прогнозируется спад, то процентная ставка понизится до 6%. При этих условиях ожидается, что номинальная стоимость облигаций поднимется на 5%, а цена акций фонда увеличится на 20%. Если состояние экономики останется неизменным, цена акций фонда увеличится на 8%, а номинальная стоимость облигаций не изменится. Экономисты оценивают в 20% шансы наступления инфляции и в 15% – и наступление спада. Ваше решение относительно инвестиций принимается с учетом экономических условий следующего года. Представьте задачу в виде дерева решений. Будете ли вы покупать акции фонда или облигации?

Задача. Фирма планирует производство новой продукции быстрого питания в национальном масштабе. Исследовательский отдел убежден в большом успехе новой продукции и хочет внедрить ее немедленно, без рекламной кампании на рынках сбыта фирмы. Отдел маркетинга положение вещей оценивает иначе и предлагает провести интенсивную рекламную кампанию. Такая кампания обойдется в 100 000 долл., а в случае успеха принесет 950 000 долл. годового дохода. В случае провала рекламной кампании (вероятность этого составляет 30%) годовой доход оценивается лишь в 200 000 долл. Если рекламная кампания не проводится вовсе, годовой доход оценивается в 400 000 долл. при условии, что покупателям понравится новая продукция (вероятность этого равна 0,8), и в 200 000 долл. с вероятностью 0,2, если покупатели останутся равнодушными к новой продукции. Постройте соответствующее дерево решений. Как должна поступить фирма в связи с производством новой продукции?

Задача. Симметричная монета подбрасывается три раза. Вы получаете один доллар за каждое выпадение герба (Г) и дополнительно 0,25 доллара за каждые два последовательных выпадения герба (заметим, что выпадение ГГГ состоит из двух последовательностей ГГ). Однако вам приходится платить 1,1 долл. за каждое выпадение решки (Р). Вашим решением является участие или неучастие в игре. Постройте соответствующее дерево решений для описанной игры. Будете ли вы играть в эту игру?

Задача. Предположим, у вас имеется возможность сыграть в игру следующего содержания. Симметричная игральная кость бросается два раза, при этом возможны четыре исхода: 1) выпадает два четных числа, 2) выпадает два нечетных числа, 3) выпадает сначала четное, затем нечетное число, 4) выпадает сначала нечетное, затем четное число. Вы можете делать одинаковые ставки на два исхода. Например, вы можете поставить на два четных числа (исход 1) и два нечетных (исход 2). Выигрыш на каждый доллар, поставленный на первый исход, равен 2 доллара, на второй и третий исходы – 1,95 доллара, на четвертый – 1,50 доллара. Постройте дерево решений для описанной игры. На какие исходы следует делать ставки?

Задача. Фирма производит партии продукции с 0,8, 1, 1,2 и 1,4 % бракованных изделий с вероятностями 0,4, 0,3, 0,25 и 0,05 соответственно. Три потребителя A, B и C заключили контракт на получение партий изделий с процентом некачественных изделий не выше 0,8, 1,2 и 1,4 % соответственно. Фирма штрафуется в сумме 1000 долл. за каждый пункт процента (пункт процента – это одна десятая процента) в случае, если процент некачественных изделий выше указанного. Наоборот, поставка партий изделий с меньшим процентом бракованных изделий, чем оговорено в контракте, приносит фирме прибыль в 500 долл. за каждый пункт процента. Предполагается, что партии изделий перед отправкой не проверяются. Постройте соответствующее дерево решений. Какой из потребителей должен иметь наивысший приоритет при получении своего заказа?

Контрольные вопросы.

1. Что является исходом в ЗПР в условиях риска при выборе альтернативы?
2. Что принимается в качестве меры риска в ЗПР в условиях риска ?

3. Как оценка случайной величины с помощью обобщенного критерия характеризует человека?

Практическая работа 3. Операции над нечеткими отношениями и множествами.

Теория нечетких множеств представляет собой *обобщение* и переосмысление важнейших направлений классической математики. У ее истоков лежат идеи и достижения многозначной логики, которая указала на возможности перехода от двух к произвольному числу значений истинности и поставила проблему оперирования понятиями с изменяющимся содержанием; теории вероятностей, которая, породив большое количество различных способов статистической обработки экспериментальных данных, открыла пути определения и интерпретации функции принадлежности; дискретной математики, которая предложила инструмент для построения моделей многомерных и многоуровневых систем, удобный при решении практических задач.

Подход к формализации понятия нечеткого *множества* состоит в обобщении понятия принадлежности. В обычной теории множеств существует несколько способов задания *множества*. Одним из них является задание с помощью характеристической функции, определяемой следующим образом. Пусть U — так называемое *универсальное множество*, из элементов которого образованы все остальные *множества*, рассматриваемые в данном классе задач, например множество всех целых чисел, множество всех гладких функций и т.д. Характеристическая *функция множества* $A \subseteq U$ — это *функция* μ_A, значения которой указывают, является ли $x \in U$ элементом *множества* A:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A, \\ 0, & \text{если } x \notin A. \end{cases}$$

Особенностью этой функции является бинарный характер ее значений.

С точки зрения характеристической функции, ***нечеткие множества*** есть естественное *обобщение* обычных множеств, когда мы отказываемся от бинарного характера этой функции и предполагаем, что она может принимать любые значения на отрезке $[0,1]$. В теории *нечетких множеств* характеристическая *функция* называется ***функцией принадлежности***, а ее *значение* $\mu_A(x)$ — **степенью принадлежности** элемента x нечеткому множеству A.

Более строго, ***нечетким множеством*** A называется совокупность пар

$$A = \{\langle x, \mu_A(x)\rangle \mid x \in U\},$$

где μ_A — *функция принадлежности*, т.е. $\mu_A : U \to [0,1]$.

Пусть, например,

$$U = \{a, b, c, d, e\},$$

$$A = \{\langle a,\ 0\rangle, \langle b,\ 0{,}1\rangle, \langle c,\ 0{,}5\rangle, \langle d,\ 0{,}9\rangle, \langle e,\ 1\rangle\}.$$

Будем говорить, что элемент a не принадлежит множеству A, элемент b принадлежит ему в малой степени, элемент c более или менее принадлежит, элемент d принадлежит в значительной степени, e является элементом *множества* A.

Пример. Пусть *универсум* U есть множество действительных чисел. Нечеткое множество A, обозначающее множество чисел, близких к 10 (рисунок 1), можно задать следующей *функцией принадлежности*:

$$\mu_A(x) = (1 + |x - 10|^m)^{-1},$$

где $m \in N$.

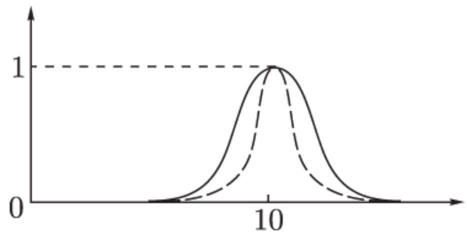


Рис. 1.

Показатель степени m выбирается в зависимости от степени близости к 10. Например, для описания *множества* чисел, очень близких к 10, можно положить $m = 4$;
для *множества* чисел, не очень далеких от 10, $m = 1$.

Пример. Коротко остановимся на понятии *лингвистической переменной* (более детальное изучение будет в последующих лекциях). *Лингвистическую переменную* можно определить как переменную, значениями которой являются не числа, а слова или предложения естественного (или формального) языка. Например, лингвистическая *переменная* "возраст" может принимать следующие значения: "очень молодой", "молодой", "среднего возраста", "старый", "очень старый" и др. Ясно, что *переменная* "возраст" будет обычной переменной, если ее значения — точные числа; лингвистической она становится, будучи использованной в нечетких рассуждениях человека.

Каждому значению *лингвистической переменной* соответствует определенное нечеткое множество со своей *функцией принадлежности*. Так, лингвистическому значению "молодой" может соответствовать *функция принадлежности*, изображенная на рисунок 2.

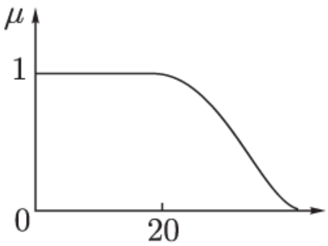


Рис. 2.

Над нечеткими множествами можно производить различные *операции*, при этом необходимо определить их так, чтобы в частном случае, когда множество является нечетким, *операции* переходили в обычные *операции* теории множеств, то есть *операции* над нечеткими множествами должны обобщать соответствующие *операции* над обычными множествами. При этом *обобщение* может быть реализовано различными способами, из-за чего какой-либо *операции* над обычными множествами может соответствовать несколько операций в теории нечетких множеств.

Для определения пересечения и объединения нечетких множеств наибольшей популярностью пользуются следующие три группы операций:

1. *Максиминные*:

$$\mu_{A\cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \quad \mu_{A\cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}.$$

2. Алгебраические:

$$\mu_{A\cup B}(x) = \mu_A(x)+\mu_B(x)-\mu_A(x)\mu_B(x), \quad \mu_{A\cap B} = \mu_A(x)\mu_B(x).$$

3. Ограниченные:

$$\mu_{A\cup B}(x) = \min\{1, \mu_A(x) + \mu_B(x)\},$$

$$\mu_{A\cap B}(x) = \max\{0, \mu_A(x) + \mu_B(x) - 1\}.$$

Дополнение нечеткого *множества* во всех трех случаях определяется одинаково: $\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$.

Пример. Пусть A — *нечеткое множество* "от 5 до 8" (рис.3а) и B — *нечеткое множество* "около 4" (рис.3б), заданные своими функциями принадлежности:

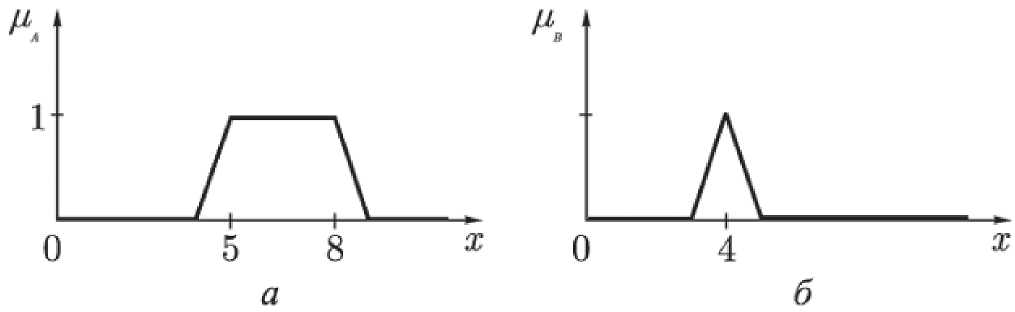


Рис. 3.

Тогда, используя *максиминные операции*, мы получим *множества*, изображенные на рис.4.

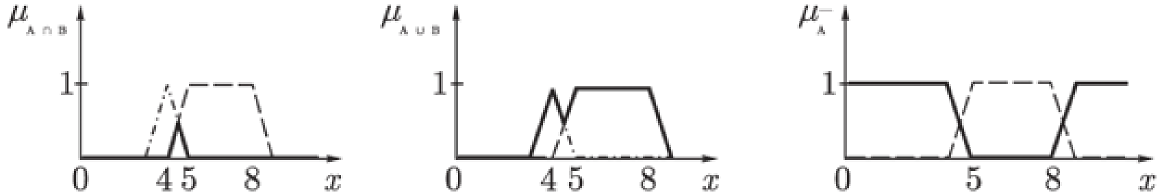


Рис. 4.

Заметим, что при *максиминном* и алгебраическом определении операций не будут выполняться *законы противоречия* и исключения третьего $A \cap \bar{A} \neq \varnothing$, $A \cup \bar{A} \neq U$, а в случае ограниченных операций не будут выполняться свойства идемпотентности $A \cup A \neq A$, $A \cap A \neq A$ и дистрибутивности:

$$A \cup (B \cap C) \neq (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad A \cap (B \cup C) \neq (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Можно показать, что при любом построении операций объединения и пересечения в теории нечетких множеств приходится отбрасывать либо *законы противоречия* и исключения третьего, либо *законы идемпотентности* и дистрибутивности.

Носителем нечеткого *множества* A называется четкое множество $\tilde{A}$ таких точек в U, для которых величина $\mu_A(x)$ положительна, т.е. $\tilde{A} = \{x | \mu_A(x) > 0\}$.

Теория *нечетких отношений* находит также *приложение* в задачах, в которых традиционно применяется теория обычных (четких) отношений. Как правило, аппарат теории четких отношений используется при качественном анализе взаимосвязей между объектами исследуемой системы, когда связи носят дихотомический характер и могут быть проинтерпретированы в терминах "*связь* присутствует", "*связь* отсутствует", либо когда методы количественного анализа взаимосвязей по каким-либо причинам неприменимы и взаимосвязи искусственно приводятся к дихотомическому виду. Например, когда величина связи между объектами принимает значения из ранговой шкалы, выбор порога на силу связи позволяет преобразовать *связь* к требуемому виду. Однако, подобный подход, позволяя проводить качественный *анализ* систем, приводит к потере информации о силе связей между объектами либо требует проведения вычислений при разных порогах на силу связей. Этого недостатка лишены методы анализа данных, основанные на теории *нечетких отношений*, которые позволяют проводить качественный *анализ*систем с учетом различия в силе связей между объектами системы.

Обычное неразмытое n -*арное отношение* R определяется как *подмножество* декартова произведения n множеств

$$R \subseteq X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n.$$

Подобно нечеткому множеству, ***нечеткое отношение*** можно задать с помощью его функции принадлежности

$$\mu_R : X_1 \times \ldots \times X_n \to L,$$

где в общем случае будем считать, что L — это полная дистрибутивная решетка. Таким образом, L — это частично упорядоченное множество, в котором любое непустое *подмножество* имеет наибольшую нижнюю и наименьшую верхнюю *грани* и *операции пересечения* и объединения в L удовлетворяют законам дистрибутивности. Все *операции* над *нечеткими отношениями* определяются с помощью этих операций из L. Например, если в качестве L взять ограниченное множество вещественных чисел, то операциями пересечения и объединения в L будут, соответственно, *операции* $\min$ и $\max$, и эти *операции* будут определять и *операции* над *нечеткими отношениями*.

Далее мы ограничимся рассмотрением лишь **бинарных нечетких отношений**, являющихся отображением на *отрезок* $[0,1]$, т.е. $\mu_R\colon X \times Y \to [0,1]$.

Если *множества* X и Y конечны, *нечеткое отношение* R между X и Y можно представить с помощью его **матрицы отношения**, первой строке и первому столбцу которой ставятся в соответствие элементы множеств X и Y, а на пересечении строки x и столбца y помещается элемент $\mu_R(x,y)$.

Таблица

/3 y_4

,5 ,8

,7 ,6 ,3

,7 ,4

В случае, когда *множества* X и Y совпадают, *нечеткое отношение* R называют **нечетким отношением на множестве** X.

В случае конечных или счетных *универсальных множеств* очевидна *интерпретация нечеткого отношения* в виде *взвешенного графа*, в котором каждая пара вершин (x,y) из $X \times Y$ соединяется ребром с весом $R(x,y)$.

Пример. Пусть $X = x_1, x_2$ и $Y = y_1, y_2, y_3$, тогда нечеткий *граф*, изображенный на рисунке 2, задает некоторое *нечеткое отношение* $R \subset X \times Y$.

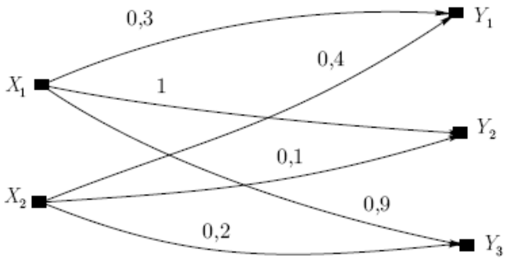


Рис. 2.

Операции над нечеткими отношениями

Объединение и *пересечение нечетких отношений* определяется следующим образом:

$$\forall x \in X\ \forall y \in Y \qquad R \cup S\ (x,y) = R(x,y) \vee S(x,y),$$

$$\forall x \in X\ \forall y \in Y \qquad R \cap S\ (x,y) = R(x,y) \wedge S(x,y)$$

Отношение включения $R \subseteq S$ для *нечетких отношений* определяется с помощью *отношения частичного порядка* на L:

$$\forall x \in X\ \forall y \in Y \qquad R \subseteq S\ \Leftrightarrow R(x,y) \leqslant S(x,y).$$

Множество $\rho(X \times Y)$ всех *нечетких отношений* между X и Y образует дистрибутивную решетку по отношению к операциям объединения и пересечения и удовлетворяет следующим тождествам:

1. Идемпотентность:

$R \cap R = R, \quad R \cup R = R.$

2. *Коммутативность*:

$R \cap S = S \cap R, \quad R \cup S = S \cup R.$

3. *Ассоциативность*:

$R \cap (S \cap T) = (R \cap S) \cap T, \quad R \cup (S \cup T) = (R \cup S) \cup T.$

4. *Дистрибутивность*:

$R \cap (S \cup T) = (R \cap S) \cup (R \cap T), \quad R \cup (S \cap T) = (R \cup S) \cap (R \cup T).$

Выполнение этих тождеств для $\rho(X \times Y)$ следует из выполнения соответствующих тождеств для решетки L. В $\rho(X \times Y)$выполняется также следующее соотношение:

$S \subseteq T \quad \Rightarrow \quad R \cup S \subseteq R \cup T, \quad R \cap S \subseteq R \cap T.$

Из полноты решетки L следует, что она обладает наименьшим **0** и наибольшим **I** элементами. Эти элементы определяют, соответственно, **пустое** и **универсальное** *нечеткие отношения*:

$\forall x \forall y \ \Theta(x, y) = 0, \qquad \forall x \forall y \ U(x, y) = I.$

Следующее соотношение определяет **композицию** $R \circ S$ **нечетких отношений** R **и** S:

$\forall x \in X \ \forall z \in Z \quad R \circ S(x, z) = \bigvee_{y \in Y} (R(x, y) \wedge S(y, z)).$

Здесь $\bigvee_{y \in Y}$ обозначает наименьшую верхнюю грань *множества* элементов $(R(x, y) \wedge S(y, z))$, где y пробегает все значения из Y. В силу полноты L эта операция всегда определена.

Свойства нечетких отношений

Различные типы *нечетких отношений* определяются с помощью свойств, аналогичных свойствам обычных отношений, причем для *нечетких отношений* можно указать различные способы обобщения этих свойств.

1. **Рефлексивность**:

$E \subseteq R, \qquad \forall x \in X \quad R(x, x) = I.$

2. **Слабая рефлексивность**:

$\forall x, y \in X \quad R(x, y) \leqslant R(x, x).$

3. **Сильная рефлексивность**:

$\forall x, y \in X \quad R(x, y) < I.$

4. **Антирефлексивность**:

$R \cap E = \varnothing \qquad \forall x \in X \quad R(x, x) = 0.$

5. **Слабая антирефлексивность**:

$\forall x, y \in X \quad R(x, x) \leqslant R(x, y).$

6. **Сильная антирефлексивность**:

$\forall x, y \in X \quad 0 < R(x, y).$

7. **Симметричность**:

$R = R^{-1}, \qquad \forall x, y \in X \quad R(x, y) = R(y, x).$

8. **Антисимметричность**:

$R \cap R^{-1} \subseteq E, \qquad \forall x, y \in X (x \neq y) \quad R(x, y) \wedge R(y, x) = 0.$

9. **Асимметричность**:

$R \cap R^{-1} = \varnothing, \qquad \forall x, y \in X \quad R(x, y) \wedge R(y, x) = 0.$

10. **Сильная линейность**:

$$R \cup R^{-1} = U, \qquad \forall x, y \in X \quad R(x,y) \vee R(y,x) = I.$$

11. **Слабая линейность**:

$$\forall x, y \in X \quad R(x,y) \vee R(y,x) > 0.$$

12. **Транзитивность**:

$$R \supseteq R \circ R, \qquad \forall x, y, z \in X \quad R(x,z) \geqslant R(x,y) \wedge R(y,z).$$

Индивидуальные задания

1. Дано нечеткое множество **A**=0,1/3+0,3/5+0,5/6+0,9/7+0,5/9+0,3/12.

Постройте функцию принадлежности нечеткого множества A.

Найдите точки перехода для множества A, если таковые существуют.

2. Дано нечеткое множество:

A = 0,3/5 + 0,7/7 + 1/12 + 0,9/18 + 0,4/20.

Требуется:

1) записать множества CON(A), DIL(A),
2) сделать чертеж: изобразить множества A, CON(A), DIL(A),

3. Даны нечеткие числа: a ={немного меньше 4}, b = {около 5}.

Выступая в роли эксперта запишите нечеткие числа *a* и *b* в форме объединения точечных нечетких множеств.

Найти сумму: a + b.

4. Дано нечеткое множество:

B = 0,7/1 + 1/3 + 0,5/5+0,2/7.

Требуется:

1) используя операции концентрирования и растяжения, записать множества: CON(B), DIL(B);
2) сделать чертеж: изобразить множества B, CON(B), DIL(B);

4. Даны нечеткие числа: a ={немного меньше 6}, b = {примерно 8}.

Выступая в роли эксперта запишите нечеткие числа a и b в форме объединения точечных нечетких множеств.

Найти разность: b - a.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте понятие нечеткого множества и сравните его с понятием обычного множества.
2. Что называют носителем нечеткого множества?
3. Приведите пример нечеткого множества с дискретным и непрерывным носителем.
4. Дайте определение обычного множества, ближайшего к нечеткому.
5. Дайте определение нечеткого бинарного отношения.
6. Перечислите способы задания нечетких бинарных отношений.
7. Перечислите основные свойства нечетких бинарных отношений.

Практическая работа 4. Определение оптимального решения при конечном горизонте планирования методом итераций по стратегиям.

Формулировка задачи:

Мебельный магазин планирует свою работу на три месяца, при этом директору магазина необходимо решить: какие меры по стимулированию спроса, в зависимости от состояния дел, следует предпринять для увеличения объема продаж. Рассматриваются следующие варианты стимулирования спроса:

1. 3% скидка при следующей покупке;
2. бесплатная доставка;
3. не предпринимать ничего.

Кроме того, фирма оценивает месячный объем продаж по трехбалльной шкале как:

1. отличный;
2. хороший;
3. удовлетворительный.

Известны переходные вероятности и соответствующие месячные доходы по каждому из трех вариантов:

3% скидка при следующей покупке						Бесплатная доставка				
P_1=		1	2	3		P_2 =		1	2	3
	1	0,4	0,5	0,1			1	0,3	0,6	0,1
	2	0,1	0,6	0,3			2	0	0,4	0,6
	3	0	0,2	0,8			3	0	0,2	0,8
R_1=		1	2	3		R_2=		1	2	3
	1	110	100	70			1	130	110	90
	2	105	90	65			2	130	100	85
	3	100	85	60			3	125	98	80
Не предпринимать ничего										
P_3=		1	2	3						
	1	0,3	0,3	0,4						
	2	0,1	0,7	0,2						
	3	0,05	0,2	0,75						
R_3=		1	2	3						
	1	100	90	70						
	2	110	95	65						
	3	100	85	60						

Найти оптимальную стратегию стимуляции спроса для последующих 3 месяцев.

Решение:

В нашем случае число этапов – 3 (месяца), число состояний для каждого $m = 3$(спрос отличный, хороший, удовлетворительный).

Вычислим значения :

[redacted]

i	[redacted]	[redacted]	[redacted]
1	101	114	85
2	84	91	90,5
3	65	83,6	67

С учетом затрат на каждую стратегию (10, 20, 0):

Этап 3:

	[redacted]			Оптимальное решение	
i	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	[redacted]	[redacted]
1	101	114	85	114	2
2	84	91	90,5	91	2
3	65	83,6	67	83,6	2
Этап 2:					
	[redacted]			Оптимальное решение	
i	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	[redacted]	
1	101 + 0,4·114 + 0,5·91 + 0,1·83,6 = 200,46	211,16	179,94	211,16	2
2	84 + 0,1·114 + 0,6·91 + 0,3·83,6 = 175,08	177,56	182,32	182,32	3
3	65 + 0·114 + 0,2·91+ 0,8·83,6 = 150,8	168,68	153,6	168,68	2
Этап 1:					
	[redacted]			Оптимальное решение	
i	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	[redacted]	
1	101 + 0,4·211,16 + 0,5·182,32 + 0,1·168,68 = 293,49	303,61	270,52	303,61	2
2	84 + 0,1·211,16 + 0,6·182,32 + 0,3·168,68 = 265,11	265,14	272,98	272,98	3
3	65 + 0·211,16 + 0,2· ·182,32 + 0,8·168,68 = 236,41	255,01	240,53	255,01	2

Оптимальное решение показывает, что в 1-ый и 2-ой месяцы предприятию следует стимулировать спрос путем организации бесплатной доставки, при условии, что уровень спроса находится либо в *отличном*, либо в*удовлетворительном*состоянии. Если же уровень спроса*хороший*, то не следует ничего предпринимать. В 3-ем месяце магазину следует организовать бесплатную доставку мебели независимо от состояния системы.Суммарный ожидаемый доход за 3 месяца составит[redacted]при отличном уровне продаж в 1-ый месяц,[redacted]- при хорошем уровне и[redacted]- при удовлетворительном уровне продаж в 1-ый месяц.

Индивидуальная работа

Задача. Некоторая фирма занимается промышленной разработкой программного обеспечения для компьютерных систем. В начале каждого года она решает задачу замены оборудования, включающего технические и программные средства, используемые в производственном процессе и обеспечивающие необходимую технологическую среду разработки. В зависимости от результатов экспертной оценки оборудования состояние фирмы (это система S) оценивается как "хорошее" (1), "удовлетворительное" (2) и "плохое" (3). Следовательно, система может находиться в одном из трех указанных состояний. Матрица переходных вероятностей может иметь вид:

$$P^1 = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$R^1 = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

матрица доходов R^1

В реально работающих фирмах по результатам экспертного анализа проводится периодическое обновление оборудования с изменением технологического окружения и обучением персонала. Данный процесс моделируется изменением матриц переходных вероятностей и доходов. В нашем примере они, могут измениться следующим образом:

$$P^2 = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,6 & 0,1 \\ 0,1 & 0,6 & 0,3 \\ 0,05 & 0,4 & 0,55 \end{bmatrix}; \quad R^2 = \begin{bmatrix} 6 & 5 & -1 \\ 7 & 4 & 0 \\ 6 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Отрицательные значения отражают потери. Возникает проблема выбора или принятия решений с целью максимизации приносимого фирмой ожидаемого дохода.

Задача. Пусть некоторая IT-фирма выпускает новый вид продукции. После выпуска пробной партии фирма может оказаться в двух состояниях:

S_1 – продукция оказалась удачной и пользуется спросом;

S2 – продукция оказалась неудачной.

Допустим, что предполагается выпускать данный вид продукции в течение года. Руководство фирмы должно реагировать на то или иное состояние путем выбора определенной стратегии, которую по условиям производства можно менять не чаще и не реже, чем один раз в квартал. Очевидно, что стратегия зависит от состояния, в котором оказалась фирма в начале текущего квартала. Предположим, что в распоряжении руководства имеется некоторый набор стратегий, включающий использование (или не использование) рекламы; проведение (или не проведение) дополнительных исследований требований потребителя и своих возможностей.

Допустим, что из опыта фирмы известны переходные вероятности такой цепи, значения доходов (расходов), связанные с применением той или иной стратегии и с вероятностями успешного или неуспешного выпуска продукции

Все исходные данные сведем в таблицу следующего вида:

Состояния	Стратегии	Вероятность перехода		Доходы	
i	k	P^k_{i1}	P^k_{i2}	u^k_{i1}	u^k_{i2}
S_1	Без рекламы	0,5	0,5	8	2
	С рекламой	0,9	0,1	4	4
S_2	Без исследований	0,3	0,7	3	–5
	С исследованиями	0,7	0,3	1	–20

Требуется найти вектор совокупности стратегий, который обеспечит максимум суммы среднего годового дохода с учетом всех возможных вариантов случайных событий, которые могут произойти в течение года.

Задача. Фирма ежегодно оценивает положение со сбытом одного из видов своей основной продукции и дает ему удовлетворительную (состояние 1) или неудовлетворительную оценку (состояние 2). Необходимо принять решение о целесообразности рекламирования этой продукции в целях расширения ее сбыта. Приведенные ниже матрицы P^1 и P^2 определяют переходные вероятности при наличии рекламы и без нее в течение любого года. Соответствующие доходы заданы матрицами R^1 и R^2. Найдите оптимальные решения для последующих трех лет.

$$\mathbf{P}^1 = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}^1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}^2 = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}^2 = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Задача . Компания может провести рекламную акцию с помощью одного из трех средств массовой информации: радио, телевидения или газеты. Недельные затраты на рекламу с помощью этих средств оцениваются в 200, 900 и 300 долларов соответственно. Компания оценивает недельный объем сбыта своей продукции по трехбалльной шкале как удовлетворительный (1), хороший (2) и отличный (3). Ниже указаны переходные вероятности, соответствующие каждому из трех средств массовой информации.

$$\text{Радио}\quad \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 0.4 & 0.5 & 0.1 \\ 2 & 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 3 & 0.1 & 0.2 & 0.7 \end{array} \qquad \text{Телевидение}\quad \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 2 & 0.3 & 0.6 & 0.1 \\ 3 & 0.1 & 0.7 & 0.2 \end{array} \qquad \text{Газета}\quad \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 2 & 0 & 0.7 & 0.3 \\ 3 & 0 & 0.2 & 0.8 \end{array}$$

Соответствующие недельные доходы (в тысячах долларов) равны следующему

$$\text{Радио}\ \begin{bmatrix} 400 & 520 & 600 \\ 300 & 400 & 700 \\ 200 & 250 & 500 \end{bmatrix} \quad \text{Телевидение}\ \begin{bmatrix} 1000 & 1300 & 1600 \\ 800 & 1000 & 1700 \\ 600 & 700 & 1100 \end{bmatrix} \quad \text{Газета}\ \begin{bmatrix} 400 & 530 & 710 \\ 350 & 450 & 800 \\ 250 & 400 & 650 \end{bmatrix}$$

Найдите оптимальную стратегию рекламы для последующих трех недель.

Задача. Фирма выпускает на рынок новый вид продукции. Если объем сбыта высокий, то с вероятностью 0.5 он останется таким же в следующем месяце. Если он невысокий, то вероятность того, что в следующем месяце он станет высоким, равна только 0.2. Фирма может провести рекламную кампанию. Если она примет это решение при высоком объеме сбыта, то вероятность того, что он останется высоким и в следующем месяце, возрастает до 0.8. При низком уровне реклама сбыта повышает эту вероятность только до 0.4.

Если при высоком уровне сбыта реклама не используется, то ожидаемый доход составит 10 при условии, что объем сбыта останется высоким в следующем меся-це, и 4 — в противном случае. Если первоначально наблюдается высокий уровень сбыта, то соответствующие доходы равны 7 и -2. При использовании рекламы до-ход равен 7, если первоначально уровень сбыта высокий, и становится равным 6, если уровень сбыта снижается. Если начальный уровень сбыта низкий, то доходы равны 3 и -5 в зависимости от того, повышается он или нет.

Определите оптимальную стратегию фирмы для последующих трех месяцев.

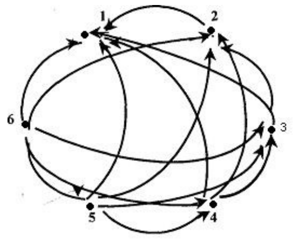
Контрольные вопросы.

1. Какой процесс называется марковским и что собой представляет его моделирование?
2. Приведите примеры моделей марковского случайного процесса с дискретным и непрерывным временем.
3. Что такое операция дисконтирования?
4. Понятие переходной матрицы для Марковского процесса.
5. Понятие матрицы дохода для Марковского процесса.

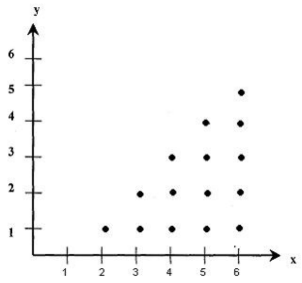
Практическая работа 5. Решение задач принятия решений на языке бинарных отношений

Пример. Дано множество $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\} \subset \boldsymbol{N}$. На нем задано бинарное отношение ρ «больше», т. е. $(x, y) \in \rho \iff x > y$. Построить граф и график этого отношения. Какими свойствами обладает это отношение?

Решение. 1) Граф указанного отношения:



2) строим график этого отношения:



3) Рефлексивность. Если бы это отношение было рефлексивным, то $x > x$ для $\forall x \in$ A. Например, было бы верно 2 > 2 (ложь). Значит отношение «>» на A не является рефлексивным.

Симметричность. Если бы это отношение было симметричным на множестве A, то $x > y \Rightarrow y > x$. Например, 3 > 2 => 2 > 3(ложь). Значит, отношение « > » на A не является симметричным.

Транзитивность. Если бы это отношение было транзитивным на множестве A, то $x > y$, $y > z \Rightarrow x > z$. Это утверждение истинно для любых натуральных чисел, т. е. и чисел из A. Значит, отношение « > » на A является транзитивным.

Асимметричность: Ни для каких чисел A не может быть одновременно истинным $\begin{cases} x > y \\ y > x \end{cases}$, т. е. отношение «>» на A асимметрично. Отношение « > » на множестве A является отношением строгого порядка, т. к. оно асимметрично и транзитивно.

Связность. Для любых двух элементов $x, y \in$ А верно: $\left[\begin{array}{l} x > y \\ y > x \\ y = x \end{array}\right.$ т. е. отношение «>» на множестве A является связным. Т. к. отношение «>» на множестве A связное и является отношением строгого порядка, то оно есть отношение строгого линейного порядка.

Пример. На множестве людей Земли введено бинарное отношение «быть родственником по крови». Будет ли это отношение отношением эквивалентности?

Решение. Обозначим через A множество людей Земли, а заданное отношение буквой ρ. Тогда $x \rho y \Leftrightarrow$ человек x является родственником человека y. Что бы отношение ρ было отношением эквивалентности, оно должно быть рефлексивным, симметричным, транзитивным.

Рефлексивность. Если бы ρ было рефлексивным, то было бы верно: $\forall x \in A \quad x \rho x$, т. е. любой человек Земли является родственником самому себе (истина), т. е. отношение ρ на A рефлексивно.

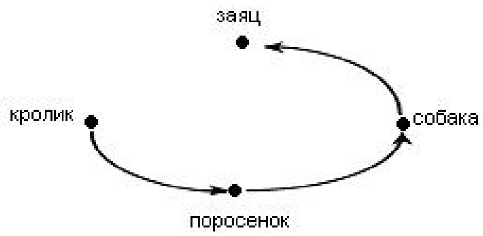
Симметричность. Если бы ρ было симметрично. ($x \rho y \Rightarrow y \rho x$), т. е. если бы человек x был родственником человека y, то y был бы родственником человека x (истина). Значит, отношение ρ на A симметрично.

Транзитивность. Если бы ρ было транзитивно на A, то если бы человек x был бы родственником человека y, а y был родственником человека z, то x был бы родственником z. Но это не обязательно. Например, человек x родственник для y по матери, а y – родственник для z по отцу. Тогда x и y могут не быть родственниками по крови. Значит, отношение ρ на A не является транзитивным.

Следовательно, отношение «быть родственником по крови» на множестве людей Земли не является отношением эквивалентности.

Пример. Построить граф отношения «легче, чем» на множестве A = {кролик, заяц, собака, поросёнок}, если известно, что заяц тяжелее собаки, кролик легче поросёнка, а собака тяжелее поросёнка. Кто из животных самый легкий, кто – самый тяжелый.

Решение. Строим граф указанного отношения:



Итог: кролик – самый легкий, заяц – самый тяжелый.

Индивидуальные задания

1. Дано множество числовых выражений

$M = \{10; -2\frac{1}{2}\cdot 3; (8-5\frac{3}{8})\cdot 3;$

$11\frac{1}{2}\cdot 2 - 15{,}9(16\frac{3}{4}-7\frac{1}{2})\}$. Постройте граф этого отношения «меньше, чем» на этом множестве.

2. Множество M членов семьи Смирновых состоит из отца (Ивана Михайловича), матери (Елены Андреевны) и четырёх детей: Миши, Тани, Васи и Оли. Между членами семьи существуют отношения родства, которые можно выразить словами: «быть мужем», «быть братом» и т. д.

а) укажите всевозможные отношения на множестве M;

б) запишите отношения «быть дочерью» с указанием всех его элементов и построить граф этого отношения;

в) постройте графы отношений «быть братом», «быть матерью».

3. На рис. 1 изображен граф отношения «а брат в» на множестве детей нашего двора {А; Б; В; Г; Д; Е; Ж; З; И}. Кто из них является мальчиком? Кто девочкой? О ком нельзя по этому графу ничего сказать?

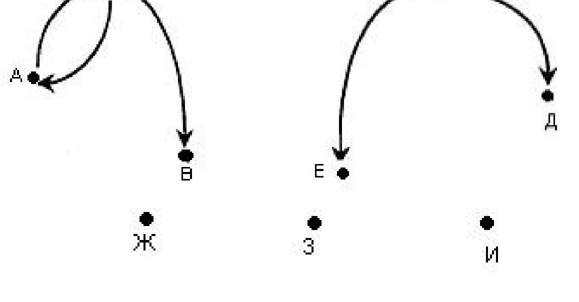


Рис. 1

4. Класс выставил на соревнования по плаванию команду мальчиков. В нее входили: Витя, Коля, Андрей и Саша. Коля проплыл дистанцию быстрее Андрея, но медленнее Саши, Андрей затратил на ту же дистанцию времени больше, чем Витя, который плавал медленнее Коли. Как распределились места на соревнованиях.(Задачу решите с помощью построения графа соответствующего бинарного отношения).

5. M – множество озер Канады. На M задано бинарное отношение «иметь одинаковый объем воды». Будет ли это отношение эквивалентностью?

6. M – множество озер Канады. На M задано бинарное отношение «иметь одинаковый объем воды». Будет ли это отношение эквивалентностью?

Контрольные вопросы

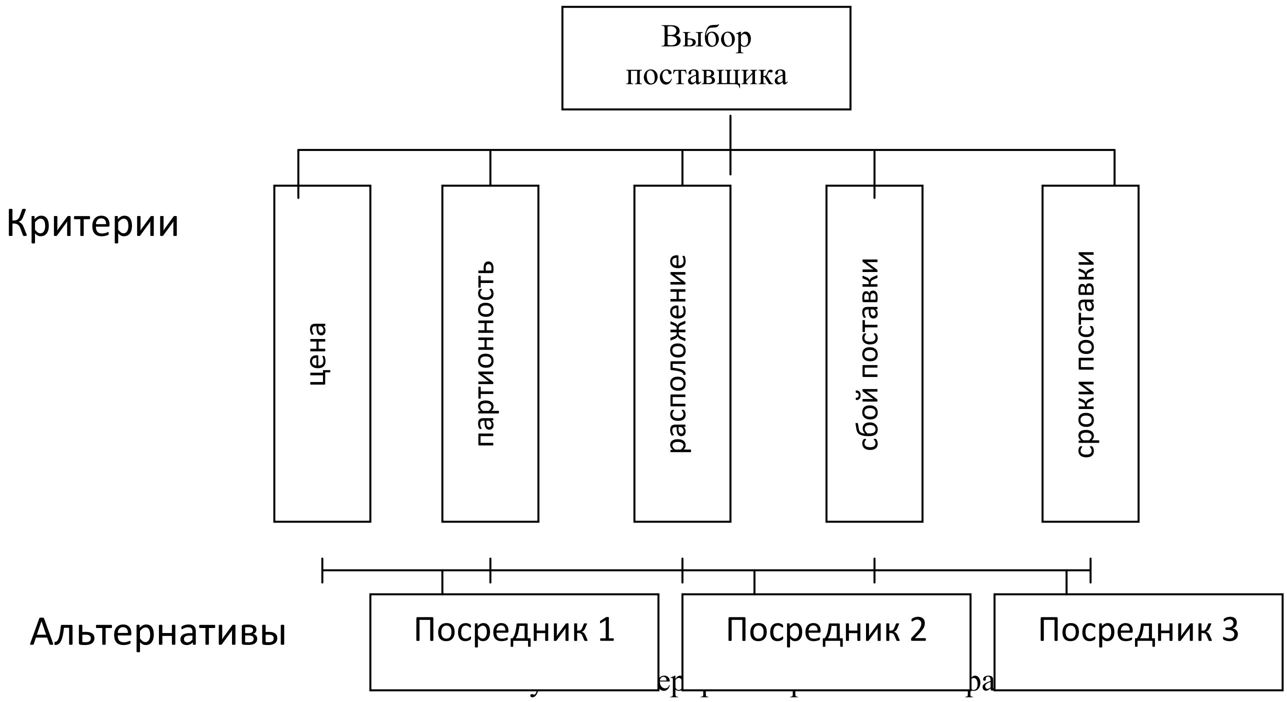
1. Что такое “бинарное отношение на множестве”?
2. Как можно записать бинарное отношение?
3. Какое отношение называют рефлексивным?
4. Какое отношение называют симметричным?
5. Какое отношение называют транзитивным?
6. Что такое «эквивалентность на множестве»?
7. Какие вы знаете еще специальные типы отношений?

Практическая работа 6. Метод анализа иерархий.

Наиболее рациональной методикой при выборе поставщиков является метода анализа иерархий (МАИ).

Преимуществом МАИ над большинством существующих методов является четкое выражение суждений экспертов и лиц, принимающих решение, а также ясное представление структуры проблемы: элементов и взаимозависимостей между ними. Метод анализа иерархий опирается на достаточно простые элементы, которые оцениваются в шкале МАИ в виде суждений экспертов. А затем на основании обработки экспертных оценок определяется относительная степень их взаимного влияния в иерархии.

Цель, критерии оценивания и альтернативы образуют иерархическую структуру (рис. 1).



Общая цель (фокус) проблемы (например, выбор наилучшего поставщика) является высшим уровнем иерархии. За фокусом следует уровень наиболее важных критериев. Каждый из критериев может разделяться на субкритерии. За субкритериями следует уровень альтернатив, число которых может быть достаточно большим.

Метод анализа иерархий включает в себя парные сравнения, разработку шкалы для преобразования суждений в числовые значения, использование обратно симметричных отношений.

Парные сравнения факторов и альтернатив проводятся в терминах доминирования одного из элементов над другим. Эти суждения в шакале МАИ выражаются в целых числах. Если элемент А доминирует над элементом В, то клетка квадратной матрицы, соответствующая строке А и столбцу В, заполняется целым числом, а клетка, соответствующая строке В и столбцу А, обратным ему числом. Если А и В эквивалентны, то в обе позиции записывается 1.

Обработка результатов в МАИ осуществляется на базе методов матричного анализа с использованием ряда специальных процедур оценки предпочтений на основании специальной шкалы (таблица 1).

Таблица 1. Шкала отношений МАИ

Степень важности	Определение	Пояснение
1	Одинаковая значимость	Два действия вносят одинаковый вклад в достижение цели
3	Некоторое преобладание значимости одного действия (показателя фактора) перед другим, слабая зависимость	Опыт и суждения дают легкое предпочтение одному действию перед другим
5	Существенная или сильная значимость	Опыт и суждения дают сильное предпочтение одному действию перед другим
7	Очень сильная или очевидная значимость	Предпочтение одного действия перед другим очень сильно, его превосходство практически явно
9	Абсолютная значимость	Свидетельство в пользу предпочтения одного действия другому в высшей степени убедительно
2, 4, 6, 8	Промежуточные значения между соседними значениями шкалы	Ситуация, когда необходимо компромиссное решение
Обратные величины приведенных чисел	Если действию i при сравнении с j присваивается одно из приведенных выше чисел, то действию j по сравнению с i присваивается обратное значение	Если над диагональю находится целое число, то под диагональю – его обратное значение
Рациональное значение	Отношение, возникающее в заданной шкале	Для получения согласованной матрицы требуется n числовых значений

Для обоснования шкалы МАИ учитывается, что способность человека производить количественные разграничения можно представить пятью определениями:

а) равный;
б) слабый;
в) сильный;
г) очень сильный;
д) абсолютный.

Можно принять компромиссные определения между отмеченными соседними, когда нужна большая точность. В целом требуется девять значений, выносимых при сравнении суждений. Использование единицы в начале шкалы соответствует отношению значимости объекта относительно самого себя.

Необходимо провести расчет показателей согласованности. Отклонение от согласованности называют индексом согласованности (ИС):

$$ИС = \frac{\left|(\lambda \max - n)\right|}{(n-1)}$$

При оценивании величины порога несогласованности суждений для матриц размером от одного до пятнадцати методом имитационного моделирования были получены оценки случайного индекса (СИ). СИ является индексом согласованности для сгенерированных случайным образом величин по шкале от одного до девяти положительной обратно симметрической матрицы. В таблице 2 приведены средние (модельные) значения СИ для матриц порядка n = 1:15.

Таблица 2. Индексы согласованности

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
СИ	0	0	0,58	0,9	1,12	1,24	1,32	1,41	1,45	1,49	1,51	1,48	1,56	1,57	1.59

Отношение ИС к среднему СИ для матрицы суждений того же порядка называется отношением согласованности (ОС).

$$OC = \frac{ИС}{СИ},\ при\ n = const.$$

Значение ОС $\leq$0,10 считается приемлемым порогом допустимой согласованности суждений. Если ОС $\geq$0,1, то необходимо уточнить данные в той или иной матрице суждений.

Первым этапом решения любой задачи, проблемы является построение иерархии, как показано на рисунке 1. Затем определяется вес элементов на первом уровне иерархии. Для каждого из этих элементов строится матрица векторов-столбцов элементов, находящихся на следующем уровне иерархии. Векторы весов элементов используются для взвешивания собственных векторов-столбцов. Перемножением матрицы векторов на вектор-столбец весов рассчитывают общий вектор весов элементов нижнего уровня. Расчеты необходимо проводить в матричной форме. При этом должно соблюдаться свойство обратной симметрии.

Сравнение следует осуществлять на основе шкалы отношений (таблица 1).

Для определения значений суждений следует начинать с левого элемента матрицы постановкой вопроса, насколько он важнее элемента, расположенного вверху. В случае сравнения элемента с самим собой отношение равно единице. Когда первый элемент важнее второго, используется целое число из шкалы; в противоположном случае берется обратная величина. Для объединения суждений целесообразно найти среднегеометрическое значение, заключающееся в умножении соответствующих числовых значений в матрице суждений и извлечении корня степени, равной числу оцениваемых факторов. Полученный в результате этого столбец нормализуется, и получается вектор приоритета.

После определения вектора приоритета находят оценки согласованности мнений экспертов. Определяется главное значение матрицы - $\lambda \max$. Для этого суммируются произведения векторов приоритетов на суммы элементов каждого столбца. Затем определяют отношение согласованности, оно не должно превышать 0,1.

Пример решения задачи выбора методом анализа иерархий

Рассмотрим методику выбора поставщиков на примере следующей ситуации.

Предприятию необходимо заключить договор о поставке товара либо с посредником 1, либо с посредником 2, либо с предприятием-изготовителем, либо с оптовым посредником 3. Выбор необходимо осуществить, оценив следующие факторы: цена товара (руб.); партионность (шт.); место расположения поставщика (км); сбой поставок (кол.); сроки поставок (мес.); транспортные расходы (на всю партию) (руб.).

Расчеты представим в таблица 3 – 11. На основании данных каждой таблицы произведем оценку согласованности мнений экспертов.

Таблица 3. Исходные данные

	Цена товара	Партионность	Место расположения поставщика	Сбой поставок	Сроки поставок	Транспортные расходы, руб.
Посредник 1	1000	500	1000	1	Точно в срок	2000
Посредник 2	1800	200	500	2	1 месяц	1000
Предприятие-изготовитель	800	1000	1500	0	В течение 2 месяцев	3000
Оптовый посредник 3	2000	500	100	0	Точно в срок	500

Таблица 4. Оценка важности критериев

	Цена то-	Партион-	Место рас-	Сбой	Сроки	Транспортные	Про-		Вектор

	вара	ность	положения	поставок	поставок	расходы, руб.	изве-дение	$\sqrt[6]{\ }$	приори-тетов
Цена товара	1	9	5	7	4	3		3,947	0,444
Партион-ность	1/9	1	1/5	1/3	1/6	1/7		0,237	0,027
Место рас-положения	1/5	5	1	3	1/2	1/3		0,891	0,100
Сбой поста-вок	1/7	3	1/3	1	1/4	1/5		0,439	0,049
Сроки поста-вок	1/4	6	2	4	1	1/2		1,348	0,152
Транспорт-ные расходы	1/3	7	3	5	2	1		2,030	0,228
Итого	2,04	31,00	11,53	20,33	7,92	5,18		8,892	

Оценка согласованности мнений экспертов:

$$\lambda \max = (2{,}04 \times 0{,}444) + (31{,}00 \times 0{,}027) + (11{,}53 \times 0{,}100) + (20{,}33 \times 0{,}049) + (7{,}92 \times 0{,}152) +$$
$$+ (5{,}18 \times 0{,}228) = 6{,}277;$$

ИС = $|\lambda_{max} – n)|$ / (n-1) = |6,277 - 6)| / (6-1) = 0,055;

ОС = ИС / СИ = 0,055 / 1,24 = 0,045.

Пользуясь таблицей 1, 3 и 4 описать предпочтения факторов. К примеру цена имеет абсолютное предпочтении над партионностью и т.д.

Выявление приоритетов по факторам:

Таблица 5. Цена

Цена товара	Посредник 1	Посредник 2	Изготовитель	Посредник 3	Произ-ведение	$\sqrt[4]{\ }$	Вектор приоритетов
Посредник 1	1	7	1/2	8		2,300	0,355
Посредник 2	1/7	1	1/8	2		0,435	0,067
Изготовитель	2	8	1	9		3,464	0,534
Оптовый посред-ник 3	1/8	1/2	1/9	1		0,289	0,044
Итого	3,27	16,50	1,74	20,00		6,488	

Оценка согласованности мнений экспертов:

$$\lambda \max = (3{,}27 \times 0{,}355) + (16{,}50 \times 0{,}067) + (1{,}74 \times 0{,}534) + (20{,}00 \times 0{,}044) = 4{,}076;$$

ИС = |4,076 - 4)| / (4 - 1) = 0,025;

ОС = ИС / СИ = 0,025 / 0,9 = 0,028.

Таблица 6. Партионность

Партионность	Посредник 1	Посредник 2	Изготовитель	Посредник 3	$\sqrt[4]{\ }$	Вектор приоритетов
Посредник 1	1	4	1/6	1	0,904	0,143
Посредник 2	1/4	1	1/9	¼	0,289	0,046
Изготовитель	6	9	1	6	4,243	0,669
Оптовый посред-ник 3	1	4	1/6	1	0,904	0,143
Итого	8,25	18	1,44	8,25	6,339	

Оценка согласованности мнений экспертов:

$$\lambda \max = (8{,}25 \times 0{,}143) + (18{,}0 \times 0{,}046) + (1{,}44 \times 0{,}669) + (8{,}25 \times 0{,}143) = 4{,}151;$$

ИС = |4,151 - 4)| / (4 - 1) = 0,050;

ОС = 0,050 / 0,9 = 0,056.

Таблица 7. Место расположения поставщика

Место расположения	Посредник 1	Посредник 2	Изготовитель	Посредник 3	$\sqrt[4]{\ }$	Вектор приоритетов
Посредник 1	1	1/5	3	1/7	0,541	0,085
Посредник 2	5	1	7	1/3	1,848	0,290
Изготовитель	1/3	1/7	1	1/9	0,270	0,042
Оптовый посредник 3	7	3	9	1	3,708	0,582
Итого	13,33	4,34	20,00	1,59	6,367	

Оценка согласованности мнений экспертов:

$$\lambda \max = (13{,}33 \times 0{,}085) + (4{,}34 \times 0{,}290) + (20{,}00 \times 0{,}042) + (1{,}59 \times 0{,}582) = 4{,}157;$$

ИС = |4,157 - 4)| / (4 - 1) = 0,052;

ОС = 0,052 / 0,9 = 0,058.

Таблица 8. Сбой поставки

Сбой поставки	Посредник 1	Посредник 2	Изготовитель	Посредник 3	$\sqrt[4]{\ }$	Вектор приоритетов
Посредник 1	1	5	1/5	1/5	0,669	0,109
Посредник 2	1/2	1	1/9	1/9	0,280	0,046
Изготовитель	5	9	1	1	2,590	0,423
Посредник 3	5	9	1	1	2,590	0,423
Итого	11,50	24	2,31	2,31	6,129	

Оценка согласованности мнений экспертов:

$$\lambda \max = (11{,}50 \times 0{,}109) + (24 \times 0{,}046) + (2{,}31 \times 0{,}423) + (2{,}31 \times 0{,}423) = 4{,}312;$$

ИС = |4,312 - 4)| / (4 - 1) = 0,104;

ОС = 0,104 / 0,9 = 0,115.

Таблица 9. Сроки поставки

Сроки поставки	Посредник 1	Посредник 2	Изготовитель	Посредник 3	$\sqrt[4]{\ }$	Вектор приоритетов
Посредник 1	1	5	7	1	2,432	0,424
Посредник 2	1/5	1	3	1/5	0,589	0,103
Изготовитель	1/7	1/3	1	1/7	0,287	0,050
Посредник 3	1	5	7	1	2,432	0,424
Итого	2,34	11,33	18,00	2,34	5,740	

Оценка согласованности мнений экспертов:

$$\lambda \max = (2{,}34 \times 0{,}424) + (11{,}33 \times 0{,}103) + (18{,}00 \times 0{,}050) + (2{,}34 \times 0{,}424) = 4{,}051;$$

ИС = |4,051 - 4)| / (4 - 1) = 0,017;

ОС = 0,017 / 0,9 = 0,019.

Таблица 10. Транспортные расходы

Транспортные расходы	Посредник 1	Посредник 2	Изготовитель	Посредник 3	$\sqrt[4]{\ }$	Вектор приоритетов
Посредник 1	1	1/5	3	1/7	0,541	0,085
Посредник 2	5	1	7	1/3	1,848	0,290
Изготовитель	1/3	1/7	1	1/9	0,270	0,042
Посредник 3	7	3	9	1	3,708	0,582
Итого	13,33	4,34	20,00	1,59	6,367	

Оценка согласованности мнений экспертов:

$$\lambda \max = (13{,}33 \times 0{,}085) + (4{,}34 \times 0{,}290) + (20{,}00 \times 0{,}042) + (1{,}59 \times 0{,}582) = 4{,}157;$$

ИС = |4,157 - 4)| / (4 - 1) = 0,052;

ОС = 0,052 / 0,9 = 0,058.

Чтобы принять окончательное решение по выбору поставщика, необходимо значения векторов приоритета из всех таблиц по каждому фактору перенести в итоговую таблицу и рассчитать глобальный приоритет.

Глобальный приоритет определяется путем суммирования произведений значимости критерия (таблица 4) на вектор приоритета критерия по каждому поставщику (таблицы 5 – 10).

Таблица 11. Расчет глобального приоритета

	Векторы приоритетов						Глобальный приоритет (ГП)
	Цена товара (0,444)	Партионность (0,027)	Место расположения поставщика (0,100)	Сбой поставок (0,049)	Сроки поставок (0,152)	Транспортные расходы, руб. (0,228)	
Посредник 1	0,355	0,143	0,085	0,109	0,424	0,085	0,259
Посредник 2	0,067	0,046	0,290	0,046	0,103	0,290	0,144
Изготовитель	0,534	0,669	0,042	0,423	0,050	0,042	0,297
Посредник 3	0,044	0,143	0,582	0,423	0,424	0,582	0,299

$$ГП(1) = (0{,}444 \times 0{,}355) + (0{,}027 \times 0{,}143) + (0{,}100 \times 0{,}085) + (0{,}049 \times 0{,}109) + (0{,}152 \times 0{,}424) +$$
$$+ (0{,}228 \times 0{,}085) = 0{,}259;$$
$$ГП(2) = (0{,}444 \times 0{,}067) + (0{,}027 \times 0{,}046) + (0{,}100 \times 0{,}290) + (0{,}049 \times 0{,}046) + (0{,}152 \times 0{,}103) +$$
$$+ (0{,}228 \times 0{,}290) = 0{,}144;$$
$$ГП(изг) = (0{,}444 \times 0{,}534) + (0{,}027 \times 0{,}669) + (0{,}100 \times 0{,}042) + (0{,}049 \times 0{,}423) + (0{,}152 \times 0{,}050) +$$
$$+ (0{,}228 \times 0{,}042) = 0{,}297;$$
$$ГП(3) = (0{,}444 \times 0{,}044) + (0{,}027 \times 0{,}143) + (0{,}100 \times 0{,}582) + (0{,}049 \times 0{,}423) + (0{,}152 \times 0{,}424) +$$
$$+ (0{,}228 \times 0{,}582) = 0{,}299;$$

Сравнивая полученные значения, определяют рейтинг всех поставщиков. Высокий рейтинг будет соответствовать наибольшему значению глобального вектора приоритета. В приведенном примере согласно исходным данным наибольший приоритет оказался у посредника 3.

Достоинством этого метода (в отличие от других экспертных) является возможность оценивать сразу и качественные, и количественные характеристики посредством перехода к безразмерным показателям.

С помощью этого метода можно осуществлять поиск оптимального решения в любой ситуации, так как он позволяет сравнивать все факторы одновременно, определяя значимость путем сравнения каждого с каждым.

Другие же методы одновременно позволяют сравнивать только по два фактора.

Индивидуальное задание

Выберите тему исследования по своему индивидуальному варианту.

Соберите описательный материал по данной теме и приведите словесное описание исследуемых вариантов вашего объекта исследования.

Произвести описание, оценку и выбор наилучшего объекта (услуги) из шести вариантов по шести критериям, согласно вашему варианту, используя метод анализа иерархий. Варианты представлены в таблице.

Вариант	Тема исследования
Вариант 1	Выбор бытовой техники: стиральная машина.
Вариант 2	Выбор средств оргтехники: копировальный аппарат
Вариант 3	Выбор косметических средств
Вариант 4	Выбор мебели
Вариант 5	Выбор бытовой техники: видеокамера

Вариант 6	Выбор парфюмерии
Вариант 7	Выбор бытовой техники: цифровой фотоаппарат
Вариант 8	Выбор ювелирного изделия.
Вариант 9	Выбор средств оргтехники: телефон
Вариант 10	Выбор домашнего животного
Вариант 11	Выбор квартиры
Вариант 12	Выбор бытовой техники: микроволновая печь.
Вариант 13	Выбор автомобиля.
Вариант 14	Выбор изделия легкой промышленности
Вариант 15	Выбор средств оргтехники: сканер
Вариант 16	Выбор гостиницы
Вариант 17	Ввбор турфирмы
Вариант 18	Выбор туроператора
Вариант 19	Выбор средств связи
Вариант 20	Выбор прессы (газета, журнал)

Контрольные вопросы:

1. Перечислите основные этапы метода анализа иерархий.
2. Опишите процесс попарного сравнения объекта по какому-либо признаку.
3. Опишите шкалу выбора приоритетов.
4. Перечислите основные свойства матрицы попарных сравнений.
5. На основании чего происходит выбор оптимального варианта в методе анализа иерархий?
6. Можно ли отнести метод анализа иерархий к методам экспертных оценок?

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ СТУДЕНТОВ

Самостоятельная работа включает два вида – аудиторную и внеаудиторную. В первом случае она выполняется на учебных занятиях под руководством преподавателя и по его заданию. Студенты обеспечиваются необходимым учебным материалом и дидактическими материалами.

Внеаудиторная самостоятельная работа выполняется по заданию преподавателя, но без его непосредственного участия. Видами заданий для внеаудиторной работы являются: изучение текста учебной литературы, конспектирование текста, работа с конспектом лекции, ответы на контрольные вопросы при выполнении индивидуального задания, тестирование, решение задач, продумывание алгоритма будущей программы, работа с компьютером, а именно, кодирование и отладка программы, подготовка отчета по лабораторным заданиям, подготовка к сдаче экзамена.

Лекция является ведущей формой организации учебного процесса в вузе. Основными организационными вопросами при этом являются:

- подготовка к слушанию и восприятию лекции;
- как записывать лекцию.

Роль лекции в вузе так же велика, как и роль урока в общеобразовательной школе. Ее особое значение состоит в том, что она знакомит студента с наукой, расширяет, углубляет и совершенствует ранее полученные знания, формирует научное мировоззрение, учит методике и технике лекционной работы. Преподаватель в процессе изложения курса умело связывает теоретические положения своей науки с практикой. Вместе с тем на лекции мобилизуется внимание, вырабатываются навыки слушания, восприятия, осмысления и записывания информации. Лекция несет в себе четкость, стройность мысли, живость языка, эмоциональное богатство и культуру речи. Все это воспитывает логическое мышление студента, закладывает основы научного исследования.

Каждой лекции отводится определенное место в системе учебных занятий по курсу. В зависимости от дидактических целей лекции могут быть: вводными, обзорными, обобщающими, тематическими, установочными. Они различаются по строению, приемам изложения материала, характеру обобщений и выводов. Выбор типа лекции обусловлен спецификой учебного предмета и решением воспитательных и развивающих задач.

Как записывать лекцию. Записывание – активный творческий процесс. Оно не только обеспечивает возможность пользоваться знаниями в нужный момент (подготовка к семинару, докладу, экзамену), но и позволяет глубже вникнуть в сущность сообщаемой информации.

Запись лекции исключительно важна:

- во-первых, она позволяет надолго сохранить основные положения лекции;
- во-вторых, способствует поддержанию внимания;
- в-третьих, активизирует мысли студента, так как он вынужден выбирать главное, записывать, продолжая в то же время слушать и анализировать то, что говорит лектор;
- в-четвертых, запись лекции способствует лучшему запоминанию материала: чем больше активность слушателя, тем более длительным будет сохранение в памяти полученной информации;
- в-пятых, не пишущий, а только слушающий студент быстрее устает, быстрее начинает отвлекаться, чем студент, слушающий и записывающий.

Что и как записывать на лекции? Прежде всего, необходимо записать название темы, план лекции и рекомендованную литературу. После этого приступать к записи содержания лекции. Записи лекций должны быть краткими, фиксировать нужно только самоеглавное, необходимое для самостоятельной работы.

Лектор обычно выделяет голосом такие места (или замедляет темп, повторяет, рекомендует записать, диктует). Если преподаватель по каким-то причинам не делает этого, то внимательно слушающий студент сам выбирает основное и записывает. Записи одних тезисов бывает недостаточно, необходимо отмечать положения, факты, примеры, поясняющие материалы, а также схемы, рисунки, таблици и т.д.

Завершающим этапом самостоятельной работы над лекцией является обработка, закрепление и углубление знаний по теме. Не следует забывать, что наш мозг имеет свойство не только усваивать, но и терять информацию, что является своеобразным средством защиты от перегрузок. Поэтому нужно бороться за сохранение знаний и работать над лекциями. Необходимо обращаться к лекциям неоднократно. Первый просмотр записей желательно сделать в тот же день, вечером, по горячим следам, когда еще все свежо в памяти. Запись лекции нужно прочитать, заполнить пропуски, расшифровать и уточнить некоторые сокращения. Сделав это, студент знакомится с материалом темы по учебнику, вносит нужные уточнения и дополнения в конспект.

Практические занятия развивают творческую самостоятельность студентов, укрепляет их интерес к науке, научным исследованиям, помогают связывать научно-теоретические положения с жизнью, содействуя выработке практических навыков работы. Вместе с тем практики являются также средством контроля над результатами самостоятельной работы студентов, своеобразной формой коллективного подведения ее итогов.

Участие в групповых занятиях расширяет общий, профессиональный и культурный кругозор студентов. Каждое практическое занятие – это итог большой целенаправленной самостоятельной работы студентов по заданиям преподавателя.

Формы практических занятий могут быть разными: наблюдение, изучение и анализ профессионального опыта, составление разработок (планов, программ, мероприятий) технологических схем, решение познавательно-практических задач, типовые расчеты.

Формы практических занятий:

- ознакомление студента с печатными источниками и его работа над ними;
- наблюдение, изучение и анализ профессионального опыта;
- творческие работы (составление разработок, планов, программ, мероприятий, проектов);
- типовые расчеты - формирование умений и навыков вычислительной, графической культуры по техническим предметам.

Цели практических занятий:
- научить самостоятельной работе с книгой (учебниками, научными журналами и другими печатными источниками);
- привить умение сочетать теоретические знания с практикой;
- научить определять цель наблюдения, изучения;
- решение познавательно-практических задач, формирование активной жизненной позиции, расширение знаний в области профессии, педагогики, психологии, специальных знаний;
-готовить разработки внеучебных мероприятий, методические рекомендации.

Выбор формы практического занятия определяется его задачами, целями, а также особенностями изучаемого курса.

Итоговый контроль – проводятся на основании перечней вопросов, представленных в рабочей программе. Подготовка к нему заключается в изучении и тщательной проработке студентом конспектов по всем видов занятий в соответствии с перечнем вопросов, представленном в рабочей программе дисциплины. Подготовку к контролю требуется начинать с просмотра перечня всех вопросов с целью оценки требуемого объема учебного материала, логики и структуры построения курса. С учетом накопленных за семестр знаний студент должен запланировать распределение времени на подготовку. Желательно зарезервировать время для повторения материала. Работа над каждым из вопросов рекомендуется прочитать конспект лекции, дополнительно прочитать рекомендованный учебник, если материал трудно усваивается. Завершается работа восстановление в памяти прочитанного.

ЛИТЕРАТУРА

1. Теория игр : метод. указания к самостоят. работе/ АмГУ, ФМиИ; сост.: И. М. Акилова, С. Г. Самохвалова. - Благовещенск: Изд-во Амур. гос. ун-та, 2017. - 65 с.
Режим доступа: http://irbis.amursu.ru/DigitalLibrary/AmurSU_Edition/7682.pdf

2. Хемди А. Таха Введение в исследование операций. - М.: Изд. дом “Вильямс”, 2005.

3. Джон Э. Ханк, Артур Дж.Райтс, Дин У. Уичерн. Бизнес-прогнозирование. - М.: Изд. дом “Вильямс”, 2003.

4. Черноруцкий И. Г. Методы принятия решений.-С-Пб.: Наука, 2005.

5. Розен В.В. Математические модели принятия решений в экономике. Учебное пособие. – М.: Книжный дом «Университет», Высшая школа, 2002. – 288с., ил.

6. Тимашков П.С. Математические методы принятия решений: Учебное пособие /Московский государственный университет экономики, статистики и информатики – М..,2003. – 114с.

7. Зайцев, М. Г. Методы оптимизации управления и принятия решений: примеры, задачи, кейсы: [учеб. пособие] / М. Г. Зайцев, С. Е. Варюхин.–[2-еизд., испр.]. – М.: Дело, 2008. – 663 с.

СОДЕРЖАНИЕ