Министерство образования и науки Российской Федерации

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Т.А. Юрьева

Методические указания

для самостоятельной работы по теме

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Благовещенск

Издательство АмГУ

2019

ББК 22.161.6 я 73
Ю 85

Рекомендовано
учебно-методическим советом университета

Рецензент:
Еремина В.В., канд.физ.-мат. наук, доц. кафедры Информационных и управляющих систем АмГУ

Юрьева Т.А.

Методические указания для самостоятельной работы по теме «Дифференциальные уравнения» / Т.А. Юрьева – Благовещенск: Изд-во АмГУ, 2019. – 42 с.

Издание предназначено для организации самостоятельной работы студентов первого курса всех направлений подготовки по дисциплинам «Математика» и «Высшая математика».

ВВЕДЕНИЕ

Раздел «Дифференциальные уравнения» традиционно включается в рабочие программы дисциплин «Математика», «Высшая математика», «Математический анализ». Значение дифференциальных уравнений неоспоримо не только в теории, но и в практике. Этот факт объясняется широчайшим диапазоном сфер человеческой деятельности, в которых применяются дифференциальные уравнения: геометрия, экономика, прикладная механика, физике, электротехнике и др.

Предлагаемые методические указания являются дополнением учебно-методического пособия «Дифференциальные уравнения» авторов А.П. Филимоновой, Т.А. Юрьевой издательства АмГУ 2017 года. Издание может использоваться для организации как аудиторной, так и внеаудиторной самостоятельной работы обучающихся, для подготовки к текущим или промежуточным контрольным мероприятиям.

Вопросы для собеседования

1. Понятие дифференциального уравнения. Примеры.
2. Порядок дифференциального уравнения.
3. Дифференциальное уравнение первого порядка. Примеры.
4. Решение дифференциального уравнения.
5. Общее решение дифференциального уравнения первого порядка.
6. Частное решение дифференциального уравнения первого порядка.
7. Особое решение дифференциального уравнения.
8. Общий вид и алгоритм решения дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.
9. Общий вид и алгоритм решения линейного дифференциального уравнения первого порядка.
10. Общий вид и алгоритм решения дифференциального уравнения Бернулли.
11. Общий вид и алгоритм решения однородного дифференциального уравнения первого порядка.
12. Общее решение дифференциального уравнения n-го порядка.
13. Частное решение дифференциального уравнения n-го порядка.
14. Алгоритм решения дифференциального уравнения $y^{(n)}(x) = f(x)$.
15. Алгоритм решения дифференциального уравнения $F(x, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$.
16. Алгоритм решения дифференциального уравнения $F(y, y', y'') = 0$.
17. Общий вид линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами.
18. Характеристическое уравнение линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами.
19. Фундаментальная система решений линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами.

20. Общий вид линейного неоднородного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами.

21. Метод Лагранжа решения линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

22. Метод подбора частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

23. Системы линейных дифференциальных уравнений. Методы решения.

Решение типового варианта

1. Найдите частное решение уравнения $\cos x dx + \frac{dy}{\sqrt{y}} = 0$ при условии, что $y(1) = 4$.

Решение. Данное уравнение является уравнением с разделенными переменными, поэтому $\int \cos x dx + \int \frac{dy}{\sqrt{y}} = C$. Отсюда $\sin x + 2\sqrt{y} = C$ – общий интеграл (общее решение) уравнения.

В данном случае y можно выразить явно: $y = \frac{(C - \sin x)^2}{4}$.

Подставим в общее решение $\sin x + 2\sqrt{y} = C$ x=0 и y=4, в результате будем иметь C=4. Тогда частное решение при условии y(0)=4 имеет вид $y = \frac{(4 - \sin x)^2}{4}$.

2. Найдите общее решение уравнения $y' = \frac{xy}{x^2 - y^2}$.

Решение. Проверим, является ли функция $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 - y^2}$ однородной: $f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda x \lambda y}{(\lambda x)^2 - (\lambda y)^2} = \frac{\lambda^2 xy}{\lambda^2 (x^2 - y^2)} = \frac{xy}{x^2 - y^2} = \lambda^0 \frac{xy}{x^2 - y^2} = \lambda^0 f(x, y)$. Таким образом, функция $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 - y^2}$ является однородной функцией нулевой степени однородности. Следовательно $y' = \frac{xy}{x^2 - y^2}$ – однородное уравнение.

Делаем замену $u = \frac{y}{x}$, $y = ux$, $y' = u'x + u$, тогда $u + u'x = \frac{x \cdot ux}{x^2 - u^2 x^2}$, или $u + u'x = \frac{u}{1 - u^2}$, $u'x = \frac{u^3}{1 - u^2}$, $xdu = \frac{u^3 dx}{1 - u^2}$, $\frac{du}{u^3}(1 - u^2) = \frac{dx}{x}$, $\left(\frac{1}{u^3} - \frac{1}{u}\right) du = \frac{dx}{x}$ – уравнение с разделенными переменными. Интегрируя его, получим

$-\frac{1}{2u^2}-\ln|u|=\ln|x|+\ln|C|$, $-\frac{1}{2u^2}=\ln|Cux|$. Так как $u=\frac{y}{x}$, то $-\frac{1}{2\left(\frac{y}{x}\right)^2}=\ln\left|C\frac{y}{x}x\right|$, или

$-\frac{x^2}{2y^2}=\ln|Cy|$ – общий интеграл уравнения.

3. Найдите общее решение уравнения $y'+2xy=2x^2e^{-x^2}$.

Решение. Пусть y=uv, $y'=u'v+uv'$, тогда $u'v+uv'+2xuv=2x^2e^{-x^2}$, $u'v+(v'+2xv)u=2x^2e^{-x^2}$. Далее, $\begin{cases} v'+2xv=0, \\ u'v=2x^2e^{-x^2}. \end{cases}$ Решаем уравнение $v'+2xv=0$: $\frac{dv}{dx}=-2vx$, $\frac{dv}{v}=-2xdx$, $v=e^{-x^2}$ (C=0) – частное решение данного уравнения. Подставим полученную функцию $v=e^{-x^2}$ во второе уравнение: $u'e^{-x^2}=2x^2e^{-x^2}$, $u'=2x^2$, $u=\int 2x^2dx+C=\frac{2}{3}x^3+C$ – общее решение второго уравнения. Тогда $y=uv=\left(\frac{2}{3}x^3+C\right)e^{-x^2}$ – общее решение исходного уравнения.

4. Найдите общее решение уравнения $(x-2)y''+y'=0$.

Решение. Данное уравнение второго порядка не содержит y, поэтому делаем подстановку: $y'=p, y''=p'$, получаем: $(x-2)p'+p=0$ – уравнение с разделяющимися переменными. $(x-2)dp+pdx=0$, $\frac{dp}{p}+\frac{dx}{x-2}=0$, $\int\frac{dp}{p}+\int\frac{dx}{x-2}=C_1$, или $\ln|p|+\ln|x-2|=\ln C_2$, $|p(x-2)|=C_2$, $p(x-2)=\pm C_2$, $p(x-2)=C$, $C=\pm C_2$. Так как $p=y'=\frac{dy}{dx}$, то $\frac{dy}{dx}(x-2)=C$, $(x-2)dy=Cdx$, $dy=C\frac{dx}{x-2}$, $y=C\ln|x-2|+\overline{C}$ – общее решение уравнения.

5. Найдите частное решение уравнения $yy''=(y')^2-(y')^3$ при условии, что $y(1)=1;\ y'(1)=-1$.

Решение. В уравнение переменная x не входит, поэтому проведем замену: $y'=p, y''=p\frac{dp}{dy}$. Тогда будем иметь уравнение $yp\frac{dp}{dy}=p^2-p^3$, или $ydp=p(1-p)dy (p\neq 0)$, $\frac{dp}{p(1-p)}=\frac{dy}{y}$ – переменные разделились. Так как

$\int \frac{dp}{p(1-p)} = \int \frac{dp}{p} + \int \frac{dp}{1-p} = \ln|p| - \ln|1-p|$, то $\frac{p}{1-p} = C_1 y$, откуда $p = \frac{C_1 y}{1+C_1 y}$.

Возвращаясь к подстановке, имеем $\frac{dy}{dx} = \frac{C_1 y}{1+C_1 y}$, $\frac{1+C_1 y}{C_1 y} dy = dx$, $\left(1+\frac{1}{C_1 y}\right) dy = dx$,

$y + \frac{1}{C_1}\ln|y| = x + C_2$ – общее решение исходного уравнения.

Если p=0, то $y' = 0, y = C$ – решение уравнения.

Используем начальные условия $y(1) = 1, y'(1) = -1$: $-1 = \frac{C_1 \cdot 1}{1+C_1}$, $-1 - C_1 = C_1$,

$C_1 = -\frac{1}{2}$; $1 - 2\ln|1| = 1 + C_2$, $C_2 = 0$, откуда $y - 2\ln|y| = x$ – частное решение.

6. Найдите общее решение уравнения $y''' = \frac{1}{x^3} + 3^x + e^{-x}$.

Решение. $y'' = \int \left(\frac{1}{x^3} + 3^x + e^{-x}\right) dx = -\frac{1}{2}x^{-2} + \frac{3^x}{\ln 3} - e^{-x} + C_1$,

$y' = \int \left(-\frac{1}{2}x^{-2} + \frac{3^x}{\ln 3} - e^{-x} + C_1\right) dx = \frac{1}{2x} + \frac{3^x}{\ln^2 3} + e^{-x} + C_1 x + C_2$,

$y = \int \left(\frac{1}{2x} + \frac{3^x}{\ln^2 3} + e^{-x} + C_1 x + C_2\right) dx = \frac{1}{2}\ln|x| + \frac{3^x}{\ln^3 3} - e^{-x} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$ – общее решение.

7. Найдите общее решение уравнения $y^{(4)} - y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение: $k^4 - 1 = 0$, $(k^2 - 1)(k^2 + 1) = 0$, имеет корни $k_1 = 1, k_2 = -1, k_3 = i, k_4 = -i$. Этим корням соответствуют частные решения: $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$, $y_3 = e^{0x}\cos x = \cos x$, $y_4 = e^{0x}\sin x = \sin x$, общее решение: $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$.

8. Найдите частное решение уравнения $y'' + 2y' + 2y = -2e^{-x}\sin x$ при условии, что $y(0) = 1;\ y'(0) = 0.$

Решение. Решаем однородное уравнение $y'' + 2y' + y = 0$, $k^2 + 2k + 2 = 0$, $k_{1,2} = -1 \pm i$, α=-1, β=1, $\alpha + \beta i = -1 + i$ – корень характеристического уравнения.

Отсюда $Y = C_1 e^{-x}\cos x + C_2 e^{-x}\sin x$ – общее решение однородного уравнения, $\overline{y} = xe^{-x}(A\cos x + B\sin x)$ – вид частного решения неоднородного уравнения.

Дифференцируем $\overline{y}$.

$\overline{y}' = e^{-x}(A\cos x + B\sin x) - xe^{-x}(A\cos x + B\sin x) + xe^{-x}(-A\sin x + B\cos x)$,

$\overline{y''} = -e^{-x}(A\cos x + B\sin x) + e^{-x}(A\cos x + B\sin x) + e^{-x}(-A\sin x + B\cos x) - e^{-x}(A\cos x + B\sin x) +$
$+ xe^{-x}(A\cos x + B\sin x) - xe^{-x}(-A\sin x + B\cos x) + e^{-x}(-A\sin x + B\cos x) - xe^{-x}(-A\sin x + B\cos x) +$
$+ xe^{-x}(-A\cos x - B\sin x).$

Подставляем $\overline{y}, \overline{y}', \overline{y''}$ в уравнение, сократив на $e^{-x} \neq 0$:

$- A\cos x - B\sin x - A\sin x + B\cos x) - A\cos x - B\sin x + xA\cos x + Bx\sin x +$

$+ Ax\sin x - Bx\cos x - A\sin x + B\cos x + Ax\sin x - Bx\cos x - Bx\sin x + +2A\sin x + 2A\cos x +$

$+ 2B\sin x - 2Ax\cos x - 2Bx\sin x - 2Ax\sin x + 2Bxc0sx + 2Ax\cos x + 2Bx\sin x = 2\sin x,$

или $-2A\sin x + 2B\cos x = 2\sin x$, откуда A=-1, B=0, поэтому $\overline{y} = xe^{-x}(0 \cdot \sin x - \cos x) = -xe^{-x}\cos x$ – частное решение неоднородного уравнения. Тогда $y = C_1 e^{-x}\cos x + C_2 e^{-x}\sin x - xe^{-x}\cos x$ – общее решение неоднородного уравнения.

Его производная:

$y' = C_1(-e^{-x}\cos x - e^{-x}\sin x) + C_2(-e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x) - e^{-x}\cos x + xe^{-x}\cos x + xe^{-x}\sin x$
.

Подставим начальные условия в общее решение и его производную:

$1 = C_1;$

$0 = -C_1 + C_2 - 1.$

Отсюда $C_1 = 1; C_2 = 2$, и частное решение: $y = e^{-x}\cos x + 2e^{-x}\sin x - xe^{-x}\cos x$.

9. Найдите общее решение уравнения методом вариации $y'' - 4y' + 5y = \dfrac{e^{2x}}{\cos x}$. Решение. Соответствующее однородное уравнение есть $y'' - 4y' + 5y = 0$, корни – $k_1 = 2 + i, k_2 = 2 - i$ комплексно сопряженные. α=2, β=1, тогда $y_1 = e^{2x}\cos x$, $y_2 = e^{2x}\sin x$ – фундаментальная система решений, а $Y = C_1 e^{2x}\cos x + C_2 e^{2x}\sin x$ – общее решение однородного уравнения. Полагаем

$C_1 = C_1(x), C_2 = C_2(x)$. Система для нахождения $C'_1(x)$ и $C'_2(x)$:

$$\begin{cases} C'_1(x)y_1 + C'_2(x)y_2 = 0, \\ C'_1(x)y'_1 + C'_2(x)y'_2 = \dfrac{e^{2x}}{\cos x} \end{cases}$$ принимает вид:

$$\begin{cases} C'_1(x)\cos x + C'_2(x)\sin x = 0, \\ C'_1(x)(2\cos x - \sin x) + C'_2(x)(2\sin x + \cos x) = \dfrac{1}{\cos x} \end{cases}$$

Здесь $e^{2x} \neq 0$, $y'_1 = 2e^{2x}\cos x - e^{2x}\sin x$, $y'_2 = 2e^{2x}\sin x + e^{2x}\cos x$.

Определитель Δ системы равен:

$$\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ 2\cos x - \sin x & 2\sin x + \cos x \end{vmatrix} = 2\sin x\cos x + \cos^2 x - 2\cos x\sin x + \sin^2 x = 1, \qquad \Delta=1;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \dfrac{1}{\cos x} & 2\sin x + \cos x \end{vmatrix} = -\frac{\sin x}{\cos x} = -tgx, \qquad \Delta_1 = -tgx; \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ 2\cos x - \sin x & \dfrac{1}{\cos x} \end{vmatrix} = 1,$$

откуда $C'_1(x) = -tgx$, $C'_2(x) = 1$. Тогда $C_1(x) = -\int tgx dx = \ln|\cos x| + \overline{C_1}$, $C_2(x) = \int dx = x + \overline{C_2}$. Общее решение неоднородного уравнения: $y = (\ln|\cos x| + \overline{C_1})e^{2x}\cos x + (x + \overline{C_2})e^{2x}\sin x$.

10. Найдите общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 + x_2 + t \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -4x_1 - 3x_2 + 2t \end{cases}.$$

Решение.

Дифференцируем первое уравнение по t: $\dfrac{d^2x_1}{dt^2} = \dfrac{dx_1}{dt} + \dfrac{dx_2}{dt} + 1$.

Подставляем сюда из системы уравнений производные $\dfrac{dx_1}{dt}$ и $\dfrac{dx_2}{dt}$:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = x_1 + x_2 + t - 4x_1 - 3x_2 + 2t + 1 = -3x_1 - 2x_2 + 3t + 1.$$

Из первого уравнения системы $x_2 = \dfrac{dx_1}{dt} - x_1 - t$, тогда

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = -3x_1 - 2\left(\frac{dx_1}{dt} - x_1 - t\right) + 3t + 1 = -x_1 - 2\frac{dx_1}{dt} + 5t + 1.$$

Таким образом, $\frac{d^2x_1}{dt^2}+2\frac{dx_1}{dt}+x_1=5t+1$ – линейное уравнение. Найдем его решение.

Составим характеристическое уравнение для уравнения $\frac{d^2x_1}{dt^2}+2\frac{dx_1}{dt}+x_1=0$: $k^2+2k+1=0 \Rightarrow k_1=k_2=-1$, следовательно, $x_1=e^{-t}(C_1+C_2t)$.

Найдем $\tilde{x}_1$ в виде $\tilde{x}_1=At+B$. $\tilde{x}_1'=A$, $\tilde{x}_1''=0$.

Имеем: $0+2A+At+B=5t+1$, $(2A+B)+At=5t+1$.

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях t слева и справа в последнем уравнении, получим систему уравнений относительно A и B:

$$\begin{array}{c|l} t^1 & \begin{cases} A=5 \\ 2A+B=1 \end{cases} \\ t^0 & \end{array}$$

Решив ее, получим: A=5, B=–9. Таким образом, $\tilde{x}_1=5t-9$.

Тогда $x_1=e^{-t}(C_1+C_2t)+5t-9$.

Далее, x_2 находим из соотношения $x_2=\frac{dx_1}{dt}-x_1-t$.

$$\frac{dx_1}{dt}=-e^{-t}(C_1+C_2t)+C_2e^{-t}+5,$$

$$x_2=-e^{-t}(C_1+C_2t)+C_2e^{-t}+5-e^{-t}(C_1+C_2t)-5t+9-t,$$

$$x_2=(C_2-2C_1-2C_2t)e^{-t}-6t+14.$$

Общее решение системы будет иметь вид:

$$\begin{cases} x_1=e^{-t}(C_1+C_2t)+5t-9 \\ x_2=(C_2-2C_1-2C_2t)e^{-t}-6t+14 \end{cases}.$$

11. Решите задачу. Пусть тело имеет температуру q°C и окружено средой со средней температурой 0° по Цельсию. Известно, что скорость охлаждения тела пропорциональна его температуре. Найти закон убывания температуры тела, начиная с $t_0=0$.

Решение. По условию скорость охлаждения тела пропорциональна его температуре, то есть $\frac{dq}{dt}=-kq(k=const>0)$. Это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными.

Находим решение уравнения $\frac{dq}{dt} = -kq$, $dq = -kqdt$, $\frac{dq}{q} = -kdt$, $\int \frac{dq}{q} = -k\int dt + C_1$, $\ln|q| = -kt + C_1 (q > 0)$, $\ln q = -kt + C_1$, $\ln q = -kt + \ln C (C_1 = \ln C)$, отсюда $q = Ce^{-kt}$ – решение уравнения.

При t=0 C является начальной температурой q_0, поэтому $q = q_0 e^{-kt}$ – формула, определяющая температуру тела в любой момент времени, если она была известна в начальный момент времени (q_0). Коэффициент k зависит от свойств тела и окружающей его среды, обычно определяется опытным путем.

Указание. В решении задач, в условии которых говорится о сопротивлении движению, необходимо применять второй закон Ньютона: $mv'(t) = F$.

12. Решите задачу. Семейство кривых обладает свойством: угловой коэффициент касательной равен ординате точки касания. Составить дифференциальное уравнение семейства кривых. Найти кривую, проходящую через точку (2,1).

Решение. Исходя из геометрического смысла производной и условия данной задачи, $y' = y$ – искомое дифференциальное уравнение.

Так как $y = Ce^x$, то $y' = Ce^x$, то есть $Ce^x = Ce^x$ – тождество, поэтому $y = Ce^x$ – общее решение уравнения. Далее, из начального условия: y(2)=1 следует, что $1 = Ce^2$, $C = \frac{1}{e^2}$, тогда $y = \frac{1}{e^2}e^x$ или $y = e^{x-2}$ – искомая кривая, проходящая через (2,1).

Указание. В некоторых задачах используются термины:

нормаль – прямая, перпендикулярная касательной, проходящая через точку касания;

подкасательная – проекция отрезка касательной, заключенной между точкой пересечения касательной с осью абсцисс и точкой касания;

поднормаль – проекция отрезка нормали, заключенной между точкой касания и точкой пересечения нормали с осью абсцисс.

Задания расчетно-графической работы

Вариант №1

1. Определите тип уравнения. Найдите общее решение дифференциального уравнения. Если заданы начальные условия, найдите частное решение уравнения. Выполните проверку найденного решения.

$y'\sin x = y\ln y$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e$;

$y - xy' = x\sec\frac{y}{x}$;

$y'\cos x + y\sin x = 1$;

$xy' - y^2 = x^2 e^x$;

$(y')^2 + 1 = 2yy''$, $y(1) = 1$; $y'(1) = 1$;

$y''' = 6x + \sin 2x$;

$y''' + y' = 0$;

$y'' - 2y = xe^{-x}$ $y(0) = 0$; $y'(0) = 1$.

2. Найдите общее решение уравнения методом вариации $y'' + y' = \frac{1}{e^x + 1}$.

3. Найдите общее решение системы уравнений $\begin{cases} x' = x - 2y \\ y' = 3x + 6y \end{cases}$.

4. Решите задачи.

а) Скорость *V*, прямолинейно движущегося тела, пропорциональна квадрату времени. Найти функцию, устанавливающую связь между пройденным путем *S* и временем *t*, если известно, что $t = 0, S = S_0$.

б) Подкасательная любой точки кривой есть среднее арифметическое координат точки касания. Найти уравнение кривой, проходящей через точку (4; 3).

Вариант №2

1. Определите тип уравнения. Найдите общее решение дифференциального уравнения. Если заданы начальные условия, найдите частное решение уравнения. Выполните проверку найденного решения.

$y' = (2y+1)ctgx$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$;

$x^2 y' = y^2 + xy$;

$y' + 2xy = 3x^2 e^{-x^2}$;

$(x^2 - 1)y'' = 2xy'$;

$2yy'' = (y')^2$, $y(-1) = 4;$ $y'(-1) = 0$;

$y''' = e^{3x} - 2$;

$y^{IV} - y = 0$;

$y'' - 2y = xe^{-x}$, $y(0) = 0;$ $y'(0) = 1$.

2. Найдите общее решение уравнения методом вариации $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x^2+1}$.

3. Найдите общее решение системы уравнений $\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = x + 3y \end{cases}$.

4. Решите задачи.

а) Скорость охлаждения тела в воздухе пропорциональна разности температур тела и окружающего тело воздуха. Найти зависимость температуры тела T от времени t, если за 10 минут температура тела снизилась от 100^o до 60^o, а температура воздуха оставалась постоянной и равнялась 20^o.

б) Постройте кривую, угловой коэффициент касательной которой в любой точке равен удвоенному угловому коэффициенту прямой, проходящей через точку касания и начало координат. Кривая проходит через точку (1; 1).

Вариант №3

1. Определите тип уравнения. Найдите общее решение дифференциального уравнения. Если заданы начальные условия, найдите частное решение уравнения. Выполните проверку найденного решения.

$y' = 2\sqrt{y}\ln x$, $y(e) = 1$.

$y - xy' = x + yy'$.

$y' + y = e^x \sin x.$

$y'' - 2y' ctg\, x = \sin^3 x.$

$y'' y^3 + 1 = 0$, $y(1) = 1;\ y'(1) = 1.$

$y''' = \cos\frac{x}{2} + e^x$.

$y^{IV} - 8y' = 0$.

$y'' - 3y' + xy = e^x$, $y(0) = 0;\ y'(0) = 1.$

2. Найдите общее решение уравнения методом вариации $y'' - y' = \dfrac{e^x}{1+e^x}$.

3. Найдите общее решение системы уравнений $\begin{cases} x' = x + 4y \\ y' = x + y \end{cases}$.

4. Решите задачи.

а) Материальная точка массой m движется прямолинейно под действием силы F, пропорциональной времени от начала движения и обратно пропорциональной скорости движения V. Установить зависимость между скоростью V и временем t, если $t_0 = 0,\ V_0 = 0$.

б) Треугольник образован осью абсцисс, касательной к некоторой кривой и прямой, проходящей через точку касания и начало координат. Его площадь равна двум квадратным единицам. Составить уравнение такой кривой, если она проходит через точку (–2; 2).

Вариант №4

1. Определите тип уравнения. Найдите общее решение дифференциального уравнения. Если заданы начальные условия, найдите частное решение уравнения. Выполните проверку найденного решения.

$y'x = \frac{y}{\ln x}, \ y(e) = 1.$

$ydx = 2\left(\sqrt{xy} - x\right)dx = 0.$

$xy' - y = x^2 \cos x.$

$\left(1 - x^2\right)y'' - xy' = 0.$

$\left(y'\right)^2 + 1 = 2yy'', \ y(-2) = 1; \ y'(-2) = -1.$

$y''' = x + x^2.$

$y^{IV} + 27y' = 0.$

$4y'' - y = x^3 - 24x, \ y(0) = 0; \ y'(0) = 1.$

2. Найдите общее решение уравнения методом вариации $y'' - y = \frac{2e^x}{e^x - 1}$.

3. Найдите общее решение системы уравнений $\begin{cases} x' = 3x - y \\ y' = 4x - y \end{cases}$.

4. Решите задачу.

а) Ускорение прямолинейно движущегося объекта пропорционально пройденному расстоянию. Найти зависимость между скоростью и временем, если $t = 0, V = V_0$. Расстояние считать равным произведению скорости и времени движения объекта.

б) Найти уравнение кривой, у которой все нормали проходят через точку $A(2;-3)$.

Вариант №5

1. Определите тип уравнения. Найдите общее решение дифференциального уравнения. Если заданы начальные условия, найдите частное решение уравнения. Выполните проверку найденного решения.

$xy' = \frac{y}{\sqrt{x}}$, $y(1) = 1$.

$y^2(y - xy') = x^3 y'$.

$xy' - y = x^3 y^2$.

$y'' = \frac{y'}{x} + x$.

$y'y'' = 1$, $y(0) = \frac{1}{3}$; $y'(0) = 1$.

$y''' = \sqrt{x} + 3$.

$y^V + 25y''' = 0$.

$y'' - 3y' - 4y = 17\sin x$, $y(0) = 0$; $y'(0) = 1$.

2. Найдите общее решение уравнения методом вариации $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x$.

3. Найдите общее решение системы уравнений $\begin{cases} x' = 5x + 4y \\ y' = -2x + 11y \end{cases}$.

4. Решите задачи.

а) Ускорение некоторого поднимающегося под действием постоянной силе тяги объекта растет согласно закону: $j = \frac{A}{a - bt}$ (a-bt>0). Найти уравнение, выражающее зависимость скорости объекта от времени подъема, если начальная скорость равна нулю.

б) Найти кривую, проходящую через точку $A(a;\ a)$, если подкасательная в любой точке ее равна удвоенной абсциссе точки касания.

Вариант №6

1. Определите тип уравнения. Найдите общее решение дифференциального уравнения. Если заданы начальные условия, найдите частное решение уравнения. Выполните проверку найденного решения.

$(1+e^x)yy' = e^x, \; y(1) = 1.$

$\left(x - y\cos\frac{y}{x}\right)dx + x\cos\frac{y}{x}dy = 0.$

$\left(1+x^2\right)y' - 2xy = (1+x^2)^2.$

$y''x\ln x - y' = 0.$

$\left(2+y\right)y'' = (y')^2, \; y(0) = 1; \; y'(0) = 2.$

$y''' = x + 4.$

$y^{IV} + 64y = 0.$

$y'' + 4y = \sin x, \; y(0) = 0; \; y'(0) = 1.$

2. Найдите общее решение уравнения методом вариации $y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}$.

3. Найдите общее решение системы уравнений $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 2x + y \end{cases}$.

4. Решите задачи.

а) Сила тока в цепи сопротивлением R самоиндукцией L и электродвижущей силой E удовлетворяют уравнению $L\frac{di}{dt} + R = E$. Найти зависимость силы тока от времени считая R и L постоянными, $E = kt$, при $t = 0, \; i = 0$

б) Определить уравнение кривой, проходящей через точку $(3;\ 4)$, если угловой коэффициент ее касательной в любой точке кривой равен квадрату ординаты точки касания.

Вариант №7

1. Определите тип уравнения. Найдите общее решение дифференциального уравнения. Если заданы начальные условия, найдите частное решение уравнения. Выполните проверку найденного решения.

$y'tgx - y = 1, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$

$y'\left(y^2 - 3x^2\right) + 2xy = 0.$

$y' - y\,tg\,x = -y^2 \cos x.$

$x(y'' + 1) - y' = 0.$

$y(0) = 4;\ y'(0) = 2.$

$y''' = e^x + x^2.$

$y^{IV} + y'' = 0.$

$y'' + y' = x^2 - 2x, \ y(0) = 0;\ y'(0) = 1.$

2. Найдите общее решение уравнения методом вариации $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{\sqrt{x^2 + 4x}}.$

3. Найдите общее решение системы уравнений $\begin{cases} x' = x' + 6y \\ y' = -2x + 9y \end{cases}.$

4. Решите задачи.

а) Скорость тела, брошенного вертикально вверх с начальной скоростью v_0 (без учета сопротивления воздуха) вычисляется: $v=v_0-gt$, t – время, g – ускорение силы тяжести. Определить, на каком расстоянии от начального положения будет находиться тело через 10 секунд от момента бросания.

б) Найти уравнение кривой, проходящей через точку $(1;\ 2)$ и обладающей тем свойством, что отрезок, отсекаемый на оси ординат любой касательно, равен абсциссе точки касания.

Вариант №8

1. Определите тип уравнения. Найдите общее решение дифференциального уравнения. Если заданы начальные условия, найдите частное решение уравнения. Выполните проверку найденного решения.

$y' = y(x+1)$, $y(1) = 1$.

$xy' - y + \sqrt{x^{2+y^2}} = 0$.

$y' - y\cos x = e^{\sin x}\cos x$.

$(x-3)y'' + y' = 0$.

$(y+1)y'' = (y')^2$, $y(0) = 1$; $y'(0) = 1$.

$y''' = x + \cos x$.

$y^{IV} + 4y''' + 5y'' = 0$.

$y'' - 2y' + y = x^2$, $y(0) = 0$; $y'(0) = 1$.

2. Найдите общее решение уравнения методом вариации $y'' - 10y' + 25y = \dfrac{(x+2)e^{-4x}}{x^2 - 1}$.

3. Найдите общее решение системы уравнений $\begin{cases} x' = 5x + y \\ y' = -3x + 9y \end{cases}$.

4. Решите задачи.

а) Найти кривую, проходящую через точку $(0;\,1)$ для которой треугольник, образованный осью OY, касательной к кривой и радиус-вектором точки касания, равнобедренный (основанием его служит отрезок касательной от точки касания до оси OY).

б) Найти уравнение движения тела, если его скорость пропорциональна пройденному пути и тело проходит 100м за 10с, а 200м за 15с.

Вариант №9

1. Определите тип уравнения. Найдите общее решение дифференциального уравнения. Если заданы начальные условия, найдите частное решение уравнения. Выполните проверку найденного решения.

$\sin y \cos x dy = \cos y \sin x dx$, $y(0) = \dfrac{\pi}{4}$.

$y = x\left(y' - \sqrt[x]{e^y}\right)$.

$\left(1 - x^2\right)y' - xy = 1$.

$2xy'' = y'$.

$2(y')^2 = (y-1)y''$, $y(0) = 0$; $y'(0) = 1$.

$y''' = \sin 4x$.

$y^V + 9y''' = 0$.

$y'' + 2y = x^2 + 2$, $y(0) = 0$; $y'(0) = 1$.

2. Найдите общее решение уравнения методом вариации $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{xe^{-2x}}{x^2 + 4}$.

3. Найдите общее решение системы уравнений $\begin{cases} x' = x + 4y \\ y' = 2x + 3y \end{cases}$.

4. Решите задачи.

а) Точка движется по прямой с постоянным ускорением. Найти закон движения точки, если в начальный момент скорость была равной V_0.

б) Доказать, что кривая угловой коэффициент касательной которой в любой точке пропорционален абсциссе точки касания, есть парабола.

Вариант №10

1. Определите тип уравнения. Найдите общее решение дифференциального уравнения. Если заданы начальные условия, найдите частное решение уравнения. Выполните проверку найденного решения.

$y \ln y dx + x dy = 0$, $y(1) = e$.

$xy' = x \sin \dfrac{y}{x} + y$.

$y' + 2xy = 2xt^{-x}$.

$y'' tg\, x = y' + 1$.

$y'' y^3 = -1$, $y(0) = 1$; $y'(0) = 1$.

$y''' = \sqrt{x} + 2$.

$4y''' - 8y'' + 5y' = 0$.

$2y'' + 5y' = 5x^2 - 2x - 1$, $y(0) = 0$; $y'(0) = 1$.

2. Найдите общее решение уравнения методом вариации $y'' + y = tg\, x$.

3. Найдите общее решение системы уравнений $\begin{cases} x' = 5x + 4y \\ y' = 2x + 3y \end{cases}$.

4. Решите задачи.

а) Найти закон движения точки, если $V_0 = 0$, $S_0 = 0$ в момент времени $t_0 = 0$. Точка движется прямолинейно, а ее ускорение меняется по закону $a(t) = (4 + t)^2$.

б) Найти уравнение кривой, проходящей через точку $(1; -1)$, если первая координата точки пересечения касательной с осью OX равна утроенной первой координате точки касания.

Вариант №11

1. Определите тип уравнения. Найдите общее решение дифференциального уравнения. Если заданы начальные условия, найдите частное решение уравнения. Выполните проверку найденного решения.

$y'\sin x = y\ln y$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = e$.

$y^2 - txy + 4x^2 y' = 0$.

$xy' + 2y = x^2$.

$y'' + y' tgx = \sin 2x$.

$2yy'' - (y')^2 = 0$, $y(0) = 1$; $y'(0) = 1$.

$y''' = 2x - 1$.

$y''' - 6y'' + 13y' = 0$.

$y'' - 5y' + 6y = e^{-2x}$, $y(0) = 0$; $y'(0) = 1$.

2. Найдите общее решение уравнения методом вариации $y'' + 4y = \dfrac{1}{\cos^3 2x}$.

3. Найдите общее решение системы уравнений $\begin{cases} x' = 3x + 4y \\ y' = 2x + y \end{cases}$.

4. Решите задачи.

а) Найти закон движения и скорость движущегося тела, если скорость его возрастает пропорционально пройденному пути, если в начальный момент тело находилось в 8 м от начала отсчета пути и имело скорость 24м/с.

б) Найти кривые, у которых отрезок нормали от точки кривой до оси абсцисс есть постоянная величина a^2.

Вариант №12

1. Определите тип уравнения. Найдите общее решение дифференциального уравнения. Если заданы начальные условия, найдите частное решение уравнения. Выполните проверку найденного решения.

$ydx + ctgxdy = 0$, $y\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = -1$.

$y'x = y\ln\dfrac{y}{x}$.

$y' - y\,tg\,x = \dfrac{1}{\cos x}$.

$y'' + \dfrac{y'}{x} = 0$.

$\dfrac{y''}{y} - a^2 = 0$, $y(0) = 1$; $y'(0) = 0$.

$y''' = x^2$.

$y^{IV} + 4y'' = 0$.

$y'' - 3y' + 2y = e^{2x}(x^2 + x)$, $y(0) = 0$; $y'(0) = 1$.

2. Найдите общее решение уравнения методом вариации $y'' - 8y' + 16y = \dfrac{e^x}{\sqrt{x^2+1}}$.

3. Найдите общее решение системы уравнений $\begin{cases} x' = 5x + 4y \\ y' = 2x + 3y \end{cases}$.

4. Решите задачи.

а) Найти закон движения точки, если $S_0 = 0$ в момент времени $t_0 = 0$, а в конце первой секунды скорость равна 3,5 м/с. Точка движется прямолинейно, а ее ускорение изменяется по закону $a(t) - 4r^3 - t$

б) Найти кривые, для которых сумма катетов треугольника, образованного касательной, ординатой точки касания и осью абсцисс, есть величина постоянная, равная b.

Вариант №13

1. Определите тип уравнения. Найдите общее решение дифференциального уравнения. Если заданы начальные условия, найдите частное решение уравнения. Выполните проверку найденного решения.

$(1+y^2)dx = xydy$, $y(2)=1$.

$(2x-y)dx+(x+y)dy=0$.

$y' - y\,ctg\,x = \sin^2 x$.

$xy'' + y' = \ln x + 1$.

$a^2 y'' - y = 0$, $y(0)=0$; $y'(0)=1$.

$y''' = \sin 4x - 1$.

$y^{IV} + y'' = 0$.

$y'' + y' = x - 3$, $y(0)=0$; $y'(0)=0$.

2. Найдите общее решение уравнения методом вариации $y'' - 4y' + 5y = \dfrac{e^{2x}}{\cos x}$.

3. Найдите общее решение системы уравнений $\begin{cases} x' = x + 4y \\ y' = 2x + 3y \end{cases}$.

4. Решите задачи.

а) Тело движется по горизонтальному участку со скоростью 72 км/ч. В какое время и на каком расстоянии от начала торможения он будет остановлен тормозом, если сопротивление движению равно 0,2 его веса.

б) Найти уравнение кривой, проходящей через точку $(1;\ 2)$, если угловой коэффициент касательной в любой точке этой кривой равен $3x^2 - \dfrac{2}{x}$.

Вариант №14

1. Определите тип уравнения. Найдите общее решение дифференциального уравнения. Если заданы начальные условия, найдите частное решение уравнения. Выполните проверку найденного решения.

$(1+x)yy' = 2x$, $y(0)=1$.

$y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$.

$x^2y^2y' + xy^3 = 1$.

$(1+x^2)y'' + (y')^2 + 1 = 0$.

$y'' + a^2y(y')^2 = 0$, $y(0)=2$ $y'(0)=1$.

$y''' = 3x+2$.

$y^{IV} + 6y''' + 13y'' = 0$.

$y'' - y' - 2y = e^{-x}(x+2)$, $y(0)=0$; $y'(0)=0$.

2. Найдите общее решение уравнения методом вариации $y'' - y' = e^{2x}\sqrt{1-e^{2x}}$.

3. Найдите общее решение системы уравнений $\begin{cases} x' = x+3y \\ y' = 3x+y \end{cases}$.

4. Решите задачи.

а) Определить путь S, пройденный телом за время t, если его скорость пропорциональна проходимому пути и его тело проходит 100м за 10с и 200 за 15с.

б) Кривая проходит через точку $(1;\ 2)$ и обладает следующим свойством: произведение углового коэффициента касательной в любой ее точке и суммы координат точки касания равно утроенной ординате этой точки. Найти уравнение кривой.

Вариант №15

1. Определите тип уравнения. Найдите общее решение дифференциального уравнения. Если заданы начальные условия, найдите частное решение уравнения. Выполните проверку найденного решения.

$y\sqrt{1+x^2}=1+y^2$, $y(0)=\sqrt{3}$.

$xy'-y-xe^{\frac{y}{x}}=0$.

$x'y+2xy^2=ye^{x^2}$.

$y''(e^2+1)+y''=0$.

$y''=xyy'$, $y(0)=0$; $y'(0)=1$.

$y'''=3x^2+1$.

$y^{IV}-2y'''+2x''=0$.

$y''-2y'+y=2e^x$, $y(0)=1$; $y'(0)=1$.

2. Найдите общее решение уравнения методом вариации $y''+y=\dfrac{1}{\cos x}$.

3. Найдите общее решение системы уравнений $\begin{cases} x'=-5x-2y \\ y'=8x+12y \end{cases}$.

4. Решите задачи.

а) Скорость охлаждения тела в воздухе пропорциональна разности между температурой тела и температурой воздуха. В комнате, где температура 20 ^0C, тело остыло за 20 мин. от 100^0C до 60^0C. Через какое время оно остынет до 30^0C? Повышением температуры в комнате можно пренебречь.

б) Найти уравнение кривой, у которой сумма длин нормали и поднормали есть величина постоянная, равная a.

Вариант №16

1. Определите тип уравнения. Найдите общее решение дифференциального уравнения. Если заданы начальные условия, найдите частное решение уравнения. Выполните проверку найденного решения.

$(1+x^2)dy + edx = 0$, $y(1) = 1$.

$(x+y)dx - (x-y)dy = 0$.

$y'x + x + y = 0$.

$y'' - \dfrac{y'}{x} = x\cos^2 x$.

$y'' = e^{2y}$, $y(0) = 0$; $y'(0) = 1$.

$y''' = \sin x$.

$y^{IV} - 4y''' - 13y'' = 0$.

$y'' - y' = x + 2$, $y(0) = 0$; $y'(0) = 0$.

2. Найдите общее решение уравнения методом вариации $y'' + y = tg^{2x}$.

3. Найдите общее решение системы уравнений $\begin{cases} x' = 5x - 3y \\ y' = -x2 + 4y \end{cases}$.

4. Решите задачи.

а) Скорость обесценивания оборудования вследствие его износа пропорциональна в каждый момент времени его фактической стоимости. Начальная стоимость A_0. Какова будет стоимость оборудования по истечении t лет ?

б) Найти уравнение кривой, проходящей через точку $(3;\,1)$ и обладающую следующим свойством: отрезок касательной между точкой касания с осью OX делиться пополам в точке пересечения с осью OY.

Вариант №17

1. Определите тип уравнения. Найдите общее решение дифференциального уравнения. Если заданы начальные условия, найдите частное решение уравнения. Выполните проверку найденного решения.

$\sin x \sin y dy - \cos x \cos y dx = 0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$.

$xdy - ydx = \sqrt{x^2 - e^2} dx$.

$y' + \frac{y}{x} = \frac{e^{2x}}{x}$.

$y'' + y\, tg\, x = \cos^3 x$.

$3yy'' + (y')^2 = 0$, $y(0) = 1$; $y'(0) = 1$.

$y''' = 2\cos 2x$.

$y^{IV} + 2y''' + 10y'' = 0$.

$2y'' + y' - y = 32e^x$, $y(0) = 0$; $y'(0) = 0$.

2. Найдите общее решение уравнения методом вариации $y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x^2}$.

3. Найдите общее решение системы уравнений $\begin{cases} x' = 3y + 16z \\ z' = -y + 20z \end{cases}$.

4. Решите задачи.

а) Количество света, поглощенного при прохождении через тонкий слой воды, пропорционально количеству падающего света и толщине слоя. Если при прохождении слоя воды толщиной 3м. поглощается половина первоначального света, то какая часть этого количества дойдет до глубины 30м.?

б) Найти уравнение кривой, проходящей через точку (0; 3) так, что угловой коэффициент любой ее касательной равнялся ординате точке касания, уменьшенной на две единицы.

Вариант №18

1. Определите тип уравнения. Найдите общее решение дифференциального уравнения. Если заданы начальные условия, найдите частное решение уравнения. Выполните проверку найденного решения.

$\frac{y'}{e^{2x-t}} = tgy$, $y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$.

$2x^2dy - \left(x^2 + y^2\right)dx = 0$.

$y' - \frac{y}{x-2} = x + 2$.

$2xy'y'' = (y')^2 - 1$.

$y''tgy = 2(y')^2$, $y(0) = 1$; $y'(0) = 0$.

$y''' = x - \sin 3x$.

$y''' + 2y'' + 5y' = 0$.

$y'' + y' - 2y = 3e^x$, $y(0) = 0$; $y'(0) = 3$.

2. Найдите общее решение уравнения методом вариации $y' + y + ctg^2 x = 0$.

3. Найдите общее решение системы уравнений $\begin{cases} x' = x - 4y \\ y' = -3x + 2y \end{cases}$.

4. Решите задачи.

а) Некоторая жидкость испаряется со скоростью, пропорциональной количеству еще не испарившейся жидкости. Если по истечении 1 часа жидкости было 31,4 мл, а по истечении 3 часов – 9,7 мл, то через какое время после начала процесса останется 1% первоначального количества жидкости?

б) Найти уравнение кривой, проходящей через точку (1; –1), если произведение абсциссы любой точки кривой и углового коэффициента касательной к кривой в этой точке равно утроенной сумме координат данной точки.

Вариант №19

1. Определите тип уравнения. Найдите общее решение дифференциального уравнения. Если заданы начальные условия, найдите частное решение уравнения. Выполните проверку найденного решения.

$$y' = \frac{1-y^2}{2y},\ y(0)=0.$$

$$\left(y+\sqrt{xy}\right)dx = xdy.$$

$$y' + y = \frac{e^{-x}}{1+x}.$$

$$xy'' + y' - x - 1 = 0.$$

$$y'' - \sqrt{1+y^2} = 0,\ y(0)=1;\ y'(0)=0.$$

$$y''' = x + e^{2x}.$$

$$y''' + 4y'' + 5y' = 0.$$

$$y'' + y' = x + 1,\ y(0)=0;\ y'(0)=0.$$

2. Найдите общее решение уравнения методом вариации $y'' + 6y' + 9y = \dfrac{e^{-3x}}{x(x+3)}$.

3. Найдите общее решение системы уравнений $\begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = 2x + 8y \end{cases}$.

4. Решите задачи.

а) Проходя через лес и испытывая сопротивления деревьев, ветер теряет часть своей скорости. На бесконечно малом пути эта потеря пропорциональна скорости в начале пути и длине его. Найти скорость ветра, прошедшего в лесу 150м, зная, до вступления в лес $V_0 = 12$ м/с после прохождения в лесу пути 1м скорость $V_1 = 11{,}8$ м/с.

б) Найти уравнение кривой, проходящей через точку $(1; -1)$ и обладающей тем свойством, что отрезок, отсекаемый на оси OX касательной, проведенной в любой точке кривой, равен квадрату абсциссы точки касания.

Вариант №20

1. Определите тип уравнения. Найдите общее решение дифференциального уравнения. Если заданы начальные условия, найдите частное решение уравнения. Выполните проверку найденного решения.

$\left(\sqrt{xy}-\sqrt{x}\right)dx+\left(\sqrt{xy}+\sqrt{y}\right)dy=0$, $y(4)=4$.

$\left(x^2+y^2\right)dx-xydy=0$.

$y'+\dfrac{y}{x-3}=\dfrac{e^{2x}}{x-3}$.

$1+(y')^2+yy''=0$.

$y'y''=y^2$, $y(0)=1$; $y'(0)=1$.

$y'''=\sqrt[3]{x}$.

$y'''-6y''+10y'=0$.

$y''+4y'-5y=xe^x$, $y(0)=0$; $y'(0)=0$.

2. Найдите общее решение уравнения методом вариации $y''-y'=\dfrac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^x}}$.

3. Найдите общее решение системы уравнений $\begin{cases} x'=11x-7y \\ y'=6y \end{cases}$.

4. Решите задачи.

а) При прямолинейном движении тело удаляется от некоторой точки (начала координат). При этом скорость движения (м/с) в любой момент численно равна половине пройденного пути (м). Определить путь, скорость и ускорение как функции времени, если начальная скорость равна 3м/с

б) Найти кривую, проходящую через точку $(-1;-3)$, если нормаль ее в каждой точке равна 2.

Вариант №21

1. Определите тип уравнения. Найдите общее решение дифференциального уравнения. Если заданы начальные условия, найдите частное решение уравнения. Выполните проверку найденного решения.

$$3yy' = -\frac{x}{2},\ y(4) = 2.$$

$$(xy' - y)arctg\frac{y}{x} = x.$$

$$y' + y\,tg\,x = \cos x.$$

$$xy'' + 2y' = x^2.$$

$$y'' = \frac{(y')^2}{y+3},\ y(0) = 1;\ y'(0) = 1.$$

$$y''' = \cos\frac{x}{3}.$$

$$y^{IV} + y'' = 0.$$

$$y'' - 3y' = x + \cos x,\ y(0) = 0;\ y'(0) = 0.$$

2. Найдите общее решение уравнения методом вариации $y'' + 8y' + 16y = \dfrac{e^{-4x}}{x^2 - 9}$.

3. Найдите общее решение системы уравнений $\begin{cases} x' = 3x + 4y \\ y' = 4x - 3y \end{cases}$.

4. Решите задачи.

а) Скорость распада радия пропорциональна его начальному количеству. Через сколько лет распадется 1/10 часть всего количества радия, если период его полураспада 1590 лет ?

б) Найти уравнение кривой, все касательные к которой проходят через начала координат.

Вариант №22

1. Определите тип уравнения. Найдите общее решение дифференциального уравнения. Если заданы начальные условия, найдите частное решение уравнения. Выполните проверку найденного решения.

$(1+x)dy-(y+2)^2dx=0$, $y(1)=2$.

$x^2y'+y^2-2xy=0$.

$y'x^2=2xy+3$.

$y''x^2=y'$.

$y''-4y=0$, $y(0)=1$; $y'(0)=0$.

$y'''=x-e^{4x}$.

$y'''+25y'=0$.

$y''+y=2\cos x$, $y(0)=1$; $y'(0)=2$.

2. Найдите общее решение уравнения методом вариации $y''-y'=\frac{1}{x}$.

3. Найдите общее решение системы уравнений $\begin{cases} y'=7y-3z \\ z'=-2y+6z \end{cases}$.

4. Решите задачи.

а) Катер движется в стоячей воде со скоростью 10 км/ч. На полном ходу его двигатель выключили. Определить скорость движения чрез две минуты после отключения двигателя. Сопротивления воды считать пропорциональным скорости. Коэффициент пропорциональности $k=30m$, где m – масса катера в килограммах.

б) Найти кривые, у которых точки пересечения любой касательной с осью абсцисс имеют абсциссу вдвое меньшую абсциссы точки касания.

Вариант №23

1. Определите тип уравнения. Найдите общее решение дифференциального уравнения. Если заданы начальные условия, найдите частное решение уравнения. Выполните проверку найденного решения.

$y' = x(y+1)$, $y(1) = 0$.

$xy' = y + y\ln\dfrac{y}{x} = 0$.

$y' + \dfrac{y}{x-1} - x^2 = 0$.

$y'' + \dfrac{y'}{x} = 0$.

$y''\cos y = 2(y')^2 \sin y$, $y(0) = 1$; $y'(0) = 1$.

$y''' = x^2 - 4\sin 2x$.

$y^{IV} + 2y''' + 17y'' = 0$.

$y'' + 2y' + y = \cos x$, $y(0) = 0$; $y'(0) = 0$.

2. Найдите общее решение уравнения методом вариации $y'' + 4y = tg2x$.

3. Найдите общее решение системы уравнений $\begin{cases} y' = 2y + 4z \\ z' = 36y - 5z \end{cases}$.

4. Решите задачи.

а) Скорость распада радиоактивного вещества пропорциональна его наличному количеству. В лаборатории получили 100г радиоактивного вещества. Через 1 час его стало 97г. Сколько вещества останется через сутки?

б) Найти кривую, проходящую через точку $(2;1)$, чтобы угловой коэффициент любой ее касательной равнялся произведению координат точки касания.

Вариант №24

1. Определите тип уравнения. Найдите общее решение дифференциального уравнения. Если заданы начальные условия, найдите частное решение уравнения. Выполните проверку найденного решения.

$(3+e^x)yy' = e^x$, $y(0)=0$.

$yy' = 2y - x = 0$.

$xy' + 3y = x^4y^2$.

$x(y''+1)+4y'=0$.

$y'' = \dfrac{1}{4\sqrt{y}}$, $y(0)=1$; $y'(0)=1$.

$y''' = (x+1)^2$.

$y^V + y''' = 0$.

$y'' - y = \sin x$, $y(0)=0$; $y'(0)=0$.

2. Найдите общее решение уравнения методом вариации $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} arctgx$.

3. Найдите общее решение системы уравнений $\begin{cases} x' = 5x - 2y \\ y' = -2x + 2y \end{cases}$.

4. Решите задачи.

а) Некоторый объект попадает в плотную среду со скоростью 152 м/с и покидает ее со скоростью 40 м/с. Сопротивление среды движению объекта пропорционально скорости движение умноженной на себя. Определить время прямолинейного движения объекта в среде, если ее слой имеет толщину в 10 см.

б) Кривая проходит через точку (2; 4) и обладает тем свойством, что отрезок, отсекаемый на оси абсцисс касательной, проведенной в любой точке кривой, равен кубу абсциссы точки касания. Найти уравнения кривой.

Вариант №25

1. Определите тип уравнения. Найдите общее решение дифференциального уравнения. Если заданы начальные условия, найдите частное решение уравнения. Выполните проверку найденного решения.

$y'\left(x^2+1\right)=y,\ y(0)=1.$

$yy'+2y+x=0.$

$\left(x^2-4yy'\right)-xy=x^3-x.$

$xy''-y'=0.$

$(y'')^2=y',\ y(0)=1;\ y'(0)=1.$

$y'''=e^x-x.$

$y^{IV}+36y''=0.$

$y''+y'+y=2\sin x,\ y(0)=0;\ y'(0)=0.$

2. Найдите общее решение уравнения методом вариации $y''+4y'+4y=\dfrac{e^{-2x}}{\sqrt{4-x^2}}$.

3. Найдите общее решение системы уравнений $\begin{cases} x'=3x+6y \\ y'=4x+5y \end{cases}$.

4. Решите задачи.

а) Тело массой *m* падает с некоторой высоты со скоростью *V*. При падении тело испытывает сопротивление, пропорциональное квадрату скорости. Найти зависимость скорости *V* от времени *t*.

б) Найти кривую, проходящую через точку $A(3;\,4)$, у которой угловой коэффициент касательной равен ординате точки касания.

Вариант №26

1. Определите тип уравнения. Найдите общее решение дифференциального уравнения. Если заданы начальные условия, найдите частное решение уравнения. Выполните проверку найденного решения.

$y'\sqrt{x} = x - 1,\ y(1) = 2$.

$y' = \dfrac{5y + x}{-3x}$.

$y' - \dfrac{y}{x} = 3x.$

$y'' + 2x(y')^2 = 0$.

$2(y + y')y'' = (y')^2,\ y(1) = 1;\ y'(1) = 1.$

$y''' = \sin\dfrac{x}{3} - 1$.

$y^{IV} + 6y''' + 10y'' = 0$.

$y'' - 4y = x - 1,\ y(0) = 0;\ y'(0) = 1.$

2. Найдите общее решение уравнения методом вариации $y'' + 4y = 2tgx$.

3. Найдите общее решение системы уравнений $\begin{cases} x' = x + 3y \\ y' = -x + 5y \end{cases}$.

4. Решите задачи.

а) Определите скорость тела массой 5 кг через 2 с после его падения с высоты, если при падении тело испытывает сопротивление, пропорциональное квадрату скорости.

б) Определить кривую, которая проходит через точку $M_0(4,3)$ и удовлетворяет условию: подкасательная AB любой ее точки есть среднее арифметическое координат точки касания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агафонов С.А. Дифференциальные уравнения/ С.А. Агафонов, А.Д. Герман, Т.В. Муратова. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 352 с.

2. Баврин И.И. Математический анализ для педагогических вузов: Учебник и практикум/ И. И. Баврин. – М:Юрайт, 2016. – 336 с.

3. Виленкин Н.Я. Дифференциальные уравнения/ Н.Я. Виленкин, М.А. Доброхотова, А.Н. Сафонов. – М.: Просвещение, 1984. – 176 с.

4. Демидович Б.П. Дифференциальные уравнения/ Б.П. Демидович, В.П. Моденов. – СПб.: Издательство: Лань, 2008 – 288 с.

5. Мартынов Н.Н. Высшая математика/ Н.Н. Мартынов, Г.Н. Яковлев , Г.Л. Луканкин, Г.А. Шадрин. – М.: Высшая школа, 2009. – 584 с.

6. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения/ Л.С. Понтрягин. – М.: Наука, 1974. – 331 с.

7. Сергеев И.Н. Дифференциальные уравнения/ И.Н. Сергеев. - М.: Издательский центр «Академия», 2013. – 288 с.

8. Элсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление/ Л.Э. Элсгольц. – М.: Наука, 1969. – 424 с.

СОДЕРЖАНИЕ