Министерство образования и науки Российской Федерации

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Н.А. Чалкина, Т.А. Юрьева

Методические указания для самостоятельной работы по теме
ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Благовещенск

Издательство АмГУ

2019

ББК 22.161.1 я 73

Ч 16

Рекомендовано

учебно-методическим советом университета

Рецензент:

Еремина В.В., канд. физ.-мат. наук, доц. кафедры Информационных и управляющих систем АмГУ

Чалкина Н.А. , Юрьева Т.А.

Методические указания для самостоятельной работы по теме «Определенный интеграл» / Н.А. Чалкина, Т.А. Юрьева – Благовещенск: Изд-во АмГУ, 2019. – 40 с.

Издание предназначено для организации самостоятельной работы студентов первого курса всех направлений подготовки по дисциплинам «Математика» и «Высшая математика».

ВВЕДЕНИЕ

Раздел «Определенный интеграл» традиционно включается в рабочие программы дисциплин «Математика», «Высшая математика», «Математический анализ». Значение определенного интеграла неоспоримо не только в теории, но и в практике. Этот факт объясняется широчайшим диапазоном сфер человеческой деятельности, в которых применяется определенный интеграл: геометрия, экономика, прикладная механика, физике и др.

Предлагаемые методические указания являются дополнением учебно-методического пособия «Определенный интеграл» авторов А.П. Филимоновой, Т.А. Юрьевой издательства АмГУ 2017 года. Издание может использоваться для организации как аудиторной, так и внеаудиторной самостоятельной работы обучающихся, для подготовки к текущим или промежуточным контрольным мероприятиям.

§ 1. Теоретические вопросы

1. Дайте определение криволинейной трапеции.

2. Сформулируйте задачу о площади криволинейной трапеции.

3. Сформулируйте задачу о работе переменной силы.

4. Что такое интегральная сумма, как она составляется?

5. Дайте определение определённого интеграла.

6. Сформулируйте условия существования определённого интеграла.

7. Геометрический смысл определённого интеграла.

8. Механический смысл определённого интеграла.

9. Сформулируйте свойства определённого интеграла.

10. Докажите свойства линейности определённого интеграла.

11. Докажите свойства аддитивности определённого интеграла.

12. Теорема об оценке определённого интеграла.

13. Теорема об среднем.

14. Дайте определение интеграла с переменным верхним пределом.

15. Докажите теорему о производной интеграла по его верхней границе.

16. Связь определённого и неопределённого интеграла.

17. Выведите формулу Ньютона-Лейбница.

18. Замена переменной в определённом интеграле.

19. Интегрирование по частям в определённом интеграле.

20. Определённый интеграл от чётных и нечётных функций.

21. Несобственный интеграл I рода.

22. Несобственный интеграл II рода.

23. Сходящиеся и расходящиеся несобственные интегралы.

24. Вычисление несобственных интегралов I и II рода.

25. Признаки сходимости несобственных интегралов.

26. При каких условиях интеграл $\int_1^\infty \frac{dx}{x^n}$ сходится?

27. Применение определенного интеграла для вычисления площади фигуры в декартовой системе координат.

28. Определение криволинейного сектора.

29. Применение определенного интеграла для вычисления площади фигуры в полярной системе координат.

30. Формулы перехода от декартовых координат к полярным, и обратно.

31. Применение определенного интеграла для вычисления длины дуги кривой.

32. Применение определенного интеграла для вычисления площади поверхности вращения.

33. Применение определенного интеграла для вычисления объёма тела вращения.

34. Общая схема приложения определённого интеграла к решению задач.

35. Решение пространственных задач механики с помощью определённого интеграла.

§ 2. Решение типовых задач

1. Вычислить определенные интегралы: $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x+1}}$, $\int_\pi^{2\pi} x^2 \cos\frac{x}{2} dx$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}$; $\int_0^1 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

Решение.

а) Найдем одну из первообразных и воспользуемся формулой Ньютона-Лейбница: $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x+1}} = \int_0^2 (x+1)^{-\frac{1}{2}} dx = \left.\frac{(x+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right|_0^2 = 2\sqrt{x+1}\Big|_0^2 = 2(\sqrt{2+1}-\sqrt{0+1}) = 2(\sqrt{3}-1)$.

б) Применим метод интегрирования по частям:

$$\int_\pi^{2\pi} x^2 \cos\frac{x}{2} dx = \left| \begin{matrix} u = x^2 & du = 2xdx \\ dv = \cos\frac{x}{2} dx & v = \int \cos\frac{x}{2} dx = 2\sin\frac{x}{2} \end{matrix} \right| = 2x^2 \sin\frac{x}{2}\Big|_\pi^{2\pi} - \int_\pi^{2\pi} 2\sin\frac{x}{2} \cdot 2xdx =$$

$$= 2x^2 \sin\frac{x}{2}\Big|_\pi^{2\pi} - 4\int_\pi^{2\pi} x \sin\frac{x}{2} dx = \left| \begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = \sin\frac{x}{2} dx & v = \int \sin\frac{x}{2} dx = -2\cos\frac{x}{2} \end{matrix} \right| =$$

$$= 2x^2 \sin\frac{x}{2}\Big|_\pi^{2\pi} - 4(-2x\cos\frac{x}{2}\Big|_\pi^{2\pi} - \int_\pi^{2\pi} -2\cos\frac{x}{2} \cdot 2xdx) = 2x^2 \sin\frac{x}{2}\Big|_\pi^{2\pi} + 8x\cos\frac{x}{2}\Big|_\pi^{2\pi} - 16\sin\frac{x}{2}\Big|_\pi^{2\pi} =$$

$$= 2(4\pi^2 \sin\pi - \pi^2 \sin\frac{\pi}{2}) + 8(2\pi\cos\pi - \pi\cos\frac{\pi}{2}) - 16(\sin\pi - \sin\frac{\pi}{2}) = -2\pi^2 - 16\pi + 16 =$$

$$= -2(\pi^2 + 8\pi - 8).$$

в) Проведем универсальную тригонометрическую подстановку:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x} = \left\| \begin{matrix} t = tg\frac{x}{2} & dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ x = 2arctgt & \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ t_1 = tg0 = 0 & t_2 = tg\frac{\pi}{4} = 1 \end{matrix} \right| = \int_0^1 \frac{1}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = 2\int_0^1 \frac{dt}{2+2t^2+1-t^2} = 2\int_0^1 \frac{dt}{t^2+3} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} arctg\frac{t}{\sqrt{3}}\Big|_0^1 = \frac{2}{\sqrt{3}}(arctg\frac{1}{\sqrt{3}} - arctg0) = \frac{2}{\sqrt{3}}(\frac{\pi}{6} - 0) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

г) Воспользуемся методом подстановки и выделим целую часть получившейся рациональной дроби:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \left| \begin{matrix} x=t^2 & t_1=0 \\ dx=2tdt & t_2=1 \end{matrix} \right| = \int_0^1 \frac{2tdt}{1+t} = 2\int_0^1 \frac{(t+1)-1}{1+t}dt = 2(\int_0^1 tdt - \int_0^1 \frac{dt}{1+t}) =$$

$$2(t\Big|_0^1 - ln|t+1|\Big|_0^1 = 2(1-0-\ln 2+\ln 1) = 2(1-\ln 2).$$

2. Найти: а) производную от интеграла с переменными пределами $\int_{x^2}^{\sqrt{x}} \cos t^2 dt$; б) сравнить интегралы $\int_0^1 \sqrt{x}dx$ и $\int_0^1 x^2 dx$; в) среднее значение функции y=cos3x на $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$.

Решение:

а) $\int_{x^2}^{\sqrt{x}} \cos t^2 dt = \int_{x^2}^{c} \cos t^2 dt \int_{c}^{\sqrt{x}} \cos t^2 dt = -\int_{c}^{x^2} \cos t^2 dt + \int_{c}^{\sqrt{x}} \cos t^2 dt$, где c – произвольная точка.

Тогда $\dfrac{d\left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} \cos t^2 dt\right)}{dx} = -\cos\left(x^2\right)^2 \cdot 2x + \cos\left(\sqrt{x}\right)^2 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = -\cos x^4 \cdot 2x + \cos x \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

б) Так как $\sqrt{x} > x^2$ при $x \in (0,1)$, то $\int_0^1 \sqrt{x}dx > \int_0^1 x^2 dx$.

в) $y_{cp} = \dfrac{1}{\frac{\pi}{3} - 0} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos 3x dx = \dfrac{3}{\pi} \cdot \dfrac{1}{3} \sin 3x \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \dfrac{1}{\pi}(\sin \pi - \sin 0) = 0$.

3. Вычислить определенный интеграл $\int_2^{12} \sqrt{x^3+9}\, dx$ по формуле Симпсона с точностью 0,001.

Решение.

Формула Симпсона имеет вид:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3} \cdot \left(y_0 + 4\cdot\left(y_1+y_3+\ldots+y_{2n-1}\right) + 2\cdot\left(y_2+y_4+\ldots+y_{2n-2}\right) + y_{2n}\right),$$

где

$$h = \frac{b-a}{2n}, \quad x_k = a + k\cdot h, \;\; y_k = f\left(x_k\right) \;\; (k = 0, 1, \ldots, 2n)$$

Разобъем отрезок интегрирования на 10 частей, $f(x) = \sqrt{x^3+9}$.

$a = 2,\ b = 12,$

$2n = 10$

$h = \frac{12-2}{10} = 1$

$x_k = 2 + k \cdot 1 = 2 + k$

$y_k = \sqrt{x_k^{\ 3} + 9}$

$\int_2^{12} \sqrt{x^3+9}\,dx \approx \frac{1}{3} \cdot \left(y_0 + 4 \cdot \left(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9\right) + 2 \cdot \left(y_2 + y_4 + y_6 + y_8\right) + y_{10}\right)$

k	x_k	$y_k = \sqrt{x_k^{\ 3} + 9}$
0	2	4,123
1	3	6,000
2	4	8,544
3	5	11,576
4	6	15,000
5	7	18,762
6	8	22,825
7	9	27,166
8	10	31,765
9	11	36,606
10	12	41,677

Окончательно интеграл равен 200,836.

4. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями. Сделать чертёж.

а) $y = x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = 3x$; б) $x = -2y^2$, $x = 1 - 3y^2$; в) $\rho = 1 - \cos\varphi$.

Решение.

а) $y = x^2$ и $y = \frac{1}{2}x^2$ – параболы с вершиной в начале координат, осью Оу и расположенные в верхней полуплоскости относительно оси Ох. Линия $y = 3x$ – прямая, проходящая через О(0, 0).

Найдем точки пересечения линий: $\begin{cases} y = x^2, \\ y = 3x \end{cases}$ и $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2, \\ y = 3x, \end{cases}$ откуда получаем точки О(0, 0), А(3, 9) и В(6, 18) (рис. 1):

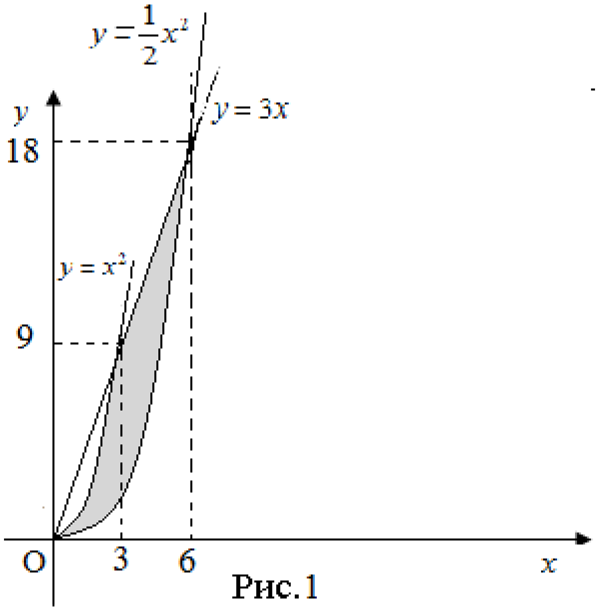

Рис.1

$$S=\int_0^3 (x^2-\frac{1}{2}x^2)dx+\int_3^6 (3x-\frac{1}{2}x^2)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^3+\frac{3x^2}{2}\Big|_3^6-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^3=\frac{1}{6}(3^3-0^3)+$$

$$+\frac{3}{2}(6^2-3^2)-\frac{1}{6}(6^3-3^3)=\frac{9}{2}+\frac{81}{2}-\frac{63}{2}=$$

$$=\frac{27}{2}=13{,}5(\text{ед.}^2).$$

б) Найдем точки пересечения данных парабол:

$\begin{cases} x=-2y^2, \\ x=1-3y^2, \end{cases}$ откуда A(-2,1), B(-2,-1) – искомые точки. Парабола $x=-2y^2$ имеет вершину O(0,0), а парабола $x=1-3y^2$ – вершину (1,0) (рис. 2):

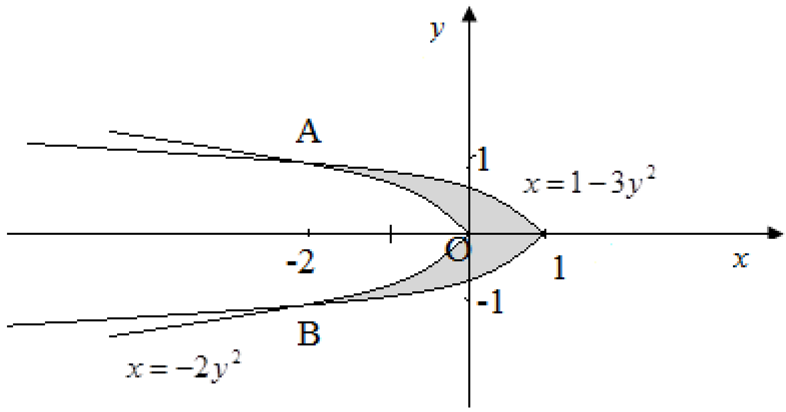

Рис. 2

$$S=\int_{-1}^{1}((1-3y^2)-(-2y^2))dy\,,$$

$$S=\int_{-1}^{1}(-y^2+1)dy=-\frac{y^3}{3}\Big|_{-1}^{1}+y\Big|_{-1}^{1}=-\frac{1}{3}(1^3-(-1)^3)+(1-(-1))=\frac{4}{3}(\text{ед.}^2)\,.$$

в) $\rho=1-\cos\varphi$ - кардиоида (рис. 3).

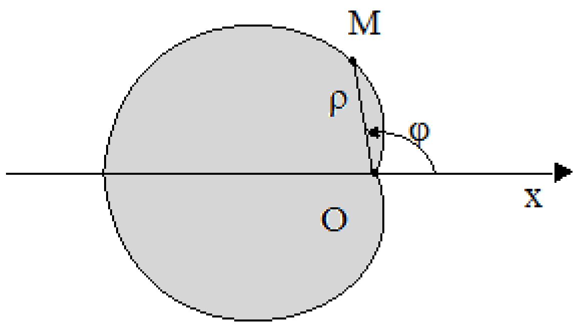

Рис. 3

$$S = 2 \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1-\cos\varphi)^2\,d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi} d\varphi - 2\int_0^{\pi}\cos\varphi d\varphi + \int_0^{\pi}\cos^2\varphi d\varphi = \varphi\Big|_0^{\pi} -$$

$$-2\sin 2\varphi\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{2}\varphi\Big|_0^{\pi} +$$

$$+\frac{1}{4}\sin 2\varphi\Big|_0^{\pi} = \frac{3}{2}\pi \text{ (ед.}^2\text{)}.$$

5. Вычислить а) вычислить длину кривой $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$; б) вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси абсцисс одной арки циклоиды $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$.

Решение.

а) Кривая $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$ называется астроидой (рис. 4).

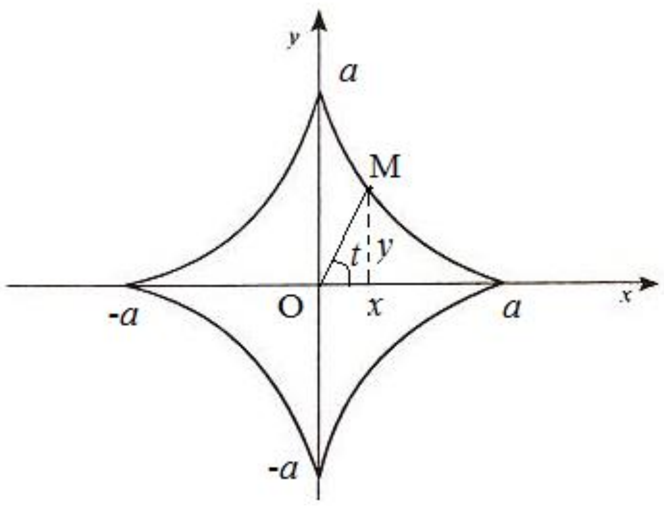

Рис. 4

$\varphi(t) = a\cos^3 t,\quad \psi(t) = a\sin^3 t,$

$\varphi'(t) = -3a\cos^2 t\sin t,$

$\psi'(t) = 3a\sin^2 t\cos t.$

$\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} =$

$= \sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a\sin^4 t\cos^2 t} =$

$= 3a\sqrt{\cos^2 t\sin^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t)} =$

$= 3a\cos t\sin t$ при $t \in [0, 2\pi]$;

$$\frac{1}{4}s(l) = 3a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t dt = \frac{3a}{2}\sin^2 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3a}{2}.$$

$$s(l) = 4\cdot\frac{3a}{2} = 6a \text{ (лин.ед.)} .$$

б) $\varphi(t) = t - \sin t$, $\psi(t) = 1 - \cos t$, $\varphi'(t) = 1 - \cos t$, $\psi'(t) = \sin t$,

$$\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) = (1-\cos t)^2 + \sin^2 t = 1 - 2\cos t + 1 = 2(1-\cos t) = 4\sin^2\frac{t}{2},$$

$$S_{вр}=2\pi\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}}dt=4\pi\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\sin\frac{t}{2}dt=8\pi\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}dt=$$

$$=-8\pi(2cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}-\frac{2}{3}cos^3\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi})=-8\pi((-2-2)-\frac{2}{3}(-1-1))=\frac{64\pi}{3}(\text{ед.}^2).$$

6. Найти объем тела, образованного вращением одной аркой циклоиды: $\begin{cases}x=t-\sin t,\\ y=1-\cos t\end{cases}$ вокруг оси абсцисс.

Решение: $\varphi(t)=t-\sin t$, $\psi(t)=1-\cos t$, $t\in[0,2\pi]$, $\varphi'(t)=1-\cos t$.

$$V=\pi\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3dt=\int_0^{2\pi}(1-3\cos t+3\cos^2 t-\cos^3 t)dt=$$

$$=\pi(\frac{5}{2}t\Big|_0^{2\pi}-4\sin t\Big|_0^{2\pi}+\frac{3}{4}\sin 2t\Big|_0^{2\pi}-\frac{1}{3}\sin^3 t\Big|_0^{2\pi})=5\pi^2\ (\text{ед.}^2).$$

7. Вычислить несобственные интегралы или доказать их расходимость: а) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{4+x^2}$; б) $\int_{-1}^{2}\frac{dx}{x}$.

Решение.

а) $f(x)=\frac{1}{4+x^2}$ непрерывна на любом отрезке [0,t] (0<t<+∞), следовательно, интегрируема на нем.

$$\int_0^t\frac{dx}{4+x^2}=\frac{1}{2}arctg\frac{x}{2}\Big|_0^t=\frac{1}{2}(arctg\frac{t}{2}-arctg0)=\frac{1}{2}arctg\frac{t}{2}.$$

$\lim\limits_{t\to\infty}\int_0^t\frac{dx}{4+x^2}=\lim\limits_{t\to\infty}(\frac{1}{2}arctg\frac{t}{2})=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$. $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{4+x^2}=\frac{\pi}{4}$, следовательно он сходится.

б) Функция $y=\frac{1}{x}$ имеет бесконечный разрыв в точке c=0.

$\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x}=\lim\limits_{\varepsilon\to0}\int_{-1}^{\varepsilon}\frac{dx}{x}=\lim\limits_{\varepsilon\to0}\ln|x|\Big|_{-1}^{\varepsilon}=\lim\limits_{\varepsilon\to0}(\ln\varepsilon-\ln|-1|)=\lim\limits_{\varepsilon\to0}\ln\varepsilon=-\infty$. $\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x}$ расходится.

Следовательно $\int_{-1}^{2}\frac{dx}{x}$ – расходится.

8. Пусть требуется найти величину Q, связанную с отрезком [a;b] и функцией f(x), заданной на нем. Если выполняется свойство аддитивности применительно к рассматриваемой величине Q, то необходимо выделить

бесконечно малый элемент отрезка [a;b] длины dx, примыкающий к точке x; найти значение dQ, соответствующее этому элементу dx (dQ$\approx f(x)dx$); просуммировать (проинтегрировать) найденные элементы dQ и найти Q.

Пример 1. Деревянный поплавок цилиндрической формы, площадь основания которого равна S, высота H, плавает на поверхности воды. Определить работу, которую нужно совершить, чтобы вытащить поплавок из воды, сохраняя вертикальное положение его оси, если плотность дерева равна γ (рис. 5)

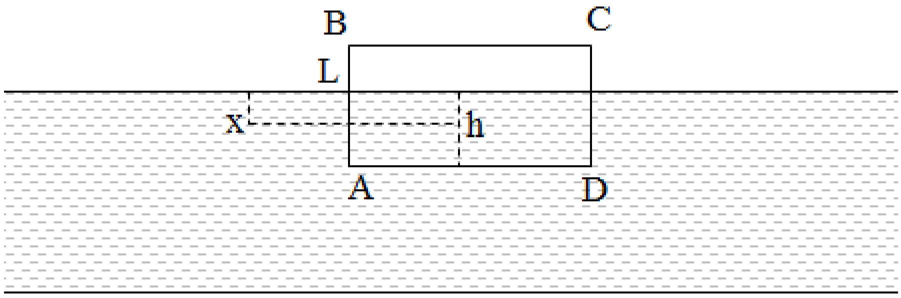

Рис. 5

Пусть AL высота подводной части поплавка ABCD, AL=h.

По закону Архимеда сила давления воды, действующая снизу вверх на плавающее тело, равна весу q, тогда $q = SH\gamma = Sh$.

Пусть к некоторому моменту времени подводная часть поплавка оказалась поднята на высоту x (считая от поверхности воды). В этот момент времени сила давления воды на тело будет $f(x) = S(h-x)$, а сила, которую нужно приложить к телу, чтобы удержать его от погружения в воду, окажется равной $F(x) = q - f(x) = Sh - S(h-x) = Sx$. Тогда $A = \int\limits_0^h Sxdx = S\frac{x^2}{2}\Big|_0^h = \frac{Sh^2}{2}$. Так как $H\gamma = h$, то $A = \frac{SH^2\gamma^2}{2}$ – искомая работа.

Пример 2. Определить работу, которую надо затратить, чтобы поднять с поверхности Земли (радиус Земли R) на высоту h тело массы m. Найти эту работу при условии удаления тела на бесконечность.

Сила, которая действует на тело массы m, равна $F = k\frac{mM}{r^2}$, r – расстояние от центра Земли.

Работа A, затрачиваемая на поднятие массы m с поверхности Земли (r=R) до высоты h (r+R=h), вычисляется: $A = \int_R^{R+h} k\frac{mM}{r^2}dr = kmM\left(-\frac{1}{r}\right)\Big|_R^{R+h} = kmM\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right)$.

Так как на поверхности Земли (r=R) F=mg, то kM=gR^2 и $A = mgR^2\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right) = mgR^2\frac{R+h-R}{R(R+h)} = mgh\frac{R}{R+h} = \frac{mgh}{1+\frac{h}{R}}$.

Тогда $\lim\limits_{h\to\infty} A = \lim\limits_{h\to\infty} mgh\frac{R}{R+h} = \frac{mgR}{1} = mgR$

§ 3. Индивидуальные задания

ВАРИАНТ 1.

1. Вычислить

а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x dx}{\cos^4 x}$; б) $\int\limits_0^2 \frac{(1-\sqrt{x})dx}{1+\sqrt[3]{x}}$;

в) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} x\cos 3x dx$; г) $\int\limits_{-1}^1 \frac{(2x-1)xdx}{x^2+4}$.

2. Продифференцировать равенство.

$$Y(x) = \int\limits_{\frac{1}{x}}^{x^2} \sin(t^2)dt.$$

3. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_{-3}^7 \sqrt{x^3+32}dx$ приближенно с помощью формулы Симпсона с точностью 0,001.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями. Сделать чертёж.

а) $y = x^2 - x$, $x - y - 2 = 0$;

б) $y = (x-4)^2$, $y = 16 - x^2$;

в) $\rho = 3\sin 2\varphi$.

5. Вычислить длину дуги кривой

а) $\begin{cases} x = 4(\cos t + t\sin t); \\ y = \sin t + t\cos t, \end{cases}$ $0 \le t \le 2$;

б) $y^2 = x^3$, отсеченной прямой $x = \frac{4}{3}$.

6. Фигура, ограниченная линиями $y = e^x$, $y = 4$, $x = 0$, вращается вокруг оси Oy. Вычислить объём тела, образованного тела.

7. Исследовать сходимость несобственных интегралов.

а) $\int\limits_{-\infty}^1 \frac{dx}{2-x}$; $\int\limits_1^5 \frac{dx}{x\ln x}$.

8. Скорость точки $V = (3t^2 - 4)$ м/сек. Найти путь, пройденный ею за первые три секунды.

ВАРИАНТ 2.

1. Вычислить

а) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^2 dx}{x^2+1}$;   б) $\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x} dx$;

в) $\int\limits_{4}^{9} \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x-1}}$; г) $\int\limits_{0}^{e-1} \ln(x+1) dx$.

2. Продифференцировать равенство.

$Y(x) = \int\limits_{\frac{1}{x}}^{x^2} \cos(t^2) dt$.

3. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_{-3}^{7} \sqrt{x^3+36} dx$ приближенно с помощью формулы Симпсона с точностью 0,001.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями. Сделать чертёж.

а) xy=3, x+y-4=0;

б) $y = 2x - x^2$, y=-x;

в) $\rho = \sin\varphi$, $\rho = 2\sin\varphi$.

5. Вычислить длину дуги кривой

а) y=1-lnsinx, $\frac{\pi}{5} \le x \le \frac{\pi}{3}$;

б) $y = \frac{1}{3} x\sqrt{x}$, $x \in [0{,}12]$.

6. Фигура, ограниченная линиями $y = 5 - x^2$, $y = 4x^2$, вращается вокруг оси Oy. Вычислить объём тела, образованного тела.

7. Исследовать сходимость несобственных интегралов.

а) $\int\limits_{0}^{\infty} x e^{-x^z} dx$;   б) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$.

8. Вычислить работу, которую необходимо затратить, чтобы выкачать воду из полусферического котла, имеющего радиус, равный на 5м.

ВАРИАНТ 3.

1. Вычислить определенный интеграл.

а) $\int_0^1 \frac{x^3dx}{1+x^8}$; б) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{cosx}{sin^3x}$ dx;

в) $\int_1^2 (\ln x)^2 dx$; г) $\int_1^6 \frac{dx}{1+\sqrt{3x-2}}$.

2. Найти производную от интеграла с переменными пределами y(x)=$\int_0^{\sqrt{x}} \sqrt{1+t^2}$ dt.

3. Вычислить определенный интеграл $\int_0^1 \sqrt{2x^3+3}dx$ приближенно с помощью формулы Симпсона с точностью 0,001.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями. Сделать чертёж.

а) y=4x-3x^2, 3x+y-2=0,

б) $y^2 = x^3$, x=0, y=4,

в) $\rho = \sqrt{3} - 2\cos\varphi$.

5. Вычислить длину дуги кривой.

а) x= 2cos^3t, y= 2sin^3t, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$;

б) y=ln(1-x^2), $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$.

6. Вычислить объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = -0{,}5x^2 + 3$ и y=0 вокруг оси Ox.

7. Исследовать сходимость несобственных интегралов.

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+5}$; б) $\int_{-2}^{+2} \frac{xdx}{x^2-4}$.

8. Вычислить силу давления воды на прямоугольный треугольник, высота которого равна 8 см, а основание 4 см, если он погружен в воду таким образом, что основание его лежит на поверхности воды, а высота направлена вертикально вниз.

ВАРИАНТ 4.

1. Вычислить определенный интеграл.

а) $\int_0^{ln2} \sqrt{e^x - 1}$dx; б) $\int_0^{\frac{1}{2}} arcsin\, x\, dx$;

в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^3 x sin\, 2x\, dx$; д) $\int_4^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}$ dx.

2. Сравнить интегралы не вычисляя их $\int\limits_0^1 x^4 \cos x dx$ и $\int\limits_0^1 x^2 \cos x dx$.

3. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_0^{\pi} \sqrt{3 - \sin x} dx$ приближенно с помощью формулы Симпсона с точностью 0,001.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями. Сделать чертёж.

а) $y = x^2 - 3x$, $y = 2x - 6$;

б) $y = x^3$, $y = 4x$.

в) $\rho = \sqrt{3} - 2\sin\varphi$.

5. Вычислить длину дуги кривой.

а) x=3(cost+tsint), y=3(sint+tcost), $0 \le t \le \frac{\pi}{3}$.

б) $y^2 = (x+1)^3$, $x \in [0;3]$.

6. Вычислить объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 1$ и y=3x-1 вокруг оси OX.

7. Исследовать сходимость несобственных интегралов.

а) $\int_1^{+\infty} \frac{x^2 dx}{1+x^6}$; б)$\int_0^3 \frac{dx}{x^2-4x+3}$.

8. Вычислить работу, которую необходимо затратить, чтобы выкачать воду из вертикальной цилиндрической цистерны, радиус которой равен R, а высота H.

ВАРИАНТ 5.

1. Вычислить определенный интеграл.

а) $\int_0^{\pi} \cos\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}dx$; б) $\int_0^1 \frac{x^2dx}{(x+1)^4}$;

в) $\int_3^8 \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}$ dx ; в) $\int_1^e lnxdx.$

2. Найти производную от интеграла с переменными пределами J(x)=$\int_0^{x^3} lntdt.$

3. Вычислить определенный интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ приближенно с помощью формулы Симпсона с точностью 0,001.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями. Сделать чертёж.

а) y=2-x^2, y=x.

б) y=tgx, y=$\frac{2}{3}$cosx y=0

в) $\rho = 2\sqrt{3}\cos\varphi$ и $\rho = 2\sin\varphi$.

5. Вычислить длину дуги кривой.

а) x=5(cost+tsint), y=5(sint-tcost);

б) $\rho\varphi = 1$ от точки (2;$\frac{1}{2}$) до точки ($\frac{1}{2}$;2).

6. Вычислить объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями y=e^x, y=0, x=2 вокруг оси OX.

7. Исследовать сходимость несобственных интегралов.

а) $\int_{-\infty}^0 xe^x$dx; б) $\int_{-1}^1 \frac{x+1}{\sqrt[5]{x^3}}$ dx.

8. Определить массу прямого круглого конуса, высота которого равна H, и угол между высотой и образующей a, если плотность в каждой точке конуса пропорциональна расстоянию ее от плоскости, проходящей через вершину параллельно основанию.

ВАРИАНТ 6.

1. Вычислить определенный интеграл.

а) $\int_3^2 \frac{x+3}{x^2+4}$ dx; б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+cosx}$;

в) $\int_1^{64} \frac{(\sqrt[6]{x}+1)}{\sqrt[6]{x^7}+\sqrt[6]{x^3}}$ dx; г) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} x \cdot cos3xdx.$

2. Найти производную от интеграла с переменными пределами J(x)=$\int_2^{\sqrt{x}} \cos(t^2)$ dt .

3. Вычислить определенный интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{3-\cos 2x}dx$ приближенно с помощью формулы Симпсона с точностью 0,001.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями. Сделать чертёж.

а) 4y=8x-x^2, 4y=x+6.

б) x=y^2(y-1), x=0.

в) $\left(x^2+y^2\right)=a\left(x^2-y^2\right)$.

5. Вычислить длину дуги кривой.

а) x=5(2cost-cos2t), y=5(2sint-sin2t), $0 \le x \le \pi$;

б) y=lnx от $x_1=\frac{3}{4}$ то x_2=2,4.

6. Вычислить объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями x=$\sqrt{y}$; y=0; x=2 вокруг оси OY .

7. Исследовать сходимость несобственных интегралов.

а) $\int_1^{+\infty} \frac{arctgx}{1+x^2}$ dx; б) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x \cdot ln2x}$.

8. Прямой круговой конус с вертикальной осью погружен в воду так, что его вершина находится на поверхности воды. Определить работу, необходимую для извлечения из конуса воды, если его высота 10 дм, диаметр основания 20 дм, и плотность 3 $^{г}/_{см^3}$.

ВАРИАНТ 7.

1. Вычислить определенный интеграл.

а) $\int_1^2 \frac{dt}{t^2+5t+4}$;   б) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^3+1}{x^2\sqrt{4-x^2}}$ dx;

в) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2 cos2xdx$;   г) $\int_1^e \frac{\sqrt{1+lnx}}{x}$ dx;

2. Найти производную от интеграла с переменными пределами J(x)=$\int_0^{2x} \frac{sint}{t}$ dt.

3. Вычислить определенный интеграл $\int_0^2 \sqrt{1+x^3}dx$ приближенно с помощью формулы Симпсона с точностью 0,001.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями. Сделать чертёж.

а) y=x^2-4, x-y=2.

б) y=x^2-5x+6, x=0, y=0,

в) $\rho^2 = a^2 \cos^2 \varphi$.

5. Вычислить длину дуги кривой.

а) x=4(t-sint), y=4(1-cost), $0 \le t \le \pi$;

б) $y^3 = (x-3)^2$ между точками A(2;1), B(3;0).

6. Вычислить объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями y=tgx, y=0, x=$\frac{\pi}{4}$ вокруг оси OX .

7. Исследовать сходимость несобственных интегралов.

а) $\int_1^{+\infty} \frac{e^{\frac{-1}{x^2}}}{x}$ dx ;   б) $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{lnx}}$.

8. Квадрат со стороной 8 м вертикально погружен в воду так, что одна из его сторон лежит на поверхности воды. Определить силу давления воды на весь квадрат и на каждую из частей, на которые он разделяется диагональю.

ВАРИАНТ 8.

1. Вычислить определенный интеграл.

а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sinx \cdot cos^2x\ 2x$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2 cos2x\ dx$;

в) $\int_1^5 \frac{xdx}{\sqrt{4x+5}}$; г) $\int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2}$ dx.

2. Сравнить интегралы, не вычисляя их.

$\int_1^4 lnx\ dx$ и $\int_1^4 log_{4e}$x dx.

3. Вычислить определенный интеграл $\int_2^7 \frac{dx}{\ln x}$ приближенно с помощью формулы Симпсона с точностью 0,001.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями. Сделать чертёж.

а) y=x^2+4x, 3x+y+6=0;

б) x=-2y^2, x=1-3y^2.

в) $\rho = 3 - \cos\varphi$.

5. Вычислить длину дуги кривой.

а) $x = e^t(\cos t + \sin t)$, y=$e^t(cost - sint)$; $0 \le t \le 2\pi$;

б) y=arcsine^{-x} x$\in[0;1]$.

6. Вычислить объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями y=4x^2; y=4x вокруг оси OX.

7. Исследовать сходимость несобственных интегралов.

а) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{xln3x}$; б) $\int_2^3 \frac{xdx}{\sqrt[4]{x^2-4}}$.

8. Вычислить силу давления воды на погруженную в нее вертикально пластину, имеющую форму треугольника с основанием 20 см и высотой 8 см, полагая, что вершина этого треугольника лежит на поверхности жидкости, а основание параллельно ей.

ВАРИАНТ 9.

1. Вычислить определенный интеграл.

а) $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$; б) $\int_1^e \frac{lnxdx}{x^2}$;

б) $\int_0^3 \frac{(x+4)dx}{\sqrt{9-x^2}}$; в) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} tg^3x\, dx$.

2. Поставить нужный знак между интегралами, не вычисляя их.

$\int_1^2 e^{x^2} dx$ и $\int_1^2 e^x\, dx$.

3. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_0^1 \sqrt{1+x}dx$ приближенно с помощью формулы Симпсона с точностью 0,001.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями. Сделать чертёж.

а) $y = x^2 - 2x - 1,\ x + y = 1$;

б) $y^2 = 4x,\ x^2 = 4y$;

в) $\rho = 1 + \sqrt{2}\cos\varphi$.

5. Вычислить длину дуги кривой.

а) y=$\frac{2}{3}$(x+2)$^{\frac{3}{2}}$, $-2 \le x \le 1$.

б) $\rho = a\sin^3 \frac{\varphi}{3}$.

6. Вычислить объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями xy=4, y=0, x=1, x=4 вокруг оси OX.

7. Исследовать сходимость несобственных интегралов.

а) $\int_0^{+\infty} x^2\, e^{\frac{-x}{2}}$ dx, б) $\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$.

8. Деревянный поплавок цилиндрической формы, площадь основания которого S, а высота H, плавает на поверхности воды. Какую работу нужно затратить, чтобы вытащить поплавок на поверхность?

ВАРИАНТ 10.

1. Вычислить определенный интеграл.

а) $\int_1^2 \frac{\ln(3x+4)}{3x+4}$ dx; б) $\int_0^1 xe^x$dx;

в) $\int_0^{\pi} sin9x \cdot cox3x\, dx$; г) $\int_0^3 \frac{\sqrt{x}\ dx}{1+x}$.

2. Найти производную от интеграла с переменными пределами J(x)=$\int_0^{\frac{1}{x}} \cos(t^2)$ dt .

3. Вычислить определенный интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x^2 dx$ приближенно с помощью формулы Симпсона с точностью 0,001.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями. Сделать чертёж.

а) y= x^2+5x, y=2x+4.

б) y=x^2, y=$\frac{1}{4}x^2$, y=4.

в) $\rho = 2\sin 2\varphi$.

5. Вычислить длину дуги кривой.

а) y=$\frac{x^2}{4}$-$\frac{1}{2}$ lnx, $1 \le x \le 2$.

б) x=$e^t sint$, y=$e^t cost$, $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

6. Вычислить объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями y^2+x-4, x=0 вокруг оси OY.

7. Исследовать сходимость несобственных интегралов.

а) $\int_0^{+\infty} \sqrt{x}\ e^{-x}$ dx; б) $\int_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$.

8. Вычислить работу, которую необходимо затратить, чтобы выкачать воду из резервуара, имеющего форму конуса, обращенного вершиной вверх. Высота конуса 10 м, радиус 2 м.

ВАРИАНТ 11.

1. Вычислить определенный интеграл.

а) $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}$ dx; б) $\int_2^3 x^2\, lnx\, dx$;

в) $\int_0^1 \frac{xdx}{1+x^4}$; г) $\int_1^3 \frac{dx}{x+x^2}$.

2. Найти производную от интеграла с переменными пределами J(x)=$\int_2^{x^3} \frac{dt}{lnt}$.

3. Вычислить определенный интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{x} dx$ приближенно с помощью формулы Симпсона с точностью 0,001.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями. Сделать чертёж.

а) y=3x^2-5x-1, y=2x+1.

б) x=2-y-y^2 и осью OY.

в) $\rho = 2 - \sin 2\varphi$.

5. Вычислить длину дуги кривой.

а) y=lncosx+2, $0 \le x \le \frac{\pi}{3}$.

б) x=2cos^3t, y=2sin^3t, $t \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

6. Вычислить объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями y=x^3, x=4, y=0 вокруг оси OX.

7. Исследовать сходимость несобственных интегралов.

а) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$; б) $\int_{-3}^2 \frac{dx}{(x+3)^2}$.

8. Конец трубы, погруженной горизонтально в воду, может быть закрыт заслонкой. Определить силу давления, испытываемое этой заслонкой, если ее диметр равен 60 см, а центр находится на глубине 15 м под водой.

ВАРИАНТ 12.

1. Вычислить определенный интеграл.

а) $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}$ dx;   б) $\int_{ln2}^{ln3} \frac{dx}{e^x - e^{-x}}$;

в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+2cosx}$;   г) $\int_0^1 \frac{arcsinx}{\sqrt{1+x^2}}$ dx.

2. Найти производную от интеграла с переменными пределами J(x)=$\int_2^{x^2} \ln(t^2)$ dt .

3. Вычислить определенный интеграл $\int_0^{10} \sqrt{x^3+2}dx$ приближенно с помощью формулы Симпсона с точностью 0,001.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями. Сделать чертёж.

а) y=x^2-6x+8, y=0;

б) y=x^2-6x, x+y=4;

в) $\rho=1+\sin 2\varphi$.

5. Вычислить длину дуги.

а) y=$\sqrt{1-x^2}$ + arccosx,   б) $\rho=3-3\cos\varphi$.

$0 \le x \le \frac{8}{9}$.

6. Вычислить объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями x^2+y^2=1, y=$\frac{3}{2}$x, y=0 вокруг оси ОХ.

7. Исследовать сходимость несобственных интегралов.

а) $\int_1^{+\infty} \frac{arctgx}{x^2}$ dx;   б) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$.

8. Определить силу давления воды на вертикальный прямоугольный шлюз основанием 18 м и высотой 6 м.

ВАРИАНТ 13.

1. Вычислить определенный интеграл.

а) $\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(\frac{1}{x})}{x^2}$ dx; б) $\int_{-1}^{3} \frac{dx}{\sqrt{7-2x}}$;

в)$\int_0^1 x^2 e^x dx$; г) $\int_{ln3}^{ln8} \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$.

2. Найти производную от интеграла с переменными пределами J(x)=$\int_x^{x^2} cost^3 dt$.

3. Вычислить определенный интеграл $\int_{-2}^{37} \sqrt{x^3+11} dx$ приближенно с помощью формулы Симпсона с точностью 0,001.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями. Сделать чертёж.

а) y=$x^2 + 4x$, x-y+4=0;

б) y=1, y=2x-x^2;

в) $\rho = 2 - 2\cos\varphi$.

5. Вычислить длину дуги кривой.

а) x=3(t-sint), б) $\rho = 2\pi\cos\varphi$.

y=3(1-cost),

$0 \le t \le \pi$;

6. Вычислить объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями y=8-x^2, y=x^2 вокруг оси OX .

7. Исследовать сходимость несобственных интегралов.

а) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x}$; б) $\int_1^{\frac{\pi}{4}} \frac{xdx}{sinx^2}$.

8. Вертикальная плотина имеет форму равнобедренной трапеции, верхнее основание которой совпадает с уровнем воды и имеет длину a=50 м, нижнее основание b=20 м, а высота h=5 м. Вычислить силу давления на плотину.

ВАРИАНТ 14.

1. Вычислить определенный интеграл.

а) $\int_{e}^{e^2} \frac{dx}{xlnx}$; б) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{xdx}{cos^2x}$;

в) $\int_{0}^{1} \frac{9x-1}{\sqrt{3x+1}}$; г) $\int_{0}^{\pi} (cos^4x - sin^4x)$dx.

2. Найти производную от интеграла с переменными пределами J(x)=$\int_{x^2}^{x^3} lntdt$.

3. Вычислить определенный интеграл $\int_{-2}^{8} \sqrt{x^3+8}dx$ приближенно с помощью формулы Симпсона с точностью 0,001.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями. Сделать чертёж.

а) $y = x^2 + 7x$, $y = 4x + 4$;

б) $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $x = 2$;

в) $\rho = 1 - 2\cos\varphi$.

5. Вычислить длину дуги кривой.

а) x=3(2cost-cos2t), б) $\rho = a^{2\varphi}$;

y=3(2sint-sin2t),

$0 \le t \le \pi$;

6. Вычислить объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями y=x^2, y=0,5(x^2+1) вокруг оси OY.

7. Исследовать сходимость несобственных интегралов.

а) $\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$; б) $\int_{2}^{4} \frac{3x\,dx}{2\sqrt[4]{x^2-4}}$.

8. Цилиндрическая цистерна с горизонтальной осью наполовину наполнена маслом (плотность 0,9). Определить силу давления масла на каждую из плоских стенок цилиндра, если радиус цистерны равен 2 м.

ВАРИАНТ 15.

1. Вычислить определенный интеграл.

а) $\int_{-1}^{1}(e^{x}-e^{-2x})^{2}$ dx; б) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} tg^{2}xdx;$

в) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\,cosx\,dx;$ г) $\int_{-\pi}^{\pi} sin^{2}\frac{x}{2}$ dx.

2. Найти производную от интеграла с переменными пределами J(x)=$\int_{0}^{\frac{1}{x}}\sin(t^{2})$ dt.

3. Вычислить определенный интеграл $\int_{1}^{11}\sqrt{x^{3}+3}dx$ приближенно с помощью формулы Симпсона с точностью 0,001.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями. Сделать чертёж.

а) y=2x-x^{2}, x-y-2=0.

б) $y^{2}=x^{3}$, x=0, y=4;

в) $\rho=\cos\varphi$, $\rho=3\cos\varphi$.

5. Вычислить длину дуги кривой.

а) x=4sint+3cost, б) $\rho=1+\cos\varphi$.

y=3sint-4cost,

$0\le t\le\pi$;

6. Вычислить объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y=3x^{2}$, $y=4-x^{2}$ вокруг оси OX.

7. Исследовать сходимость несобственных интегралов.

а) $\int_{0}^{\infty} e^{-x}$ dx; б) $\int_{-1}^{1}\frac{x-1}{\sqrt[5]{x^{3}}}$ dx.

8. Скорость движения тела V=12t-3t^{2} м/сек. Найти путь, пройденный телом от начала движения до остановки.

ВАРИАНТ 16.

1. Вычислить определенный интеграл.

а) $\int_0^{\frac{\pi}{8}} sin^2x \cdot cos^2x\, dx$; б) $\int_{-1}^{1} x^2e^2\, dx$;

в)$\int_1^2 \frac{x+1}{\sqrt{x}}$ dx; в) $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3}$.

2. Найти производную от интеграла с переменными пределами J(x)=$\int_2^{\sqrt{x}} \sin(t^2)\, dt$.

3. Вычислить определенный интеграл $\int_2^{\backslash 12} \sqrt{x^3+4}dx$ приближенно с помощью формулы Симпсона с точностью 0,001.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями. Сделать чертёж.

а) y=e^x, y=e^{-x}, x=3.

б) y=4x-x^2, y=-x .

в) $\rho = 2\sin 3\varphi$.

5. Вычислить длину дуги кривой.

а) $2y^2 = x^3$, б) x=2(t-sint),

$0 \le x \le 4$; y=2(1-cost),

$0 \le t \le \frac{\pi}{4}$.

6. Вычислить объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями x=5-y^2, x=5-2y вокруг оси OX.

7. Исследовать сходимость несобственных интегралов.

а) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x}}$; б) $\int_0^5 \frac{5dx}{\sqrt{25-x^2}}$.

8. Сжатие пружины пропорционально приложенной силе. Вычислить работу силы при сжатии пружины на 10 см, если сила, равная 9,1 Н сжимает ее на 2 см.

ВАРИАНТ 17.

1. Вычислить определенный интеграл.

а) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{sinxdx}{cos^2x-1}$; б) $\int_0^3 \frac{x^2dx}{\sqrt{4-x}}$;

в) $\int_0^1 \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) dx$; г) $\int_{-3}^{-2} \frac{dx}{x^2-1}$

2. Найти производную от интеграла с переменными пределами J(x)=$\int_0^{2x} \frac{sint}{t}$ dt.

3. Вычислить определенный интеграл $\int_{-1}^{9} \sqrt[3]{x^3+2}dx$ приближенно с помощью формулы Симпсона с точностью 0,001.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями. Сделать чертёж.

а) y=$2x^2, 4x-y+6=0$.

б) $y^3=x, y=1, x=8$.

в) $\rho = 2+\sin 2\varphi$.

5. Вычислить длину дуги кривой.

а) x=$e^t(cost+sint)$, б) $\rho = 3+3\sin\varphi$.

y=$e^t(cost-sint)$,

$0 \le t \le \frac{\pi}{2}$;

6. Вычислить объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями x=$5y^2, x=5$ вокруг оси OX .

7. Исследовать сходимость несобственных интегралов.

а) $\int_\alpha^\infty x\ cox\ dx$; б) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$.

8. Вертикальная плотина имеет форму параболического сегмента, высота которого h=16 м, а основание совпадает с уровнем воды и имеет длину a=40 м. Вычислить силу давления воды на плотину.

ВАРИАНТ 18.

1. Вычислить определенный интеграл.

а) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} cos^2\left(\pi - \frac{x}{2}\right) dx$; б) $\int_0^1 x\, arctgx\, dx$;

в) $\int_0^1 \frac{dx}{2+\sqrt{x}}$; г) $\int_0^9 \frac{xdx}{\sqrt[3]{x-1}}$.

2. Найти производную от интеграла с переменными пределами J(x)=$\int_x^0 \sqrt{1+t^4}$ dt.

3. Вычислить определенный интеграл $\int_0^{10} \sqrt{x^3+5}dx$ приближенно с помощью формулы Симпсона с точностью 0,001.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями. Сделать чертёж.

а) y=3x-x^2, 5x-y-8=0,

б) y=x(x-1)(x-2) и осью Ox .

в) $\rho = \sin\varphi + \cos\varphi$.

5. Вычислить длину дуги кривой.

а) y= $\sqrt{1-x^2}$ +arcsinx б) $\rho = 2a(1-\cos\varphi)$.

$0 \le x \le \frac{7}{9}$;

6. Вычислить объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями y=5x-x^2, y=2x вокруг оси OY .

7. Исследовать сходимость несобственных интегралов.

а) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$; б) $\int_{0,5}^{1} \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$.

8. Скорость движения тела V=9t^2-8t м/сек . Найти его путь за 3 сек.

ВАРИАНТ 19.

1. Вычислить определенный интеграл.

а) $\int_1^{64} \frac{1+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$ dx;   б) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{1-cosx}$;

в) $\int_{-1}^{1} \frac{(1+e^x)^2}{1+e^{2x}}$ dx;   г) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\ sin2x\ dx$.

2. Найти производную от интеграла с переменными пределами J(x)=$\int_{\frac{1}{x}}^{0} \sin(t^2)\,dt$.

3. Вычислить определенный интеграл $\int_2^{12} \sqrt{x^3+9}dx$ приближенно с помощью формулы Симпсона с точностью 0,001.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями. Сделать чертёж.

а) $y=3x-x^2$, 2x-y=2;

б) $y=(x-2)^2$, y=x;

в) $\rho=2-2\sin\varphi$.

5. Вычислить длину дуги кривой.

а) y=ln sinx,   б) $\rho=\frac{1}{1+\cos\varphi}$, $\varphi\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

$\frac{\pi}{3}\le t\le\frac{\pi}{2}$;

6. Вычислить объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями x=6-y^2, x=6-2y   вокруг оси OX.

7. Исследовать сходимость несобственных интегралов.

а) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{xln^2x}$;   б) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

8. Вычислить работу, которую необходимо затратить, чтобы выкачать воду из полусферического котла, имеющего радиус 6 м.

ВАРИАНТ 20.

1. Вычислить определенный интеграл.

а) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{e^{arctgx}}{1+x^2}$ dx;   б) $\int_1^8 \frac{xdx}{\sqrt{3x+1}}$;

в) $\int_0^1 x \cdot arctgx\, dx$;   г) $\int_0^4 \frac{dx}{(1+\sqrt{x})^2}$.

2. Поставить нужный знак между интегралами не вычисляя их

$\int_0^1 x\, cos^2 x\, dx$ и $\int_0^1 cos^2\, x\, dx$

3. Вычислить определенный интеграл $\int_0^1 \sqrt{4x^3+1}dx$ приближенно с помощью формулы Симпсона с точностью 0,001.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями. Сделать чертёж.

а) y=lnx, x=e, y=0 .

б) y=x^2-3x, y=2x-6 .

в) $\rho = 2 + \sin 2\varphi$.

5. Вычислить длину дуги кривой.

а) y=$e^{\frac{x}{2}}$ +$e^{-\frac{x}{2}}$ $0 \le x \le 2$;

б) Найти площадь поверхности, образованной вращением дуги y=3x $x \in \left(-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

6. Вычислить объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями y=2-x^2 и y=0 вокруг оси OX .

7. Исследовать сходимость несобственных интегралов.

а) $\int_1^\infty \frac{\ln(x^2+1)}{x^2}$ dx   б) $\int_3^6 \frac{dx}{x^2-7x+10}$.

8. Вычислить работу, которую надо затратить, чтобы насыпать кучу песка конической формы с радиусом основания R и высотой h. Плотность песка.

ВАРИАНТ 21.

1. Вычислить определенный интеграл.

а) $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$ dx; б) $\int_1^3 lnx\, dx$;

в) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+tg^2x}{(1+tgx)^2}$ dx; г) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^4 x\, dx.$

2. Поставить нужный знак между интегралами, не вычисляя их.

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} sinx\, dx$ и $\int_0^{\frac{\pi}{4}} cosx\, dx$

3. Вычислить определенный интеграл $\int_0^1 \sqrt{4+x}dx$ приближенно с помощью формулы Симпсона с точностью 0,001.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями. Сделать чертёж.

а) y=$x^2-2x+1, y=3x-5$

б) xy=6, x+y=7

в) $\rho = 2\cos 2\varphi$.

5. Вычислить

а) длину дуги x=5sint+2$\sqrt{6}$ cost, y=2$\sqrt{6}$ sint-5cost, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

б) поверхности, образованной вращением вокруг оси абсцисса астроиды x=$\alpha\, cos^3 t$, y= $\alpha sin^3 t$.

6. Вычислить объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y^2=4-x, x=0$ вокруг оси Ox.

7. Исследовать сходимость несобственных интегралов.

а) $\int_4^{+\infty} \frac{dx}{xln^2x}$; б) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-3)^2}}$.

8. Найти массу стержня длиной l=5 м, если линейная плотность его меняется по закону $\gamma = 1+0{,}1x^3\ \frac{\text{кг}}{\text{м}}$, где x - расстояние от одного из концов стержня.

ВАРИАНТ 22.

1. Вычислить определенный интеграл.

а) $\int_1^{e^3} \frac{ln^2x}{x}$ dx ; б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\ cosx\ dx$;

в) $\int_0^4 \frac{x-1}{\sqrt{2x+1}}$ dx; г) $\int_0^1 \frac{e^{3x}\,dx}{e^x+2}$.

2. Найти производную от интеграла с переменными пределами J(x)=$\int_{x^2}^2 \frac{dt}{lnt}$.

3. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2+\cos x}dx$ приближенно с помощью формулы Симпсона с точностью 0,001.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями. Сделать чертёж.

а) x=8-y^2, x=y^2

б) y=x^2-4x-3, 3x+y+1=0

в) $\rho = 2 + \cos\varphi$.

5. Вычислить длину дуги кривой

а) вычислить длину дуги;

б) вычислить площадь поверхности вращения.

а) x=t^2 б) $y^2 = 4 + x$ x=2 вокруг оси OX.

y=t-$\frac{1}{3}t^3$

$0 \le t \le 1$;

6. Вычислить объём тела вращения. y=cosx, y=0, x$\epsilon\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ вокруг оси OX .

7. Исследовать сходимость несобственных интегралов.

а) $\int_2^{+\infty} \frac{xdx}{x^2-1}$; б) $\int_0^1 lnx\ dx$.

8. Найти силу давления воды на поверхность шара диаметром 4 м, если его центр находится на глубине 3 м от поверхности воды.

ВАРИАНТ 23.

1. Вычислить определенный интеграл.

а) $\int_1^{\frac{10}{3}} \frac{dx}{(3x+2)^3}$; б) $\int_0^5 \frac{xdx}{\sqrt{1+3x}}$;

в) $\int_1^e x\, lnx\, dx$; г) $\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$.

2. Найти производную от интеграла с переменными пределами J(x)=$\int_0^{x^2} e^{-t^2}$ dt.

3. Вычислить определенный интеграл $\int_0^1 \sqrt{4+x^3}dx$ приближенно с помощью формулы Симпсона с точностью 0,001.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями. Сделать чертёж.

а) y=x^2, y=3-2x .

б) y=x^2-3x-4, x+y+2=0.

в) $\rho = 3(2+\cos\varphi)$.

5. Вычислить длину дуги кривой

а) вычислить длину дуги;

б) вычислить площадь поверхности вращения.

а) x=6(cost+tsint), б) $3x^2$+$4y^2$=12 вокруг оси OY.

y=6(sint-tcost),

$0 \le t \le \frac{\pi}{2}$;

6. Вычислить объём тела вращения.y=3x^2, y=3x вокруг оси OY.

7. Исследовать сходимость несобственных интегралов. а)$\int_1^{+\infty} x\, sin2x\, dx$; б) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$.

8. Вычислить работу, необходимую для выкачивания масла из цилиндрического резервуара высотой 6 м и радиус основания 2 м, если его имеет горизонтальное направление. Плотность масла 0,9 г/см^3.

ВАРИАНТ 24.

1. Вычислить определенный интеграл.

а) $\int_1^2 \frac{dx}{(2x-1)^3}$; б) $\int_{ln2}^{ln3} \frac{dx}{e^x-e^{-x}}$;

в) $\int_0^1 x\, arctgx\, dx$; г) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{cos2x}{sin^4x}$ dx.

2. Найти производную от интеграла с переменными пределами J(x)=$\int_x^0 \sqrt{1+t^4}$ dt.

3. Вычислить определенный интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x}dx$ приближенно с помощью формулы Симпсона с точностью 0,001.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями. Сделать чертёж.

а) x=$2y^2-18, x-3y-9=0.$

б) y=$\frac{x^2}{3}$, y=4-$\frac{2}{3}x^2$.

в) $\rho = a\cos 3\varphi$.

5. Вычислить длину дуги кривой

а) вычислить длину дуги;

б) вычислить площадь поверхности вращения.

а) x=cost-$\frac{1}{2}$ cos2t,

y= sint-$\frac{1}{2}$sin2t, $0 \le t \le \pi$;

б) y^2=2x, 2x=3.

6. Вычислить объём тела вращения. y=sin x, y=0, x$\in[0;\pi]$ вокруг оси OX.

7. Исследовать сходимость несобственных интегралов.

а) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$; б) $\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ dx.

8. Шар лежит на дне бассейна глубиной 14 дм. Определить работу, необходимую для извлечения шара из воды, если его радиус 3 дм, а плотность $\gamma = 2$ г/см^3.

ВАРИАНТ 25.

1. Вычислить определенный интеграл.

а) $\int_{-1}^{2} x\sqrt{1-3x}$ dx; б) $\int_0^1 \frac{x^5-2}{x-2}$ dx;

в) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} arccosx\,dx$; г) $\int_0^1 \frac{dx}{e^x+1}$.

2. Найти производную от интеграла с переменными пределами J(x)=$\int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{lnt}$.

3. Вычислить определенный интеграл $\int_{-2}^{8} \sqrt{x^3+16}dx$ приближенно с помощью формулы Симпсона с точностью 0,001.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями. Сделать чертёж.

а) у=4x^2, у=x^2-2х.

б) у=х+1, у=cosx и осью ОХ.

в) $\rho = 1 + 2\sin\varphi$.

5. Вычислить длину дуги кривой

а) вычислить длину дуги;

б) вычислить площадь поверхности вращения.

а) x=8sint+6cost, б) y^2=2x+1 от x_1 =1 до x_2=7

y=6sint-8cost,

$0 \le t \le \frac{\pi}{4}$,

6. Вычислить объём тела вращения. у=9$x^2, y = 9x$ вокруг оси ОХ

7. Исследовать сходимость несобственных интегралов.

а) $\int_0^{\infty} \frac{8a}{x^2-4a^2}$ dx ; б) $\int_{-1}^{3} \frac{dx}{x^2}$.

8. Сжатие пружины пропорционально приложенной силе. Вычислить работу силы при сжатии пружины 5 см, если сила, равная 0,05 кг, сжимает ее на 1 см.

ЛИТЕРАТУРА

1. Брошевская, В.И. Определенный интеграл: учебно-методическое пособие по дисциплине «Математика» для студентов строительных специальностей / В И Брошевская. Е.Л. Брошевская. – Минск: БИТУ, 2011. – 119 с.

2. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа: в 3 т./ Л.Д. Кудрявцеа. – М.: Дрофа, 2003. – Т. 1: Дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной. – 704 с.

3. Мартынов Н.Н. Высшая математика/ Н.Н. Мартынов, Г.Н. Яковлев , Г.Л. Луканкин, Г.А. Шадрин. – М: Высшая школа, 2009. – 584 с.

4. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 т./ Г.М.Фихтенгольц. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – Т.1. – 616с.

5. Определенный интеграл: учебно-методическое пособие / А.П. Филимонова, Т.А. Юрьева – Благовещенск: Изд-во АмГУ, 2017. – 47 с.

СОДЕРЖАНИЕ