Министерство образования и науки Российской Федерации
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Учебно-методическое пособие

Благовещенск
2018

ББК 22.311я73
023

Козачкова О.В. (составитель)

О23 Обработка результатов измерений: учебно-метод. пособие / сост. О.В. кова. – Благовещенск: Изд-во АмГУ, 2018. – 33 с.

Учебно-метод. пособие предназначено для студентов, выполняющих физический практикум, оно содержит основные сведения о методах обработки и представления результатов измерений. В пособии имеются задания для самостоятельной работы по освоению навыков обработки экспериментальных данных.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлению подготовки 03.03.02 – «Физика».

ББК 22.311я73

Рецензент: А.Ю.Милинский, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры физики БГПУ

В авторской редакции.

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие предназначено для освоения дисциплины «Общий физический практикум» и содержит основные сведения о правилах обработки результатов измерений, полученных в ходе физического эксперимента. В пособии изложены основы теории неопределенности в измерениях, позволяющей грамотно осуществлять статистическую обработку экспериментальных данных, оценивать их научную достоверность.

Физический практикум является отдельной дисциплиной, но неразрывно связан с курсом общей физики, изучаемым на 1-3 курсах бакалавриата направления подготовки 03.03.02 – «Физика». Он представляет собой особую форму учебных занятий, где студенты работают в лаборатории, решая разнообразные экспериментальные задачи под руководством преподавателя и лаборанта. Это позволяет не только проверить на практике изучаемые законы физики, но и сформировать экспериментальные навыки, научиться обращаться с измерительными инструментами и сложными приборами, освоить способы обработки и представления результатов измерений.

Настоящее пособие призвано оказать методическую помощь студентам в планировании и проведении эксперимента, обработке его результатов, а также в подготовке к защите лабораторных работ общего физического практикума.

ВВЕДЕНИЕ

Физика – наука экспериментальная. Со времен Галилея и Ньютона утвердился ее основной метод: любое предсказание должно быть подтверждено опытом. Все физические теории в своей основе вытекают из наблюдений и экспериментов, результаты которых обобщены и сформулированы в виде законов.

Под экспериментом понимают опыт, т.е. наблюдение исследуемого явления в специально организованных условиях, позволяющих следить за его ходом и воссоздавать каждый раз при повторении тех же условий. Поэтому понимание физической теории невозможно без подтвержденных данных, т.е. без эксперимента. При любых исследованиях, наблюдениях, экспериментах приходиться делать те или иные ***измерения,*** то есть осуществлять определенную последовательность экспериментальных и вычислительных операций, с целью получения количественных характеристик объектов природы и протекающих в них процессов. Таким образом, измерение является основным средством объективного познания окружающего мира.

Процедура измерения завершается определением степени приближения найденного значения к истинному значению искомой величины. Очевидно, что измерение не может быть абсолютно точным. Точность измерений определяется многими факторами: видом и качеством приборов, умением экспериментатора, характеристиками измеряемого объекта, внешними условиями и т.д. Все искажения при измерениях, так называемые погрешности, необходимо учитывать при исследованиях и вычислениях.

Как правило, результаты эксперимента или наблюдения представляются в виде таблицы значений, которую в дальнейшем, при анализе данных эксперимента, обрабатывают с использованием специальных методов. Выбор методов зависит от цели и характера поставленной экспериментальной задачи. Так, целью может быть определение важной характеристики исследуемого объекта (определение момента инерции твердого тела, коэффициента вязкости жидкости и т.п.). В ином случае цель может быть сформулирована как исследование определенной закономерности, установление ее характера или специфических реперных точек (например, проверка закона динамики вращательного движения, исследование кривой намагничивания ферромагнетика, определение точки Кюри по температурной зависимости поляризации сегнетоэлектрика и т.п.).

Наиболее простым способом обработки результатов измерений является графическая обработка. Графические методы позволяют наглядно представить взаимную связь между измеряемыми величинами и позволяют непосредственно осуществлять ряд измерительных и вычислительных операций (интерполяция, экстраполяция и другие). При проведении и обработке данных многократных прямых измерений большое значение приобретают статистические методы. Рассматриваемые вопросы требуют знания основ теории вероятностей и математической статистики.

Настоящее пособие ориентировано на студентов младших курсов вузов, которые начинают изучение вопросов, связанных с измерениями, на занятиях в физической лаборатории в первом семестре, обладая в это время знаниями по физике и математике в объёме школьного курса.

Необходимо помнить, что практически все современные отрасли профессиональной деятельности специалистов-физиков в той или иной степени связаны с измерениями, а для значительной категории научных сотрудников и инженеров измерения составляют основное содержание их работы. Поэтому приобретение студентами экспериментальных умений и навыков, приобщение их к исследовательской культуре является неотъемлемой частью общепрофессиональной подготовки выпускника современного университета.

§1. Измерения. Оценка неопределенности результатов измерений

Физика — наука точная. Это значит, что любой физический процесс может быть отражен в виде математических зависимостей, связывающих между собой числовые значения физических величин. Одна из основных целей физического практикума заключается в том, чтобы научиться правильно сопоставлять физическим величинам числовые значения или измерять.

Измерением называется процесс сравнения измеряемой физической величины с однородной ей величиной, принятой за единицу (эталон).

Все измерения могут быть разделены на две группы: прямые и косвенные.

Прямые (непосредственные) измерения – это такие измерения, при которых мы получаем численное значение измеряемой величины либо прямым сравнением ее с мерой (эталоном), либо с помощью приборов, градуированных в единицах измеряемой величины. Например: измерение длины предмета масштабной линейкой, определение массы тела на весах с помощью разновеса, измерение интервала времени секундомером и т.д.

Однако интересующая нас физическая величина не всегда может быть получена непосредственно в результате измерений. В большинстве случаев измеряется не сама интересующая нас величина, а другие величины, связанные с нею теми или иными соотношениями и закономерностями. В этом случае для измерения необходимой величины приходится предварительно измерить несколько других величин, по значению которых *вычислением* определяется значение искомой величины. Такое измерение называется **косвенным.** Таким образом, **косвенные измерения** состоят из непосредственных измерений одной или нескольких величин, связанных с определяемой величиной *количественной зависимостью* (формулой), и вычисления по ней искомой величины. Например, при определении термического коэффициента линейного расширения тела измеряют его первоначальную длину при температуре 0^0 С (L_0), приращение длины (ΔL) при нагревании на Δt градусов, а сам коэффициент находят путём вычисления по формуле: $\alpha = \Delta L/(L_0 \cdot \Delta t)$.

В измерениях всегда участвуют измерительные приборы, которые одной величине ставят в соответствие связанную с ней другую, доступную количественной оценке с помощью наших органов чувств. Например, силе тока ставится в соответствие угол отклонения стрелки на шкале с делениями. При этом должны выполняться два основных условия процесса измерения: однозначность и воспроизводимость результата. Эти два условия всегда выполняются только приблизительно. Поэтому **процесс измерения содержит наряду с нахождением искомой величины и оценку неточности (неопределенности) измерения**.

Неопределенность измерения — оценка отклонения измеренного значения величины от её истинного значения. Неопределенность измерения является характеристикой (мерой) точности измерения.

Современный инженер или ученый-исследователь должен уметь оценить погрешность и неопределенность результатов измерений с учетом требуемой надежности. Поэтому большое внимание уделяется обработке результатов измерений. Знакомство с основными методами расчета неопределенностей – одна из главных задач лабораторного практикума.

Существует много причин для возникновения неопределенностей измерений, они носят объективный характер и не связаны с ошибочными действиями экспериментатора. Перечислим некоторые из них.

– Процессы, происходящие при взаимодействии прибора с объектом измерений, неизбежно изменяют измеряемую величину. Например, измерение размеров детали с помощью штангенциркуля, приводит к сжатию детали, то есть к изменению ее размеров. Иногда влияние прибора на измеряемую величину можно сделать относительно малым, иногда же оно сравнимо или даже превышает саму измеряемую величину (как это происходит, например, в экспериментах с объектами микромира). Последнее обстоятельство привело физиков к пониманию того, что принципиально невозможно осуществить измерения какой бы то ни было величины с бесконечно большой точностью. Оно получило название «принципа неопределенности», сформулированного Гейзенбергом в квантовой механике.

– Любой прибор имеет ограниченные возможности однозначного определения измеряемой величины вследствие его конструктивной неидеальности. Например, трение между различными деталями в стрелочном блоке амперметра приводит к тому, что изменение тока на некоторую малую, но конечную, величину не вызовет изменения угла отклонения стрелки.
– Во всех процессах взаимодействия прибора с объектом измерения всегда участвует внешняя среда, параметры которой могут изменяться и, зачастую, непредсказуемым образом. Это ограничивает возможность воспроизводимости условий измерения, а, следовательно, и результата измерения.
– При визуальном снятии показаний прибора возможна неоднозначность в считывании показаний прибора вследствие ограниченных возможностей нашего глазомера.
– Большинство величин определяется косвенным образом на основании наших знаний о связи искомой величины с другими величинами, непосредственно измеряемыми приборами. Очевидно, что неопределенность косвенного измерения зависит от неопределенностей всех прямых измерений. Кроме того, в погрешности косвенного измерения свой вклад вносят и ограниченность наших познаний об измеряемом объекте, и упрощенность математического описания связей между величинами, и игнорирование влияния тех величин, воздействие которых в процессе измерения считается несущественным.

Критерием численной оценки неопределенности измерения являются **погрешности измерений**. По *способу выражения* их подразделяют на абсолютные и относительные.

- **Абсолютная погрешность измерения** – это неопределенность измерения, выраженная в единицах измеряемой величины. Она равна разности между найденным на опыте (измеренным) $x_{изм}$ и истинным значением некоторой величины $x_{ист}$ (отклонение от истинного значения):

$$\Delta x = x_{изм} - x_{ист} \qquad (1)$$

- **Относительная погрешность результата измерений** – это отношение абсолютной погрешности Δx к истинному значению измеряемой величины, является безразмерной или выражается в процентах:

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{x_{ист}} \cdot 100\% \qquad (2)$$

Относительная погрешность показывает, какую долю от истинного значения величины $x_{ист}$ составляет абсолютная погрешность измерений.

По *источнику возникновения* неопределенности измерений погрешности разделяют на инструментальные, методические и субъективные.

- **Инструментальные / приборные** — неопределенности измерения, которые определяются погрешностями применяемых средств измерений и вызываются несовершенством принципа действия, неточностью градуировки шкалы и т.п.
- **Методические** — это погрешности измерения, обусловленные несовершенством метода, а также упрощениями, положенными в основу методики измерений.
- **Субъективные / операторные** — это погрешности, обусловленные степенью внимательности, сосредоточенности, подготовленности и другими качествами экспериментатора.

Из формул (1) и (2) следует, что для нахождения абсолютной и относительной погрешности измерений, нужно знать не только измеренное, но и истинное значение интересующей нас величины. Но истинное значение нам, строго говоря, не известно. Поэтому формулы (1) и (2) в прямом значении на практике не применяют. При практических измерениях погрешности не вычисляются, а **оцениваются,** то есть определяется интервал, в который с заданной вероятностью попадает истинное значение измеряемой величины. При оценках учитываются условия проведения эксперимента, точность методики, качество приборов и ряд других факторов. Качество измерений оценивается по значению ε_x.

По *характеру проявления* погрешности измерений разделяют на *систематические, случайные и грубые* (промахи).

Промахи, возникающие вследствие недосмотра экспериментатора или неисправности аппаратуры, можно обнаружить по существенному расхождению некоторых данных от других результатов в той же серии измерений. Грубых ошибок следует избегать. Если установлено, что они произошли, соответствующие измерения нужно отбрасывать.

Многократно повторяя одни и те же измерения, можно заметить, что довольно часто их результаты не в точности равны друг другу, а группируются вокруг некоторого среднего в определенном числовом интервале (рис. 1). С большой вероятностью можно утверждать, что этот интервал содержит истинное значение измеряемой величины.

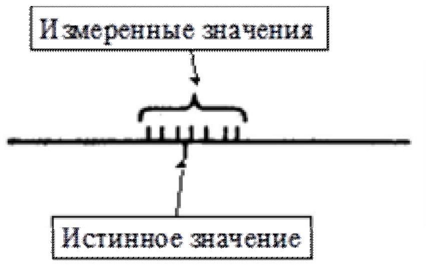

Рис. 1

Погрешности (здесь их можно рассматривать как отклонение измеренного значения x от среднего), произвольным образом меняющие величину и знак от опыта к опыту, называют **случайными**. В появлении таких погрешностей не наблюдается какой-либо закономерности, они обнаруживаются при повторных измерениях одной и той же величины в виде некоторого разброса получаемых результатов. Случайные погрешности неизбежны, неустранимы и всегда присутствуют в результатах измерений, так как непроизвольно вносятся в них вследствие несовершенства органов чувств экспериментатора, действия случайных и трудно учитываемых внешних факторов.

Однако их влияние, как правило, можно устранить статистической обработкой, применяя теорию вероятности и математическую статистику. По законам статистики ближе всего к истинному $x_{ист}$ лежит среднее арифметическое всех измеренных значений. Они совпадают лишь в пределе бесконечно большого числа измерений.

Систематической погрешностью называется составляющая неопределенности измерения, остающаяся постоянной (по знаку и величине) или закономерно меняющаяся при повторных измерениях одной и той же величины. При этом предполагается, что систематические погрешности представляют собой определенную функцию неслучайных факторов, состав которых зависит от физических, конструкционных и технологических особенностей средств измерений или условий их применения. Например, систематические погрешности могут быть связаны как с ошибками приборов (нарушение юстировки, неточная «установка нуля» на шкале прибора, калибровка, неравномерно растягивающаяся пружина, неравномерный шаг микрометрического винта, не равные плечи весов и т.д.) так и с методикой проведения эксперимента. В результате – экспериментальные данные колеблются не возле истинного, а возле некоторого смещенного значения. Систематическую погрешность нельзя устранить повторными измерениями. Её устраняют либо с помощью поправок, либо усовершенствованием методики эксперимента.

Разновидностью систематических погрешностей являются **приборные погрешности.** Наиболее просто поддаются оценке погрешности, вносимые в измерения приборами, если они связаны с конструктивными особенностями самих приборов. Эти погрешности указываются в паспортах к приборам. Погрешности некоторых приборов можно оценить, не обращаясь к паспорту, но зная класс точности прибора. Так, у многих электроизмерительных приборов класс точности указан непосредственно на их лицевой панели.

Класс точности прибора $\boldsymbol{\gamma}$ – это классификационная характеристика измерительных систем, удовлетворяющих установленным метрологическим требованиям, соблюдение которых необходимо для поддержания погрешностей измерений или инструментальных неопределенностей в установленных пределах при определенных условиях эксплуатации. Например, для стрелочных электроизмерительных приборов ее определяют как отношение абсолютной погрешности прибора $\Delta x_{\text{приб}}$ к максимальному значению измеряемой величины x_{max} в данном диапазоне работы прибора (это систематическая относительная погрешность прибора, выраженная в процентах от предела шкалы x_{max}):

$$\gamma = \frac{\Delta x_{\text{приб}}}{x_{max}} \cdot 100\%. \tag{3}$$

Тогда абсолютная погрешность $\Delta x_{\text{приб}}$ такого прибора определяется соотношением:

$$\Delta x_{\text{приб}} = \frac{\gamma \cdot x_{max}}{100\%}. \tag{4}$$

Для аналоговых электроизмерительных приборов введено 8 классов точности: 0,05; 0,1; 0,5; 1,0; 1,5; 2,0; 2,5; 4.

Чем ближе измеряемая величина к предельному значению x_{max}, тем более точным будет результат измерения. Максимальная точность (т.е. наименьшая относительная неопределенность), которую может обеспечить данный прибор, равна классу точности. Это обстоятельство необходимо учитывать при использовании многошкальных приборов. Шкалу надо выбирать с таким расчетом, чтобы измеряемая величина, оставаясь в пределах шкалы, была как можно ближе к предельному значению.

Если класс точности для прибора не указан, то необходимо руководствоваться следующими правилами:

- абсолютная погрешность приборов с нониусом равна точности нониуса;
- абсолютная погрешность приборов с фиксированным шагом стрелки равна цене деления. **Цена деления** шкалы – это разность значений измеряемой величины, соответствующих двум соседним отметкам шкалы. Цена де-

ления определяется как отношение верхнего предела измерения прибора к числу делений шкалы;

- абсолютная погрешность цифровых приборов равна единице минимального разряда.

§ 2. Расчет неопределенностей результатов измерений

2.1 Алгоритм расчета погрешности прямых многократных измерений

При малом числе измерений (N<10) математическая вероятность получения того или иного результата измерения подчиняется закону распределения Стьюдента, который часто задается таблично в виде системы статистических коэффициентов (см. таблицу 1).

Пусть при многократных измерениях некоторой величины x мы получили N результатов: $x_1, x_2, x_3, \dots x_N$. Как отмечалось выше, среднее арифметическое серии измерений ближе к истинному значению измеряемой величины, чем большинство отдельных измерений. Статистическая обработка результатов измерений состоит в следующих действиях.

1) Вычисляется среднее арифметическое серии из N прямых измерений:

$$x_{\text{ср}} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} \tag{5}$$

2) Вычисляется абсолютное отклонение каждого измерения x_i от среднего. Δx_i – это разность между средним арифметическим серии из N прямых измерений и данным измерением:

$$\Delta x_i = x_{\text{ср}} - x_i. \tag{6}$$

3) Вычисляется среднеквадратичная погрешность S_x (так называемое, стандартное отклонение):

$$S_x - \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} (\Delta x_i)^2}{N \cdot (N-1)}}\ . \tag{7}$$

4) Вычисляется абсолютная случайная (иначе, статистическая) погрешность $\Delta x_{\text{ст}}$ прямых измерений. Для этого среднеквадратичную погрешность S_x

умножают на коэффициент Стъюдента, определяемый двумя параметрами – числом степеней свободы $f = N - 1$ и степенью надежности α.

$$\Delta x_{ст} = t_{\alpha,f} \cdot S_x \qquad (8)$$

Степень надежности α – это вероятность, с которой истинное значение измеряемой величины x попадает в *доверительный интервал*:

$$[x_{ср} - \Delta x; x_{ср} + \Delta x].$$

Таким образом, коэффициент Стъюдента – это число, на которое нужно умножить среднеквадратичную погрешность, чтобы при данном числе измерений обеспечить заданную надежность результата.

Чем большую надежность необходимо обеспечить для данного числа измерений, тем больше коэффициент Стъюдента. С другой стороны, чем больше число измерений, тем меньше коэффициент Стъюдента при данной надежности. В лабораторных работах, проводимых на специальном учебном оборудовании, будем считать надежность заданной и равной 0,95. Числовые значения коэффициентов Стъюдента при разных значениях надежности α и для разного числа измерений приведены в таблице 1.

5) Вычисляется **полная абсолютная неопределенность Δx** результата измерений путем **суммирования погрешностей.** Если погрешность обусловлена как измерительными приборами, так и случайными факторами, то неопределенность Δx прямых многократных измерений находится суммированием погрешности прибора $\Delta x_{пр}$ и статистической погрешности $\Delta x_{ст}$:

$$\Delta x = \sqrt{\Delta x_{пр}^2 + \Delta x_{ст}^2} \qquad (9)$$

Если одна из составляющих погрешностей в несколько раз меньше другой, то меньшей составляющей можно пренебречь.

Таблица 1

Значения коэффициентов Стьюдента $t_{\alpha,f}$

	Надежность α							
f=N-1	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	**0,95**	0,98	0,999

1	1,00	1,38	2,0	3,1	6,3	**12,7**	31,8	636,6
2	0,82	1,06	1,3	1,9	2,9	**4,3**	7,0	31,6
3	0,77	0,98	1,3	1,6	2,4	**3,2**	4,5	12,9
4	0,74	0,94	1,2	1,5	2,1	**2,8**	3,7	8,6
5	0,73	0,92	1,2	1,5	2,0	**2,6**	3,4	6,9
6	0,72	0,90	1,1	1,4	1,9	**2,4**	3,1	6,0
7	0,71	0,90	1,1	1,4	1,9	**2,4**	3,0	5,4
8	0,71	0,90	1,1	1,4	1,9	**2,3**	2,9	5,0
9	0,70	0,88	1,1	1,4	1,8	**2,3**	2,8	4,8
14	0,69	0,87	1,1	1,3	1,8	**2,1**	2,6	4,1
19	0,69	0,86	1,1	1,3	1,7	**2,1**	2,5	3,9
39	0,68	0,85	1,1	1,2	1,7	**2,0**	2,4	3,5
∞	0,67	0,84	1,0	1,3	1,6	**2,0**	2,3	3,3

6) Округляется результат измерений и величина доверительного интервала. Округление используется для того, чтобы работать с числами в пределах того количества знаков, которое соответствует реальной точности измеряемых параметров. Реальные физические величины всегда измеряются с некоторой конечной точностью, которая зависит от приборов и методов измерения, что в десятичном представлении значения соответствует определённому числу значащих цифр. Сами измеренные параметры записываются с таким числом знаков, чтобы все цифры были надёжными, возможно, последняя — сомнительной. **Значащими цифрами** называются все цифры, расположенные слева от первой ненулевой цифры. Округление начинают с абсолютной статистической погрешности. Число значащих цифр, которое оставляют в значении погрешности, вообще говоря, зависит от коэффициента надежности и числа измерений. Однако даже для очень точных измерений, в которых точное значение погрешности важно, не оставляют более *двух значащих цифр*. Разряд значащей цифры абсолютной погрешности определяет разряд первой сомнительной цифры в значении результата. Следовательно, само

значение результата нужно округлять (с поправкой) до той значащей цифры, разряд которой совпадает с разрядом значащей цифры погрешности. Сформулированное правило следует применять и в тех случаях, когда некоторые из цифр являются нулями.

Пример. Измеряется диаметр детали цилиндрической формы в различных сечениях с помощью микрометра (цена деления нониуса 0,01 мм). Получены следующие результаты: d_1 = 23,28 мм, d_2 = 23,30 мм, d_3 = 23,32 мм, d_4 = 23,33мм, d_5 = 23,29мм.

Вычисляем среднее значение диаметра: $d_{ср}$ = 23,304 мм. Абсолютная статистическая погрешность составляет $\Delta d_{ст}$ = 0,025966….мм. Как видно из представленных расчетов, неопределенность появляется уже *во втором знаке* после запятой. Кроме того, приборная погрешность, равная цене деления нониуса микрометра ($\Delta d_{пр}$ = 0,01 мм), сравнима по порядку величины с $\Delta d_{ст}$. Поэтому обе составляющие должны быть учтены в оценке доверительного интервала Δd. Поэтому имеет смысл округлить $\Delta d_{ст}$ до двух значащих цифр, то есть принять $\Delta d_{ст} \approx 0{,}03$ (округляем с избытком, так как цифра, следуемая за округляемой, равна 5). Вычисляем полную абсолютную погрешность результата измерений:

$$\Delta d = \sqrt{0{,}03^2 + 0{,}01^2} = 0{,}0316\ldots.$$

Первая значащая цифра содержится во втором знаке после запятой, следовательно, в значении результата измерений эта цифра является сомнительной. Поэтому $\Delta d_{ст}$ и Δd следует округлить до сотых: $d_{ср}$ = 23,30 мм и Δd = 0,03мм. Таким образом, результат измерений диаметра детали представляется в виде:

$$d = (23{,}30 \pm 0{,}03) \text{ мм}.$$

7) Вычисляется относительная погрешность результата измерений ε_x.

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta x}{x_{ср}} \cdot 100\% \qquad (10)$$

При округлении относительной погрешности достаточно оставить две значащие цифры. В приведенном выше примере относительная погрешность оказалась равной $\varepsilon_x = 0{,}13$ %, при $\alpha = 0{,}95$.

8) Записывают **результат измерений** физической величины x, представленный в виде интервала значений с указанием вероятности попадания истинного значения в данный интервал:

$$\boldsymbol{x = x_{ср} \pm \Delta x}, \quad \boldsymbol{\varepsilon_x} = \ldots.., \text{ при } \alpha = 0{,}95. \qquad (11)$$

В записи результата измерений число значащих цифр должно быть одинаково как для среднего значения, так и для величины абсолютной погрешности. Необходимо также указать единицу измерения искомой величины.

Таблица 2

Примеры записи результата измерений

Правильно	Неправильно	Ошибка
1,2± 0,2	1,244± 0,2	Лишние цифры в значении результата
1,24± 0,03	1,2438± 0,032	Лишние цифры в значении погрешности и результата
1,24 ±0,03 $(1{,}24\pm0{,}03)\cdot10^2$	$1{,}24 \pm3\cdot10^{-2}$ $1{,}24\cdot10^2 \pm3$	Множитель 10^n должен быть общим

2.2 Алгоритм расчета погрешности косвенных измерений

В лабораторной практике большинство измерений – косвенные и интересующая нас величина является функцией одной или нескольких непосредственно измеряемых величин:

$$F=f(x, y ,z , \ldots) \qquad (12)$$

Как следует из теории вероятностей, среднее значение величины определяется подстановкой в формулу (12) средних значений непосредственно измеряемых величин, то есть

$$F_{\text{ср}} = f\left(x_{\text{ср}}, y_{\text{ср}}, z_{\text{ср}} \dots\right) \tag{13}$$

Требуется найти абсолютную и относительную неопределенности значений этой функции, если известны неопределенности значений независимых переменных:

$$\Delta x,\ \Delta y,\ \Delta z,\ \dots$$

Для нахождения неопределенности результата косвенных измерений используют формулу:

$$\Delta F = \sqrt{(\Delta F_x)^2 + \left(\Delta F_y\right)^2 + (\Delta F_z)^2 \dots}, \tag{14}$$

где ΔF_x, ΔF_y, ΔF_z – частные неопределенности значений функции (12). Их вычисляют, взяв частные производные функции F по переменным $x, y, z, \dots$, соответственно:

$$\Delta F_x = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \cdot \Delta x \tag{15}$$

$$\Delta F_y = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \cdot \Delta y \tag{16}$$

$$\Delta F_z = \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) \cdot \Delta z \tag{17}$$

Следует иметь в виду, что доверительные интервалы Δx, Δy, Δz, ... должны быть взяты при одинаковой доверительной вероятности α. В этом случае надежность для доверительного интервала ΔF будет тоже α.

При обработке результатов косвенных измерений предлагается следующий порядок операций:

1) Все величины, находимые прямыми измерениями, обработайте в соответствии с правилами обработки результатов прямых измерений. При этом для всех измеряемых величин задайте одно и то же значение надежности α.

2) Определите среднее значение функции $F_{ср}$, подставив в нее средние значения ее аргументов:

$$F_{ср} = f(x_{ср}, y_{ср}, z_{ср} \dots)$$

3) Вычислите частные неопределенности функции F по формулам (15 – 17), где производные вычислите при средних значениях величин $x,y,z\dots$

4) Подставьте вычисленные значения частных неопределенностей функции F в формулу (14) и определите для нее полную абсолютную неопределенность ΔF.

5) Результат измерения запишите в виде:

$$F = F(x_{ср}, y_{ср}, z_{ср} \dots) \pm \Delta F \qquad (18)$$

6) Определите относительную неопределенность результата косвенных измерений

$$\varepsilon = \frac{\Delta F}{\overline{F}} \cdot 100\%. \qquad (19)$$

Пример. Требуется экспериментально определить объем тела цилиндрической формы. Объем цилиндра вычисляется по формуле:

$$V = \frac{\pi d^2 h}{4} \qquad (20)$$

где d – диаметр цилиндра, h – высота цилиндра.

Обе эти величины определяются непосредственно в опыте. Пусть измерение этих величин дало следующие результаты:

d = (4.01 ± 0.03) *мм* ,

h = (8.65 ± 0.02) *мм,* при одинаковой надежности α = 0.95.

Среднее значение объема, согласно (12), равно

$$V = \frac{3{,}14(4{,}01)^2 \cdot 8{,}65}{4} = 109{,}19 \ (\text{мм}^3)$$

Вычислим неопределенность измерения объема: $\Delta V = \sqrt{(\Delta V_d)^2 + (\Delta V_h)^2}$,

где $$\Delta V_d = \frac{\partial V}{\partial d} \cdot \Delta d = \frac{\pi d h}{2} \cdot \Delta d = \frac{3{,}14 \cdot 4{,}01 \cdot 8{,}65}{2} \cdot 0{,}03 = 1{,}63 \ (\text{мм}^3)$$

$$\Delta V_h = \frac{\partial V}{\partial h} \cdot \Delta h = \frac{\pi d^2}{4} \cdot \Delta h = \frac{3{,}14 \cdot 4{,}01^2}{4} \cdot 0{,}02 = 0{,}25\ (\text{мм}^3)$$

Находим:

$$\Delta V = \sqrt{(1{,}63)^2 + (0{,}25)^2} = 1{,}65\ (\text{мм}^3) \approx 2\ (\text{мм}^3).$$

Округлим полученные значения и запишем результат:

$$\Delta V = (109 \pm 2)\ \text{мм}^3 .$$

§ 3. Правила графической обработки экспериментальных данных

В экспериментальной физике графиками пользуются для разных целей. Во-первых, графики строят, чтобы определить некоторые величины. Например, угловой коэффициент наклона прямой, если исследуемая зависимость носит линейный характер. После нанесения экспериментальных точек, не соединяя их, проводят «наилучшую» линию. Эта процедура называется *аппроксимацией*. Она заключается в подборе такой теоретической функции, которая бы лучше других отвечала совокупности экспериментальных данных по исследуемой зависимости. В тех случаях, когда не требуется высокая точность и достаточна грубая оценка вышеуказанных характеристик, допускается выбор оптимальной функциональной зависимости «на глаз», руководствуясь простым критерием: по обе стороны осредняющей прямой (или кривой – в случае нелинейных зависимостей) должно быть примерно одинаковое количество экспериментальных точек. К более точным методам аппроксимации относят метод наименьших квадратов (см. § 4), который часто используется для графической обработки экспериментальных данных линейных зависимостей.

Во-вторых, графиками пользуются для наглядности, для изучения поведения исследуемой зависимости на отдельных участках, обнаружения экстремумов, точек перегиба и других особенностей. Допустим, например, мы измеряем скорость течения воды по трубке как функцию перепада давления с целью определить, когда поток перестает быть ламинарным и становится турбулентным.

Полученные данные приведены в таблице 3.

Таблица 3

Перепад давления, $Н{\cdot}м^{-2}$	Средняя скорость, *мм/с*	Перепад давления, $Н{\cdot}м^{-2}$	Средняя скорость, *мм/с*
7,8	35	78,3	245
15,6	65	86,0	258
23,4	78	87,6	258
31,3	126	93,9	271
39,0	142	101,6	277
46,9	171	109,6	284
54,7	194	118,0	290
62,6	226		

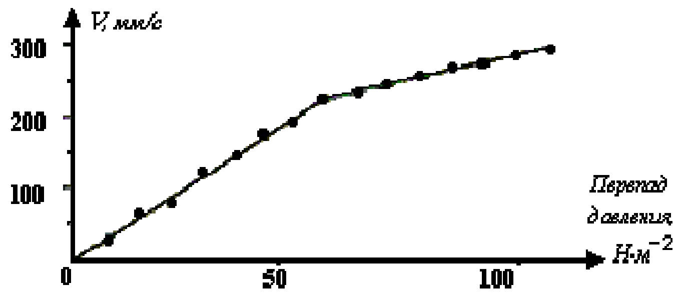

Рис. 2

Пока поток остается ламинарным, скорость его пропорциональна перепаду давления. Глядя на цифры, приведенные в таблице, трудно сказать, где пропорциональность начинает нарушаться. Другое дело, когда те же данные, представлены графиком (рис. 2). В этом случае сразу видна точка, в которой нарушается пропорциональность (или изменяется коэффициент пропорциональности).

В-третьих, графиками пользуются в экспериментальной работе, чтобы установить эмпирическое соотношение между двумя величинами. Графики позволяют более наглядно проводить сравнение экспериментальных данных с теоретической кривой. Нанося результаты измерений на график, очень удобно также следить за ходом эксперимента.

При построении графиков следует придерживаться следующих правил.

1) Выбирается форма представления функциональной зависимости. Обычно по горизонтальной оси откладывают независимую переменную (x), т.е. величину, значение которой задает сам экспериментатор, а по вертикальной оси – величину, которую он при этом измеряет (y). Таким образом, в эксперименте устанавливается вид функциональной зависимости $y(x)$.

Существуют различные виды бумаги для графиков, наиболее употребительны два: с обычным линейным масштабом (миллиметровая) и логарифмическая. Последняя бывает двух видов: полулогарифмическая, когда логарифмический масштаб взят только на одной оси координат, и двойная логарифмическая. Полулогарифмическая бумага удобна в том случае, когда связь между переменными логарифмическая или экспоненциальная ($y = B_o + B_1 e^{kx}$). Именно такие зависимости (наряду с линейными или квадратичными) чаще всего встречаются в физическом практикуме.

2) Выбрав бумагу, подходящую для предстоящего эксперимента, определяются с масштабом. При выборе масштаба нужно исходить из следующих соображений.

– Экспериментальные точки не должны сливаться друг с другом. Поэтому лучше выбирать такой масштаб, чтобы расположить точки с разумным интервалом. Если начальные значения x и y отличаются намного от нуля, то предпочтительнее начинать отсчет делений на соответствующей оси с некоторого значения, которое лишь немногим меньше найденного на опыте наименьшего значения переменного. Иначе на графике будет необоснованно много пустого места. После нанесения *масштабных делений* на осях около них пишут необходимые цифры.

– Масштаб должен быть простым. Проще всего, если единице измеренной величины (или 10; 100; 0.1 единицы и т.д.) соответствует 1 *см*. Можно также выбрать такой масштаб, чтобы 1 *см* соответствовал 2 или 5 единицам.

Других масштабов следует избегать просто потому, что иначе при нанесении точек на график придется производить арифметические подсчеты.

– Иногда приходится выбирать масштаб из теоретических соображений. Так, если важно выяснить, в какой мере результаты удовлетворяют соотношению $y = kx$, то на графике зависимости y от x обязательно должно быть начало координат, совпадающее с нулевым значением x и y.

– Как и в случае с таблицами, десятичный множитель удобнее отнести к единице измерения. Тогда деления на графике можно помечать цифрами 1, 2, 3 ... или 10, 20, 30 ..., а не 10000, 20000 и т.д., или 0.0001, 0.0002 и т.д. На осях координат следует указать название или символ физической величины. Единицы измерения нужно указывать тем же способом, что и в таблицах, а именно десятичный множитель относить к единице измерения.

После нанесения экспериментальных точек проводят плавную осредняющую линию. Не правильно соединять экспериментальные точки ломаной линией, как показано на рисунке 3. Такой график указывал бы на скачкообразный характер зависимости между двумя величинами, что, вообще говоря, маловероятно. Скорее следует ожидать, что данное соотношение описывается какой-либо плавной кривой (рис. 4), а отклонения точек вызваны «шумом» эксперимента, случайными ошибками при измерениях.

не верно

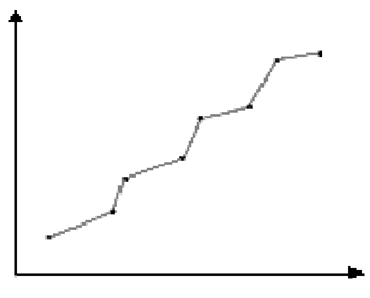

Рис. 3

верно

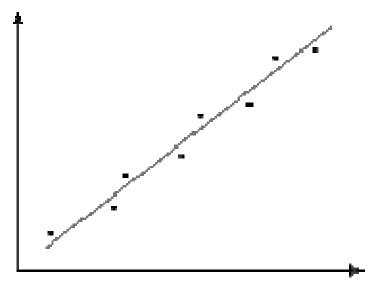

Рис. 4

При проведении осредняющей кривой следует руководствоваться нижеследующими правилами.

– Чем больше изгибов и неровностей имеет кривая, тем она менее вероятна (выписывать изгибы можно лишь при высокой точности измерений).

– Проводить кривую следует так, чтобы она лежала возможно ближе к точкам и чтобы по обе стороны оказалось приблизительно равное их количество.

– Чтобы различать экспериментальные данные, относящиеся к разным условиям или разным веществам, можно воспользоваться разными значками, например, темными или светлыми кружками, крестиками, или точками разного цвета. Но при этом нужно знать меру: если график начинает выглядеть загроможденным, то лучше для каждой группы данных построить специальный график.

– По окончании построения пишут заголовок, который должен содержать краткое и точное содержание того, что показывает график.

§ 4. Метод наименьших квадратов

Если некоторая физическая величина зависит от другой величины, то эту зависимость можно исследовать, измеряя y при различных значениях x . В результате измерений получается ряд значений:

$$x_1, x_2, \ldots, x_i, , \ldots , x_n;$$

$$y_1, y_2, \ldots, y_i, , \ldots , y_n.$$

По данным такого эксперимента можно построить график зависимости $y = f(x)$. Полученная кривая дает возможность судить о виде функции $f(x)$. Однако постоянные коэффициенты, которые входят в эту функцию, остаются неизвестными. Определить их позволяет *метод наименьших квадратов*. Экспериментальные точки, как правило, не ложатся точно на кривую. Согласно методу наименьших квадратов выбор аппроксимирующей функции $f(x)$ должен удовлетворять следующему критерию: «наилучшей» кривой будет та, для которой сумма квадратов отклонений экспериментальных значений $y_i(x_i)$ от этой кривой, т.е. $\Sigma\,[y_i - f(x_i)]^2$, была бы минимальной.

На практике этот метод наиболее часто (и наиболее просто) используется в случае линейной зависимости, т.е. когда

$$\boldsymbol{y = kx} \quad \text{или} \quad \boldsymbol{y = kx + b}.$$

Линейная зависимость очень широко распространена в физике. И даже когда зависимость нелинейная, обычно стараются строить график так, чтобы получить прямую линию. Например, если предполагают, что показатель преломления стекла n связан с длиной λ световой волны соотношением $n=a+b/\lambda^2$, то на графике строят зависимость n от λ^{-2}.

Рассмотрим зависимость $\boldsymbol{y = kx}$ (прямая, проходящая через начало координат). Составим величину φ – сумму квадратов отклонений экспериментальных точек от прямой:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n}(y_i - kx_i)^2 \qquad (21)$$

.

Величина φ всегда положительна и оказывается тем меньше, чем ближе к прямой лежат экспериментальные точки. Метод наименьших квадратов утверждает, что для k следует выбирать такое значение, при котором φ имеет минимум. При этом производная $d\varphi/dk$ обращается в ноль:

$$\frac{d\varphi}{dk} = -2\sum x_i(y_i - kx_i) = 0\,, \qquad (22)$$

откуда находим: $$k = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}\,. \qquad (23)$$

Таким образом, по совокупности координах экспериментальных точек $\{x_i\}$ и $\{y_i\}$ можно определить угловой коэффициент k наклона искомой прямой. Построив на графике две контрольные точи (одна из которых может быть {0,0}), проводят осредняющую прямую.

Во многих задачах экспериментальной физики нахождение коэффициента k может быть самостоятельной задачей, так как он является характерным параметром исследуемой системы. Так, устанавливая пропорциональную зависимость между силой $\boldsymbol{F}$ и ускорением $\boldsymbol{a}$, коэффициентом пропорциональности является величина, обратная массе системы:

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{m}\boldsymbol{a}\ , \text{ здесь } k=1/m\ .$$

Построив график зависимости $F(a)$ и найдя из нее коэффициент пропорциональности k, определяют массу системы.

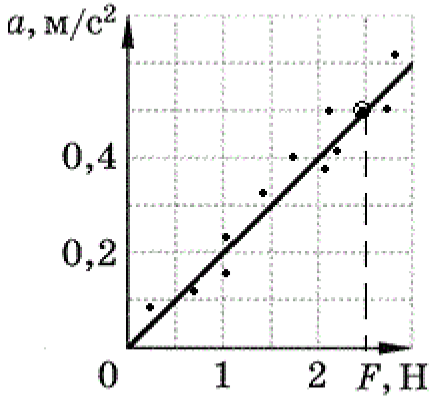

Рис. 5

Рассмотрим теперь случай, когда точки должны удовлетворить формуле $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{kx}$ (прямая, не проходящая через начало координат).

Задача состоит в том, чтобы по имеющемуся набору значений $\{x_i\}$ и $\{y_i\}$ найти наилучшие значения k и b.

Снова составим квадратичную форму φ, равную сумме квадратов отклонений точек (x_i, y_i) от прямой

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n}(y_i - b - kx_i)^2 \tag{24}$$

и найдем значения k и b , при которых φ имеет минимум:

$$\frac{d\varphi}{db} = -2\sum(y_i - b - kx_i) = 0 \tag{25}$$

$$\frac{d\varphi}{dk} = -2\sum x_i(y_i - b - kx_i) = 0 \tag{26}$$

Совместное решение этих уравнений дает:

$$k = \frac{\sum[(x_i - \bar{x})y_i]}{\sum(x_i - \bar{x})^2} \qquad (27)$$

$$b = \bar{y} - k\bar{x} \qquad (28)$$

При обработке результатов измерения этим методом удобно все данные сводить в таблицу, в которой предварительно подсчитываются все суммы, входящие в формулы (23) – (27). Формы этих таблиц приведены в рассматриваемых ниже примерах.

Пример 1. Исследовалось основное уравнение динамики вращательного движения $\varepsilon = M/J$ (прямая, проходящая через начало координат). При различных значениях момента силы M измерялось угловое ускорение ε некоторого тела. Требуется определить момент инерции J этого тела. Результаты измерений момента силы и углового ускорения занесены во второй и третий столбцы таблицы 4.

Таблица 4

n	M, (Н · м)	ε, $с^{-1}$	M^2	$M \cdot \varepsilon$
1	1.44	0.52	2.0736	0.7488
2	3.12	1.06	9.7344	3.3072
3	4.59	1.45	21.0681	6.6555
4	5.90	1.92	34.81	11.328
5	7.45	2.56	55.5025	19.072
∑	–	–	123.1886	41.1115

По формуле (23) определяем:

$$\frac{1}{J} = \frac{\sum M\varepsilon}{\sum M^2} = \frac{41.1115}{123.1886} = 0.3337\ кг^{-1}м^{-2}$$

отсюда $J = 2{,}996$ (кг·м^2).

Пример 2. Требуется определить радиус кривизны линзы по кольцам Ньютона. Измерялись радиусы колец Ньютона r_m и определялись номера этих колец m. Радиусы колец Ньютона связаны с радиусом кривизны линзы R и номером кольца уравнением

$$r^2_m = m\lambda R - 2d_0R,$$

где d_0 – толщина зазора между линзой и плоскопараллельной пластинкой (или деформация линзы), λ – длина волны падающего света.

Пусть $\lambda = 600$ *нм;* обозначим: $r^2_m = y;\ m = x;\quad \lambda R = k;\quad -2d_0R = b,$

тогда уравнение примет вид $\boldsymbol{y = b + kx}$.

Результаты измерений и вычислений занесены в таблицу 5.

Таблица 5

n	$x = m$	$y = r^2$, 10^{-2} мм^2	$m - \bar{m}$	$(m - \bar{m})^2$	$(m - \bar{m})y$
1	1	6.101	-2.5	6.25	-0.152525
2	2	11.834	-1.5	2.25	-0.17751
3	3	17.808	-0.5	0.25	-0.08904
4	4	23.814	0.5	0.25	0.11907
5	5	29.812	1.5	2.25	0.44718
6	6	35.760	2.5	6.25	0.894
∑	21	125.129	–	17.5	1.041175
∑/n	3.5	20.85483	–	–	–

Рассчитываем k и b по формулам (27), (28).

$$k = \frac{\sum[(m - \bar{m})r^2]}{\sum(m - \bar{m})^2} = \frac{1{,}041175}{17{,}5} \approx 0{,}0595\ (\text{мм}^2)$$

$$b = \overline{r^2} - k\bar{m} = (0{,}2085483 - 0{,}0594957 \cdot 3{,}5) = 0{,}000313\ \text{мм}^2$$

В условиях данного эксперимента величина b не представляет интереса. Подсчитаем радиус кривизны линзы:

$$R = k / \lambda = 99{,}2\ (\text{мм}).$$

Задание для самостоятельной работы

Выполните обработку результатов гипотетического эксперимента, результаты которого представлены в таблице. Величины x, y, и z определены в ходе многократных прямых измерений. Величина F определяется косвенно на основании указанной в таблице функциональной зависимости от x,y, z.

Вариант 1

№	x_i	y_i	z_i	F
1	1,22	11	21,1	$F = xy^2 + \frac{z}{y}$
2	1,23	12	21,3	
3	1,18	14	21,4	
4	1,20	11	21,2	
5	1,21	13	21,4	

Вариант 2

№	x_i	y_i	z_i	F
1	0,01	6,12	42,2	$F = \frac{xz}{y^2}$
2	0,02	6,16	42,1	
3	0,01	6,09	42,3	
4	0,02	6,13	42,3	
5	0,01	6,15	42,2	

Вариант 3

№	x_i	y_i	z_i	F
1	14,23	3,01	2,56	$F = \frac{xz + z^2}{y^2}$
2	14,21	3,04	2,49	
3	14,22	3,06	2,51	
4	14,25	3,03	2,52	
5	14,22	3,05	2,54	

Вариант 4

№	x_i	y_i	z_i	F
1	1,34	2,11	5	$F = \frac{z + y^2}{xy^2}$
2	1,37	2,08	6	
3	1,35	2,09	5	
4	1,34	2,11	5	
5	1,36	2,12	6	

Вариант 5

№	x_i	y_i	z_i	F
1	2,54	13,23	1,22	$F = \frac{y^2}{xz} + z^2$
2	2,49	13,21	1,20	
3	2,50	13,22	1,18	
4	2,52	13,25	1,24	
5	2,54	13,22	1,21	

Вариант 6

№	x_i	y_i	z_i	F
1	17,2	12,02	5,3	$F = \frac{y^2}{x} + xz^2$
2	17,1	12,06	5,4	
3	16,8	12,03	4,9	
4	17,2	12,02	5,4	
5	16,8	12,05	5,4	

Вариант 7

№	x_i	y_i	z_i	F
1	6,11	5	0,13	$F = xy^{-2} + xz^2$
2	6,08	4	0,14	
3	6,09	5	0,16	
4	6,11	3	0,11	
5	6,12	6	0,09	

Вариант 8

№	x_i	y_i	z_i	F
1	18,2	5,3	2,11	$F = 5zxy^{-2}$
2	18,3	5,0	2,08	
3	18,4	5,4	2,09	
4	18,2	5,3	2,15	
5	17,9	5,2	2,12	

Вариант 9

№	x_i	y_i	z_i	F
1	2,34	3,06	20,51	$F = \frac{2zx}{y} + 5y^2$
2	2,37	3,07	20,48	
3	2,35	3,08	20,54	
4	2,34	3,08	20,55	
5	2,36	3,04	20,52	

Вариант 10

№	x_i	y_i	z_i	F
1	0,01	6,15	12,02	$F = \frac{2zx}{y} + z^2y$
2	0,01	6,15	12,06	
3	0,03	6,18	12,03	
4	0,02	6,11	12,05	
5	0,01	6,14	12,05	

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. Латышенко, К.П. Общая теория измерений [Электронный ресурс]/ Латышенко К.П.— Электрон. текстовые данные.— Саратов: Вузовское образование, 2013.— 300 с.— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/20398.— ЭБС «IPRbooks».
2. Бубнов, В.А. Физический практикум (механика, электричество и магнетизм) [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Бубнов В.А., Низамов А.Ж., Скрыпник Н.Н.— Электрон. текстовые данные.— М.: Московский городской педагогический университет, 2010.— 294 с.— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/26646.— ЭБС «IPRbooks».
3. Измерение физических величин. Лабораторный практикум по физике [Электронный ресурс]: учебное пособие/ В.Н. Холявко [и др.].— Электрон. текстовые данные.— Новосибирск: Новосибирский государственный технический университет, 2012.— 60 с.— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/45088.— ЭБС «IPRbooks».

Дополнительная

1. Фокин С.А. Обработка результатов измерений физических величин [Электронный ресурс]: учебное пособие для лабораторного практикума по физике/ Фокин С.А., Бармасова А.М., Мамаев М.А.— Электрон. текстовые данные.— СПб.: Российский государственный гидрометеорологический университет, 2009.— 63 с.— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/17948.— ЭБС «IPRbooks».
2. Шклярова Е.И. Обработка результатов многократных измерений. Критерии исключения грубых погрешностей [Электронный ресурс]: методические рекомендации/ Шклярова Е.И.— Электрон. текстовые данные.— М.: Московская государственная академия водного транспорта, 2011.— 17 с.— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/46288.— ЭБС «IPRbooks».

3. Шклярова Е.И. Погрешности измерений. Обработка результатов однократных и многократных измерений [Электронный ресурс]: учебное пособие по части курса/ Шклярова Е.И.— Электрон. текстовые данные.— М.: Московская государственная академия водного транспорта, 2009.— 29 с.— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/46505.— ЭБС «IPRbooks».
4. Яворский, Б.М. Справочник по физике для инженеров и студентов вузов [Текст] / Б.М.Яворский, и др. – 8-е изд., перераб. и испр. –М.:Оникс: Мир и Образование, 2007. – 1055 с.

Ольга Владимировна Козачкова,

доцент кафедры физики АмГУ,

канд. пед. наук

Обработка результатов измерений. *Учебно-методическое пособие.*

Заказ 82.