Министерство образования и науки РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
(ФГБОУ ВО «АмГУ»)

ТЕОРИЯ ИГР
сборник учебно-методических материалов
для направления подготовки 38.03.05 «Бизнес-информатика»

Благовещенск, 2017

Печатается по решению
редакционно-издательского совета
факультета математики и информатики
Амурского государственного
университета

Составитель: Акилова И.М.

Теория игр: сборник учебно-методических материалов для направления подготовки для направления подготовки 38.03.05 «Бизнес информатика». – Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2017.

1. Краткое изложение лекционного материала

Содержание теории игр

Теория игр (GT - Game Theory) - это раздел теории управления, в котором исследуются задачи о существовании и нахождении оптимального управления в ***условиях конфликта*** (в условиях столкновения сторон, каждая из которых стремится воздействовать на развитие конфликта в своих интересах).

Существует множество определений того, что есть GT и каковы ее задачи.

«Теория игр — это теория рационального поведения людей с несовпадающими интересами» (Aumann, 1989).

«Теория игр — наука о стратегическом мышлении» (Dixit, Nalebuff, 1991).

«Теория игр — это теория математических моделей принятия решений в условиях неопределенности, когда принимающий решение «игрок» располагает информацией лишь о множестве возможных ситуаций, в одной из которых он в действительности находится, о множестве решений («стратегий»), которые он может принять, и о количественной мере «выигрыша», который он мог бы получить, выбрав в данной ситуации данную стратегию».

Неопределенность в GT является следствием сознательной деятельности другого лица (лиц), отстаивающего свои интересы. В связи с этим под «***теорией игр*** понимается теория мат. моделей принятия оптимальных решений в условиях конфликтов» (Воробьев, 1984).

Таким образом, ***содержание теории игр*** - это установление принципов оптимального поведения в условиях неопределенности, доказательство существования решений, удовлетворяющих этим принципам, указание алгоритмов нахождения решений.

Моделями GT описываются экономические и правовые конфликты, взаимодействие человека с природой, биологическая борьба за существование, военное дело и т. д.

Теоретико-игровой подход к изучению формирования коалиций является своего рода традицией в социальных и политических науках. В книге «Game Theory and the Law» (1994) аппарат GT впервые применяется к анализу того, как законы влияют на поведение людей, партий и т.д.

Особая роль теории игр выделяется в экономическом моделировании: «Суть ***теории игр*** в том, чтобы помочь экономистам понимать и предсказывать то, что будет происходить в экономическом контексте» (1990). «Аппарат теории равновесия и ***теории игр*** послужил основой для создания современных теорий международной торговли, налогообложения, общественных благ, монетарной экономики, теории производственных организаций» (1997).

Предмет теории игр

Теория игр является частью теории принятия решений. В теории принятия решений у лица, принимающего решения (сокращенно ЛПР), имеется ряд альтернатив и его целью является выбор наилучшей альтернативы, принятие *оптимального решения.* Значительная часть задач принятия решений для отыскания оптимального решения допускает применение математических методов. Различают задачу оптимизации – принятие оптимального решения одним ЛПР в бесконфликтной ситуации – и задачу теории игр, занимающуюся отысканием оптимальных решений для нескольких ЛПР, называемых в данном случае игроками, в рамках их конфликтного взаимодействия, обусловленного несовпадением их интересов.

Теория игр представляет собой математическую теорию конфликтных ситуаций. Ее цель – выработка рекомендаций по разумному поведению участников конфликта.

Каждая непосредственно взятая из практики конфликтная ситуация очень сложна, и ее анализ затруднен наличием привходящих, несущественных факторов. Чтобы сделать возможным математический анализ конфликта, строится его математическая модель, Такую модель называют игрой.

От реального конфликта игра отличается тем, что ведется по определенным правилам. Эти правила указывают «права и обязанности» участников, а также исход игры – выигрыш или проигрыш каждого участника в зависимости от сложившейся обстановки. Человечество издавна пользуется такими формализованными моделями конфликтов – «играми» в буквальном смысле слова (шашки, шахматы, карточные игры и т. п). Отсюда и название «теории игр», и ее терминология: конфликтующие стороны условно называются «игроками», одно осуществление игры – «партией», исход игры – «выигрышем» или «проигрышем». Мы будем считать, что выигрыши (проигрыши) участников имеют количественное выражение (если это не так, то всегда можно им его приписать, например, в шахматах считать «выигрыш» за единицу, «проигрыш» — за минус единицу, «ничью» — за нуль).

В игре могут сталкиваться интересы двух или более участников. Участники множественной игры могут образовывать коалиции (постоянные или временные). Одна из задач теории игр – выявление разумных коалиций во множественной игре и правил обмена информацией между участниками. Множественная игра с двумя постоянными коалициями, естественно, обращается в парную.

Теория игр условно делится на некооперативную и кооперативную части. В первой субъектом принятия решений служит индивид, во второй – коалиция игроков. В первой индивид характеризуется стратегиями и предпочтениями, во второй исходным материалом служат возможности коалиций. В первой индивиды принимают решения независимо (что не исключает переговоров между ними), во второй допускается возможность обязывающих соглашений.

Анализ конфликтной ситуации начинается с построения формальной модели, т.е. превращения ее в игру. Есть несколько разных способов представления игры. Наиболее важные – развернутая (экстенсивная, или позиционная) и стратегическая (нормальная) формы.

Представление игры в развернутой форме рассмотрим на примере.

Пример: Игра со спичками

На столе лежат 6 спичек. 2 игрока по очереди берут по одной или по две спички. Тот, кто возьмет последним 1 или 2 спички, тот победил. Игру можно представить в виде следующего дерева игры:

Это развернутая форма представления игры. Каждому конечному пункту, отмеченному квадратиком, соответствует один исход игры. В этой игре возможны 13 исходов. Представим в качестве примера по одной из стратегий каждого игрока.

<u>Нормальная форма игры</u>

Определение. Под ***игрой в нормальной (или стратегической) форме*** понимается объект

$$G=\{N, X_1, \ldots, X_n, K_1, \ldots, K_n\},$$

где

$N=\{\overline{1,n}\}$ - множество игроков;

X_i - конечное множество ***чистых стратегий*** x_i i-го игрока, $i \in N$;

x_i - чистая стратегия i-го игрока , $i \in N, x_i \in X_i$;

$K_i(x_1, \ldots, x_n)$ - вещественная функция выигрышей игрока i, определенная на декартовом произведении $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$.

Набор стратегий $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $x \in X$, называется ***ситуацией игры.***

Рассмотрим простейшую статическую модель - игру в нормальной форме

$$\begin{pmatrix} (\alpha_{11},\beta_{11}) & \dots & (\alpha_{1n},\beta_{n1}) \\ \dots & \dots & \dots \\ (\alpha_{m1},\beta_{m1}) & \dots & (\alpha_{mn},\beta_{mn}) \end{pmatrix}$$

в которой имеем:

участие двух игроков $N = \{1,2\}$,

конечное множество стратегии каждого из игроков:

$X_1 = \{i / i = \overline{1,m}\}$стратегии первого игрока;

$X_2 = \{j / j = \overline{1,n}\}$ - стратегии второго игрока;

ситуация игры - пара стратегий (i, j);

$K_1(i, j) = \alpha_{i,j}$ - выигрыш первого игрока и $K_2(i, j) = \beta_{i,j}$ - выигрыш второго игрока.

Такая игра называется ***биматричной,*** т.к. ее можно представить в виде двух матриц:

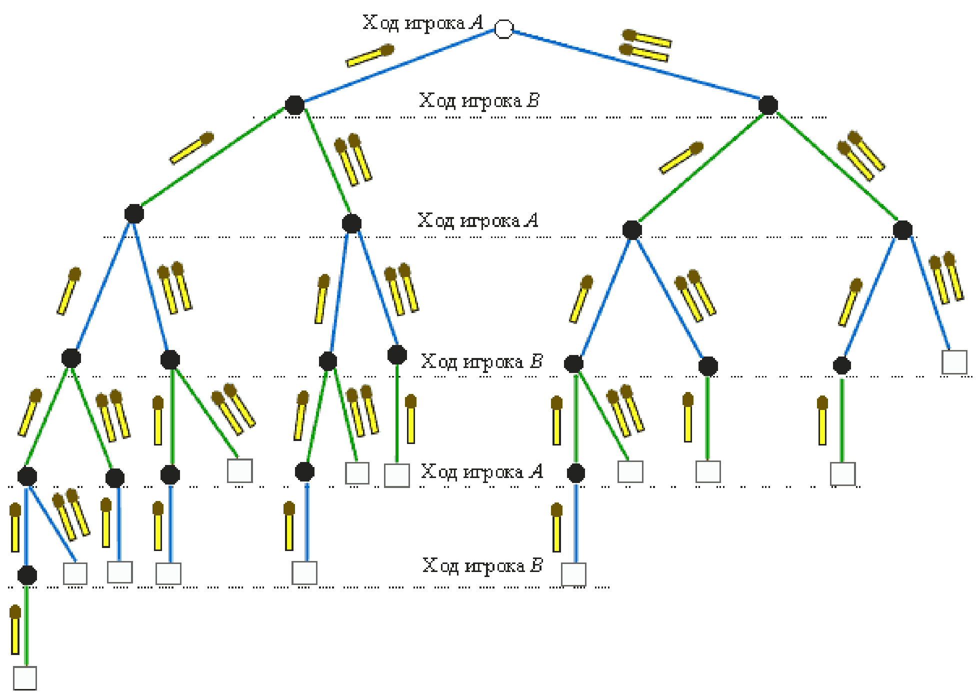
$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} u \begin{pmatrix} \beta_{11} & \dots & \beta_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \beta_{m1} & \dots & \beta_{mn} \end{pmatrix}$$

В игре могут участвовать несколько игроков. Можно давать игрокам имена, однако в общетеоретическом плане это неудобно. Игроков принято нумеровать и в качестве обозначения игрока использовать его номер. Таким образом, одним из элементов игры является множество игроков $N = \{1,...,n\}$, где n – номер последнего игрока (или количество игроков). Каждый игрок $i \in N$ имеет множество *стратегий* (действий, альтернатив) X_i. Стратегией игрока называется совокупность правил, определяющих выбор варианта действий при каждом личном ходе в зависимости от сложившейся ситуации.

Оптимальной стратегией игрока называется такая, которая обеспечивает ему наилучшее положение в данной игре, т. е. максимальный выигрыш. Если игра повторяется неоднократно и содержит, кроме личных, еще и случайные ходы, оптимальная стратегия обеспечивает максимальный средний выигрыш.

Задачей игрока является выбор конкретной стратегии $x_i \in X_i$. Если каждый из игроков осуществил свой выбор, то говорят, что реализовался *исход* игры. Исходы имеют для игроков разную ценность. Рациональный игрок должен стремиться к достижению как можно более благоприятного для себя исхода. Однако никакой игрок не в состоянии обеспечить наилучший для себя исход только за счет собственных действий. Принимая решение о выборе действия, он должен учитывать интересы и возможные действия других игроков, влияющие на исход игры. В этом состоит отличие теоретико-игровой постановки задачи принятия решений от задачи оптимизации.

В общем случае неравноценность исходов описывается при помощи *систем предпочтений игроков.* В частном случае предполагают, что каждый игрок имеет свою *функцию полезности*, областью определения которой является множество исходов, а множеством значений - множество действительных чисел.



Задача теории игр

Задача теории игр – выявление оптимальных стратегий игроков. Основное предположение, исходя из которого находятся оптимальные стратегии, состоит в том, что противник (в общем случае – противники) по меньшей мере так же разумен, как и сам игрок, и делает все для того, чтобы добиться своей цели. Расчет на разумного противника – лишь одна из возможных позиций в конфликте, но в теории игр именно она кладется в основу.

Основная задача некооперативной теории игр заключается в том, чтобы дать ответ на вопрос: что же произойдет в каждой конкретной игре, как она будет разыграна? Иначе говоря, какую (или какие) стратегию $x_i \in X_i$ выберет каждый игрок *i*? Чем закончится игра (каковы будут выигрыши игроков)? Игра может происходить в самой различной информационной обстановке. Игроки могут иметь неполную или неточную информацию о функциях выигрышей своих партнеров. Они могут обмениваться или нет информацией перед игрой (например, о своих намерениях), могут заключать или не заключать какие-то соглашения и т.д. и т.п. Следуя логике развития от простого к сложному, теория игр поставила в качестве первой задачи решение вопроса о том, как должны действовать *изолированные* игроки и в игре с *полной* информацией? При этом (молчаливо или явно) исходят из следующих предположений:

A. Каждый игрок стремится максимизировать свой выигрыш.

B. Каждый из игроков имеет полную информацию об игре.

C. Свои стратегии игроки выбирают одновременно и независимо.

D. Игра играется однократно.

Классификация игр

Все модели в GT принято называть играми. Математическое описание игры сводится к перечислению всех действующих в ней игроков, указанию для каждого игрока всех его стратегий, а также численного выигрыша, который он получит после того, как игроки выберут свои стратегии. В результате игра становится формальным объектом, который поддается математическому анализу.

Игры можно классифицировать по различным признакам:

1. **по числу «игроков» (сторон)** $|N| \geq 2$;

2. **по числу ходов в игре:**

многошаговые,

бесконечные,

3. **математической структуре модели игры:**

рекурсивные,

дифференциальные,

4. **по числу стратегий игры:**

конечные,

бесконечные, если хотя бы у одного «игрока» число стратегий бесконечно;

5. **по взаимоотношениям игроков:**

кооперативные (коалиционные), в которых принимающие решение игроки объединены в фиксированные коалиции. Члены одной коалиции могут свободно обмениваться информацией и принимать полностью согласованные решения. Игроки могут вступать в коалицию и договариваться о совместных действиях.

бескоалиционные, в которых каждая коалиция или множество игроков, действующих совместно, состоит лишь из одного игрока. *Теория бескоалиционных игр* - это способ моделирования и анализа ситуаций, в которых оптимальные решения каждого игрока зависят от его представлений об игре оппонентов. Важнейшим моментом теории является то, что игроки не должны придерживаться *произвольных* представлений об игре своих оппонентов: каждый игрок должен пытаться предсказать игру своих оппонентов, используя свои знания правил игры и исходя из предположений, что его оппоненты сами рациональны, а потому пытаются сами также предсказать игру своих оппонентов и максимизировать свои собственные выигрыши. Однако так называемая *кооперативная теория бескоалиционных игр* допускает временные объединения игроков в коалиции в процессе игры с последующим разделением полученного выигрыша или принятие совместных решений;

6. **по степени информативности «игроков» в игре:**

детерминированные, когда условия, в которых принимаются решения, известны полностью;

стохастические, когда известно множество возможных вариантов условий и их вероятностное распределение;

неопределенные, когда известно множество возможных вариантов, но без какой-либо информации об их вероятностях;

7. **по выигрышу игры:**

антагонистические,

игры с ненулевой суммой,

8. **по характеру получения информации:**

статические игры или *игры в нормальной форме* (игроки получают всю предназначенную им информацию до начала игры и ходят один раз, одновременно и независимо);

динамические игры или *игры в позиционной форме* (информация поступает игрокам в процессе развития игры);

9. **по полноте имеющейся у игроков информации:**

статические игры с полной информацией предполагают, что у игроков имеется вся «необходимая» информация друг о друге, включая выигрыши игроков;

если игрок знает свою функцию выигрыша, но может не знать функций выигрыша остальных игроков, то тогда участники должны иметь какие-то представления относительно предпочтений других участников, должны иметь представления об их представлениях о предпочтениях других и т.д. Здесь мы приходим к понятию Байесовых игр (***статические игры с неполной информацией);***

динамические игры с полной информацией и неполной информацией.

Лекция №2

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КОНЕЧНЫХ ИГР

Пусть имеется игра m х n без седловой точки с матрицей a_{ij}

B_j / A_i	B_1	B_2	…	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…
A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}

Теорема 1. Оптимальные смешанные стратегии S_A^* и S_B^* соответственно игроков А и В в матричной игре $(a_{ij})_{m\times n}$ с ценой γ будут оптимальными и в матричной игре $\left(ba_{ij}+c\right)_{m\times n}$ с ценой $\gamma' = b\gamma + c$, где $b>0$.

Допустим, что все выигрыши a_{ij} положительны (этого всегда можно добиться, прибавляя ко всем чле-
нам матрицы достаточно большое число *M;* от этого цена игры увеличится на *M,* а решение S_A^*, S_B^* не изменится). Если все a_{ij} положительны, то конечно, и цена игры, т. е. средний выигрыш при оптимальной стратегии, тоже положителен: $\gamma > 0$.

Теорема 2. Всякая матричная игра с нулевой суммой имеет решение в смешанных стратегиях.

Теорема 3. Для того чтобы смешанные стратегии $S_A^*=(p_1,p_2,\ldots p_m)$ и $S_B^*=(q_1,q_2,\ldots q_n)$ были оптимальными для игроков А и В в игре с матрицей $(a_{ij})_{m\times n}$ и выигрышем γ, необходимо и достаточно выполнение неравенств

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i \ge \gamma, \quad j=\overline{1,n};$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \le \gamma, \quad i=\overline{1,m}$$

Следствия.

1. Если игрок А применяет оптимальную смешанную стратегию S_A^*, а игрок В любую чистую стратегию B_j, $j=\overline{1,n}$, то выигрыш игрока А будет не меньше цены игры γ.

2. Если игрок В использует оптимальную смешанную стратегию S_B^*, а игрок А – любую чистую стратегию A_i, $i=\overline{1,m}$, то проигрыш игрока В будет не превысит цену игры γ.

Мы хотим найти решение игры, т. е. две оптимальные смешанные стратегии

$$S_A^*=(p_1,p_2,\ldots p_m). \; S_B^*=(q_1,q_2,\ldots q_n). \qquad (1)$$

дающие каждой стороне максимально возможный для нее средний выигрыш (минимальный проигрыш).

Найдем сначала S_A^*. Мы знаем, что если один из игроков (в данном случав это *А)* применяет свою оптимальную стратегию, то другой *(В)* не может улучшить свое положение, отступая от своей. Заставим противника *(В)* отступать от своей оптимальной стратегии, пользуясь чистыми стратегиями B_1, B_2, ..., B_n (а мы тем временем упорно держимся стратегии S_A^**)*. В любом случае наш выигрыш будет не меньше, чем γ *:*

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \ldots + a_{m1}p_m \geq \gamma, \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \ldots + a_{m2}p_m \geq \gamma, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + \ldots + a_{mn}p_m \geq \gamma, \end{cases} \qquad (2)$$

Разделим неравенства (2) на положительную величину γ и введем обозначения:

$$x_1 = \frac{p_1}{\gamma}, \quad x_2 = \frac{p_2}{\gamma}, \ldots, x_m = \frac{p_m}{\gamma}. \qquad (3)$$

Тогда условия (2) примут вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{m1}x_m \geq 1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{m2}x_m \geq 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{mn}x_m \geq 1, \end{cases} \qquad (4)$$

$x_1, x_2, \ldots, x_m$ — неотрицательные переменные. В силу (3) и того, что $p_1 + p_2 + \ldots + p_m = 1$, переменные $x_1, x_2, \ldots, x_m$ удовлетворяют условию

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = \frac{1}{\gamma} \qquad (5)$$

Но γ есть не что иное, как наш гарантированный выигрыш; естественно, мы хотим сделать его

максимальным, а значит, величину $\frac{1}{\gamma}$ - минимальной.

Таким образом, задача решения игры свелась к математической задаче: найти неотрицательные значения переменных $x_1\ x_2, \ldots, x_m$ такие, чтобы они удовлетворяли линейным ограничениям-неравенствам (4) и обращали в минимум линейную функцию этих переменных:

$$L = x_1 + x_2 + \ldots + x_m \Rightarrow \min \qquad (6)$$

Таким образом, задача решения игры m x n свелась к задаче линейного программирования с n ограничениями-неравенствами и m переменными. Зная $x_1, x_2, \ldots, x_m$ можно по формулам (3) найти $p_1, p_2, \ldots, p_m$ и, значит, оптимальную стратегию S_A^* и цену игры γ.

Оптимальная стратегия игрока B находится совершенно аналогично, с той разницей, что B стремится минимизировать, а не максимизировать выигрыш, а значит, обратить не в минимум, а в максимум величину $\frac{1}{\gamma}$, а в ограничениях-неравенствах вместо знаков $\geq$ будут стоять $\leq$. Пара задач линейного программирования, по которой находятся оптимальные стратегии $(S_A^*,\ S_B^*)$, называется парой двойственных задач линейного программирования (доказано, что максимум линейной функции в одной из них равен минимуму линейной функции в другой, так что все в порядке — разных значений цены игры мы не получим).

Таким образом, решение игры m x n эквивалентно решению задачи линейного программирования. Нужно заметить, что и наоборот,— для любой задачи линейного программирования может быть построена эквивалентная ей задача теории игр. Эта связь задач теории игр с задачами линейного программирования оказывается полезной не только для теории игр, но и для линейного программирования. Дело в том, что существуют приближенные численные методы решения игр, которые в некоторых случаях (при большой размерности задачи) оказываются проще, чем «классические» методы линейного программирования.

Опишем один из самых простых численных методов решения игр — так называемый метод итераций (иначе — метод Брауна — Робинсон). Идея его в следующем. Разыгрывается «мысленный эксперимент», в котором стороны *A и B* поочередно применяют друг против друга свои стратегии, стремясь выиграть побольше (проиграть поменьше). Эксперимент состоит из ряда «партий» игры. Начинается он с того, что один из игроков (скажем, *A)* выбирает произвольно одну из своих стратегий A_i. Противник *(B)* отвечает ему той из своих стратегий B_j, которая хуже всего для *A,* т. е. обращает его выигрыш при стратегии A_i в минимум. Дальше снова очередь *A* — он отвечает *B* той своей стратегией A_k, которая дает максимальный выигрыш при стратегии B_j, противника. Дальше — снова очередь противника. Он отвечает нам той своей стратегией, которая является наихудшей не для последней, примененной нами, стратегии $A_к$, а для смешанной стратегии, в которой до сих пор примененные стратегии A_i, $A_к$ встречаются с равными вероятностями. И так далее: на каждом шаге итерационного процесса каждый игрок отвечает на очередной ход другого *той своей стратегией, которая является оптимальной для него относительно смешанной стратегии другого, в которую все примененные до сих пор стратегии входят пропорционально частотам их применения.* Вместо того чтобы вычислять каждый раз средний выигрыш, можно пользоваться просто «накопленным» за предыдущие ходы выигрышем и выбирать ту свою стратегию, при которой этот накопленный выигрыш максимален (минимален). Доказано, что такой метод сходится: при увеличении числа «партий» средний выигрыш на одну партию будет стремиться к цене игры, а частоты применения стратегий — к их вероятностям в оптимальных смешанных стратегиях игроков.

Бескоалиционные игры

Бескоалиционная теория игр — это способ моделирования и анализа ситуаций, в которых оптимальное решение каждого игрока зависит от его представлений или ожиданий от действий (игры) его оппонентов (партнеров). Важнейшей чертой этой теории является то, что она "настаивает" на том, что игроки не должны иметь произвольных представлений относительно игры своих оппонентов. Напротив, каждый игрок должен пытаться предсказать игру своих оппонентов, используя свое знание правил игры и предположения, что его оппоненты рациональны, и поэтому пытаются сделать свои предсказания и максимизировать свои выигрыши.

Бескоалиционность понимается в том смысле, что группам игроков (“коалициям”) не приписывается ни каких-либо интересов, за исключением тех, которые вытекают из интересов отдельных игроков. Целью каждого игрока в такой игре является только получение по возможности наибольшего индивидуального выигрыша.

Определение 1. Бескоалиционной игрой называется игра N игроков ($N \geq 2$), каждый из которых имеет множество стратегий X_i, с функцией выигрыша $H_i(x)$, $i=\overline{1,N}$, где $x \in X$ – ситуация, задаваемая на множество X декартового произведения стратегий X_i.

Определение 2. Бескоалиционная игра называется игрой с постоянной суммой, если существует такое постоянное С, что $\sum_{i \in N} H_i(x) = C$, для всех ситуаций $x \in X$.

Определение 3. Конечная бескоалиционная игра двух игроков с ненулевой суммой называется биматричной игрой.

Смешанная стратегия σ_i — это вероятностное распределение на множестве *чистых* стратегий S_i.

Будем обозначать пространство смешанных стратегий i -ого игрока через Σ_i, $\sigma_i(s_i)$ — вероятность того, что выбирается стратегия s_i. Пространство наборов смешанных стратегий — $\Sigma = \prod_{i \in I} \Sigma_i$, элементы которого мы будем обозначать через σ. *Носитель* смешанной стратегии σ_i — это множество тех чистых стратегий, которым "приписана" положительная вероятность.

Определение 4: *Если S_i — конечное множество чистых стратегий игрока i, то смешанная стратегия $\sigma_i : S_i \to [0,1]$ ставит в соответствие каждой чистой стратегии $s_i \in S_i$ вероятность $\sigma_i(s_i) \geq 0$ того, что она будет играться, причем $\sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) = 1$.*

Выигрыш игрока *i*, соответствующий профилю (набору) стратегий σ, есть

$$u_i(\sigma) = \sum_{s \in S} \left(\prod_{j=1}^{n} \sigma_j(s_j) \right) u_i(s)$$

(1)

Определение 5: *Смешанным расширением игры Г = {I, S, u} называется игра $\overline{\Gamma} = \{I, \Sigma, u\}$, где $\Sigma = \prod_{i \in I} \Sigma_i$, а $u(\sigma)$, где $\sigma \in \Sigma$ определяется равенством (1).*

Игры двух лиц с произвольной суммой

В конечной бескоалиционной игре двух игроков (КБИДИ) каждый из них делает один ход – выбирает одну стратегию из имеющегося у него конечного числа стратегий, и после этого он получает свой выигрыш согласно определённым для каждого из них матрицами выигрышей. Другими словами КБИДИ полностью определяется двумя матрицами выигрышей для двух игроков. Пусть у игрока 1 имеется *m* стратегий, $i = \overline{1, m}$, у игрока 2 имеется *n* стратегий, $j = \overline{1, n}$. Выигрыши игроков 1 и 2 соответственно задаются матрицами

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

Используют также запись платежных матриц А и В в следующем виде:

a_{11} b_{11}	....	a_{1n} b_{1n}
....	....	....
a_{m1} b_{m1}	....	a_{mn} b_{mn}

,

Будем считать полный набор вероятностей $x = (x_1, \ldots, x_m)$ применения 1 игроком своих чистых стратегий смешанной стратегией игрока 1, и $y = (y_1, \ldots, y_n)$ – смешанной стратегией игрока 2. тогда средние выигрыши игроков 1 и 2 соответственно равны

$$\begin{cases} E(A, x, y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j = xAy^T \\ E(B, x, y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_i y_j = xBy^T \end{cases} \qquad (1)$$

Ситуация равновесия для биматричной игры составляет пару (*x,y*) таких смешанных стратегий игроков 1 и 2, которые удовлетворяют неравенствам:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \le \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j \quad (i=\overline{1,m}) & (2) \\ \sum_{i=1}^{m} b_{ij} x_i \le \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_i y_j \quad (j=\overline{1,n}) & (3) \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} Ay^T \le xAy^T = E_1(A,x,y) & (4) \\ xB \le xBy^T = E_2(B,x,y) & (5) \end{cases}$$

Для определения ситуаций равновесия необходимо решить систему неравенств (2) и (3) относительно неизвестных $x = (x_1, ..., x_m)$ и $y = (y_1, ..., y_n)$ при условиях

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \quad \sum_{j=1}^{n} y_j = 1, \quad x_i \ge 0 \quad (i=\overline{1,m}), \quad y_j \ge 0 \quad (j=\overline{1,n}).$$

Теорема Нэша. В каждой бескоалиционной игре существует хотя бы одна ситуация равновесия в классе смешанных стратегий.

Заметим, что принципиальная важность теоремы Нэша ограничивается существованием ситуации равновесия. Непосредственно применять ее для нахождения таких ситуаций не удается.

Теорема 2. Конечная бескоалиционная игра имеет симметричные ситуации равновесия, в которых игроки, равноправно входящие в игру согласно ее условиям, фактически оказываются в одинаковом положении.

Ее применение позволяет избежать отдельных ошибок при решении конечных бескоалиционных игр.

Равновесие по Нэшу

Определение: *Набор стратегий* $s = (s_1, \ldots, s_n)$ *образует равновесие по Нэшу (или ситуация* $s = (s_1, \ldots, s_n)$ *является равновесной по Нэшу) в игре* $\Gamma = \{I, \{S_i\}, \{u_i\}\}$ *, если для любого* $i = 1, \ldots n$

$$u_i(s_i, s_{-i}) \ge u_i(s_i', s_{-i}) \quad \forall s_i' \in S_i$$

Иными словами, если игрок водиночку решает отклониться от выбранной стратегии, то он разве лишь ухудшит свое положение.

Пример. "Семейный спор". Этот пример также относится к числу традиционных примеров, различные вариации которого встречаются в большинстве учебников. История примерно такова. Он и Она независимо (мы оставляет в стороне вопрос о разумности или неразумности подобной постановки вопроса) решают, куда пойти — на балет (Б), или футбол (Ф). Если они вместе пойдут на футбол, то Он получит больше удовольствия, чем Она; если они вместе пойдут на балет, то — наоборот. Наконец, если они окажутся в разных местах, то они не получат никакого удовольствия. Рассматриваемая ситуация моделируется следующей игрой :

		ОНА	
		Ф	Б
О	Ф	(2;1)	(0;0)
Н	Б	(0;0)	(1;2)

Легко видеть, что здесь есть 2 равновесия по Нэшу в чистых стратегиях — (Ф,Ф) и (Б,Б).

Одним из простых классов бескоалиционных игр ход решения которых поддается элементарному описанию являются биматричные игры, представляющие собой бескоалиционную игру двух игроков с ненулевой суммой.

В качестве примера рассмотрим биматричную игру «Торг».

Пример. Игра «Торг»

Игрок 1 продает неделимый товар игроку 2. Игрок 1 должен решить, какую назначить цену: высокую или низкую. Для покупателя в принципе приемлемы обе цены. Покупатель не может спорить о цене, он может либо сделать покупку, либо отказаться от нее.

Платежные матрицы игроков имеют вид:

		Игрок 2			
		B_1 - покупка		B_2 - отказ	
Игрок 1	A_1 – Высокая цена	10	5	0	0
	A_2 – Низкая цена	5	10	0	0

Описание всех возможных ситуаций в этой игре позволяет определить, что ситуация (A_1, B_1) является оптимальной по Нэшу. Ситуация (A_2, B_2) не является устойчивой, т.е. оптимальной по Нэшу.

Равновесие по Нэшу в смешанных стратегиях

Пример. "Игра в орлянку" или "Орел или решка". 2 игрока одновременно, независимо выбирают либо "решку", либо "орла". Если их выбор различен, то первый игрок платит второму 1 рубль (доллар,...), если их выбор одинаков, то наоборот — второй платит первому столько же. Соответствующая игра имеет следующий вид:

	О	Р
О	(1,-1)	(-1,1)
Р	(-1,1)	(1,-1)

Легко видеть, что в этой игре нет равновесия по Нэшу в чистых стратегиях, так как в любой ситуации одному из игроков выгодно отклониться от выбранной стратегии. Однако, как мы увидим, пара смешанных стратегий $\sigma_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\sigma_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, в которых каждый из игроков играет свои чистые стратегии с равными вероятностями, образует равновесие по Нэшу в смешанных стратегиях.

Определение: *Ситуация (набор смешанных стратегий)* $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ *является равновесием по Нэшу в игре игре* $\overline{\Gamma}$ *= {I, {S_i}, {u_i}* , *если для любого i = 1,. . . n*

$$u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq u_i(\sigma_i^{'}, \sigma_{-i}) \quad \forall\ \sigma_i^{'} \in \Sigma_i$$

Предложение: *Пусть* $S_i^+ \subset S_i$ *— множество чистых стратегий, которые игрок i играет с положительной вероятностью в ситуации* $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$. *Ситуация* σ *является р.Н. в смешанном расширении* $\overline{\Gamma}$ *игры Г тогда и только тогда, когда для всех i* = 1,. . . , *n*

(1) $u_i(s_i, \sigma_{-i}) = u_i(s_i^{'}, \sigma_{-i}) \quad \forall \quad s_i, s_i^{'} \in S_i^+$

(2) $u_i(s_i, \sigma_{-i}) \geq u_i(s_i^{'}, \sigma_{-i}) \quad \forall \quad s_i S_i^+, \quad s_i^{'} \notin S_i^+$

Это свойство можно использовать для нахождения смешанного равновесия по Нэшу (т.е. равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях).

Пример. Рассмотрим следующую игру:

	A	*B*
A	(1000,1000)	(0,0)
B	(0,0)	(100,100)

Очевидно, что ситуации (А,А) и (В,В) являются равновесными по Нэшу (в чистых стратегиях). Найдем равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях. Предположим, что в таком равновесии игрок 1 играет смешанную стратегию (р, 1- р*)* , а второй — (q, 1 - q*)* , причем p>0, q<1.

Тогда, учитывая приведенное предложение мы, получаем, что ожидаемый выигрыш игрока 2 от игры *А* есть 1000р + 0(1 - р), а от игры *В* есть 100(1 – q)+0р, а значит

$$1000p+(1 - p)0= 100(1 - p) + 0\,p.$$

Отсюда 1100p = 100 и следовательно $p = 1/11$. Аналогично, $q = 1/11$.

Предложение: *В смешанном расширении* $\overline{\Gamma}$ *любой игры* Γ *с конечными множествами стратегий* $S_1, \ldots, S_n$ *существует равновесие по Нэшу в смешанных стратегиях.*

Лекция № 5

Позиционные игры

Теория бескоалиционных игр — это способ моделирования и анализа ситуаций, в которых оптимальные решения каждого участника (игрока) зависит от его представлений (или ожиданий) об игре его оппонентов. Важнейшим моментом теории является акцент на то, что игроки не должны придерживаться *произвольных* представлений об игре своих оппонентов. Напротив, каждый игрок должен пытаться предсказать игру своих оппонентов, используя свои знания правил игры и исходя из предположений, что его оппоненты — сами рациональны, а потому пытаются сами также предсказать игру своих оппонентов и максимизировать свои собственные выигрыши.

Есть два способа задания игры. Первый — это *позиционная форма* игры. Позиционная форма задает: (1) порядок ходов, (2) "альтернативы" (выбор), доступные игроку тогда, когда наступает очередь его хода; (3) информация, которую игрок имеет на каждом из его ходов; (4) выигрыши (всех) игроков, как функцию выбранных ходов; (5) вероятностные распределения на множестве ходов Природы.

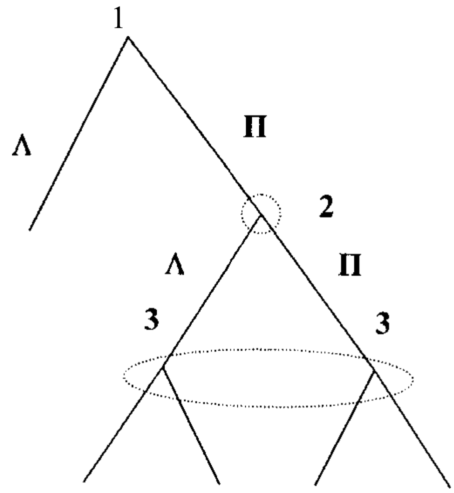


Рис. 1. Информационные множества отмечены пунктиром.
1, 2, 3 — номера игроков, имеющих право хода (здесь не указаны выигрыши в концевых вершинах дерева).

Позиционная форма представляется *деревом игры,* которое можно рассматривать как обобщение дерева принятия решений, используемое в теории принятия решений, на случай нескольких игроков. Информация, которую имеют игроки, описывается с помощью информационных множеств. (См. рис. 1). Если две вершины лежат в одном информационном множестве, то это означает, что игрок (в данном случае 3) не может сказать, какое из двух действий (Л или П) в действительности произошло (в этом смысле игрок не различает вершины дерева, лежащие в одном информационном множестве).

Рассмотрим: первый игрок выбирает одну из трех цифр — 1,2 или 3. Затем второй игрок, не зная выбора первого игрока, также выбирает одну из трех цифр — 1, 2, 3. Если сумма выбранных цифр четна, то первый игрок выигрывает у второго один рубль (доллар, фунт ...). Если сумма — нечетная, то наоборот — выигрывает второй. Дерево соответствующей игры изображено на рис.2.

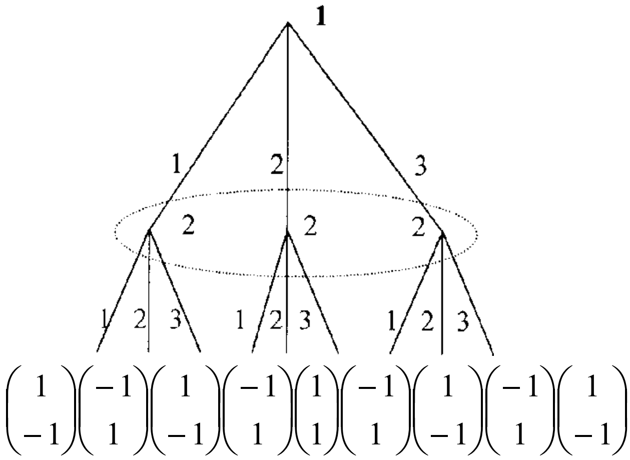


Рис. 2. В концевых вершинах указаны выигрыши игроков.

На рис.3 изображена модификация этой игры, в которой второму игроку становится известно либо, что первый игрок выбрал цифру 2, либо, напротив, что цифру 2 он не выбрал.

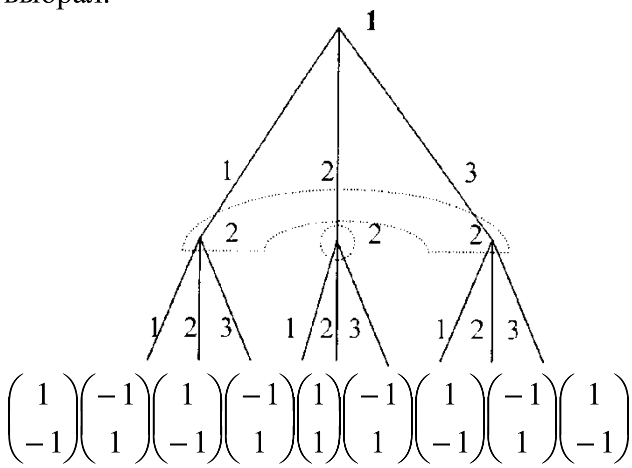


Рис. 3.

Информационную структуру игры можно охарактеризовать несколькими способами. Первый подразделяет игры на игры с совершенной и игры с несовершенной информацией.

В игре с совершенной информацией каждый игрок всегда знает точно, в каком месте дерева игры он находится, нет одновременных ходов, и все игроки наблюдают ходы Природы (если таковые есть).

В игре с <u>*неполной информацией*</u> *Природа делает ход первой и он ненаблюдаем по крайнем мере одним из игроков. В противном случае игра является игрой с полной информацией.*

Игра с неполной информацией является игрой с несовершенной информацией, так как информационные множества некоторых игроков содержат более одной вершины.

Определение: *Игра в позиционной форме называется игрой с совершенной информацией, если каждое информационное множество состоит из единственной вершины. В противном случае игра называется игрой с несовершенной информацией.*

Теорема: *В конечной игре с совершенной информацией существует равновесие по Нэшу в чистых стратегиях.*

Стратегия — это полный возможный план, который описывает то, как игрок будет действовать в каждых возможных обстоятельствах, когда ему, может быть, придется ходить.

Игры с совершенной памятью

Говорят, что игрок обладает *совершенной памятью,* если любые две его позиции из одного информационного множества имеют одно и то лее множество предшествующих ходов данного игрока.

Позиционная игра называется *игрой с совершенной памятью,* если все участвующие в ней игроки обладают совершенной памятью.

В игре на рис. 4 сначала подбрасывается монета, чтобы определить, какой из двух игроков должен делать ход первым. Затем игроки последовательно делают по ходу. У каждого из игроков две альтернативы: *Л* — пойти влево, *П*— пойти вправо. Несмотря на странную форму дерева игры с пересекающимися дугами (мы могли бы избежать пересечения дуг, но тогда пересекались бы границы информационных множеств, что выглядело бы еще хуже), данная игра есть игра с совершенной памятью, поскольку любой позиции каждого из игроков не предшествуют ходы данного игрока.

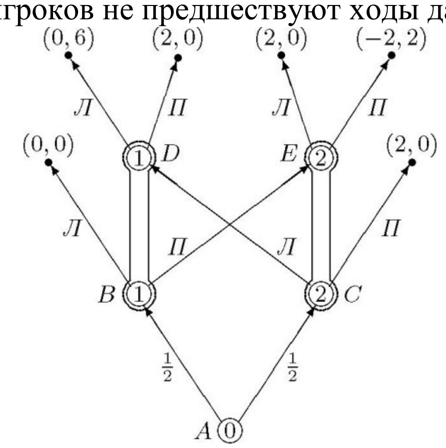


Рис. 4. Игра, в которой очередность ходов определяется подбрасыванием монеты

Несовершенная память игроков создает трудности при интерпретации игры и противоречит постулату о разумности игроков (разумный игрок должен найти способ запомнить ходы, сделанные им ранее). Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать только игры с совершенной памятью.

Поведенческие стратегии

Поведенческой стратегией игрока называется набор вероятностей, приписанный всем его ходам (дугам), при этом, сумма вероятностей на дугах выходящих из заданной позиции равна 1, а вероятности на дугах, представляющих один ход в некотором информационном множестве, равны между собой.

В игре на рис. 5 числа на дугах дерева игры задают поведенческие стратегии обоих игроков.

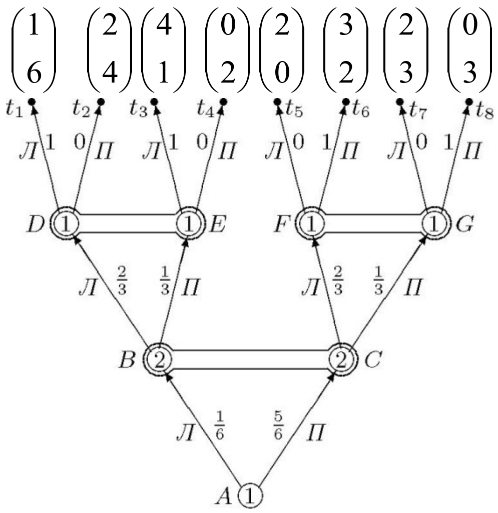


Рис. 5. Игра с заданными поведенческими стратегиями игроков

В начальной позиции A $\left(I_1^{(1)} = \{A\}\right)$ игрок 1 выбирает один из своих двух ходов случайным образом: ход *Л* (пойти влево) — с вероятностью 1/6, а ход *П* (пойти в право)

— с вероятностью 5/6. Когда игра достигнет любой позиции информационного множества $\left(I_1^{(2)} = \{B, C\}\right)$, игрок 2 также выберет свой ход случайным образом: ход *Л*— с вероятностью 2/3, а ход *П*— с вероятностью 1/3. Если игра достигнет позиции информационного множества $\left(I_2^{(1)} = \{D, E\}\right)$, игрок 1 выберет ход *Л,* а если игра достигнет позиции информационного множества $\left(I_3^{(1)} = \{F, G\}\right)$,игрок 1 выберет ход *П*. В рассматриваемой игре у игрока 1 имеется восемь стратегий:
ЛЛЛ, ЛЛП, ЛПЛ, ЛПП, ПЛЛ, ПЛП, ППЛ, ППП,
где первая из трех букв указывает ход в позициях информационного множества $\left(I_1^{(1)}\right)$, вторая — в позициях множества $\left(I_2^{(1)}\right)$, а третья — в позициях множества $\left(I_3^{(1)}\right)$. *У* игрока 2 — всего две стратегии: *Л* и *П.*

Любая поведенческая стратегия — это всего лишь более удобное представление некоторой смешанной стратегии игрока. Так какую же смешанную стратегию игрока 1 определяет его поведенческая стратегия в игре на рис. 5? Чтобы задать эту смешанную стратегию, нужно указать вероятности применения игроком его восьми чистых стратегий. Эти вероятности вычисляются очень просто. Для примера, вероятность применения игроком чистой стратегии *ЛЛЛ* равна произведению трех вероятностей:

1) вероятности того, что в позициях информационного множества $\left(I_1^{(1)}\right)$ игрок 1 сделает ход *Л,* эта вероятность равна 1/6;

2) вероятности того, что в позициях информационного множества $\left(I_2^{(1)}\right)$ игрок 1 сделает ход *Л,* эта вероятность равна 1;

3) вероятности того, что в позициях информационного множества $\left(I_3^{(1)}\right)$ игрок 1 сделает ход *Л,* эта вероятность равна 0.

Следовательно, $P^0_{ЛЛЛ} = 0$. Аналогично вычисляются и все остальные вероятности, среди которых ненулевые только две:

$$P^0_{ЛЛП} = \frac{1}{6} \quad \textit{и} \quad P^0_{ПЛП} = \frac{5}{6}$$

Поскольку у игрока 2 всего одно информационное множество, то его поведенческая стратегия определяет его смешанную стратегию тривиальным образом: $q^0 = \left(q^0_Л, q^0_П\right)^T = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)^T$.

Стратегическая форма рассматриваемой позиционной игры есть следующая биматричная игра:

	Л	П
ЛЛЛ	1,6	4,1
ЛЛП	1,6	4,1
ЛПЛ	2,4	0,2
ЛПП	2,4	0,2
ПЛЛ	2,0	2,3
ПЛП	3,2	0,3
ППЛ	2,0	2,3
ППП	3,2	0,3

Можно легко проверить, что пара $\left(p^0, q^0\right)$ образует ситуацию равновесия в данной биматричной игре. Но тогда и другая пара $\left(p^1, q^0\right)$, где $p^1_{ЛЛЛ} = \frac{1}{6}$ и $p^1_{ППП} = \frac{5}{6}$ есть ненулевые компоненты вектора p^1, также является ситуацией равновесия. Но никакая поведенческая стратегия не может представлять смешанную стратегию p^1.

Действительно, пусть x, y и z обозначают вероятности пойти влево соответственно в позициях информационных множеств $\left(I_1^{(1)}\right)$, $\left(I_2^{(1)}\right)$ и $\left(I_3^{(1)}\right)$. Тогда

$$P_{ЛЛЛ} = \frac{1}{6} = xyz \Rightarrow x > 0, y > 0, z > 0,$$

$$P_{ЛЛП} = 0 = xy(1 - z) \Rightarrow z = 1,$$

$$P_{ППП} = \frac{5}{6} = (1 - x)(1 - y)(1 - z) = 0 \Rightarrow \textit{противоречие.}$$

Полученное противоречие означает, что не каждую смешанную стратегию можно представить как поведенческую стратегию.

Две смешанные стратегии $\overline{p}^i$ и $\overline{\overline{p}}^i$ игрока i называются *эквивалентными* в некоторой позиционной игре, если для любой фиксированной комбинации стратегий других игроков в обоих ситуациях, в одной из которых игрок i использует стратегию $\overline{p}^i$, а в другой — стратегию $\overline{\overline{p}}^i$, вероятность того, что игра достигнет любой конкретной позиции, одна и та же. Понятно, что и средние выигрыши всех игроков при переходе игрока i от стратегии $\overline{p}^i$ к стратегии $\overline{\overline{p}}^i$ не изменятся.

Теорема Куна. *В позиционной игре с совершенной памятью любая смешанная стратегия игрока эквивалентна некоторой его поведенческой стратегии.*

Лекция № 9

Кооперативные игры

Кооперативные игры получаются в тех случаях, когда, в игре n игроков разрешается образовывать определённые коалиции. Обозначим через N множество всех игроков, $N = \{1, 2, ..., n\}$, а через K – любое его подмножество. Пусть игроки из K договариваются между собой о совместных действиях и, таким образом, образуют одну коалицию. Очевидно, что число таких коалиций, состоящих из r игроков, равно числу сочетаний из n по r, то есть C_n^r, а число всевозможных коалиций равно

$$\sum_{r=1}^{n} C_n^r = 2n - 1.$$

Из этой формулы видно, что число всевозможных коалиций значительно растёт в зависимости от числа всех игроков в данной игре. Для исследования этих игр необходимо учитывать все возможные коалиции, и поэтому трудности исследований возрастают с ростом n. Образовав коалицию, множество игроков K действует как один игрок против остальных игроков, и выигрыш этой коалиции зависит от применяемых стратегий каждым из n игроков.

Функция υ, ставящая в соответствие каждой коалиции K наибольший, уверенно получаемый его выигрыш $\upsilon(K)$, называется характеристической функцией игры. Так, например, для бескоалиционной игры n игроков $\upsilon(K)$ может получиться, когда игроки из множества K оптимально действуют как один игрок против остальных $N \backslash K$ игроков, образующих другую коалицию (второй игрок).

Характеристическая функция υ называется простой, если она принимает только два значения: 0 и 1. Если характеристическая функция υ простая, то коалиции K, для которых $\upsilon(K)=1$, называются *выигрывающими*, а коалиции K, для которых $\upsilon(K) = 0$, – *проигрывающими*.

Если в простой характеристической функции υ выигрывающими являются те и только те коалиции, которые содержат фиксированную непустую коалицию R, то характеристическая функция υ, обозначаемая в этом случае через υR, называется простейшей.

Содержательно простые характеристические функции возникают, например, в условиях голосования, когда коалиция является выигрывающей, если она собирает более половины голосов (простое большинство) или не менее двух третей голосов (квалифицированное большинство).

Простейшая характеристическая функция появляется, когда в голосующем коллективе имеется некоторое "ядро", голосующее с соблюдением правила "вето", а голоса остальных участников оказываются несущественными.

Обозначим через υG характеристическую функцию бескоалиционной игры. Эта функция обладает следующими свойствами:

1) персональность

$$\upsilon G(\varnothing) = 0,$$

т.е. коалиция, не содержащая ни одного игрока, ничего не выигрывает;

2) супераддитивность

$$\upsilon G(K \cup L) \geq \upsilon G(K) + \upsilon G(L), \text{ если } K, L \subset N,\ K \cap L \neq \varnothing,$$

т.е. общий выигрыш коалиции не меньше суммарного выигрыша всех участников коалиции;

3) дополнительность

$$\upsilon G(K) + \upsilon(N \backslash K) = \upsilon(N)$$

т.е. для бескоалиционной игры с постоянной суммой сумма выигрышей коалиции и остальных игроков должна равняться общей сумме выигрышей всех игроков.

Распределение выигрышей (делёж) игроков должно удовлетворять следующим естественным условиям: если обозначить через xi выигрыш i-го игрока, то, во-первых, должно удовлетворяться условие индивидуальной рациональности

$$xi \geq \upsilon(i), \text{ для } i \in N \tag{1}$$

т.е. любой игрок должен получить выигрыш в коалиции не меньше, чем он получил бы, не участвуя в ней (в противном случае он не будет участвовать в коалиции); во-вторых, должно удовлетворяться условие коллективной рациональности

$$\sum_{i \in N} x_i = \upsilon(N) \tag{2}$$

т.е. сумма выигрышей игроков должна соответствовать возможностям (если сумма выигрышей всех игроков меньше, чем $\upsilon(N)$, то игрокам незачем вступать в коалицию; если же потребовать, чтобы сумма выигрышей была больше, чем $\upsilon(N)$, то это значит, что игроки должны делить между собой сумму большую, чем у них есть).

Таким образом, вектор $x = (x1, ..., xn)$, удовлетворяющий условиям индивидуальной и коллективной рациональности, называется *дележём* в условиях характеристической функции υ.

Система $\{N, \upsilon\}$, состоящая из множества игроков, характеристической функции над этим множеством и множеством дележей, удовлетворяющих соотношениям (25) и (26) в условиях характеристической функции, называется *классической кооперативной игрой*.

Из этих определений непосредственно вытекает следующая теорема.

Теорема. Чтобы вектор $x = (x_1, ..., x_n)$ был дележём в классической кооперативной игре $\{N, \upsilon\}$, необходимо и достаточно, чтобы $x_i = \upsilon(i) + \alpha_i$, $(i \in N)$, причём $\alpha_i \geq 0$, $(i \in N)$.

$$\sum_{i \in N} \alpha_i = \upsilon(N) - \sum_{i \in N} \upsilon(i)$$

В бескоалиционных играх исход формируется в результате действий тех самых игроков, которые в этой ситуации получают свои выигрыши. Исходом в кооперативной игре является делёж, возникающий не как следствие действия игроков, а как результат их соглашений. Поэтому в кооперативных играх сравниваются не ситуации, как это имеет место в бесколиционных играх, а дележи, и сравнение это носит более сложный характер.

Кооперативные игры считаются *существенными*, если для любых коалиций K и L выполняется неравенство

$$\upsilon(K) + \upsilon(L) < \upsilon(K \cup L),$$

т.е. в условии супераддитивности выполняется строгое неравенство. Если же в условии супераддитивности выполняется равенство

$$\upsilon(K) + \upsilon(L) = \upsilon(K \cup L),$$

т.е. выполняется свойство аддитивности, то такие игры называются *несущественными*. Справедливы следующие свойства:

1) для того чтобы характеристическая функция была аддитивной (кооперативная игра – несущественной), необходимо и достаточно выполнение следующего равенства:

$$\sum_{i \in N} \upsilon(i) = \upsilon(N)$$

2) в несущественной игре имеется только один делёж

$$\{\upsilon(1),\ \upsilon(2),\ \ldots,\ \upsilon(n)\};$$

3) в существенной игре с более чем одним игроком множество дележей бесконечно

$$(\ \upsilon(1) + \alpha_1,\ \upsilon(2) + \alpha_2,\ \ldots,\ \upsilon(n) + \alpha_n\ )$$

где $\alpha_i \geq 0 \quad (i \in N)$, $\upsilon(N) — \sum_{i \in N} \upsilon(i) > 0$

Кооперативная игра с множеством игроков N и характеристической функцией υ называется *стратегически эквивалентной* игрой с тем же множеством игроков и характеристической функцией υ^1 , если найдутся такие $к > 0$ и произвольные вещественные C_i ($i \in N$), что для любой коалиции $K \subset N$ имеет место равенство:

$$\upsilon^1(K) = k\,\upsilon(K) + \sum_{i \in K} C_i$$

Смысл определения стратегической эквивалентности кооперативных игр состоит в том, что характеристические функции этих игр отличаются только масштабом измерения выигрышей k и начальным капиталом C_i . Стратегическая эквивалентность кооперативных игр с характеристическими функциями υ и υ^1 обозначается так $\upsilon \sim \upsilon^1$. Часто вместо стратегической эквивалентности кооперативных игр говорят о стратегической эквивалентности их характеристических функций.

Справедливы следующие свойства для стратегических эквивалентных игр:

1. *Рефлексивность,* т.е. каждая характеристическая функция эквивалентна себе $\upsilon \sim \upsilon$.
2. *Симметрия*, т.е. если $\upsilon \sim \upsilon^1$, то $\upsilon^1 \sim \upsilon$.
3. *Транзитивность*, т.е. если $\upsilon \sim \upsilon^1$ и $\upsilon^1 \sim \upsilon^2$, то $\upsilon \sim \upsilon^2$.

Из свойств рефлексивности, симметрии и транзитивности вытекает, что множество всех характеристических функций единственным образом распадается на попарно непересекающиеся классы, которые называются *классами стратегической эквивалентности*.

Кооперативная игра называется *нулевой*, если все значения её характеристической функции равны нулю. Содержательное значение нулевой игры состоит в том, что в ней игроки не имеют никакой заинтересованности.

Всякая несущественная игра стратегически эквивалентна нулевой.

Определение. Кооперативная игра с характеристической функцией υ имеет *(0,1)-редуцированную форму*, если выполняются соотношения:

$$\upsilon(i) = 0 \qquad (i \in N),\ \upsilon(N) = 1.$$

Теорема. Каждая существенная кооперативная игра стратегически эквивалентна одной и только одной игре в (0,1)-редуцированной форме.

В игре в (0,1)-редуцированной форме дележём является любой вектор $x = (x_1, \ldots, x_n)$, для которого $x_i \geq 0$, $(i \in N)$, $\sum_{i \in N} x_i = 1$.

2. Методические рекомендации (указания) к практическим занятиям

Практическое занятие № 1. Принцип минимакса и максимина

Рассмотрим игру *m x n* с платежной матрицей, представленной в таблице 1. Следует определить:

а) наилучшую стратегию игрока I среди стратегий $A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots, A_m$;

б) наилучшую стратегию игрока II среди стратегий $B_1, B_2, \ldots, B_j, \ldots, B_n$.

При определении наилучших стратегий игроков основой рассуждений является принцип, который предполагает, что ***противники, участвующие в игре, одинаково разумны, и каждый из них делает все для того, чтобы добиться своей цели.***

Используя этот принцип, найдем наилучшую стратегию игрока I, для чего проанализируем последовательно все его стратегии. Выбирая стратегию A_i игрока I, мы должны рассчитывать, что игрок II ответит на нее той из своих стратегий B_j, для которой выигрыш игрока I будет минимальным. Найдем минимальное число a_{ij} в каждой строке матрицы и, обозначив его α_i (i=1,m), запишем рядом с платежной матрицей в добавочный столбец:

$$\alpha_i = \min_j a_{ij}, \text{ i=1,m.} \quad (1.1)$$

Таблица 1

II / I	B_1	B_2	…	B_n	α_i
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	α_1
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	α_2
…	…	…	…	...	…
A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	α_m

Зная числа α_i (свои минимальные выигрыши при применении стратегий Ai), игрок I должен предпочесть другим стратегиям ту, для которой α_i максимально. Обозначим это максимальное значение через α, тогда $\alpha = \max_i \alpha_i$. Подставив вместо α_i правую часть выражения (1), получим

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij}. \quad (1.2)$$

Величина α - гарантированный выигрыш, который может обеспечить себе игрок I, называется ***нижней ценой игры (максимином).***

ПРИМЕР 2: Рассмотрим игру 3х3. Задана платежная матрица:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 6 & 7 \\ 4 & 9 & 9 \end{pmatrix}$$

Пусть игрок I независимо от игрока II выбирает 3-ю строку этой матрицы, а игрок II независимо от игрока I выбирает 2-ой столбец этой матрицы:

$$A = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 6 & 7 \\ 4 & 9 & 9 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \Leftarrow I \end{array} \\ \begin{array}{ccc} & \Uparrow & \\ & II & \end{array} & \end{array}$$

Тогда игрок I получит 9 единиц от игрока П.

$\alpha = 5$

Стратегия, обеспечивающая получение нижней цены игры α, называется максиминной стратегией. Если игрок I будет придерживаться своей максиминной стратегии, то ему гарантирован выигрыш, не меньший α при любом поведении игрока II.

Игрок II заинтересован уменьшить свой проигрыш или, что то же самое, выигрыш игрока I обратить в минимум. Поэтому для выбора своей наилучшей стратегии он должен найти максимальное значение выигрыша в каждом из столбцов и среди этих значений выбрать наименьшее. Максимальный элемент в каждом столбце обозначим через β_j. Эти элементы будем записывать в дополнительной строке таблицы.

Наименьшее значение среди β_j обозначим β, тогда $\beta = \min\limits_j \beta_j$. β – это ***верхняя цена игры (минимакс),*** которая определяется по формуле

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij}. \tag{1.3}$$

Таблица 2

II I	B_1	B_2	…	B_n	α_i
A_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	α_1
A_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	α_2
…	…	…	…	...	…
A_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	α_m
β_j	β_1	β_2	…	β_n	

Стратегия игрока II, обеспечивающая “выигрыш” β, является его ***минимаксной стратегией.*** Если игрок II будет придерживаться своей минимаксной стратегии, то он гарантирован, что в любом случае проиграет не больше β .

ПРИМЕР 1: Пусть матрица игры $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Цель каждого игрока – получить как можно больший выигрыш. Но 1-му игроку нет смысла выбирать стратегию *i*=1 в надежде выиграть 5 ед., так как 2-й игрок, действуя разумно, не станет выбирать стратегию *j*=2, чтобы не проиграть максимальную сумму 5 ед. Игрокам удобнее выбрать «осторожные» стратегии.

Можно показать, что для нижней и верхней цены игры всегда справедливо неравенство $\max\limits_{i} \min\limits_{j} a_{ij} \leq \min\limits_{j} \max\limits_{i} a_{ij}$, i=1,m; j=1,n, т.е. $\alpha \leq \beta$.

ПРИМЕР 2:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 4 & -5 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} -3 \\ -5 \\ -5 \end{matrix} \Rightarrow \alpha = -3$$

$$\begin{matrix} 4 & 4 & 6 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \beta = 4$$

Соответствующие стратегии: i_0=1 (максиминная), j_0=1,2 (минимаксная).

Справедливо неравенство: $\alpha \leq \beta$.

Существуют игры, для которых нижняя цена равна верхней, т.е. $\alpha = \beta$. Такие игры называются играми с ***седловой точкой***.

ПРИМЕР 3: Рассмотрим игру 3х3. Задана платежная матрица:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 6 & 7 \\ 4 & 9 & 9 \end{pmatrix}$$

Выбирая в качестве хода какую-нибудь строку платежной матрицы, игрок I обеспечивает себе выигрыш в наихудшем случае не менее величины в столбце, обозначенном «min»:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 6 & 7 \\ 4 & 9 & 9 \end{pmatrix} \begin{matrix} \to 1 \\ \to 5 \\ \to 4 \end{matrix}$$

$$\min$$

Поэтому игрок I выберет 2-ую строку платежной матрицы, обеспечивающую ему максимальный выигрыш независимо от хода игрока II, который будет стараться минимизировать эту величину:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 6 & 7 \\ 4 & 9 & 9 \end{pmatrix} \begin{matrix} \to 1 \\ \to 5 \Leftarrow \max \\ \to 4 \end{matrix}$$

$$\min$$

Игрок II рассуждает аналогично и выберет в качестве хода 1-ый столбец:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 6 & 7 \\ 4 & 9 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 5 & 9 & 9 \\ \Uparrow & & \\ \min & & \end{matrix} \quad \max$$

Т.о. имеется седловая точка платежной матрицы:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 6 & 7 \\ 4 & 9 & 9 \end{pmatrix}$$

Соответствующая оптимальной чистой стратегии (0,1,0) для игрока I и (1,0,0) для игрока II, при которой игрок I не уменьшит своего выигрыша при любом изменении стратегии игроком II и игрок II не увеличит своего проигрыша при любом изменении стратегии игроком I.

Общее значение нижней и верхней цены игры в играх с седловой точкой называется ***чистой ценой игры***, а стратегия A^*_i и B^*_j, позволяющие достичь этого значения, – ***оптимальными***. Пара оптимальных стратегий (A^*_i, B^*_j) называется седловой точкой матрицы, так как элемент $a^*_{ij} = \gamma$ является одновременно минимальным в i-й строке и максимальным в j-м столбце. Оптимальные стратегии и чистая цена являются решением игры. Оптимальные стратегии определяют в игре “положение равновесия”, которое заключается в том, что каждый из игроков не заинтересован в отходе от своей оптимальной стратегии, так как это ему не выгодно. Чистую цену игры γ в игре с седловой точкой при условии одинаковой разумности партнеров игрок I не может увеличить, а игрок II – уменьшить. Если игра имеет седловую точку, то говорят, что она решается в чистых стратегиях. Под ***чистой стратегией*** понимается такая стратегия, которая выбрана игроком сознательно, без привлечения механизма случайного выбора. Платежная матрица игры может иметь более одной седловой точки.

ПРИМЕР 4:

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 & 20 \\ 5 & 5 & 4 & 6 \\ -4 & -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{array}{c} -5 \\ 4 \\ -5 \end{array} \\ \begin{array}{cccc} 5 & 5 & 4 & 20 \end{array} \end{array} \Rightarrow \alpha = \beta = 4.$$

(2,3) - ситуация равновесная, γ=4 – цена игры, i^*=2, j^*=3 – оптимальные стратегии 1-го и 2-го игроков соответственно. Выбрав их, 1-й игрок обеспечит себе выигрыш не менее 4 ед., а 2-й игрок проиграет не более 4 ед. при любом выборе другого игрока.

Задания для самостоятельной работы

В матричной игре с платежной матрицей найти:

1) верхнюю и нижнюю цены игры;

2) седловую точку (если она существует) и оптимальные чистые стратегии игроков.

№ варианта	Платежная матрица	№ варианта	Платежная матрица
1	$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 4 & 7 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 8 & 5 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 2 & 4 & 5 & 6 & 6 \\ 4 & 5 & 5 & 4 & 5 & 5 & 4 \\ 6 & 7 & 7 & 5 & 6 & 9 & 7 \end{pmatrix}$	2	$\begin{pmatrix} 5 & 7 & 3 & 9 & 4 \\ 7 & 8 & 6 & 7 & 6 \\ 5 & 8 & 4 & 6 & 5 \\ 9 & 8 & 6 & 7 & 6 \\ 8 & 7 & 5 & 4 & 4 \\ 6 & 7 & 6 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

3	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 & 2 & 4 \\ 5 & 2 & 2 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$	4	$\begin{pmatrix} 4 & 6 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & 2 & 7 \\ 6 & 6 & 5 & 6 & 6 \\ 5 & 5 & 4 & 3 & 7 \\ 7 & 6 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 5 & 7 & 3 & 8 \\ 7 & 3 & 8 & 9 & 2 & 8 \\ 6 & 4 & 6 & 5 & 4 & 4 \\ 5 & 4 & 5 & 6 & 4 & 6 \\ 7 & 2 & 6 & 5 & 3 & 5 \end{pmatrix}$	6	$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 5 & 3 & 2 \\ 5 & 6 & 5 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 4 & 4 & 6 \\ 5 & 8 & 5 & 4 & 7 \\ 3 & 5 & 4 & 5 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 9 & 8 & 9 & 9 & 7 \\ 7 & 9 & 8 & 8 & 6 \\ 9 & 11 & 9 & 10 & 11 \\ 6 & 8 & 7 & 8 & 7 \\ 6 & 10 & 8 & 9 & 8 \end{pmatrix}$	8	$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 7 & 6 & 9 & 7 \\ 7 & 8 & 5 & 6 & 5 \\ 7 & 8 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 4 & 6 & 5 & 5 \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 & 6 & 7 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 2 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 2 & 2 & 6 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 5 & 5 & 4 \end{pmatrix}$	10	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 & 6 \\ 5 & 3 & 3 & 2 & 7 \\ 4 & 2 & 3 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 6 \\ 7 & 1 & 7 & 3 & 5 \end{pmatrix}$
11	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -7 \\ 8 & 5 & 7 & 5 \\ -3 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -4 \\ 10 & 5 & 6 & 4 \\ 20 & 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$	12	$\begin{pmatrix} -4 & 3 & -5 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & -5 & 2 \\ 3 & 4 & -5 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 2 & 7 & -5 \\ 3 & 4 & 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$
13	$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$	14	$\begin{pmatrix} 9 & 2 & 6 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & 4 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 9 & 4 & 6 & 7 & 5 \\ 7 & 3 & 7 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

15	$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 5 & 6 & 5 \\ 7 & 9 & 6 & 5 & 4 & 3 \\ 10 & 14 & 5 & 6 & 7 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 10 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 5 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	16	$\begin{pmatrix} 10 & -2 & 3 & 4 & 5 & 5 \\ 8 & 7 & 8 & 6 & 7 & 6 \\ 3 & 5 & 15 & 16 & 7 & 4 \\ 2 & 10 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 7 & 8 & 0 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$
17	$\begin{pmatrix} 5 & 10 & 23 & 5 & 6 & 7 \\ 14 & 10 & 11 & 10 & 11 & 13 \\ 11 & 8 & 14 & 9 & 10 & 20 \\ 13 & 5 & 6 & 7 & 8 & 8 \end{pmatrix}$	18	$\begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 & 2 & 10 & 2 \\ 4 & -2 & 3 & 0 & 8 & 0 \\ 5 & 7 & -1 & 3 & 2 & 1 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$
19	$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 & 3 & 3 & 2 \\ 10 & 5 & 6 & 7 & 8 & 5 \\ 6 & 5 & 8 & 7 & 6 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 3 & 7 & 3 \end{pmatrix}$	20	$\begin{pmatrix} 9 & 5 & 4 & 6 & 4 & 7 \\ 7 & 8 & 6 & 7 & 6 & 8 \\ 6 & 4 & 5 & 7 & 5 & 9 \\ 8 & 7 & 6 & 8 & 6 & 9 \\ 5 & 6 & 3 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$
21	$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 4 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 7 & 8 & 4 & 2 \\ 5 & 8 & 7 & 6 & 5 & 7 \\ 5 & 4 & 6 & 8 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & 5 & 7 & 2 & 4 \end{pmatrix}$	22	$\begin{pmatrix} 8 & 7 & 9 & 6 & 8 & 8 \\ 10 & 9 & 11 & 9 & 9 & 10 \\ 7 & 6 & 9 & 8 & 3 & 7 \\ 11 & 9 & 10 & 10 & 9 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 5 & 7 & 6 \end{pmatrix}$
23	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$	24	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
25	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$	26	$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 5 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$
27	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 6 & 7 & 5 \\ 4 & 5 & 7 & 8 & 4 \\ 5 & 9 & 5 & 8 & 5 \\ 4 & 8 & 6 & 6 & 3 \\ 3 & 6 & 3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$	28	$\begin{pmatrix} 12 & 8 & 9 & 8 & 10 \\ 11 & 8 & 10 & 7 & 12 \\ 12 & 7 & 8 & 6 & 11 \\ 10 & 8 & 9 & 8 & 12 \\ 10 & 7 & 9 & 8 & 11 \end{pmatrix}$

29	$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 & 6 & 4 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 5 & 6 & 7 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 6 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 4 & 5 & 5 & 7 \end{pmatrix}$	30	$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 7 & 5 \\ -2 & 3 & 4 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & 5 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 4 & 6 & 7 \\ 5 & 4 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

Практическое занятие № 2. Решение игр 2×2

1. Аналитический метод

Формулы для расчета оптимальной стратегии первого игрока и цены игры:

$$\begin{cases} x_1^* = \dfrac{a_{22}-a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}}, \\ x_2^* = \dfrac{a_{11}-a_{12}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}}, \\ \gamma = \dfrac{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}}. \end{cases}$$

(2.1)

Формулы для расчета оптимальной стратегии второго игрока и цены игры:

$$\begin{cases} y_1^* = \dfrac{a_{22}-a_{12}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}}, \\ y_2^* = \dfrac{a_{11}-a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}}, \\ \gamma = \dfrac{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}}. \end{cases}$$

(2.2)

Задание 1. Найти решение игры, определяемой матрицей $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Данная игра седловой точки не имеет: $\alpha=2,\ \beta=3,\ \alpha\neq\beta$. Поэтому решение игры ищем в смешанных стратегиях:

$$\begin{cases} x_1^* = \dfrac{2-5}{1+2-3-5} = \dfrac{3}{5}, \\ x_2^* = \dfrac{1-3}{1+2-3-5} = \dfrac{2}{5}, \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1^* = \dfrac{2-3}{1+2-3-5} = \dfrac{1}{5}, \\ y_2^* = \dfrac{1-5}{1+2-3-5} = \dfrac{4}{5}, \end{cases}$$

$$\gamma = \dfrac{1\cdot 2-3\cdot 5}{1+2-3-5} = \dfrac{13}{5}.$$

Таким образом, $S_A^* = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{5} & \dfrac{2}{5} \end{pmatrix}$ для первого игрока, $S_B^* = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{5} & \dfrac{4}{5} \end{pmatrix}$ для второго игрока, цена игры $\gamma^* = \dfrac{13}{5}$.

2. Метод, основанный на понятии равновесия по Нэшу

Математическое ожидание выигрыша игрока А будет определяться функцией

$$h_a(x,y) = \begin{pmatrix} x & 1-x \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix}.$$

(2.3)

Точка Нэша $\left(x^H, y^H\right)$ определяется из уравнений

$$\frac{\partial h_a(x,y)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial h_a(x,y)}{\partial y} = 0.$$

Задание 2. Найти решение игры, определяемой матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, используя понятие равновесия по Нэшу.

Определим математическое ожидание выигрыша первого игрока:

$$h_a(x,y) = \begin{pmatrix} x & 1-x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4x+5 & x+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix} =$$

$$= -4xy + 5y + x - xy + 2 - 2y = -5xy + x + 3y + 2.$$

Определим точку Нэша:

$$\frac{\partial h_a(x,y)}{\partial x} = -5y + 1 = 0, \quad y^H = \frac{1}{5},$$

$$\frac{\partial h_a(x,y)}{\partial y} = -5x + 3 = 0, \quad x^H = \frac{3}{5}.$$

Тем самым, $\left(\frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right)$ – точка равновесия по Нэшу. Тогда оптимальные стратегии каждого из игроков $x^* = \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)$, $y^* = \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)$ и цена игры $\gamma = h_a\left(\frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right) = -5 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{3}{5} + 3 \cdot \frac{1}{5} + 2 = \frac{13}{5}$.

3. Графический метод решения игры 2×2

Пусть имеется игра 2×2 с платежной матрицей

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ A = & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array}$$

Предположим, что решение игры в чистых стратегиях отсутствует. Предположим, игрок А выбрал смешанную стратегию $\left(x_1; x_2\right)$, а игрок В – свою чистую стратегию B_i, тогда средний выигрыш игрока А определяется по формуле математического ожидания

$$v_{B_i} = a_{1i}x_1 + a_{2i}x_2 = a_{1i} + \left(a_{2i} - a_{1i}\right)x, \quad i = 1,2, \tag{2.4}$$

где $x = x_2 = 1 - x_1$.

Каждая из функций (2.4) соответствует прямой линии в прямоугольной системе координат. Изобразим эти прямые на плоскости.

В системе координат XOY на оси абсцисс отложим отрезок A_1A_2 длиной, равной единице. Левый конец отрезка (при $x = 0$) соответствует стратегии A_1, правый конец (при $x = 1$) – стратегии A_2. Все промежуточные точки S_A – смешанные стратегии игрока А, причем вероятность x_1 стратегии A_1 равна расстоянию от точки S_A до правого конца отрезка (точки A_2), а вероятность x_2 стратегии A_2 равна расстоянию от точки S_A до левого конца отрезка (точки A_1). Через точки A_1 и A_2 проведем два перпендикуляра к оси абсцисс – ось I и ось II. На оси I будем откладывать выигрыш при стратегии A_1, а на оси II – выигрыш при стратегии A_2.

Пусть противник применяет стратегию B_1, тогда $v_{B_1} = a_{11} + (a_{21} - a_{11})x$. При A_1 выигрыш будет равен a_{11}, а при A_2 выигрыш будет равен a_{21}. Отложим эти точки на осях I и II соответственно, обозначим их B_1 и проведем через эти точки прямолинейный отрезок, назовем этот отрезок «стратегия B_1». Аналогично строим отрезок, соответствующей «стратегии B_2».

Далее согласно принципу максимина определим оптимальную стратегию $S_A{}^*$. Поскольку цель игрока В – минимизировать выигрыш игрока А за счет выбора своих стратегий, построим нижнюю границу выигрыша при стратегиях B_1, B_2 (ломанная B_1MB_2 отмечена на рисунке жирной линией). На этой ломанной будет лежать минимальный выигрыш игрока А при любой его смешанной стратегии. Поскольку цель игрока А – максимизировать свой выигрыш за счет выбора соотношения $x_2 : x_1$, ищем верхнюю точку нижней границы выигрыша. Точка M, в которой этот выигрыш достигает своего максимального значения, определяет решение и цену игры. Ордината точки M – цена игры γ, ее абсцисса равна $x_2{}^*$, а расстояние до правого конца участка – $x_1{}^*$.

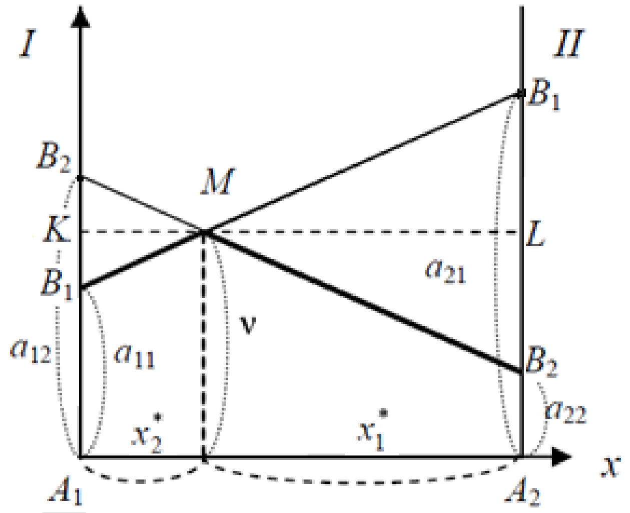


Рисунок 2.1

Рассмотрим теперь, как определяется оптимальная смешанная стратегия второго игрока $S_B{}^* = \left(y_1{}^* \quad y_2{}^*\right)$. Через верхнюю точку нижней границы (точка M на рис. 2.1) проведем прямую, параллельную оси абсцисс (прямая KL). Доля y_1 стратегии B_1 в оптимальной смешанной стратегии $S_B{}^*$ равна отношению длины отрезка KB_2 к сумме длин отрезков KB_1 и KB_2 на оси I:

$$y_1{}^* = \frac{KB_2}{KB_1 + KB_2} \tag{2.5}$$

или, что то же самое,

$$y_1{}^* = \frac{LB_2}{LB_1 + LB_2}; \tag{2.5'}$$

на оси II:

$$y_2^* = 1 - y_1^* = \frac{KB_1}{KB_1 + KB_2} = \frac{LB_1}{LB_1 + LB_2}. \qquad (2.6)$$

Оптимальную стратегию S_B^* также можно найти, если поменять местами игроков, а вместо максимума нижней границы согласно принципу минимакса искать минимум верхней границы.

Задание 2. Найти графически решение игры, определяемой матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$.

Данная игра седловой точки не имеет: $\alpha = -3,\ \beta = 2, \alpha \neq \beta$.

Определим прямые

$$\nu_{B_1} = a_{11} + (a_{21} - a_{11}) = 2 + (-3 - 2)x = 2 - 5x,$$

$$\nu_{B_2} = a_{12} + (a_{22} - a_{12}) = -3 + (4 + 3)x = -3 + 7x$$

и построим их на графике (рис. 2.2).

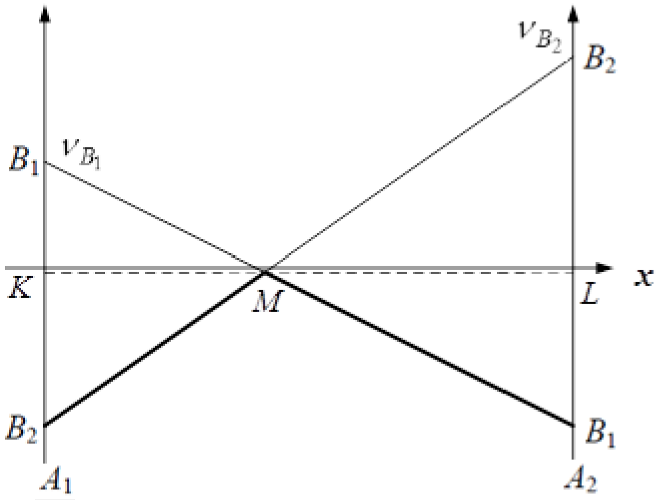


Рис. 2.2

Тем самым, точка M является верхней точкой нижней границы. Определим ее координаты:

$$\nu_{B_1} = \nu_{B_2},\ 2 - 5x = -3 + 7x, 12x = 5,\ x = \frac{5}{12},\ x_2 = x = \frac{5}{12},\ x_1 = 1 - x_2 = 1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}.$$

Таким образом, $S_A^* = \begin{pmatrix} \frac{7}{12} & \frac{5}{12} \end{pmatrix}$ и $\gamma^* = -\frac{1}{12}$.

Найдем оптимальную смешанную стратегию второго игрока:

$$y_1^* = \frac{\frac{35}{12}}{5} = \frac{7}{12}, \qquad y_2^* = \frac{\frac{25}{12}}{5} = \frac{5}{12}.$$

Таким образом, $S_B^* = \begin{pmatrix} \frac{7}{12} & \frac{5}{12} \end{pmatrix}$.

Задания для самостоятельной работы

Пусть игра задана матрицей A. Найти решение игры:

а) аналитическим методом;

б) используя понятие равновесия по Нэшу;

в) графическим методом.

1	$A=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$	2	$A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$
3	$A=\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$	4	$A=\begin{pmatrix} -8 & 3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$
5	$A=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$	6	$A=\begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$
7	$A=\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$	8	$A=\begin{pmatrix} -7 & 1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$
9	$A=\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -10 & 2 \end{pmatrix}$	10	$A=\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$
11	$A=\begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$	12	$A=\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -6 & 10 \end{pmatrix}$
13	$A=\begin{pmatrix} -8 & 3 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$	14	$A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$
15	$A=\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$	16	$A=\begin{pmatrix} -6 & 7 \\ 9 & -5 \end{pmatrix}$
17	$A=\begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$	18	$A=\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$
19	$A=\begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$	20	$A=\begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -10 & 3 \end{pmatrix}$
21	$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$	22	$A=\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$
23	$A=\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$	24	$A=\begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$
25	$A=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$	26	$A=\begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$
27	$A=\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$	28	$A=\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$
29	$A=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$	30	$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

Практическое занятие № 3. Игры $2\times n$ ***и*** $m\times 2$

Задание 1. Определить графическим методом решение игры, определяемой матрицей $A=\begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 & 10 \\ 3 & 1 & -4 & -6 \end{pmatrix}$.

Определим функции выигрыша

$$\nu_{B_1} = 2 + (3-2)x = 2 + x, \qquad \nu_{B_2} = -5 + (1+5)x = -5 + 6x,$$

$$\nu_{B_3} = 4 + (-4-4)x = 4 - 8x, \qquad \nu_{B_4} = 10 + (-6-10)x = 10 - 16x$$

и построим их на графике (рис. 3.1).

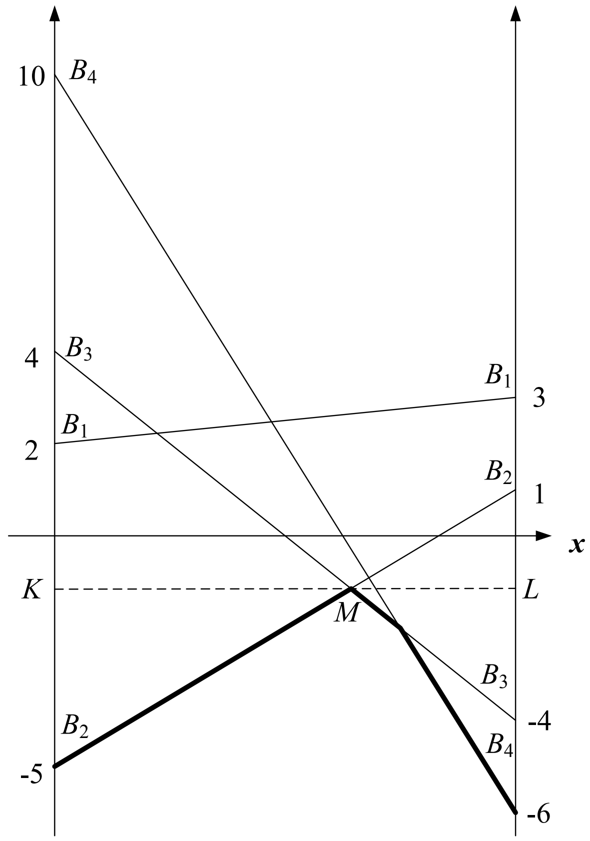


Рисунок 3.1

Из рисунка видно, что верхней точкой нижней границей является точка M – точка пересечения стратегий B_2 и B_3, найдем ее координаты:

$$\nu_{B_2} = \nu_{B_3}, \quad -5 + 6x = 4 - 8x, \quad 14x = 9, \qquad x = \frac{9}{14}, \qquad \gamma = -\frac{8}{7}.$$

Тем самым, $S_A^* = \begin{pmatrix} \frac{5}{14} & \frac{9}{14} \end{pmatrix}$, $\gamma^* = -\frac{8}{7}$.

Определим оптимальную смешанную стратегию игрока B. Пассивными являются стратегии B_1 и B_4, поэтому $y_1^* = y_4^* = 0$. Найдем вероятности активных стратегий:

$$y_2^* = \frac{KB_3}{KB_2 + KB_3} = \frac{\frac{36}{7}}{9} = \frac{4}{7}, \qquad y_3^* = \frac{KB_2}{KB_2 + KB_3} = \frac{\frac{27}{7}}{9} = \frac{3}{7}.$$

Получаем $S_B^* = \begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{7} & \frac{3}{7} & 0 \end{pmatrix}$.

Задание 2. Определить графическим методом решение игры, определяемой матрицей $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 10 \\ 10 & 7 & 5 \end{pmatrix}$.

Определим функции выигрыша

$$\nu_{B_1} = 4 + (10 - 4)x = 4 + 6x, \qquad \nu_{B_2} = 7 + (7 - 7)x = 7,$$

$$\nu_{B_3} = 10 + (5 - 10)x = 10 - 5x$$

и построим их на графике (рис. 3.2).

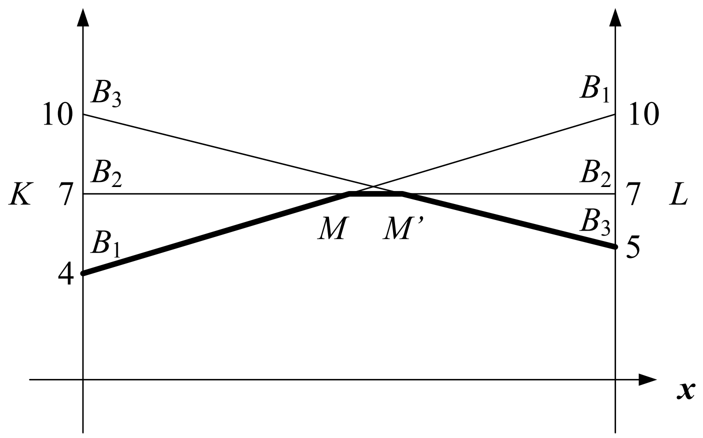


Рисунок 3.2

Получили, что максимум нижней границы выигрыша достигается на участке MM'. Определим координаты границ этого промежутка:

$$M:\ 4 + 6x = 7, \qquad 6x = 3, \qquad x = 0.5, \qquad \gamma = 7,$$

$$M':\ 10 - 5x = 7, \qquad 5x = 3, \qquad x = 0.6, \qquad \gamma = 7.$$

Очевидно, что стратегия B_2 является оптимальной чистой стратегией второго игрока.

Тем самым получаем решение задачи: $S_A{}^* = \begin{pmatrix} x_1{}^* & x_2{}^* \end{pmatrix}$, где $x_2{}^* \in [0.5, 0.6]$, $x_1{}^* = 1 - x_2{}^*$, $S_B{}^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\gamma^* = 7$.

Задание 3. Определить графическим методом решение игры, определяемой матрицей $A = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 3 & 1 \\ 4 & -2 \\ 0 & 5 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$.

Определим функции выигрыша

$$\nu_{A_1} = 6 + (-4 - 6)y = 6 - 10y, \qquad \nu_{A_2} = 3 + (1 - 3)y = 3 - 2y,$$

$$\nu_{A_3} = 4 + (-2 - 4)y = 4 - 6y, \qquad \nu_{A_4} = 0 + (5 - 0)y = 5y,$$

$$\nu_{A_5} = -1 + (6 + 1)y = -1 + 7y$$

и построим их на графике (рис. 3.3).

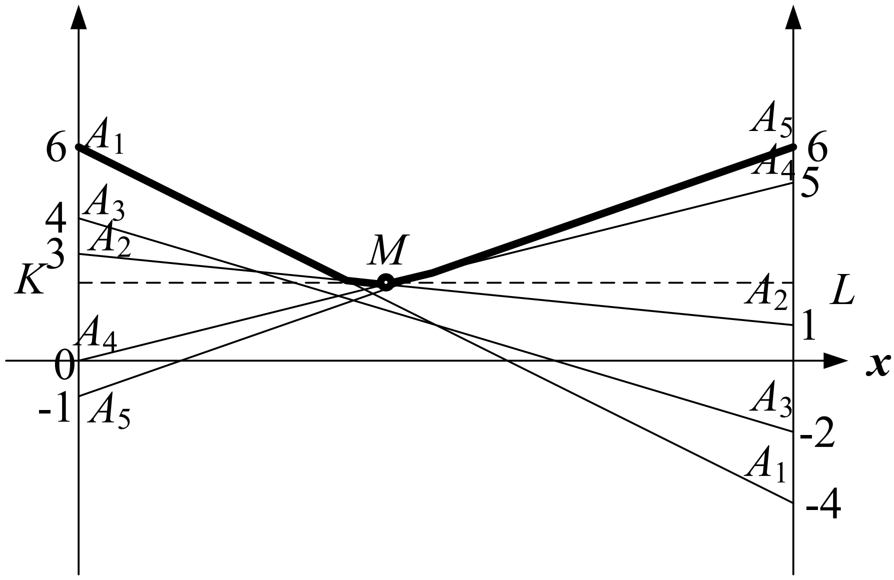


Рисунок 3.3

Минимум верхней границы достигается в точке M, в которой пересекаются стратегии A_2 и A_4. Найдем координаты этой точки:

$$\nu_{A_2} = \nu_{A_4}, \quad 3 - 2y = 5y, \qquad 7y = 3, \qquad y = \frac{3}{7}, \qquad \gamma = \frac{15}{7}.$$

Тем самым, получаем оптимальную смешанную стратегию второго игрока $S_B{}^* = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$ и цену игры $\gamma^* = \frac{15}{7}$.

Пассивными являются стратегии A_1, A_3 и A_5, следовательно, $x_1{}^* = y_3{}^* = y_5{}^* = 0$. Найдем вероятности активных стратегий:

$$x_2{}^* = \frac{KA_4}{KA_2 + KA_4} = \frac{\frac{15}{7}}{3} = \frac{5}{7},$$

$$x_4{}^* = \frac{KA_2}{KA_2 + KA_4} = \frac{\frac{6}{7}}{3} = \frac{2}{7}.$$

Таким образом, получаем оптимальную смешанную стратегию первого игрока $S_A{}^* = \begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{7} & 0 & \frac{2}{7} & 0 \end{pmatrix}$.

Задания для самостоятельной работы

Пусть игра задана матрицей A. Найти решение графическим методом.

1.1	$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 1 & -4 \end{pmatrix}$	1.2	$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

2.1	$A=\begin{pmatrix} -1 & -3 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	2.2	$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
3.1	$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 1 & -4 \end{pmatrix}$	3.2	$A=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$
4.1	$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 & -2 \\ -2 & 5 & -3 & 0 \end{pmatrix}$	4.2	$A=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$
5.1	$A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & -3 & -1 \end{pmatrix}$	5.2	$A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$
6.1	$A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$	6.2	$A=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$
7.1	$A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$	7.2	$A=\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 3 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
8.1	$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$	8.2	$A=\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$
9.1	$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & -3 \\ -2 & -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	9.2	$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$
10.1	$A=\begin{pmatrix} 4 & -3 & -4 & -3 \\ -2 & 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$	10.2	$A=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$
11.1	$A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$	11.2	$A=\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 2 & 14 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$

12.1	$A=\begin{pmatrix}-4 & -3 & 2 & -3\\ 6 & 2 & -5 & 1\end{pmatrix}$	12.2	$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -4\\ 0 & 3\end{pmatrix}$
13.1	$A=\begin{pmatrix}4 & -3 & -1 & 3\\ -1 & 3 & 1 & 0\end{pmatrix}$	13.2	$A=\begin{pmatrix}-1 & 5\\ -2 & 7\\ 2 & -3\end{pmatrix}$
14.1	$A=\begin{pmatrix}0 & -3 & -2 & 3\\ -1 & 4 & 5 & -2\end{pmatrix}$	14.2	$A=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 0 & 6\\ 4 & -1\end{pmatrix}$
15.1	$A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 2 & 3\\ -1 & 5 & -5 & 4\end{pmatrix}$	15.2	$A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -2 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}$
16.1	$A=\begin{pmatrix}3 & -3 & 1 & 1\\ -2 & 4 & -1 & 4\end{pmatrix}$	16.2	$A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & 0\\ 4 & -5\end{pmatrix}$
17.1	$A=\begin{pmatrix}0 & -3 & -2 & 1\\ -1 & 2 & -3 & -5\end{pmatrix}$	17.2	$A=\begin{pmatrix}1 & 5\\ 6 & 0\\ 4 & 3\end{pmatrix}$
18.1	$A=\begin{pmatrix}3 & -3 & 2 & -2\\ -1 & 5 & -3 & 2\end{pmatrix}$	18.2	$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & -5\\ -2 & 6\end{pmatrix}$
19.1	$A=\begin{pmatrix}2 & -4 & -3 & 1\\ -1 & 5 & 2 & -3\end{pmatrix}$	19.2	$A=\begin{pmatrix}-4 & 1\\ 2 & -2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$
20.1	$A=\begin{pmatrix}-2 & -5 & -2 & 1\\ -1 & 6 & 4 & -3\end{pmatrix}$	20.2	$A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -3 & 6\\ 5 & -1\end{pmatrix}$
21.1	$A=\begin{pmatrix}2 & -3 & 1 & 4\\ 0 & 5 & 4 & -2\end{pmatrix}$	21.2	$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\\ 1 & 5\end{pmatrix}$

22.1	$A=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 4 & -4\\ 1 & 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$	22.2	$A=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & -1\\ 3 & -6\end{pmatrix}$
23.1	$A=\begin{pmatrix}2 & 4 & 3 & -3\\ -4 & -2 & 1 & 2\end{pmatrix}$	23.2	$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\\ -3 & 5\end{pmatrix}$
24.1	$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & -2\\ 4 & 7 & 0 & 5\end{pmatrix}$	24.2	$A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -5\\ -4 & 2\end{pmatrix}$
25.1	$A=\begin{pmatrix}-2 & 4 & 3 & 4\\ 1 & -2 & 1 & -5\end{pmatrix}$	25.2	$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$
26.1	$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -5 & 3\\ -1 & 4 & 7 & -2\end{pmatrix}$	26.2	$A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 6\\ 4 & -1\end{pmatrix}$
27.1	$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -3 & 7\\ -2 & -5 & 4 & -6\end{pmatrix}$	27.2	$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\\ -1 & 5\end{pmatrix}$
28.1	$A=\begin{pmatrix}8 & -9 & 4 & 5\\ 7 & 5 & -3 & -5\end{pmatrix}$	28.2	$A=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 5 & -9\\ -7 & 4\end{pmatrix}$
29.1	$A=\begin{pmatrix}4 & -4 & 5 & 6\\ -3 & 4 & -9 & -2\end{pmatrix}$	29.2	$A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & -5\\ -2 & 6\end{pmatrix}$
30.1	$A=\begin{pmatrix}3 & 7 & -1 & 3\\ -5 & 1 & 0 & -6\end{pmatrix}$	30.2	$A=\begin{pmatrix}4 & -2\\ 0 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}$

Практическое занятие № 4. Методы решения матричных игр $n\times n$

1. Решение игр размерности $n\times n$ ***методом Крамера***

Задание 2. Определить оптимальные стратегии игроков в игре с матрицей

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\ 2 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 6\end{pmatrix}.$$

Вычислим верхнюю и нижнюю цены игры: $\alpha=1, \beta=2$. Седловой точки не существует, следовательно, метод Крамера применим.

Для удобства вычислений построим транспонированную матрицу

$$A^T=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 3 & 2 & 1\\ 4 & 1 & 6\end{pmatrix}.$$

Далее рассчитаем определители:

$$\Delta a=\begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\ 3 & 2 & 1\\ 4 & 1 & 6\end{vmatrix}=12+8+6-16-1-36=-27,$$

$$\Delta a_1=\begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 6\end{vmatrix}=12+2+2-4-1-12=-1,$$

$$\Delta a_2=\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 1\\ 4 & 1 & 6\end{vmatrix}=6+4+6-8-1-18=-11,$$

$$\Delta a_3=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 2 & 1\\ 4 & 1 & 1\end{vmatrix}=2+8+3-8-1-6=-2.$$

Сумма определителей $\Delta a_1+\Delta a_2+\Delta a_3=-14$.

Далее рассчитаем цену игры и вероятности стратегий игрока А:

$$\begin{cases}\gamma^*=\dfrac{\Delta a}{\Delta a_1+\Delta a_2+\ldots+\Delta a_n}=\dfrac{27}{14},\\ x_1{}^*=\dfrac{\Delta a_1}{\Delta a_1+\Delta a_2+\Delta a_3}=\dfrac{1}{14},\\ x_2{}^*=\dfrac{\Delta a_2}{\Delta a_1+\Delta a_2+\Delta a_3}=\dfrac{11}{14},\\ x_3{}^*=\dfrac{a_3}{\Delta a_1+\Delta a_2+\Delta a_3}=\dfrac{2}{14}.\end{cases}$$

Выполним расчеты по формулам (1.7.6), (1.7.7):

$$\Delta\tilde{a}=\begin{vmatrix}1 & 3 & 4\\ 2 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 6\end{vmatrix}=12+8+6-16-1-36=-27,$$

$$\Delta\tilde{a}_1=\begin{vmatrix}1 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 6\end{vmatrix}=12+4+3-8-1-18=-8,$$

$$\Delta\tilde{a}_2=\begin{vmatrix}1 & 1 & 4\\ 2 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 6\end{vmatrix}=6+8+2-8-1-12=-5,$$

$$\Delta\tilde{a}_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 6 + 2 - 4 - 1 - 6 = -1.$$

Сумма определителей $\Delta\tilde{a}_1 + \Delta\tilde{a}_2 + \Delta\tilde{a}_3 = -14$.

Тогда получаем

$$\begin{cases} \gamma^* = \dfrac{\Delta\tilde{a}}{\Delta\tilde{a}_1 + \Delta\tilde{a}_2 + \Delta\tilde{a}_3} = \dfrac{27}{14}, \\ y_1{}^* = \dfrac{\Delta\tilde{a}_1}{\Delta\tilde{a}_1 + \Delta\tilde{a}_2 + \Delta\tilde{a}_3} = \dfrac{8}{14}, \\ y_2{}^* = \dfrac{\Delta\tilde{a}_2}{\Delta\tilde{a}_1 + \Delta\tilde{a}_2 + \Delta\tilde{a}_3} = \dfrac{5}{14}, \\ y_3{}^* = \dfrac{\tilde{a}_3}{\Delta\tilde{a}_1 + \Delta\tilde{a}_2 + \Delta\tilde{a}_3} = \dfrac{1}{14}. \end{cases}$$

Окончательно записываем ответ $\gamma^* = \dfrac{27}{14}$, $x^{*T} = \left(\dfrac{1}{14}, \dfrac{11}{14}, \dfrac{2}{14}\right)$, $y^{*T} = \left(\dfrac{8}{14}, \dfrac{5}{14}, \dfrac{1}{14}\right)$.

2. Метод обратной матрицы

Задание 2. Методом обратной матрицы найти решение игры с матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

Прежде всего, определим обратную матрицу A^{-1}. Рассчитаем определитель матрицы

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 12 + 6 + 8 - 16 - 1 - 36 = -27$$

и алгебраические дополнения

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 11, \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -10, \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = -14, \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -2, \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5, \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 7, \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4.$$

Тем самым получаем обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{-27}\begin{pmatrix} 11 & -14 & -5 \\ -10 & -2 & 7 \\ -2 & 5 & -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} -11 & 14 & 5 \\ 10 & 2 & -7 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Далее определяем вектор

$$\widetilde{x}^{*T} = (1)_{1\times n} A^{-1} = \frac{1}{27}(1 \quad 1 \quad 1)\cdot\begin{pmatrix} -11 & 14 & 5 \\ 10 & 2 & -7 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{27} & \frac{11}{27} & \frac{2}{27} \end{pmatrix}.$$

Далее определяем цену игры $\gamma = \dfrac{1}{\sum_{i=1}^{n} \widetilde{x}_i} = \dfrac{27}{14}$ и оптимальную смешанную стратегию первого игрока $x^{*T} = \gamma \widetilde{x}^{*T} = \begin{pmatrix} \frac{1}{14} & \frac{11}{14} & \frac{2}{14} \end{pmatrix}$.

Далее проводим аналогичные вычисления для оптимальной стратегии второго игрока:

$$\widetilde{y}^{*} = A^{-1}\cdot(1)_{n\times 1} = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} -11 & 14 & 5 \\ 10 & 2 & -7 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\gamma = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \widetilde{y}_j} = \frac{27}{14},$$

$$y^{*T} = \gamma \widetilde{y}^{*T} = \begin{pmatrix} \frac{8}{14} & \frac{5}{14} & \frac{1}{14} \end{pmatrix}.$$

Полученное решение совпадает с прежними результатами.

Задания для самостоятельной работы

Пусть игра задана матрицей A. Найти решение игры:

1) методом Крамера;

2) методом обратной матрицы.

1	$A=\begin{pmatrix} 6 & -7 & 2 \\ -6 & 8 & 15 \\ 0 & 2 & -8 \end{pmatrix}$	2	$A=\begin{pmatrix} 5 & -8 & 1 \\ -1 & 1 & -9 \\ -7 & 7 & 14 \end{pmatrix}$
3	$A=\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ -3 & 5 & 10 \end{pmatrix}$	4	$A=\begin{pmatrix} -2 & 8 & 1 \\ 5 & -4 & -2 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$
5	$A=\begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ -2 & 6 & 1 \end{pmatrix}$	6	$A=\begin{pmatrix} 2 & 6 & -1 \\ -3 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$
7	$A=\begin{pmatrix} -3 & 6 & 5 \\ -2 & -2 & 7 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$	8	$A=\begin{pmatrix} 4 & -6 & 5 \\ 2 & 3 & -3 \\ -4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$
9	$A=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$	10	$A=\begin{pmatrix} 5 & -6 & 1 \\ 2 & 6 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

11	$A=\begin{pmatrix} -4 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & 2 \\ 3 & 4 & -6 \end{pmatrix}$	12	$A=\begin{pmatrix} -6 & 5 & -4 \\ 7 & -6 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$
13	$A=\begin{pmatrix} -3 & 6 & 7 \\ 1 & -7 & 4 \\ 5 & 6 & -3 \end{pmatrix}$	14	$A=\begin{pmatrix} 3 & -6 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ -4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
15	$A=\begin{pmatrix} 9 & -4 & 3 \\ -6 & 2 & -3 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$	16	$A=\begin{pmatrix} -6 & 7 & 1 \\ 0 & -8 & -5 \\ -4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
17	$A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -3 & 4 & 6 \\ 6 & 3 & -4 \end{pmatrix}$	18	$A=\begin{pmatrix} 1 & 5 & -6 \\ -4 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$
19	$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 9 \\ 4 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	20	$A=\begin{pmatrix} 1 & -5 & 8 \\ -1 & 5 & -3 \\ 10 & 8 & -8 \end{pmatrix}$
21	$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$	22	$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
23	$A=\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$	24	$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
25	$A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$	26	$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$
27	$A=\begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$	28	$A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
29	$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$	30	$A=\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

Практическое занятие № 5. Доминирование

Если платежная матрица игры не содержит седловой точки, то задача определения оптимальной смешанной стратегии тем сложнее, чем больше размерность матрицы. Поэтому для игр с платежными матрицами большой размерности отыскание решения можно несколько упростить используя *доминирование* строк и столбцов.

Стратегия A_l является доминирующей над стратегией A_i, если все элементы l-ой строки не меньше соответствующих элементов i-ой строки, т.е. (т. е. одна чистая стратегия доминирует другую), если $a_{lj} \geq a_{ij}$ при всех j, $a_{lj} > a_{ij}$ по крайней по крайней мере при одном j (стратегия A_i доминируемая).

Стратегия B_k является доминирующей над стратегией B_j, если все элементы k-ого столбца меньше или равны соответствующим элементам j-го столбца, т.е.

при всех j, при всех j, (стратегия B_j доминируемая).

Исключение из платежной матрицы доминируемых стратегий (ими игрокам пользоваться заведомо невыгодно) позволяет уменьшить размер игры, что упрощает решение игры. Вероятность применения доминируемых стратегий равна нулю.

Пример 1. Рассмотрим игру со следующей матрицей:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Третья строка доминирует вторую. Исключение второй строки приводит к матрице

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Третий столбец в этой урезанной матрице доминирует второй, исключение второго столбца дает .

Если можно найти решение для полученной игры, то его легко использовать для решения исходной игры, просто приписав исключенным строкам и столбцам нулевые вероятности.

Пример 2: Упростить платежную матрицу:

Элементы 1-ой строки меньше или равны соответствующим элементам 4-ой строки. Первая строка является доминируемой, т.е. первой стратегией первому игроку пользоваться заведомо невыгодно.

Исключаем пятую строку.

Исключаем второй столбец, пятый столбец.

Снова сравниваем строки: исключаем первую строку.

Результат

Задания для самостоятельной работы

Используя принцип доминирования, свести матричную игру к игре с матрицей либо 2×2, либо n×2, либо 2×m и найти ее решение графическим методом.

№ варианта	Платежная матрица	№ варианта	Платежная матрица
1	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$	2	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

3	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	4	$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 & 6 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 5 \\ 3 & 6 & 6 & 3 & 7 \\ 1 & 7 & 7 & 2 & 8 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 8 & 7 \\ 5 & 5 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	6	$\begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 6 \\ 8 & 8 & 9 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 6 & 2 \\ 4 & 3 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 5 & 4 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$	8	$\begin{pmatrix} 6 & 9 & 6 & 5 & 6 \\ 8 & 5 & 9 & 8 & 9 \\ 5 & 5 & 4 & 4 & 6 \\ 4 & 7 & 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	10	$\begin{pmatrix} 4 & 6 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 4 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 4 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$
11	$\begin{pmatrix} 7 & 9 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 6 & 6 \\ 7 & 5 & 7 & 8 \\ 8 & -1 & 8 & 8 \\ 3 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$	12	$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \\ 5 & 4 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$
13	$\begin{pmatrix} 4 & 6 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 4 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 4 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	14	$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \\ 6 & 6 & -1 & 6 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ 7 & 7 & -2 & 7 \end{pmatrix}$
15	$\begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 & 6 & 5 \\ -2 & 5 & 5 & 6 & 5 \\ 4 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$	16	$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & -1 & 6 & 6 \\ 2 & 3 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

17	$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 7 & 5 \\ 7 & 7 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 8 & 2 \end{pmatrix}$	18	$\begin{pmatrix} 5 & 6 & 2 & 4 & 5 \\ 5 & 9 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 2 & 7 & 7 & 6 \\ 6 & 3 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$
19	$\begin{pmatrix} 8 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 9 & 9 \\ 2 & 1 & 7 & 7 \\ 4 & 3 & 5 & 6 \\ 2 & 2 & 5 & 5 \end{pmatrix}$	20	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & -2 \\ 6 & 5 & 5 & -1 \\ 4 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$
21	$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 5 & 2 \\ 7 & 8 & 7 & 1 & 7 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 8 & 9 & 8 & -1 & 9 \end{pmatrix}$	22	$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 & 2 & 3 \\ 8 & 3 & 8 & 9 & 8 \\ 5 & 7 & 4 & 2 & 3 \\ 7 & 5 & 7 & 3 & 7 \end{pmatrix}$
23	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & -1 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	24	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
25	$\begin{pmatrix} 5 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 7 & 7 & -1 \\ 4 & 5 & -1 \end{pmatrix}$	26	$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & -1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$
27	$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & -2 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$	28	$\begin{pmatrix} 10 & 8 & 7 & 11 & 6 \\ 8 & 10 & 9 & 10 & 10 \\ 8 & 7 & 7 & 8 & 7 \end{pmatrix}$
29	$\begin{pmatrix} 7 & 3 & 7 & 6 & 8 \\ 4 & 6 & 3 & 6 & 2 \\ 5 & 5 & 3 & 7 & 2 \end{pmatrix}$	30	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 5 & 3 \\ -1 & 4 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Практическое занятие № 6. Методы решения матричных игр $m \times n$

Решение игр размерности $m \times n$ *методами линейного программирования*

Задание 1. Определить с помощью методов линейного программирования решение игры с матрицей .

1. Проверяем, имеет ли платежная матрица седловую точку. Если да, то выписываем решение игры в чистых стратегиях.

Считаем, что игрок I выбирает свою стратегию так, чтобы получить максимальный свой выигрыш, а игрок II выбирает свою стратегию так, чтобы минимизировать выигрыш игрока I.

Игроки	B_1	B_2	B_3	B_4	$a = \min(A_i)$
A_1	-1	3	3	-2	-2
A_2	5	1	2	4	1
A_3	3	2	3	3	2
$b = \max(B_i)$	5	3	3	4	

Находим гарантированный выигрыш, определяемый нижней ценой игры $\alpha = \max(a_i) = 2$, которая указывает на максимальную чистую стратегию A_3.

Верхняя цена игры $\beta = \min(\, b_j) = 3$.

Что свидетельствует об отсутствии седловой точки, так как $\alpha \neq \beta$, тогда цена игры находится в пределах $2 \leq \gamma \leq 3$. Находим решение игры в смешанных стратегиях. Объясняется это тем, что игроки не могут объявить противнику свои чистые стратегии: им следует скрывать свои действия. Игру можно решить, если позволить игрокам выбирать свои стратегии случайным образом (смешивать чистые стратегии).

Так как игроки выбирают свои чистые стратегии случайным образом, то выигрыш игрока I будет случайной величиной. В этом случае игрок I должен выбрать свои смешанные стратегии так, чтобы получить **максимальный средний выигрыш**.

Аналогично, игрок II должен выбрать свои смешанные стратегии так, чтобы минимизировать математическое ожидание игрока I.

Поскольку среди элементов платежной матрицы есть отрицательные, то прибавим ко всем элементам матрицы такое положительное число γ=2, чтобы элементы матрицы стали неотрицательными. Получаем новую платежную матрицу. Такая замена не изменит решения игры, изменится только ее цена (по теореме фон Неймана).

2. Находим решение игры в смешанных стратегиях.

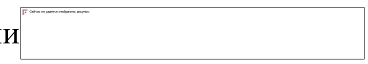
Составим пару двойственных задач линейного программирования, определяющих решение исходной задачи.

$$L = z_1 + z_2 + z_3 \to \min$$

$$\begin{cases} z_1 + 7z_2 + 5z_3 \geq 1, \\ 5z_1 + 3z_2 + 4z_3 \geq 1, \\ 5z_1 + 4z_2 + 5z_3 \geq 1 \\ 6z_2 + 5z_3 \geq 1, \\ z_{1,2,3} \geq 0. \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

(II)

Решим прямую задачу линейного программирования симплексным методом, с использованием симплексной таблицы.

Определим максимальное значение целевой функции  при следующих условиях-ограничений.

Для построения первого опорного плана систему неравенств приведем к системе уравнений путем введения дополнительных переменных (**переход к канонической форме**).

Решим систему уравнений относительно базисных переменных: w_5, w_6, w_7. Полагая, что **свободные переменные** равны 0, получим первый опорный план: $W_0 = (0,0,0,0,1,1,1)$

Базис	B	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7
w_5	1	1	5	5	0	1	0	0
w_6	1	7	3	4	6	0	1	0
w_7	1	5	4	5	5	0	0	1
$L'(W_0)$	0	-1	-1	-1	-1	0	0	0

Переходим к основному алгоритму симплекс-метода.

Итерация №0.

Текущий опорный план неоптимален, так как в индексной строке находятся отрицательные коэффициенты.

В качестве ведущего выберем столбец, соответствующий переменной w_4, так как это наибольший коэффициент по модулю.

Вычислим значения D_i по строкам как частное от деления: b_i / a_{i4} и из них выберем наименьшее:

$$min\left(-, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{6}$$

Следовательно, 2-ая строка является ведущей.

Разрешающий элемент равен (6) и находится на пересечении ведущего столбца и ведущей строки.

Базис	B	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	min
w_5	1	1	5	5	0	1	0	0	-
w_6	1	7	3	4	**6**	0	1	0	**$^1/_6$**
w_7	1	5	4	5	5	0	0	1	$^1/_5$
$L'(W_1)$	0	-1	-1	-1	**-1**	0	0	0	

Формируем следующую часть симплексной таблицы. Вместо переменной w_6 в план 1 войдет переменная w_4.

Получаем новую симплекс-таблицу:

Базис	B	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7

w_5	1	1	5	5	0	1	0	0
w_4	$^{1}/_{6}$	$^{7}/_{6}$	$^{1}/_{2}$	$^{2}/_{3}$	1	0	$^{1}/_{6}$	0
w_7	$^{1}/_{6}$	$^{-5}/_{6}$	$^{3}/_{2}$	$^{5}/_{3}$	0	0	$^{-5}/_{6}$	1
L’(W_1)	$^{1}/_{6}$	$^{1}/_{6}$	$^{-1}/_{2}$	$^{-1}/_{3}$	0	0	$^{1}/_{6}$	0

Итерация №1.

Текущий опорный план неоптимален, так как в индексной строке находятся отрицательные коэффициенты.

В качестве ведущего выберем столбец, соответствующий переменной w_2, так как это наибольший коэффициент по модулю.

Вычислим значения D_i по строкам как частное от деления: b_i / a_{i2} и из них выберем наименьшее:

$$min\left(1:5, \frac{1}{6}:\frac{1}{2}, \frac{1}{6}:\frac{3}{2}\right) = min\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}\right) = \frac{1}{9}$$

Следовательно, 3-ая строка является ведущей. Разрешающий элемент равен ($1^{1}/_{2}$) и находится на пересечении ведущего столбца и ведущей строки.

Базис	B	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	min
w_5	1	1	5	5	0	1	0	0	$^{1}/_{5}$
w_4	$^{1}/_{6}$	$^{7}/_{6}$	$^{1}/_{2}$	$^{2}/_{3}$	1	0	$^{1}/_{6}$	0	$^{1}/_{3}$
w_7	$^{1}/_{6}$	$^{-5}/_{6}$	**$1^{1}/_{2}$**	$^{5}/_{3}$	0	0	$^{-5}/_{6}$	1	**$^{1}/_{9}$**
L’(W_2)	$^{1}/_{6}$	$^{1}/_{6}$	**$^{-1}/_{2}$**	$^{-1}/_{3}$	0	0	$^{1}/_{6}$	0	

Формируем следующую часть симплексной таблицы. Вместо переменной w_7 в план 2 войдет переменная w_2.

Получаем новую симплекс-таблицу:

Базис	B	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7
w_5	$^{4}/_{9}$	$^{34}/_{9}$	0	$^{-5}/_{9}$	0	1	$^{25}/_{9}$	$^{-10}/_{3}$
w_4	$^{1}/_{9}$	$^{13}/_{9}$	0	$^{1}/_{9}$	1	0	$^{4}/_{9}$	$^{-1}/_{3}$
w_2	$^{1}/_{9}$	$^{-5}/_{9}$	1	$^{10}/_{9}$	0	0	$^{-5}/_{9}$	$^{2}/_{3}$
L’(W_2)	$^{2}/_{9}$	$^{-1}/_{9}$	0	$^{2}/_{9}$	0	0	$^{-1}/_{9}$	$^{1}/_{3}$

Итерация №2.

Текущий опорный план неоптимален, так как в индексной строке находятся отрицательные коэффициенты.

В качестве ведущего выберем столбец, соответствующий переменной y_6, так как это наибольший коэффициент по модулю.

Вычислим значения D_i по строкам как частное от деления: b_i / a_{i6} и из них выберем наименьшее:

$$min\left(\frac{4}{9}:2\frac{7}{9},\frac{1}{9}:\frac{4}{9},-\right)=min\left(\frac{4}{25},\frac{1}{4},-\right)=\frac{4}{25}$$

Следовательно, 1-ая строка является ведущей.

Разрешающий элемент равен ($2^7/_9$) и находится на пересечении ведущего столбца и ведущей строки.

Базис	B	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	min
w_5	$^4/_9$	$^{34}/_9$	0	$^{-5}/_9$	0	1	**$2^7/_9$**	$^{-10}/_3$	**$^4/_{25}$**
w_4	$^1/_9$	$^{13}/_9$	0	$^1/_9$	1	0	$^4/_9$	$^{-1}/_3$	$^1/_4$
w_2	$^1/_9$	$^{-5}/_9$	1	$^{10}/_9$	0	0	$^{-5}/_9$	$^2/_3$	-
L'(W_3)	$^2/_9$	$^{-1}/_9$	0	$^2/_9$	0	0	**$^{-1}/_9$**	$^1/_3$	

Формируем следующую часть симплексной таблицы. Вместо переменной w_5 в план 3 войдет переменная w_6.

Получаем новую симплекс-таблицу:

Базис	B	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7
w_6	$^4/_{25}$	$^{34}/_{25}$	0	$^{-1}/_5$	0	$^9/_{25}$	1	$^{-6}/_5$
w_4	$^1/_{25}$	$^{21}/_{25}$	0	$^1/_5$	1	$^{-4}/_{25}$	0	$^1/_5$
w_2	$^1/_5$	$^1/_5$	1	1	0	$^1/_5$	0	0
L'(W_3)	$^6/_{25}$	$^1/_{25}$	0	$^1/_5$	0	$^1/_{25}$	0	$^1/_5$

Конец итераций: индексная строка не содержит отрицательных элементов - найден оптимальный план.

Среди значений индексной строки нет отрицательных. Поэтому эта таблица определяет оптимальный план задачи.

Окончательный вариант симплекс-таблицы:

Базис	B	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7
w_6	$^4/_{25}$	$^{34}/_{25}$	0	$^{-1}/_5$	0	$^9/_{25}$	1	$^{-6}/_5$
w_4	$^1/_{25}$	$^{21}/_{25}$	0	$^1/_5$	1	$^{-4}/_{25}$	0	$^1/_5$
w_2	$^1/_5$	$^1/_5$	1	1	0	$^1/_5$	0	0
L'(W_4)	$^6/_{25}$	$^1/_{25}$	0	$^1/_5$	0	$^1/_{25}$	0	$^1/_5$

Используя последнюю итерацию прямой задачи найдем, оптимальный план двойственной задачи.

Используя последнюю итерацию прямой задачи найдем, оптимальный план двойственной задачи:

$z_1 = w_5 = \frac{1}{25}$; $z_2 = w_6 = 0$; $z_3 = w_7 = \frac{1}{5}$.

$w_1 = 0$; $w_2 = \frac{1}{5}$; $w_3 = 0$; $w_4 = \frac{1}{25}$.

Цена игры будет равна:

$$\gamma = \frac{1}{L'(B)} = 1 : \frac{6}{25} = \frac{25}{6}.$$

Вероятности применения стратегий игроков: $y_i = \gamma \cdot w_i$; $x_j = \gamma \cdot z_j$

Получаем:

$$x_1 = \gamma \cdot z_1 = \frac{25}{6} \cdot \frac{1}{25} = \frac{1}{6},$$

$$x_2 = \gamma \cdot z_2 = \frac{25}{6} \cdot 0 = 0,$$

$$x_3 = \gamma \cdot z_3 = \frac{25}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{5}{6}.$$

Оптимальная смешанная стратегия игрока I:

$$S_A^* = \left(\frac{1}{6}, 0, \frac{5}{6}\right).$$

$$y_1 = \gamma \cdot w_1 = \frac{25}{6} \cdot 0 = 0,$$

$$y_2 = \gamma \cdot w_2 = \frac{25}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{5}{6},$$

$$y_3 = \gamma \cdot w_3 = \frac{25}{6} \cdot 0 = 0.$$

$$y_4 = \gamma \cdot w_4 = \frac{25}{6} \cdot \frac{1}{25} = \frac{1}{6}.$$

Оптимальная смешанная стратегия игрока II:

$$S_B^* = \left(0, \frac{5}{6}, 0, \frac{1}{6}\right).$$

Поскольку ранее к элементам матрицы было прибавлено число (2), то вычтем это число из цены игры.

$$\gamma = \frac{25}{6} - 2 = \frac{13}{6} = 2\frac{1}{6}$$

Таким образом получили окончательную цену игры:

$$\gamma = 2\frac{1}{6}.$$

Задания для самостоятельной работы

Найти методом линейного программирования решение игры, заданной матрицей *A*.

1	$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 4 & 6 & -5 \\ -4 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$	2	$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -5 & 6 \\ -9 & 4 & 5 & -3 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$
3	$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 9 & -1 \\ 5 & 3 & -1 & 2 \\ -3 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$	4	$A = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 5 \\ 3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

5	$A=\begin{pmatrix} 6 & -2 & 4 \\ 5 & -3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$	6	$A=\begin{pmatrix} 4 & -5 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & 5 & -6 \end{pmatrix}$
7	$A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$	8	$A=\begin{pmatrix} 4 & 5 & -6 \\ 3 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -4 \\ -4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
9	$A=\begin{pmatrix} 8 & 5 & -6 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	10	$A=\begin{pmatrix} 8 & 1 & -5 & 3 \\ 4 & -1 & -3 & -3 \\ -4 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$
11	$A=\begin{pmatrix} 6 & 3 & -1 & 4 \\ 4 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	12	$A=\begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 \\ -4 & -5 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$
13	$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$	14	$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & -5 & 2 & -3 \\ -4 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
15	$A=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -3 & 3 \\ -2 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$	16	$A=\begin{pmatrix} -3 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & -4 \\ 4 & -4 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
17	$A=\begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 \\ 4 & -5 & 6 \\ 6 & -6 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$	18	$A=\begin{pmatrix} 9 & 6 & -4 & 2 \\ 3 & -3 & 1 & -1 \\ -3 & 5 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

19	$A=\begin{pmatrix} 2 & 6 & -5 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	20	$A=\begin{pmatrix} -2 & 6 & 3 \\ 4 & 5 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
21	$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \\ -1 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	22	$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
23	$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$	24	$A=\begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 3 \\ 4 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
25	$A=\begin{pmatrix} 8 & 5 & 6 \\ 10 & 6 & 7 \\ 6 & 12 & 9 \\ 7 & 5 & 5 \end{pmatrix}$	26	$A=\begin{pmatrix} 7 & 10 & 5 \\ 9 & 3 & 9 \\ 7 & 4 & 7 \\ 9 & 4 & 6 \end{pmatrix}$
27	$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 7 & 2 & 5 \end{pmatrix}$	28	$A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
29	$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	30	$A=\begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Практическое занятие № 7. Игры с природой

Отличительная особенность игры с природой состоит в том, что в ней имеется один активный игрок (игрок 1), а игрок 2 (природа) не действует сознательно против игрока 1, а выступает как не имеющий конкретной цели партнер по игре, который выбирает свои ходы случайным образом. Термин «природа» характеризует некую объективную действительность.

Платежная матрица игры с природой имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Методы принятия решений в играх с природой зависят от характера неопределенности в поведении игрока 2, т.е. от того, известны или нет вероятности состояний (стратегий) природы. В первом случае мы имеем ситуацию риска, а во втором - полной неопределенности. В силу этого иногда игру с природой задают не в виде матрицы выигрышей, а в виде матрицы рисков или матрицы упущенных возможностей

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{m1} & r_{m2} & \dots & r_{mn} \end{pmatrix}.$$

Риском r_{ij} игрока 1 при использовании им i-й стратегии и при j-м состоянии среды (природы) называется разность между выигрышем, который игрок получил бы, если бы он знал, что наступит j-е состояние среды и выигрышем, который игрок получит, не обладая этой информацией. Зная j-е состояние природы, игрок выбирает ту стратегию, при которой его выигрыш максимален, т.е.

$$r_{ij} = \beta_j - a_{ij} = \max_{1 \le i \le m} a_{ij} - a_{ij}$$

1. Принятие решений в условиях полной неопределенности

1. Критерий максимакса (критерий крайнего оптимизма) определяет стратегию, максимизирующую максимальные выигрыши для каждого состояния природы. Наилучшим признается решение, при котором достигается максимальный выигрыш, равный

$$M = \max_{1 \le i \le m} \max_{1 \le j \le n} a_{ij}$$

2. Максиминный критерий Вальда (критерий крайнего пессимизма). Рассматривает природу как агрессивно настроенного и сознательно действующего противного, аналогичного тому, который был рассмотрен в матричной игре двух лиц с нулевой суммой. Выбирается решение, для которого достигается значение

$$W = \max_{1 \le i \le m} \min_{1 \le j \le n} a_{ij}.$$

Этот критерий отражает принцип гарантированного результата, т.е. ЛПР выбирает такую стратегию, которая максимизировала бы его выигрыш в самой неблагоприятной ситуации. Критерием Вальда, главным образом, пользуются в случаях, когда необходимо обеспечить успех при любых возможных условиях

3. Критерий минимаксного риска Сэвиджа. Данный критерий предполагает, что оптимальной стратегией является та стратегия, при которой величина риска в наихудшем случае минимальна. Этот критерий также называется критерием минимального риска. Согласно критерию Сэвиджа ЛПР пытается выбрать действие, при котором величина риска принимает наименьшее значение в самой неблагоприятной ситуации, т.е.

$$W = \min_{1 \le i \le m} \max_{1 \le j \le n} r_{ij}.$$

Критерий Сэвиджа, так же как и критерий Вальда, является критерием крайнего пессимизма.

4. Критерий пессимизма-оптимизма Гурвица. Этот критерий рекомендует при выборе решения не руководствоваться ни крайним оптимизмом, ни крайним

пессимизмом.

Критерий Гурвица рекомендует стратегию, которая определяется по формуле:

$$W = \max_{1 \le i \le m}\left[\alpha \min_{1 \le j \le n} a_{ij} + (1-\alpha)\max_{1 \le j \le n} a_{ij}\right],$$

где $\alpha \in [0,1]$ – степень пессимизма.

Если $\alpha = 0$, получим максимаксный критерий «крайнего оптимизма». При $\alpha = 1$ приходим к пессимистическому максиминному критерию Вальда.

Выбор конкретного значения параметра определяется, скорее всего, субъективными факторами: чем опаснее ситуация, тем больше надо «подстраховываться» и тем ближе к единице нужно брать значение α к единице. При отсутствии каких-либо явных предпочтений вполне логично выбрать $\alpha = 0{,}5$.

5. Критерий Лапласа. При неизвестных вероятностях состояний «природы» можно принять, что все они равновероятны, т.е. $p(\Pi_j) = 1/n, j = 1,\ldots,n$, и выбор решения определяется критерием Лапласа, при котором ЛПР выбирает такую стратегию A_i, что

$$W = \max_{1 \le i \le m}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right).$$

Выбор критерия принятия решения является наиболее сложным и ответственным этапом. Если рекомендации, вытекающие из различных критериев, совпадают – тем лучше, можно смело выбирать рекомендуемое ими решение. Если эти рекомендации противоречат друг другу, анализ матрицы игры «с природой» с точки зрения разных критериев часто дает лучшее представление о ситуации, о достоинствах и недостатках каждого решения, чем непосредственное рассмотрение матрицы, особенно высокой размерности.

2. Принятие решения в условиях риска

В этом случае различным состояниям природы поставлены в соответствие соответствующие вероятности. Таким образом, игрок 1 принимает решение на основе критерия максимального ожидаемого среднего выигрыша или минимального ожидаемого среднего риска.

Если для некоторой игры с природой, заданной платежной матрицей $A = \{a_{ij}\}$ стратегиям природы Π_j (j=1,2,…,n) соответствуют вероятности p_j, то оптимальной стратегией игрока 1 будет та, которая обеспечивает ему максимальный средний выигрыш (максимизирует математическое ожидание выигрыша), т.е.

$$\max_{1 \le i \le m}\left(\sum_{j=1}^{n} p_j \cdot a_{ij}\right)$$

Применительно к матрице упрощенных возможностей (матрице рисков) оптимальной будет стратегия, обеспечивающая ему минимальный средний риск:

$$\max_{1 \le i \le m}\left(\sum_{j=1}^{n} p_j \cdot r_{ij}\right)$$

Задание 1. Условия игры «с природой» задаются в виде матрицы выигрышей (доходов)

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 9 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 13 \\ 9 & 6 & 4 & 11 \end{pmatrix}.$$

Требуется сделать выбор действия по критериям максимакса, Вальда, Сэвиджа, Гурвица при $\alpha = 0{,}5$, Лапласа.

Решение. *Критерий максимакса:* $M = \max\limits_{1\le i\le m}\max\limits_{1\le j\le n} a_{ij} = \max\limits_{1\le i\le m}\begin{pmatrix}9\\13\\11\end{pmatrix} = 13,$

следовательно, следует выбрать стратегию A_2.

Критерий Вальда: вычислим

$$W = \max_{1\le i\le m}\min_{1\le j\le n} a_{ij} = \max_{1\le i\le m}\begin{pmatrix}3\\3\\4\end{pmatrix} = 4,$$

следовательно, следует выбрать стратегию A_3.

Критерий Сэвиджа: построим матрицу рисков

$$R = \begin{pmatrix}3 & 3 & 0 & 8\\ 6 & 2 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 5 & 2\end{pmatrix}$$

и вычислим

$$W = \min_{1\le i\le m}\max_{1\le j\le n} r_{ij} = \min_{1\le i\le m}\begin{pmatrix}8\\6\\5\end{pmatrix} = 5,$$

следовательно, следует также выбрать стратегию A_3.

Критерий Гурвица:

$$W = \max_{1\le i\le m}\left[\alpha\min_{1\le j\le n} a_{ij} + (1-\alpha)\max_{1\le j\le n} a_{ij}\right] = \max_{1\le i\le m}\left[0{,}5\begin{pmatrix}3\\3\\4\end{pmatrix} + (1-0{,}5)\begin{pmatrix}9\\13\\11\end{pmatrix}\right] =$$

$$= \max_{1\le i\le m}\begin{pmatrix}6\\8\\7{,}5\end{pmatrix} = 8,$$

следовательно, следует выбрать стратегию A_2.

Критерий Лапласа: вычислим

$$W = \max_{1\le i\le m}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right) = \max_{1\le i\le m}\begin{pmatrix}23/4\\25/4\\30/4\end{pmatrix},$$

следовательно, следует выбрать стратегию A_3.

Поскольку рекомендации трех из четырех рассмотренных критериев сводятся к выбору стратегии A_3, целесообразно остановиться на этом решении.

Задание 2. Дана матрица выигрышей

$$A = \begin{pmatrix}2 & 3 & 1 & 7\\ 4 & 2 & 9 & 1\\ 3 & 5 & 8 & 6\\ 6 & 4 & 2 & 2\\ 5 & 3 & 7 & 2\end{pmatrix}.$$

Найти матрицу рисков.

Решение. Сначала определим риски: $\beta_1 = 6;\quad \beta_2 = 5;\quad \beta_3 = 9;\quad \beta_4 = 7.$

Поэтому матрица рисков имеет вид

$$R=\begin{pmatrix}4 & 2 & 8 & 0\\ 2 & 3 & 0 & 6\\ 3 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 7 & 5\\ 1 & 2 & 2 & 5\end{pmatrix}$$

Пример. Рассмотрим результаты применения рассмотренных критериев на примере следующей платежной матрицы:

$$A=\begin{pmatrix}20 & 15 & 30 & 42 & 60\\ 15 & 70 & 45 & 20 & 35\\ 25 & 20 & 40 & 75 & 10\\ 80 & 10 & 20 & 10 & 40\end{pmatrix}$$

тогда матрица рисков

$$R=\begin{pmatrix}60 & 55 & 15 & 33 & 0\\ 65 & 0 & 0 & 55 & 25\\ 55 & 50 & 5 & 0 & 50\\ 0 & 60 & 25 & 65 & 20\end{pmatrix}$$

Для игрока 1 лучшими являются стратегии:

- по критерию максимакса - A_4 (M=80)
- по критерию Вальда – A_1 и A_2 (W =15);
- по критерию Сэвиджа – A_3 (S = 55);
- по критерию Гурвица (p = 0,5) - A_4 (H_A = 45).

Пусть для платежной матрицы $p_1 = 0,1$; $p_2 = p_3 = 0,2$; $p_4 = 0,4$;$p_5=0,1$. Тогда для первой стратегии

$$\sum_{j=1}^{5} p_j a_{1j} = 0,1\cdot 20 + 0,2\cdot 15 + 0,2\cdot 30 + 0,4\cdot 42 + 0,1\cdot 60 = 33,8$$

для второй стратегии

$$\sum_{j=1}^{5} p_j a_{2j} = 0,1\cdot 15 + 0,2\cdot 70 + 0,2\cdot 45 + 0,4\cdot 20 + 0,1\cdot 35 = 36$$

для третьей стратегии

$$\sum_{j=1}^{5} p_j a_{3j} = 0,1\cdot 25 + 0,2\cdot 20 + 0,2\cdot 40 + 0,4\cdot 75 + 0,1\cdot 10 = 45,5$$

для четвертой стратегии

$$\sum_{j=1}^{5} p_j a_{4j} = 0,1\cdot 80 + 0,2\cdot 10 + 0,2\cdot 20 + 0,4\cdot 10 + 0,1\cdot 40 = 22$$

Таким образом, для игры, задаваемой платежной матрицей А при заданных вероятностях различных состояний природы, оптимальной стратегий по критерию для риска является A_3. Для матрицы рисков имеем:

для первой стратегии

$$\sum_{j=1}^{5} p_j r_{1j} = 0,1\cdot 60 + 0,2\cdot 55 + 0,2\cdot 15 + 0,4\cdot 33 + 0,1\cdot 0 = 33,2$$

для второй стратегии

$$\sum_{j=1}^{5} p_j r_{2j} = 0{,}1 \cdot 65 + 0{,}2 \cdot 0 + 0{,}2 \cdot 0 + 0{,}4 \cdot 55 + 0{,}1 \cdot 25 = 31$$

для третьей стратегии

$$\sum_{j=1}^{5} p_j r_{3j} = 0{,}1 \cdot 55 + 0{,}2 \cdot 50 + 0{,}2 \cdot 5 + 0{,}4 \cdot 0 + 0{,}1 \cdot 50 = 21{,}5$$

для четвертой стратегии

$$\sum_{j=1}^{5} p_j r_{4j} = 0{,}1 \cdot 0 + 0{,}2 \cdot 60 + 0{,}2 \cdot 25 + 0{,}4 \cdot 65 + 0{,}1 \cdot 20 = 45$$

Таким образом, и для матрицы рисков лучшей является стратегия A_3.

Задания для самостоятельной работы

При игре с природой задана платежная матрица.

Определить:

1. Матрицу рисков R и оптимальные стратегии первого игрока при использовании им

а) критерия максимакса;

б) критерия Вальда;

в) критерия Сэвиджа;

г) критерия Гурвица с коэффициентом пессимизма p;

д) критерия Лапласа.

2. Определить оптимальную стратегию при известном векторе вероятностей состояний природы P.

1. $A = \begin{pmatrix} 10 & 15 & 4 & 16 \\ 12 & 18 & 5 & 22 \\ 14 & 12 & 18 & 11 \\ 6 & 21 & 17 & 8 \end{pmatrix}; \quad p = 0{,}1; \quad P = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 11 & 14 & 5 & 15 \\ 13 & 17 & 6 & 21 \\ 15 & 11 & 19 & 10 \\ 7 & 20 & 18 & 7 \end{pmatrix}; \quad p = 0{,}2; \quad P = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}4 \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} 15 & 14 & 11 & 18 \\ 10 & 19 & 12 & 20 \\ 17 & 16 & 29 & 8 \\ 13 & 26 & 18 & 12 \end{pmatrix}; \quad p = 0{,}3; \quad P = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}4 & 0.2 \end{pmatrix}$

4. $A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 & 5 \\ 7 & 9 & 8 & 3 \\ 2 & 6 & 1 & 8 \\ 6 & 7 & 2 & 5 \end{pmatrix}; \quad p = 0{,}4; \quad P = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0.3 & 0{,}4 & 0{,}1 \end{pmatrix}$

5. $A=\begin{pmatrix} 17 & 12 & 13 & 16 \\ 12 & 17 & 14 & 18 \\ 19 & 14 & 27 & 10 \\ 15 & 22 & 20 & 11 \end{pmatrix}; \quad p=0{,}5; \quad P=\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix}$

6. $A=\begin{pmatrix} 21 & 32 & 23 & 26 \\ 27 & 30 & 24 & 24 \\ 22 & 14 & 28 & 20 \\ 15 & 23 & 28 & 29 \end{pmatrix}; \quad p=0{,}6; \quad P=\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}3 \end{pmatrix}$

7. $A=\begin{pmatrix} 24 & 30 & 21 & 23 \\ 29 & 32 & 20 & 21 \\ 21 & 19 & 29 & 25 \\ 19 & 29 & 29 & 27 \end{pmatrix}; \quad p=0{,}7; \quad P=\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}2 \end{pmatrix}$

8. $A=\begin{pmatrix} 20 & 32 & 28 & 26 \\ 24 & 38 & 21 & 22 \\ 24 & 19 & 29 & 22 \\ 19 & 26 & 29 & 29 \end{pmatrix}; \quad p=0{,}8; \quad P=\begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix}$

9. $A=\begin{pmatrix} 26 & 34 & 22 & 23 \\ 21 & 39 & 20 & 24 \\ 21 & 23 & 28 & 27 \\ 18 & 28 & 28 & 26 \end{pmatrix}; \quad p=0{,}9; \quad P=\begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}2 \end{pmatrix}$

10. $A=\begin{pmatrix} 36 & 42 & 38 & 33 \\ 31 & 44 & 30 & 37 \\ 32 & 43 & 36 & 34 \\ 38 & 35 & 35 & 36 \end{pmatrix}; \quad p=0{,}15; \quad P=\begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}1 \end{pmatrix}$

11. $A=\begin{pmatrix} 9 & 11 & 8 & 4 \\ 7 & 12 & 4 & 5 \\ 6 & 5 & 9 & 7 \\ 8 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}; \quad p=0{,}2; \quad P=\begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}25 \end{pmatrix}$

12. $A=\begin{pmatrix} 13 & 12 & 14 & 9 \\ 9 & 15 & 12 & 7 \\ 11 & 13 & 12 & 11 \\ 15 & 8 & 16 & 6 \end{pmatrix}; \quad p=0{,}25; \quad P=\begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}25 & 0{,}3 & 0{,}15 \end{pmatrix}$

13. $A=\begin{pmatrix} 10 & 15 & 25 & 30 \\ 15 & 10 & 20 & 35 \\ 10 & 20 & 20 & 25 \\ 15 & 10 & 30 & 20 \end{pmatrix}$; $p=0{,}3$; $P=\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}3 \end{pmatrix}$

14. $A=\begin{pmatrix} 14 & 11 & 29 & 26 \\ 19 & 8 & 24 & 31 \\ 14 & 16 & 24 & 21 \\ 20 & 7 & 34 & 16 \end{pmatrix}$; $p=0{,}35$; $P=\begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}25 \end{pmatrix}$

15. $A=\begin{pmatrix} 10 & 7 & 22 & 20 \\ 15 & 6 & 18 & 25 \\ 11 & 12 & 19 & 16 \\ 16 & 5 & 25 & 11 \end{pmatrix}$; $p=0{,}4$; $P=\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}25 & 0{,}15 \end{pmatrix}$

16. $A=\begin{pmatrix} 17 & 14 & 21 & 26 \\ 15 & 16 & 18 & 29 \\ 19 & 12 & 27 & 19 \\ 16 & 15 & 25 & 18 \end{pmatrix}$; $p=0{,}45$; $P=\begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}3 \end{pmatrix}$

17. $A=\begin{pmatrix} 11 & 4 & 21 & 6 \\ 5 & 16 & 8 & 29 \\ 19 & 2 & 27 & 5 \\ 6 & 15 & 5 & 18 \end{pmatrix}$; $p=0{,}5$; $P=\begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}1 \end{pmatrix}$

18. $A=\begin{pmatrix} 4 & 14 & 2 & 16 \\ 15 & 6 & 18 & 9 \\ 9 & 12 & 7 & 15 \\ 16 & 5 & 15 & 8 \end{pmatrix}$; $p=0{,}55$; $P=\begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}4 \end{pmatrix}$

19. $A=\begin{pmatrix} 14 & 24 & 12 & 26 \\ 25 & 16 & 28 & 19 \\ 19 & 22 & 17 & 25 \\ 26 & 15 & 25 & 18 \end{pmatrix}$; $p=0{,}6$; $P=\begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}3 & 0{,}15 & 0{,}3 \end{pmatrix}$

20. $A=\begin{pmatrix} 11 & 21 & 9 & 23 \\ 22 & 13 & 25 & 16 \\ 16 & 19 & 14 & 22 \\ 23 & 12 & 22 & 15 \end{pmatrix}$; $p=0{,}65$; $P=\begin{pmatrix} 0{,}15 & 0{,}25 & 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix}$

21. $A=\begin{pmatrix} 7 & 17 & 5 & 19 \\ 18 & 9 & 21 & 12 \\ 12 & 15 & 10 & 18 \\ 19 & 8 & 18 & 13 \end{pmatrix}; \quad p=0{,}7; \quad P=\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}28 & 0{,}22 & 0{,}3 \end{pmatrix}$

22. $A=\begin{pmatrix} 12 & 22 & 10 & 24 \\ 16 & 7 & 19 & 10 \\ 16 & 19 & 14 & 22 \\ 16 & 15 & 15 & 10 \end{pmatrix}; \quad p=0{,}75; \quad P=\begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}4 \end{pmatrix}$

23. $A=\begin{pmatrix} 6 & 11 & 5 & 12 \\ 8 & 4 & 10 & 5 \\ 8 & 10 & 7 & 11 \\ 8 & 8 & 8 & 5 \end{pmatrix}; \quad p=0{,}8; \quad P=\begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}4 \end{pmatrix}$

24. $A=\begin{pmatrix} 9 & 14 & 8 & 15 \\ 11 & 7 & 13 & 8 \\ 11 & 13 & 10 & 14 \\ 11 & 12 & 12 & 8 \end{pmatrix}; \quad p=0{,}85; \quad P=\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}1 \end{pmatrix}$

25. $A=\begin{pmatrix} 11 & 15 & 11 & 15 \\ 12 & 10 & 13 & 12 \\ 13 & 12 & 12 & 14 \\ 14 & 12 & 12 & 11 \end{pmatrix}; \quad p=0{,}9; \quad P=\begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}1 \end{pmatrix}$

26. $A=\begin{pmatrix} 14 & 11 & 29 & 26 \\ 19 & 8 & 24 & 31 \\ 14 & 16 & 24 & 21 \\ 20 & 7 & 34 & 16 \end{pmatrix}; \quad p=0{,}35; \quad P=\begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}25 \end{pmatrix}$

27. $A=\begin{pmatrix} 10 & 7 & 22 & 20 \\ 15 & 6 & 18 & 25 \\ 11 & 12 & 19 & 16 \\ 16 & 5 & 25 & 11 \end{pmatrix}; \quad p=0{,}4; \quad P=\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}25 & 0{,}15 \end{pmatrix}$

28. $A=\begin{pmatrix} 17 & 14 & 21 & 26 \\ 15 & 16 & 18 & 29 \\ 19 & 12 & 27 & 19 \\ 16 & 15 & 25 & 18 \end{pmatrix}; \quad p=0{,}45; \quad P=\begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}3 \end{pmatrix}$

29. $A=\begin{pmatrix} 11 & 4 & 21 & 6 \\ 5 & 16 & 8 & 29 \\ 19 & 2 & 27 & 5 \\ 6 & 15 & 5 & 18 \end{pmatrix};\quad p=0{,}5;\quad P=\begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}1 \end{pmatrix}$

30. $A=\begin{pmatrix} 4 & 14 & 2 & 16 \\ 15 & 6 & 18 & 9 \\ 9 & 12 & 7 & 15 \\ 16 & 5 & 15 & 8 \end{pmatrix};\quad p=0{,}55;\quad P=\begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}4 \end{pmatrix}$

Практическое занятие № 8. Решение биматричных игр

В конечной бескоалиционной игре двух игроков (КБИДИ) каждый из них делает один ход – выбирает одну стратегию из имеющегося у него конечного числа стратегий, и после этого он получает свой выигрыш согласно определённым для каждого из них матрицами выигрышей. Поэтому такие игры называются биматричными.

Теорема (Нэша). Каждая биматричная игра имеет по крайней мере одну ситуацию равновесия.

В качестве примера рассмотрим случай, когда каждый игрок имеет две чистые стратегии. В этом случае матрицы A и B равны:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}. \tag{8.1}$$

Смешанные стратегии для игроков 1 и 2 имеют вид:

$$(x,\ 1-x),\quad (y,\ 1-y)\qquad 0\le x\le 1;\quad 0\le y\le 1, \tag{8.2}$$

а средние выигрыши равны:

$$E_1(A,x,y)=xA\,y^T=(x;\ 1-x)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix}= \tag{8.3}$$

$$=(a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22})\,xy+(a_{12}-a_{22})\,x+(a_{21}-a_{22})\,y+a_{22}.$$

$$E_2(B,x,y)=xB\,y^T=(x;\ 1-x)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix}= \tag{8.4}$$

$$=(b_{11}-b_{12}-b_{21}+b_{22})\,xy+(b_{12}-b_{22})\,x+(b_{21}-b_{22})\,y+b_{22}.$$

Ситуация равновесия для биматричной игры составляет пару (x,y) таких смешанных стратегий игроков 1 и 2, которые удовлетворяют неравенствам:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix}\le E_1(A,x,y), \tag{8.5}$$

$$(x;\ 1-x)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\le E_2(B,x,y), \tag{8.6}$$

или

$$\begin{cases} a_{11}y + a_{12}(1-y) \le \mathrm{E}_1(\mathrm{A}, \mathrm{x}, \mathrm{y}) \\ a_{21}y + a_{22}(1-y) \le \mathrm{E}_1(\mathrm{A}, \mathrm{x}, \mathrm{y}) \end{cases} \qquad (8.7)$$

$$\begin{cases} b_{11}x + b_{21}(1-x) \le \mathrm{E}_2(\mathrm{B}, \mathrm{x}, \mathrm{y}) \\ b_{12}x + b_{22}(1-x) \le \mathrm{E}_2(\mathrm{B}, \mathrm{x}, \mathrm{y}) \end{cases}$$

(8.8)

Преобразовав (8.7) и (8.8), получим

$$\underbrace{(\mathrm{a}_{11} - \mathrm{a}_{12} - \mathrm{a}_{21} + \mathrm{a}_{22})}_{:=\mathrm{a}_1}(1-x)\,y + (\underbrace{\mathrm{a}_{12} - \mathrm{a}_{22}}_{:=-\mathrm{a}_2})\,(1-x) \le 0$$

$$(a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})\,xy + (a_{12} - a_{22})\,x \ge 0$$

или

$$\begin{cases} a_1(1-x)y - a_2(1-x) \le 0 \\ a_1xy - a_2x \ge 0 \end{cases}$$

(8.9)

Т. о., множество всех приемлемых стратегий для игрока 1 удовлетворяет условиям (8.9), $0 \le x \le 1$; $0 \le y \le 1$. Чтобы найти x рассмотрим 3 случая:

1. Если $x = 0$, то $a_1xy - a_2x \ge 0$ справедливо $\forall\, y$, а $a_1y - a_2 \le 0$.
2. Если $x = 1$, то $a_1(1-x)y - a_2(1-x) \le 0$ справедливо $\forall\, y$, а $a_1y - a_2 \ge 0$.
3. Если $0 < x < 1$, то ($a_1(1-x)y - a_2(1-x) \le 0$ разделим на $(1 - x)$, а (6) - на x и

получим

$$\begin{cases} a_1y - a_2 \le 0, \\ \mathrm{a}_1y - a_2 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow a_1y - a_2 = 0$$

(8.10)

Итак, множество *K* решений системы (8.9 состоит из

1) всех ситуаций вида $(0; y)$, если $a_1y - a_2 \le 0$; $0 \le y \le 1$;

2) всех ситуаций вида $(x; y)$, если $a_1y - a_2 = 0$; $0 < x < 1$;

3) всех ситуаций вида $(1; y)$, если $a_1y - a_2 \ge 0$; $0 \le y \le 1$.

Если $a_1 = a_2 = 0$, то решением является $x \in [0; 1]$, $y \in [0; 1]$, т. к. неравенства

$a_1y - a_2 \le 0$

$a_1y - a_2 \ge 0$

выполняются при всех x и y, т. е. множество приемлемых для игрока 1 ситуаций покрывает весь единичный квадрат.

Если $a_1 = 0$, $a_2 \ne 0$, то выполняется либо $a_1y - a_2 \le 0$ либо $a_1y - a_2 \ge 0$ и поэтому решением является либо $x = 0$, либо x=1 при $0 \le y \le 1$ (приемлемой стратегии в игре не существует).

Если $a_1 > 0$, то из $a_1y - a_2 \le 0$ получаем решение

$$x = 0;\ \mathrm{y} \le \frac{a_2}{a_1} := \alpha,$$

Из $a_1y - a_2 \geq 0$ следует ещё решение $x = 1,\ y \geq \alpha$.

Из $\begin{cases} a_1 y - a_2 \leq 0, \\ a_1 y - a_2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow a_1 y - a_2 = 0$ следует ещё решение

$$0 < x < 1,\quad y = \alpha.$$

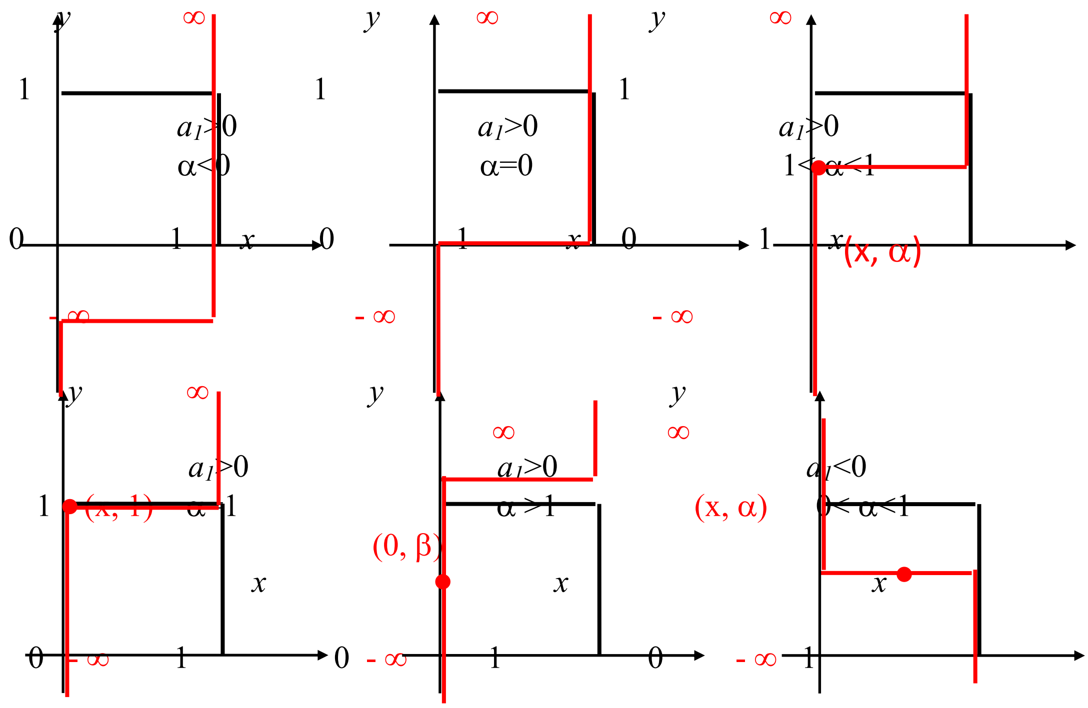
Если $a_1 < 0$, то решение следующее:

$$x = 0,\ y \geq \alpha;\ x = 1,\ y \leq \alpha;\ 0 < x < 1,\ y = \alpha.$$

При этом необходимо учитывать, что дополнительно должно быть

$$0 \leq y \leq 1.$$

Геометрически это выглядит следующим образом:



Для игрока 2 исследования аналогичны. Если ввести обозначения

$$b_1 := b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22}$$
$$b_2 := b_{22} - \underline{b_{21}}$$

то множество L приемлемых для него ситуаций состоит из :

1) всех ситуаций вида $(x, 0)$, если $b_1x - b_2 < 0;\ 0 \leq x \leq 1$,
2) всех ситуаций вида (x, y), если $b_1x - b_2 = 0;\ 0 \leq x \leq 1;\ 0 < y < 1$,
3) всех ситуаций вида $(x, 1)$, если $b_1x - b_2 > 0;\ 0 \leq x \leq 1$.

Результаты следующие:

если $b_1 = b_2 = 0$, то решение $0 \leq x \leq 1;\ 0 \leq y \leq 1$;

если $b_1 = 0;\ b_2 \neq 0$, то решение либо $y = 0$, либо $y = 1$ при $0 \leq x \leq 1$ (приемлемой стратегии в игре не существует);

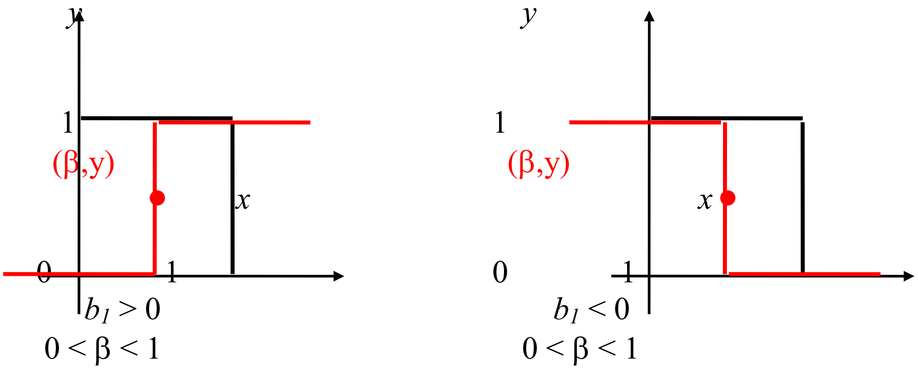
если $b_1 > 0$, то решения следующие:

$$y = 0,\ x < \frac{b_2}{b_1} = \beta;\ y = 1,\ x > \beta;\ 0 < y < 1;\ x = \beta;$$

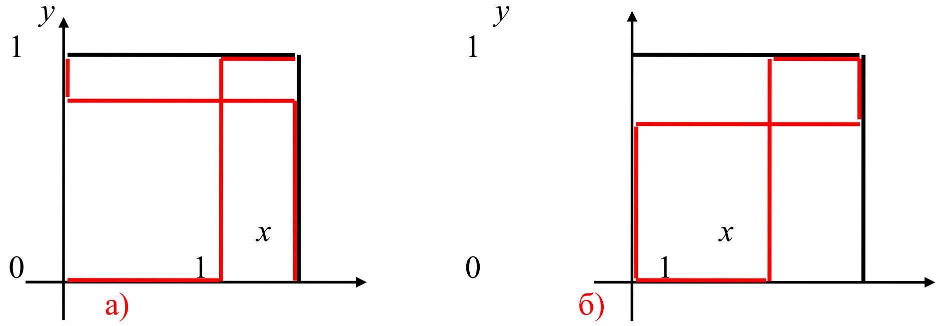
если $b_1 < 0$, то решения следующие :

$$y = 0,\ x > \beta;\ y = 1,\ x < \beta;\ 0 < y < 1;\ x = \beta$$

При этом необходимо учитывать, что $0 \le x \le 1$.



Решением игры является пересечение множеств K и L, т.е. те значения x и y, которые являются общими для множеств K и L.



При этом зигзаги K и L могут быть не только одинаковой, но и противоположной направленности. В первом случае зигзаги имеют одну точку пересечения, а во-втором – три. Средние выигрыши при этом определяются по формулам (1), если в них подставить полученное решение x и y (рис.а)). Очевидно α входит в смешанную стратегию игрока 2, хотя зависит только от выигрышей 1 игрока; β входит в смешанную стратегию игрока 1, хотя зависит только от выигрышей игрока 2. Сравнение этих результатов с результатами решения матричных игр с нулевой суммой показывает, что α совпадает с оптимальной стратегией игрока 1 в матричной игре с матрицей A, а β - с оптимальной стратегией игрока 2 в матричной игре с матрицей B. Отсюда можно сделать вывод, что равновесная ситуация направляет поведение игроков не только на *максимизацию* своего выигрыша, сколько на *минимизацию* выигрыша противника.

Задание 1. Министерство желает построить одно из двух объектов на территории города. Городские власти могут принять предложение министерства или отказать. Министерство – игрок А – имеет две стратегии: строить объект 1, строить объект 2. Город – игрок В – тоже имеет две стратегии: принять предложение министерства или отказать. Свои действия они применяют независимо друг от друга, и результаты определяются прибылью (выигрышем) согласно матрицам:

$$A = \begin{pmatrix} -10 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Определим множество решений K игрока А. Для этого рассчитаем коэффициенты:

$$a_1 = a_{11} - a_{21} - a_{12} + a_{22} = -10 - 1 - 2 - 1 = -14,$$

$$a_2 = a_{22} - a_{12} = -1 - 2 = -3,$$

$$\alpha = \frac{a_2}{a_1} = \frac{3}{14}.$$

Так как $a_1 < 0$, то множество решений K имеет вид:

$$K=\begin{cases}(1,y) & при \quad 0\le y\le \frac{3}{14},\\ \left(x,\frac{3}{14}\right) & при \quad 0<x<1,\\ (0,y) & при \quad \frac{3}{14}\le y\le 1.\end{cases}$$

Определим множество решений L игрока В. Для этого рассчитаем коэффициенты:

$b_1=b_{11}-b_{21}-b_{12}+b_{22}=5+1+2+1=9,$

$b_2=b_{22}-b_{21}=1+1=2,$

$\beta=\frac{b_2}{b_1}=\frac{2}{9}.$

Так как $b_1>0$, то множество решений L имеет вид:

$$L=\begin{cases}(x,0) & при \quad 0\le x\le \frac{2}{9},\\ \left(\frac{2}{9},y\right) & при \quad 0<y<1,\\ (x,1) & при \quad \frac{2}{9}\le x\le 1.\end{cases}$$

Изобразим эти множества графически (рис. 3.4). Точка пересечения множеств K и L есть точка $C\left(\frac{2}{9},\frac{3}{14}\right)$. Тогда оптимальными стратегиями игроков будут смешанные стратегии

$$x^{*T}=\left(\frac{2}{9},\frac{7}{9}\right),\ y^{*T}=\left(\frac{3}{14},\frac{11}{14}\right).$$

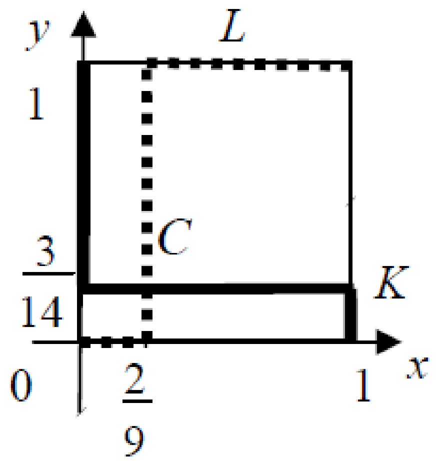


Рисунок 3.4

При этом выигрыши сторон будут равны:

$$H_A = x^T A\, y = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{7}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -10 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{14} \\ \frac{11}{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{13}{9} & -\frac{3}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{14} \\ \frac{11}{14} \end{pmatrix} = -\frac{4}{7},$$

$$H_B = x^T B\, y = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{7}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{14} \\ \frac{11}{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{14} \\ \frac{11}{14} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}.$$

Задания для самостоятельной работы

Пусть биматричная игра задана парой матриц *A* и *B*. Найти решение игры графическим методом.

1	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$	2	$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
3	$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$	4	$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$
5	$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$	6	$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$
7	$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$	8	$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$
9	$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$	10	$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
11	$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$	12	$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$
13	$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$	14	$A = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 3 & 9 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$
15	$A = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 5 & 8 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$	16	$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
17	$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$	18	$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$
19	$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	20	$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$
21	$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$	22	$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
23	$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 7 & 6 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	24	$A = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 8 & 7 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
25	$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},\qquad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$	26	$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

27	$A=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$	28	$A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 3 & 6\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 4 & 3\end{pmatrix}$
29	$A=\begin{pmatrix}6 & 3\\ 2 & 6\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 3 & -1\end{pmatrix}$	30	$A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 4 & 0\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}5 & 7\\ 6 & 8\end{pmatrix}$

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

Работа с учебником.

Для обеспечения максимально возможного усвоения материала и с учётом индивидуальных особенностей студента, можно предложить следующие приёмы обработки информации учебника:

- конспектирование;
- составление плана учебного текста;
- тезирование;
- аннотирование;
- составление тематического тезауруса;
- выделение проблемы и нахождение путей её решения;
- самостоятельная постановка проблемы и нахождение в тексте путей её решения;
- определение алгоритма практических действий (план, схема).

В качестве форм и методов контроля внеаудиторной самостоятельной работы студентов могут быть использованы обмен информационными файлами, семинарские занятия, зачеты, тестирование, самоотчеты, контрольные работы, защита творческих работ и электронных презентаций и др.

Контроль результатов внеаудиторной самостоятельной работы студентов может осуществляться в пределах времени, отведенного на обязательные учебные занятия по дисциплине или в специально отведенное время (зачет, экзамен).