Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное образовательное учреждение
высшего образования
Амурский государственный университет
(ФГБОУ ВО «АмГУ)

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ И РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ
Сборник учебно-методических материалов

для направлений подготовки
Направление подготовки 09.03.02 – Информационные системы и технологии
Направленность (профиль) образовательной программы «Безопасность информационных систем»

Квалификация выпускника: бакалавр

Благовещенск, 2017

Печатается по решению
редакционно-издательского совета
факультета математики и информатики
Амурского государственного университета

Составитель: Труфанова Т.В.
Дифференциальные и разностные уравнения: сборник учебно-методических материалов для направлений подготовки Направление подготовки 09.03.02 – Информационные системы и технологии. – Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2017.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

При изучении явлений природы, решении многих задач физики и техники, химии и биологии, других наук не всегда удается найти прямую зависимость между величинами, описывающими тот или иной эволюционный процесс. Однако в большинстве случаев можно установить связь между искомыми характеристиками изучаемого явления (функциями) и скоростями их изменения относительно других переменных, т.е. найти уравнения, в которые входят производные неизвестных функций. Такие уравнения называют дифференциальными. Если неизвестная функция зависит от одной переменной, дифференциальное уравнение называется обыкновенным, если от двух или большего числа переменных – уравнением в частных производных.

Целью изучения преподавания учебной дисциплины дифференциальные и разностные уравнения является показать, что такое обыкновенные дифференциальные уравнения, где и как они возникают, какие физические явления могут быть описаны с помощью обыкновенных дифференциальных уравнений. Задачи изучения дисциплины: научить студентов решать дифференциальные и разностные уравнения различных порядков и системы дифференциальных и разностных уравнений. Изучить основные методы решения дифференциальные и разностные уравнения. Изучить вопрос о влиянии применения начальных данных на решение систем дифференциальных уравнений.

При изучении дисциплины студент приобретает практические навыки решения и исследования дифференциальных и разностных уравнений. Должен уметь подобрать соответствующий метод решения дифференциальных и разностных уравнений. Уметь применять дифференциальные и разностные уравнения на практике для исследования различных физических явлений.

КРАТКИЙ КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

Лекция 1. Введение. Уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной. Уравнения с разделяющимися переменными. Уравнения, приводящиеся к уравнениям с разделяющимися переменными.

Цель лекции. Ввести студентов в дисциплину «Дифференциальные уравнения», обозначить структуру курса, содержание практического и лекционного материала по основным разделам, предусмотренным Государственным образовательным стандартом, озвучить междисциплинарные связи, правила организации аудиторной и самостоятельной работы студентов, дать методические рекомендации по изучению дисциплины, указать список основной и дополнительной литературы, рекомендуемой студентам, ознакомить студентов с формами текущего и итогового контроля по дисциплине. Дать основные понятия и определения. Выделить класс уравнений с разделяющимися переменных и уравнений, сводящихся к уравнениям с разделяющимися переменными. Объяснить методы решения таких уравнений.

План лекции.

При изучении физических явлений часто не удается непосредственно найти закон, связывающий независимые переменные и искомую функцию, но можно установить связь между этой функцией и ее производными или дифференциалами.

Определение 1.Уравнения, в которых неизвестная функция или вектор-функция входит под знаком производной или дифференциала, называются дифференциальными уравнениями. Примеры.

Нахождение неизвестных функций, определяемых дифференциальными уравнениями, и является основной задачей теории дифференциальных уравнений.

Определение 2. Если в дифференциальном уравнении неизвестные функции или вектор-функции являются функциями одной переменной, то дифференциальное уравнение называется обыкновенным.

Определение 3. Если неизвестная функция, входящая в дифференциальное уравнение, является функцией двух или большего числа независимых переменных, то дифференциальное уравнение называется уравнением в частных производных.

Определение 4. Порядком дифференциального уравнения называется максимальный порядок входящей в уравнение производной (или дифференциала) неизвестной функции.

Определение 5. Решением дифференциального уравнения называется функция, которая при подстановке в дифференциальное уравнение обращает его в тождество.

Процесс нахождения решений дифференциального уравнения называется интегрированием дифференциального уравнения. Примеры.

Понятия общего и частного решения уравнения с начальными или граничными условиями.

Точное или приближенное решение задач с начальными условиями и граничных задач является основной задачей теории дифференциальных уравнений, однако иногда требуется выяснить или приходится ограничиваться выяснением лишь некоторых свойств решений.

Дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной, устанавливает зависимость между координатами точки и угловым коэффициентом касательной к графику решения в той же точке. Следовательно, дифференциальное уравнение рассматриваемого вида определяет поле направлений, и задача интегрирования дифференциального уравнения заключается в том, чтобы найти кривые, называемые интегральными кривыми, направление касательных к которым в каждой точке совпадает с направлением поля.

Уравнения вида $\varphi_1(x)\psi_1(y)dx = \varphi_2(x)\psi_2(y)dy$, в которых коэффициенты при дифференциалах распадаются на множители, зависящие только от x и только от y, называются дифференциальными уравнениями с разделяющимися переменными. Так как путем деления на $\psi_1(y)\varphi_2(x)$ они приводятся к уравнению с разделенными переменными $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}dx = \frac{\psi_2(y)}{\psi_1(y)}dy$.Метод решения уравнений с разделяющимися переменными. Отыскание потерянных решений. Три типа уравнений сводящихся к уравнениям с разделяющимися переменными. I. К числу таких уравнений относятся, например уравнения вида

$$\frac{dy}{dx} = f(ax+by),$$

где a и b постоянные величины, которые заменой переменных $z = ax+by$ преобразуется в уравнение с разделяющими переменными.

II. К уравнениям с разделяющимися переменными приводятся и так называемые однородные дифференциальные уравнения первого порядка, имеющие вид: $\frac{dy}{dx} = f(\frac{y}{x})$.

III. Уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = f(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2})$$

преобразуется в однородные уравнения путем переноса начала координат в точку пересечения (x_1, y_1) прямых

$a_1x+b_1y+c_1 = 0$ и $a_2x+b_2y+c_2 = 0$.

Ключевые вопросы:1) Дать определение обыкновенного дифференциального уравнения. 2) Дать определение дифференциального уравнения с частными производными (УЧП). 3) Какие уравнения называются линейными, нелинейными. 4) Что такое порядок уравнения, что такое число неизвестных? 5) Что называется решением дифференциального уравнения? 6) Сформулировать задачу с начальными условиями.7) Привести примеры дифференциальных уравнений. 8) Записать дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной.9) Что называется изоклинами? 10) Какие уравнения называются уравнениями, с разделяющимися переменными? 11) Как интегрируются уравнения с разделяющимися переменными? 12) Перечислить три вида уравнений, сводящихся к уравнениям с разделяющимися переменными. 13) При помощи каких замен они сводятся к уравнениям с разделяющимися переменными? 14) Какие уравнения называются однородными?

Тема 2. Линейные уравнения первого порядка и уравнения в полных дифференциалах.

Цель лекции. Ввести понятие линейного уравнения первого порядка и дать методы решения этого уравнения. Ввести некоторые классы уравнений, сводящихся к линейным уравнениям. Познакомить студентов с уравнением в полных дифференциалах и методами решения этого уравнения. Научить сводить некоторые дифференциальные уравнения при помощи интегрирующего множителя к уравнениям в полных дифференциалах.

План лекции. *Определение.* Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение линейное относительно неизвестной функции и ее производной. Линейное уравнение имеет вид

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x)$$

где $p(x)$ и $f(x)$ в дальнейшем будем считать непрерывными функциями *x* в области интегрирования уравнения.

Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение называется линейным однородным. В линейном однородном уравнении переменные разделяются. Общее решение линейного неоднородного уравнения. Метод вариации произвольных постоянных или метод Лагранжа решения неоднородного уравнения. Уравнение Бернулли и сведение его к линейному дифференциальному уравнению первого порядка. Метод Бернулли решения линейных уравнений первого порядка. Уравнение Риккати и его сведение к уравнению Бернулли.

Введем понятия уравнения в полных дифференциалах. Необходимые и достаточные условия Эйлера. Методы интегрирования уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель. Метод нахождения интегрирующего множителя.

Ключевые вопросы: 1) Какое уравнение называется линейным дифференциальным уравнением первого порядка? 2) Какое уравнение называется однородным, а какое неоднородным? 3) Методы решения линейного уравнения первого порядка. 4) В чем заключается идея метода Лагранжа? 5) Уравнение Бернулли и замена, сводящая это уравнение к линейному. 6) Уравнение Риккати и замена, сводящая это уравнение к уравнению Бернулли.7) Какие уравнения называются уравнения в полных дифференциалах? 8) Записать необходимые и достаточные условия Эйлера. 9) Как проинтегрировать уравнения в полных дифференциалах? 10) Что называется интегрирующим множителем? 11) Записать формулу для нахождения интегрирующего множителя, зависящего от x. 12) Записать формулу для нахождения интегрирующего множителя, зависящего от y.

Лекция 3. Дифференциальные уравнения 1-го порядка не разрешенные относительно производной. Частные виды уравнения $F(x, y, y')$, особые решения. Уравнение Лагранжа. Уравнение Клеро. Теорема существования и единственности для дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной.

Цель лекции. Ознакомить студентов с методами интегрирования дифференциальных уравнений 1-го порядка не разрешенных относительно производной. Продемонстрировать на конкретных примерах интегрирование дифференциальных уравнений с помощью дифференцирования

План лекции. Дифференциальное уравнение первого порядка, не разрешенное относительно производной, имеет вид

$F(x, y, y') = 0$. Рассмотрим типы уравнений, не разрешенных относительно производной.

1. Уравнение имеет вид $F(y') = 0$.**2.** Уравнение имеет вид $F(x, y') = 0$. **3.** Уравнение имеет вид $F(y, y') = 0$. 4.Рассмотрим теперь общий случай: левая часть уравнения $F(x, y, y') = 0$.

Параметрическое представление решения. Приведем примеры дифференциальных уравнений 1-го порядка не разрешенных относительно производной. Введем уравнение Лагранжа. Рассмотрим метод интегрирования этого уравнения. Рассмотрим частный случай уравнения Лагранжа- уравнение Клеро. Метод интегрирования уравнения Клеро. Особые решения.

Ключевые вопросы: 1) Дать определение дифференциальному уравнению, не разрешенному относительно производной. 2) Как проинтегрировать уравнение, если в него входит только производная от неизвестной функции? 3) Как проинтегрировать уравнение, если в него не входит искомая функция? 4) Как проинтегрировать уравнение, если в него не входит независимое переменное? 5) Общий метод интегрирования дифференциального уравнения, не разрешенного относительно производной. 6) Дать определение особых решений. 7) Записать уравнение Лагранжа. 8) Метод интегрирования уравнение Лагранжа.9) Записать уравнение Клеро.10) Метод интегрирования уравнения Клеро.

Тема 4. Простейшие случаи понижения порядка. Линейные дифференциальные уравнения n -го порядка.

Цель лекции. Познакомить студентов с уравнениями n-го порядка и доказать теорему существования и единственности для дифференциального уравнения n-го порядка.

План лекции. Уравнение n-го порядка. Дифференциальное уравнение n-го порядка имеет вид

$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$, где x – независимая переменная, y – искомая функция, а функция F определена и непрерывна в некоторой области $G \subseteq \mathbf{R}^{n+2} (n \geq 1)$.

Дифференциальное уравнение n-го порядка, разрешенное относительно старшей производной, имеет вид

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}),$$

где функция f также предполагается непрерывной в некоторой области $D \subseteq \mathbf{R}^{n+1}$ изменения своих аргументов.

Общее решение. Частное решение уравнения n-го порядка. Теорема существования и единственности для дифференциального уравнения n-го порядка.

Уравнения, допускающие понижение порядка: 1. Если в уравнение не входит неизвестной функции *у*. 2. Если в уравнение не входят независимое переменное *х*. 3.Если уравнение однородно относительно неизвестной функции и ее производных. 4. Порядок уравнения можно понизить, если оно однородно относительно *х* и *у* в обобщенном смысле.

Ключевые вопросы: 1) Какой вид имеет дифференциальное уравнение n-го порядка? 2) Сформулировать теорему существования и единственности для дифференциального уравнения n-го порядка. 3) Что называется общим решением дифференциального уравнения n-го порядка? 4) Перечислить уравнения, допускающие понижение порядка и методы решения этих уравнений.

Тема 5. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами. Уравнения Эйлера. Линейные неоднородные уравнения.

Цель лекции. Ввести линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и дать методы интегрирования этих уравнений. Дать понятие уравнения Эйлера и методы интегрирования этого уравнения. Дать понятие Линейные неоднородные уравнения с переменными коэффициентами. Свойства решений неоднородного уравнения.

План лекции. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами. Метод Эйлера. Характеристическое уравнение. Случай, когда корни характеристического уравнения действительные и различные. Случай, когда корни характеристического уравнения действительные и кратные. Среди корней характеристического уравнения, имеются комплексные корни. Характеристическое уравнение имеет кратный комплексный корень. Уравнение Эйлера и его сведение к линейному однородному уравнению с постоянными коэффициентами. Методы решения уравнения Эйлера.

Линейным однородным уравнением n-го порядка с постоянными коэффициентами называется уравнения вида

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_n y = 0,$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – некоторые действительные числа.

Для нахождения частных решений составляют характеристическое уравнение

$$k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_{n-1} k + a_n = 0,$$

которое получается из дифференциального уравнения, если искать частные решения этого уравнения в виде $y = e^{kx}$ (метод подбора решений, метод Эйлера).

Характеристическое уравнение, является уравнением n-й степени и имеет n корней действительных или комплексных, среди которых могут быть и равные.

Частные решения дифференциального уравнения зависят от вида корней характеристического уравнения и при их нахождении полезно использовать таблицу 1.

Таблица 1

Характер корней характеристического уравнения	Частные решения уравнения
k – простой вещественный корень	e^{kx}
k – вещественный корень кратности r	$e^{kx}, xe^{kx}, x^2 e^{kx}, \ldots, x^{r-1} e^{kx}$
$\alpha \pm \beta i$ – комплексно сопряженные корни	$e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x$
$\alpha \pm \beta i$ – комплексно сопряженные корни кратности r	$e^{\alpha x} \cos \beta x, xe^{\alpha x} \cos \beta x, \ldots, x^{(r-1)} e^{\alpha x} \cos \beta x$ $e^{\alpha x} \sin \beta x, xe^{\alpha x} \sin \beta x, \ldots, x^{(r-1)} e^{\alpha x} \sin \beta x$

Общее решение дифференциального уравнения записывается так:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_{n-1} y_{n-1} + c_n y_n,$$

где $y_1, y_2, ..., y_n$ – частные линейно независимые решения, образующие фундаментальную систему, а $c_1, c_2, ..., c_n$ – произвольные постоянные.

Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами. Подбор частного решения неоднородного уравнения по виду правой части. Правая часть является многочленом степени s. Правая часть является произведением многочлена степени s на экспоненциальную функцию. Правая часть является произведением многочлена на тригонометрическую функцию. В зависимости от корней характеристического уравнения и показателя экспоненты стоящей в правой части решения надо искать в соответствующем виде.

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, т.е. уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = f(x),$$

где a_i $(i = 1,2,...,n)$ - действительные числа, а $f(x) \neq 0$.

Общее решение уравнения записывается в виде $y = \bar{y} + y^*$, где $\bar{y}$ – общее решение $L(y) = 0$. соответствующего данному, y^* – любое частное решение уравнения $L(y) = f(x)$.

Общее решение $\bar{y}$ находится с помощью табл. 1.

Для отыскания y^* в общем случае можно воспользоваться методом Лагранжа вариации произвольных постоянных.

В частных случаях, когда функция $f(x)$ в уравнении (2.17) имеет специальный вид, частное решение находится методом неопределенных коэффициентов (метод подбора частного решения). При этом используют табл. 2.

Таблица 2

Вид правой части уравнения (2.17)	Корни характеристического уравнения $L(y) = 0$.	Вид частного решения уравнения (2.17)
$f(x) = e^{\alpha x} P_m(x)$	1) α – не является корнем характеристического уравнения 2) α – корень характеристического уравнения кратности r	1) $y^* = e^{\alpha x} Q_m(x)$ 2) $y^* = x^r e^{\alpha x} Q_m(x)$
$f(x) = A\cos\beta x + B\sin\beta x$	1) $\pm \beta i$ – не является корнем характеристического уравнения 2) $\pm \beta i$ – корень характеристического уравнения кратности r	1) $y^* = M\cos\beta x + N\sin\beta x$ 2) $y^* = x^r (M\cos\beta x + N\sin\beta x)$
$f(x) = e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x + P_n(x)\sin\beta x]$	1) $\alpha \pm \beta i$ – не является корнем характеристического уравнения 2) $\alpha \pm \beta i$ – корень характеристического уравнения кратности r	1) $y^* = e^{\alpha x}[M_k(x)\cos\beta x + N_k(x)\sin\beta x]$ 2) $y^* = x^r e^{\alpha x}[M_k(x)\cos\beta x + N_k(x)\sin\beta x]$

Замечание 1. (к табл. 2). $M_k(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + ... + A_k x^k$,

$N_k(x) = B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + ... + B_k x^k$, где k – наибольшее из чисел m и n.

Замечание 2. Если $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$, то $y^*=y_1{}^*+y_2{}^*$, где $y_1{}^*$ соответствует $f_1(x)$, а $y_2{}^*$ - $f_2(x)$.

Замечание 3. Многочлены $Q_m(x)$ должны быть полными (т.е. содержать все степени x от 0 до m). Если в выражение функции $f(x)$ входит хотя бы одна из функций $\cos\beta x$ или $\sin\beta x$, то в y^* нужно всегда вводить обе функции.

Ключевые вопросы: 1) Записать линейное однородные уравнения с постоянными коэффициентами. 2) Какое уравнение называется характеристическим? 3) Метод Эйлера интегрирования линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами. 4) Записать общий вид решения дифференциального уравнения, если корни характеристического уравнения действительные и различные. 5) Записать общий вид решения дифференциального уравнения, если корни характеристического уравнения действительные и кратные. 6) Записать общий вид решения дифференциального уравнения, если корни характеристического уравнения комплексные. 7) Записать общий вид решения дифференциального уравнения, если корни характеристического уравнения кратные комплексные. 8) Записать вид уравнения Эйлера. 9) При помощи каких замен независимого переменного и искомой функции, уравнение Эйлера сводится к линейному уравнению с постоянными коэффициентами? 10) Записать линейное неоднородные уравнения с переменными коэффициентами. 11) Сформулировать основные теоремы, определяющие свойства решений неоднородного уравнения. 12) Чему равно общее решение неоднородного уравнения? 13) В чем заключается метод вариации произвольных постоянных? 14) Привести пример применение метода Лагранжа.

Тема 6. Интегрирование системы дифференциальных уравнений путем сведения к одному уравнению более высокого порядка. Системы линейных дифференциальных уравнений. Метод Эйлера.

Цель и задачи лекции. Познакомить студентов с теорией систем дифференциальных уравнений. Рассмотрим задачи, в которых требуется найти несколько неизвестных функций от одной независимой переменной, удовлетворяющих заданной системе дифференциальных уравнений, число которых равно числу неизвестных функций. Изложить общий метод решения неоднородных систем. Ввести линейные системы с постоянными коэффициентами и построить линейно независимые частные решения. Изложить метод неопределенных коэффициентов для решения неоднородных систем.

План лекции. Основные понятия. Что называется, системой дифференциальных уравнений. Нормальная система дифференциальных уравнений. Решение системы дифференциальных уравнений. Динамическая система. Фазовое пространство, фазовая траектория. Теорема существования и единственности решения системы дифференциальных уравнений. Основные методы интегрирования систем дифференциальных уравнений. Метод сведения к одному уравнению более высокого порядка. Нахождение интегрируемых комбинаций. Симметрическая форма записи системы уравнений. Определение линейной системы с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Построение решений линейной системы с постоянными коэффициентами в зависимости от корней характеристического уравнения. Все корни характеристического уравнения действительны и различны. Корни характеристического уравнения различны, но среди них имеются комплексные. Среди корней характеристического уравнения имеются кратные. Решение систем, не приведенных к нормальному виду.

Частное решение линейных неоднородных систем с постоянными коэффициентами, можно искать методом неопределенных коэффициентов в том случае, когда функции стоящая в правой части $f_i(t)$ состоят из сумм и произведений функций t^m, $e^{\alpha t}$, $\cos\beta t$, $\sin\beta t$. Это делается по тем же правилам, что и для одного линейного уравнения с постоянными коэффициентами, но со следующими изменениями. Если в $f_i(t)=P_{m_i}(t)e^{\gamma t}$, где $P_{m_i}(t)$ – многочлен степени m_i, то частное решение системы ищется в виде

$$Q^i_{m+s}(t)e^{\gamma t},\ i=\overline{1,n},$$

где $Q^{i}_{m+s}(t)$ - многочлен степени m+s с неизвестными коэффициентами, $m=\max\{m_i, s\}=0$, если γ – не корень характеристического уравнения, а если γ – корень, то s следует взять равным кратности этого корня.

Аналогично определяются степени многочленов в случае, когда $f_i(t)$ содержит $e^{\alpha t}\cos\beta$ t и $e^{\alpha t}\sin\beta$ t,; здесь $\gamma=\alpha+\beta i$.

Метод вариации произвольных постоянных для решения неоднородных систем. Решение линейной неоднородной системы можно найти методом вариации постоянных, если известно общее решение однородной системы с теми же коэффициентами $a_{ij}(t)$. Для этого в формуле общего решения однородной системы надо заменить произвольные постоянные c_i на неизвестные функции $c_i(t)$. Полученные выражения для x_i надо подставить в систему и из этой системы найти функции $c_i(t)$.

Ключевые вопросы: 1) Дать определение системы обыкновенных дифференциальных уравнений. 2) Что называется решением системы дифференциальных уравнений? 3) Сформулировать теорему существования и единственности решения системы дифференциальных уравнений. 4) Что называется частным решением системы? 5) Изложить метод сведения к одному уравнению более высокого порядка. 6) Изложить метод нахождения интегрируемых комбинаций.7) Записать нормальную систему в симметричной форме. 8) Что называется системой линейных дифференциальных уравнений. 8) Что называется фундаментальной системой решений? 10) Сформулировать основные свойства решений системы линейных дифференциальных уравнений. 11) Структура общего решения неоднородной системы линейных дифференциальных уравнений. 12) Идея метода Лагранжа для отыскания решения неоднородной системы.

Тема 7. Линейные разностные уравнения первого порядка. Общие свойства линейных разностных уравнений порядка *n.* Методы решения линейных разностных уравнений порядка *n.*

Теория разностных уравнений находит многообразные приложения во многих областях естествознания при моделировании поведения систем различной природы. Разностные уравнения обычно возникают тогда, когда рассматриваемая величина регистрируется через некоторые (как правило, равные) промежутки времени. Например, так называемая паутинообразная модель рынка одного товара описывается разностным уравнением вида

$P_{t+1} = aP_t + b,$

где P_t – цена товара в период t, a и b – некоторые числа.

При моделировании относительной численности какого-либо биологического вида появляется разностное уравнение вида

$x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n)$

где x_n – относительная численность популяции в n-й момент времени, а λ – коэффициент размножения.

В задачах описания, анализа и синтеза дискретных динамических систем управления математические модели таких систем описываются разнообразными разностными уравнениями.

В современной теории нелинейных колебаний разностные уравнения появляются либо самостоятельно, либо при переходе от дифференциальных уравнений к точечным отображениям Пуанкаре. Такой переход в трехмерном случае значительно упрощает исследование.

В математике основным источником разностных уравнений являются дифференциальные уравнения. Имеются в виду разностные схемы, используемые для приближенного решения дифференциальных уравнений.

Многие факты теории линейных дифференциальных уравнений верны и для линейных разностных уравнений, хотя есть и некоторые различия. Отличие разностных уравнений от дифференциальных уравнений проявляется в наибольшей степени, когда уравнения нелинейные.

Например, поведение решений одномерных разностных уравнений может быть таким же сложным, как и поведение решений многомерных разностных уравнений. Для динамических систем, описываемых дифференциальными уравнениями, сложное поведение имеется лишь в пространствах большой размерности ($n > 3$).

Таким образом, многочисленные применения разностных уравнений в экономических, биологических, математических исследованиях, в теории автоматического регулирования, в теории нелинейных колебательных процессов и в других задачах требуют знания элементарной теории разностных уравнений.

План лекции.

1. Линейные разностные уравнения первого порядка.
2. Линейные однородные разностные уравнения первого порядка.
3. Линейные неоднородные разностные уравнения первого порядка.
4. Решение и график решения разностного уравнения первого порядка.
5. Общее решение однородного уравнения и метод вариации постоянной для решения линейного неоднородного разностного уравнения первого порядка.

Тема 8. Линейные разностные стационарные уравнения и линейные разностные неоднородные стационарные уравнения. Общие свойства и методы решения линейных разностных уравнений порядка n.

План лекции.

1. Линейное однородное уравнение порядка n.
2. Линейное неоднородное уравнение порядка n.
3. Решение линейных разностных уравнений порядка n. График решения.
4. Теорема 1. Решение разностной задачи Коши всегда существует и единственно.
5. Теоремы о решениях линейного однородного разностного уравнения.
6. Линейным разностным стационарным уравнением порядка n.
7. Характеристическое уравнение для разностного стационарного уравнением порядка n.
8. Решение линейного разностного стационарным уравнением порядка n в зависимости от корней характеристического уравнения.
9. Решение линейного разностного неоднородного стационарного уравнения порядка n в зависимости от правой части уравнения.

Тема 9. Системы разностных уравнений. Нормальные линейные системы разностных уравнений. Линейные стационарные системы разностных уравнений.

План лекции.

1. Системы разностных уравнений.
2. Нормальные линейные системы разностных уравнений.
3. Линейные стационарные системы разностных уравнений.
4. Методы решения линейных стационарных систем разностных уравнений.

При подготовке к теоретической части удобно дополнить конспект лекций материалом из учебной литературы.

1. Бибиков Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений [Электронный ресурс]: учеб. / Ю.Н. Бибиков. – СПб.,М.: Лань, 2011. – 304с. Режим доступа: http://e.lanbook.com/view/book/1542/
2. Егоров А. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями [Текст] : [учеб.] / А. И. Егоров. - 2-е изд., испр. и доп. - М. : Физматлит, 2007. - 448 с. : рис. - Библиогр. : с. 438 . - Предм. указ. : с. 441 . - ISBN 978-5-9221-0785-3 (в пер.)
3. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений: Учеб. пособие/ Н. М. Матвеев. -5-е изд., доп.. -СПб.: Лань, 2003. -832 с.:а-ил
4. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения : [Учеб. пособие]/ М.В. Федорюк . -3-е изд., стер.. -СПб.: Лань, 2009. -448 с.
5. Коврижных, А.Ю. Дифференциальные и разностные уравнения / А.Ю. Коврижных, О.О. Коврижных ; Министерство образования и науки Российской Федерации, Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина. - Екатеринбург : Издательство Уральского университета, 2014. - 150 с. - ISBN 978-5-7996-1341-9 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=275742 (28.12.2015).

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ (УКАЗАНИЯ) К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ

Задачей практических занятий является изучение методов решения дифференциальных и разностных уравнений, а также практическое осмысление основных теоретических положений курса. При решении задач обращается внимание на алгоритмы решения. Далее проводится анализ полученного решения, строятся интегральные кривые, находятся частные решения.

Цель практических занятий – научить правильно строить математические модели раз личных физических процессов, решать различные дифференциальные уравнения с учетом начальных и граничных условий.

В итоге изучения дисциплины студент должен знать основные понятия дифференциальных уравнений, виды уравнений, методы решения. Уметь по общему решению найти частное. Анализировать полученное решение полученного решения.

В дифференциальных и разностных уравнениях первого порядка научиться:

- правильно определить тип уравнения;
- правильно выбрать методы решения этого уравнения, знать замены переменных для каждого уравнения;
- по общему решению найти частное решение, проанализировать полученное решение.

В дифференциальных и разностных уравнениях порядка выше первого научиться:

- правильно определить тип уравнения;
- правильно выбрать методы решения этого уравнения, знать замены переменных для каждого уравнения;
- по общему решению найти частное решение, проанализировать полученное решение.

В системы дифференциальных и разностных уравнений научиться:

- научиться выбирать рациональный метод интегрирования системы;
-интегрировать системы выбранным методом;
-находить частные решения линейной неоднородной системы методом вариации постоянных или методом неопределенных коэффициентов в зависимости от правой части системы уравнений.

Перед практическим занятием студент должен прочитать лекцию, которую рекомендует преподаватель, ответить на вопросы, которые даются после лекции. Сделать домашнее задание по предыдущей теме и если необходимо сделать индивидуальное задание.

При решении задач следует:

- определить тип дифференциального уравнения;
- подобрать соответствующую замену и метод интегрирования;
-решить уравнение и построить интегральную кривую, если требуется
-найти частное решение, если есть начальные условия и проанализировать полученное решение.

Практические занятия направлены на закрепление теоретического материала на практическом уровне и предусматривают реализацию аналитических методов по вариантам индивидуальных заданий.

Перед практическим занятием разобрать материал, изложенный на лекции и выполнить самостоятельную работу, предусмотренную рабочим планом. Для этого используются: конспект лекций, соответствующие разделы печатных и электронных учебников, ответы на вопросы для самоконтроля знаний. После практического занятия самостоятельно решить рекомендованные задачи на дом и индивидуальные задания.

Если у студента возникают вопросы по выполнению индивидуальных заданий или домашних заданий, то он может обратиться к преподавателю за консультацией, которая проводится один раз в неделю в заранее установленное время. Кроме этого по выполнению домашнего задания и освоению лекционного курса, вопросы желательно задавать и на практических и на теоретических занятиях.

Студент обязан проходить промежуточный и итоговый контроль в виде защит индивидуальных и практических работ, аттестации в форме тестового контроля знаний; сдачи зачета в предлагаемой преподавателем форме.

Номера задач для аудиторных и домашних занятий из сборника:

Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям/ А.Ф. Филиппов . -М.; Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2005. -176 с.

Практические занятия

Занятие1. Уравнения с разделяющимися переменными. Уравнения, сводящиеся к уравнениям с разделяющимися переменными.

Вопросы для подготовки: 1)Что называется изоклинами? 2)Как, не решая уравнения, строить интегральные кривые? 3)Как составить дифференциальное уравнение семейства кривых? 4)Какие уравнения называются уравнениями, с разделяющимися переменными? 5) Как интегрируются уравнения с разделяющимися переменными? 6) Перечислить три вида уравнений, сводящихся к уравнениям с разделяющимися переменными. 7) При помощи каких замен они сводятся к уравнениям с разделяющимися переменными? 8) Какие уравнения называются однородными?

Практические занятия и самостоятельная работа включают в себя решение задач №1-14; 17-29. задачи №51-65; 101-129.

Практическое занятие 2. Линейные уравнения первого порядка. Уравнения в полных дифференциалах. Уравнения, не разрешенные относительно производной.

Вопросы для подготовки: 1) Какое уравнение называется линейным дифференциальным уравнением первого порядка? 2) Какое уравнение называется однородным, а какое неоднородным? 3) Методы решения линейного уравнения первого порядка. 4) В чем заключается идея метода Лагранжа? 5) Уравнение Бернулли и замена, сводящая это уравнение к линейному. 6) Уравнение Риккати и замена, сводящая это уравнение к уравнению Бернулли. 7) Какие уравнения называются уравнения в полных дифференциалах? 8) Записать необходимые и достаточные условия Эйлера. 9) Как проинтегрировать уравнения в полных дифференциалах? 10) Что называется интегрирующим множителем? 11) Записать формулу для нахождения интегрирующего множителя, зависящего от x. 12) Записать формулу для нахождения интегрирующего множителя зависящего от y.

Практические занятия и самостоятельная работа включают в себя решение задач №136-160; 167-171; задач №186-194; 195-220. №221;222;223.

Занятие 3 . Уравнения, не разрешенные относительно производной. Уравнение Лагранжа, Клеро. Другие уравнения, разрешимые относительно y или x

Вопросы для подготовки: 1) Дать определение дифференциальному уравнению, не разрешенному относительно производной. 2) Как проинтегрировать уравнение, если в него входит только производная от неизвестной функции? 3) Как проинтегрировать уравнение, если в него не входит искомая функция? 4) Как проинтегрировать уравнение, если в него не входит независимое переменное? 5) Общий метод интегрирования дифференциального уравнения, не разрешенного относительно производной. 6) Дать определение особых решений. 7) Записать уравнение Лагранжа. 8) Метод интегрирования уравнение Лагранжа.9) Записать уравнение Клеро. 10) Метод интегрирования уравнения Клеро.

Практические занятия и самостоятельная работа включают в себя решение задач №241-250; 251-266; 267-286. №287-296; 298; 300.

Практическое занятие 4. Уравнения, допускающие понижение порядка.

Вопросы для подготовки: 1) Перечислить уравнения, допускающие понижение порядка. 2) Методы решения этих уравнений?

Практические занятия и самостоятельная работа включают в себя решение задач №421-450; 455-462; 463-470; 501-503.

Практические занятия 5-6. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами.

Вопросы для подготовки: 1) Метод Эйлера интегрирования линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами. 2) Записать общий вид решения дифференциального уравнения, если корни характеристического уравнения действительные и различные.3) Записать общий вид решения дифференциального уравнения, если корни характеристического уравнения действительные и кратные 4) Записать общий вид решения дифференциального уравнения, если корни характеристического уравнения комплексные 5) Записать общий вид решения дифференциального уравнения, если корни характеристического уравнения кратные комплексные. 6) Для каких правых частей уравнений можно использовать метод неопределенных коэффициентов? 7) Какой вид имеет частное решение в зависимости от вида правой части и корней характеристического уравнения? 8) Каким методом решается линейное неоднородное уравнение с любой правой частью?

Практические занятия и самостоятельная работа включают в себя решение задач №511-532; №533-548; 575-581; 582-588.

Практическое занятие 7-8. Линейные системы с постоянными коэффициентами. Линейные неоднородные системы. Метод исключения, метод вариации. Метод неопределенных коэффициентов.

Вопросы для подготовки: 1) Идея метода сведения системы дифференциальных уравнений к одному уравнению более высокого порядка. 2) Как записать характеристическое уравнение для системы? 3) Какими методами можно найти решения неоднородных систем? 4) Метод вариации произвольных постоянных. 5) Какова идея метода неопределенных коэффициентов, отыскания частных решений неоднородной системы дифференциальных уравнений?

Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач: №786-795; 794-812; .№826-845; 851-873.

Практическое занятие 9 Линейные разностные уравнения первого порядка. Метод вариации постоянной. Разностная задача Коши. Линейные однородные разностные стационарные уравнения.

Вопросы для подготовки: 1) Линейные разностные уравнения первого порядка. 2)Линейные однородные разностные уравнения первого порядка. 3) Линейные неоднородные разностные уравнения первого порядка. 4) Решение и график решения разностного уравнения первого порядка. 5. Общее решение однородного уравнения и метод вариации постоянной для решения линейного неонородного разностного уравнения первого порядка.

3. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

Самостоятельная работа – проявляется в узнавании, осмыслении, запоминании, подведении известного метода решения под новую задачу.

К самостоятельной работе помимо подготовки к лекционным и практическим занятиям относится выполнение индивидуальных заданий. Для выполнения индивидуальных заданий необходимо освоить теоретические основы соответствующего раздела, закрепить теорию на практических занятиях и пользоваться методической литературой по данной теме. Каждое индивидуальное задание оформляется в соответствии с требованиями преподавателя и защищается на консультациях.

Требования к защите индивидуальных заданий

При защите расчетно-графических работ студент должен уметь:

- четко сформулировать поставленную задачу (что дано, что требуется найти);
- объяснить каким методом пользовался при решении задачи (сформулировать его, указать основные свойства, область применимости);
- знать основные используемые формулы и определения;
- рассказать последовательность решения задачи (общий план и особенности варианта);
- объяснить полученный результат (если требуется провести его анализ);
- отвечать на дополнительные вопросы по теме индивидуальных заданий;
- отстаивать свою точку зрения при объяснении.

Индивидуальные задания выполняются по всем разделам дисциплины. Варианты заданий берутся из методического пособия:

Труфанова Т.В. Прикладные задачи и примеры по дифференциальным уравнениям [Электронный ресурс] : учеб. пособие: рек. УМО вузов РФ для спец. 160400.65 и напр. подготовки 230100.62 / Т. В. Труфанова, Е. М. Веселова, В. А. Труфанов; АмГУ, ФМиИ. - Благовещенск: Изд-во Амур. гос. ун-та, 2014. - 164 с. - http://irbis.amursu.ru/DigitalLibrary/AmurSU_Edition/6936.pdf

1. *Пример выполнения индивидуального задания по теме «Дифференциальные уравнения первого порядка»*

Пример 1. Решить уравнение

$y'(x-y)=1+x-y$.

Решение. Разрешаем это уравнение относительно производной:

$$y'=\frac{1}{x-y}+1.$$

Полагая, что $x-y=z$ ($z(x)$ – новая искомая функция), получим

$$\frac{dy}{dx}=1-\frac{dz}{dx},\quad 1-\frac{dz}{dx}=\frac{1}{z}+1,\quad \frac{dz}{dx}=-\frac{1}{z},\quad zdz=-dx.$$

Теперь проинтегрируем:

$$\int zdz=-\int dx+c,\ z^2=-2x+c_1.$$

Возвращаясь от *z* к *y,* получаем $(x-y)^2=-2x+c_1$ – общее решение уравнения.

Пример 2. Решить уравнение

$$(x^2+y^2)dx+xydy=0.$$

Решение. Разрешаем это уравнение относительно производной:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x^2+y^2}{xy} \qquad (1)$$

Уравнение (1) является однородным. Введем замену $y=zx$, $z=z(x)$. Тогда $y'=z'x+z$. Подставляем в (1):

$z'x + z = -\dfrac{x^2 + z^2x^2}{x^2 z}$; $z'x + z = -\dfrac{z^2 + 1}{z}$; $z'x = -\dfrac{2z^2 + 1}{z}$.

Разделяем переменные и затем интегрируем:

$\dfrac{dx}{x} = -\dfrac{zdz}{1 + 2z^2}$, $\ln\left|\dfrac{x}{c}\right| = -\dfrac{1}{4}\ln\left(1 + 2z^2\right)$, $x = \dfrac{c}{\sqrt[4]{1 + 2z^2}}$.

Возвращаясь от z к y, получаем

$x^4 = \dfrac{c^4x^2}{x^2 + 2y^2}$, $2y^2 + x^2 = \dfrac{c^4}{x^2}$.

Общее решение уравнения . $y = \pm\sqrt{\dfrac{c^4}{2x^2} - \dfrac{x^2}{2}}$.

Пример 3. Решить уравнение

$y' + y\cos x = e^{-\sin x}$

Решение. Решаем сначала соответствующее однородное уравнение:

$\dfrac{dy}{dx} + y\cos x = 0$, $\dfrac{dy}{y} + \cos x dx = 0$, $y = 0$, $\ln|y| + \sin x = \ln c$, $y = ce^{-\sin x}$.

Решение исходного уравнения ищем в виде $y = c(x)e^{-\sin x}$ и подставляем в исходное уравнение: $\dfrac{dc}{dx}e^{-\sin x} - \cos x e^{-\sin x}c(x) + c(x)e^{-\sin x}\cos x = e^{-\sin x}$, $\dfrac{dc}{dx} = 1$, $c(x) = x + c_1$.

Получаем общее решение: $y = \left(x + c_1\right)e^{-\sin x}$.

Пример 4. Решить уравнение

$x\dfrac{dy}{dx} + y = y^2\ln x.$

Решение. Это уравнение Бернулли. Его можно решить с помощью замены $z = \dfrac{1}{y}$, но удобнее – при помощи замены $y = u(x)\mathrm{v}(x)$. Тогда

$$xu\frac{d\mathrm{v}}{dx} + x\mathrm{v}\frac{du}{dx} + u\mathrm{v} = u^2\mathrm{v}^2\ln x,$$

$$xu\frac{d\mathrm{v}}{dx} + \mathrm{v}(x\frac{du}{dx} + u) = u^2\mathrm{v}^2\ln x.$$

Функцию $u(x)$ найдем как частное решение уравнения $x\dfrac{du}{dx} + u = 0,$ – например, $u = \dfrac{1}{x}$. Тогда $x^2\dfrac{d\mathrm{v}}{dx} = \mathrm{v}^2\ln x$. Отсюда, разделяя переменные и интегрируя, получим $-\dfrac{1}{\mathrm{v}} = \int\dfrac{\ln x}{x^2}dx = -\dfrac{\ln x}{x} - \dfrac{1}{x} - c,$ $\mathrm{v}(x) = \dfrac{x}{1 + Cx + \ln x}.$ Тогда $y = \dfrac{1}{1 + Cx + \ln x}$. Кроме найденных, решением исходного уравнения является еще функция $y = 0$.

Пример 5. Решить уравнение

$$(2xy+3y^2)dx+(x^2+6xy-3y^2)dy=0$$

Решение. В данном случае

$$M(x,y)=2xy+3y^2, \quad N(x,y)=x^2+6xy-3y^2,$$
$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=2x+6y, \quad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=2x+6y.$$

Так как $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$, то это уравнение в полных дифференциалах. Найдем функцию $F(x,y)$, у которой полный дифференциал $dF=F'_x dx+F'_y dy$ равен левой части уравнения . Для искомой функции $F(x,y)$ имеем

$$F'_x=2xy+3y^2, \quad F'_y=x^2+6xy-3y^2.$$

Интегрируя первое уравнение по x, считая y постоянным, получим

$$F(x,y)=x^2y+3xy^2+\varphi(y).$$

Для определения функции $\varphi(y)$ дифференцируем последнее равенство по y:

$$F'_y=x^2+6xy+\varphi'(y).$$

Подставляя это во второе уравнение , находим $\varphi(y)$:

$$x^2+6xy+\varphi'(y)=x^2+6xy-3y^2,$$

т.е. $\varphi'(y)=-3y^2$, $\varphi(y)=-y^3+C_1$.

Поэтому $F(x,y)=x^2y+3xy^2-y^3+C_1$.

Общее решение уравнения имеет вид $x^2y+3xy^2-y^3=C$.

Пример 6. Решить уравнение

$$y'^2-2xy'+y=0.$$

Решение. Это уравнение Лагранжа. Положим $y'=p$, тогда $y=2xp-p^2$. Из равенств $dy=pdx$ и $dy=2pdx+2xdp-2pdp$ получим $pdx+2(x-p)dp=0$. Отсюда p=0 или $\frac{dx}{dp}+\frac{2x}{p}$=2. Это линейное уравнение. Решая его, находим x=$\frac{2}{3}$p+$\frac{c}{p^2}$.

Решение исходного уравнения имеет вид $\begin{cases} x=\frac{2}{3}p+\frac{c}{p^2}, \\ y=2xp-p^2, y=0. \end{cases}$

2 Пример выполнения индивидуального задания по теме «Дифференциальные уравнения порядка выше первого»

1. Определить тип дифференциального уравнения и найти его общее решение.

<u>Пример 1</u>. Найти общее решение уравнения $y'''y''=\sqrt{1+y''^2}$.

Решение. Пусть $y''=u$, тогда $u'u=\sqrt{1+u^2}$, $\frac{udu}{\sqrt{1+u^2}}=dx$, $\sqrt{1+u^2}=x+c_1$, $u=\pm\sqrt{(x+c_1)^2-1}$, или $y''=\pm\sqrt{(x+c_1)^2-1}$.

Последовательным интегрированием находим

$$y'=\pm\left[\frac{1}{2}(x+c_1)\sqrt{(x+c_1)^2-1}-\frac{1}{2}\ln\left|x+c_1+\sqrt{(x+c_1)^2-1}\right|\right]+c_2,$$

$$y=\pm\left[\frac{1}{6}\sqrt{\left((x+c_1)^2-1\right)^3}-\frac{1}{2}(x+c_1)\ln\left|x+c_1+\sqrt{(x+c_1)^2-1}\right|+\frac{1}{2}\sqrt{(x+c_1)^2-1}\right]+c_2x+c_3.$$

Знак плюс соответствует общему решению для области $y''>0$, знак минус – для области $y''<0$.

<u>*Пример 2*</u>. Найти частное решение уравнения, удовлетворяющее указанным начальным условиям.

$y''-2y'=1$, $y(0)=\frac{5}{4}$, $y'(0)=1$.

Решение. Пусть $y'=u$, тогда $u'-2u=1$, $\frac{du}{1+2u}=dx$, $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+2u}{c_1}\right|=x$, $u=c_1e^{2x}-\frac{1}{2}$ или $y'=c_1e^{2x}-\frac{1}{2}$.

Интегрируя полученное уравнение, находим общее решение:

$$y=\frac{1}{2}c_1e^{2x}-\frac{1}{2}x+c_2.$$

Учитывая начальные условия, определим c_1 и c_2: $c_1=\frac{3}{2}$, $c_2=\frac{1}{2}$.

Частное решение уравнения запишется $y=\frac{3}{4}e^{2x}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$.

3. Понизить порядок данного уравнения, пользуясь однородностью, и решить уравнение.

<u>*Пример 3*</u>. Найти общее решение уравнения $xyy''-xy'^2-yy'=0$.

Решение. Проверим однородность уравнения.

Пусть $$F(x,y,y',y'')=xyy''-xy'^2-yy',$$

$$F(x,\lambda y,\lambda y',\lambda y'')=x\lambda y\lambda y''-x(\lambda y')^2-\lambda y\lambda y'=\lambda^2(xyy''-xy'-yy')=$$
$$=\lambda^2F(x,y,y',y''),\quad \text{m=2}.$$

Положим $y'=yz$, тогда $y''=(yz)'=y'z+z'y=yz^2+yz'$, или $y''=y(z^2+z')$, и уравнение запишется $xy^2(z^2+z')-xy^2z^2-y^2z^2=0$.

Сокращая на y^2 (при этом теряется решение y=0), находим $xz'-z=0$ или $\frac{dz}{z}-\frac{dx}{x}=0$, $z=c_1x$. Так как $z=\frac{y'}{y}$, то $y'=c_1xy$, $\frac{dy}{y}=c_1xdx$.

Откуда $\ln|y|=\frac{c_1x^2}{2}+\ln|c_2|$ или $y=c_2e^{c_1\frac{x^2}{2}}$ – общее решение уравнения (содержит потерянное частное решение y=0, если $c_2=0$).

4. Решить задачу Коши.

<u>*Пример4*</u>. Найти частное решение уравнения $y'''-3y''+3y'-y=0$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=1, y'(0)=2, y''(0)=3$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^3-3k^2+3k-1=0$ имеет единственный корень $k=1$ кратности $r=3$, поэтому частные решения запишутся $y_1=e^x, y_2=xe^x, y_3=x^2e^x$. Следовательно, $y=\left(c_1+c_2x+c_3x^2\right)e^x$ – общее решение уравнения.

Для определения произвольных постоянных найдем производные

$$y'=\left(c_1+c_2x+c_3x^2\right)e^x+\left(c_2+2c_3x\right)e^x,\quad y''=\left(c_1+c_2x+c_3x^2\right)e^x+2\left(c_2+2c_3x\right)e^x+2c_3e^x.$$

Подставляя начальные условия, получим систему уравнений: $\begin{cases} c_1=1 \\ c_1+c_2=2 \\ c_1+c_2+2c_3=3. \end{cases}$

Откуда $c_1=1, c_2=1, c_3=0$. Следовательно, искомое частное решение имеет вид

$y=\left(1+x\right)e^x$.

5. Найти общее решение дифференциального уравнения.

<u>*Пример*</u> 5

$y^{\mathrm{IV}}+y''=x^2+x$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^4+k^2=0$, его корни $k_{1,2}=0,\ k_{3,4}=\pm i$.

Общее решение соответствующего однородного уравнения запишется

$$\bar{y}=c_1+c_2x+c_3\cos x+c_4\sin x.$$

Частное решение имеет вид $y^*=x^2\left(Ax^2+Bx+C\right)=Ax^4+Bx^3+Cx^2$.

Для определения неизвестных коэффициентов A,B,C вычислим производные от y^*: $y^{*\prime}=2Cx+3Bx^2+4Ax^3$, $y^{*\prime\prime}=2C+6Bx+12Ax^2$, $y^{*\prime\prime\prime}=6B+24Ax$, $y^{*\mathrm{IV}}=24A$

и подставим в уравнение $y^{\mathrm{IV}}+y''=x^2+x$. Из полученного тождества

$$24A+2C+6Bx+12Ax^2\equiv x^2+x$$

определим коэффициенты A,B,C двумя методами:

1) уравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим

$$\begin{cases} 12A=1 \\ 6B=1 \\ 24A+2C=0, \end{cases}\qquad \text{откуда } A=\frac{1}{12},\ B=\frac{1}{6},\ C=-1.$$

2) зададим x произвольные значения. Пусть $x=0 \ \Rightarrow\ 24A+2C=0$,

$x=-1 \ \Rightarrow\ 24A+2C-6B+12A=0,$

$x=1 \ \Rightarrow\ 24A+2C+6B+12A=2.$

Решая полученную систему, найдем $A=\frac{1}{12},\quad B=\frac{1}{6},\quad C=-1$. При определении коэффициентов используется либо первый либо, второй метод, а иногда уместно применить одновременно оба.

Частное решение запишется $y^*=\frac{x^4}{12}+\frac{1}{6}x^3-x^2$. Следовательно,

$y=C_1+C_2x+C_3\cos x+C_4\sin x-x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{x^4}{12}$ есть общее решение уравнения.

6. Найти общее решение дифференциального уравнения методом вариации произвольных постоянных.

<u>*Пример*</u> 6

$$y''-y'=\frac{1}{1+e^x}.$$

Решение. Общее решение данного уравнения запишется $y=\bar{y}+y^*$.

Найдем $\bar{y}$ – общее решение соответствующего линейного однородного уравнения $y''-y'=0$. Корни его характеристического уравнения $k^2-k=0$ вещественные разные $k_1=0,\ k_2=1$, тогда $\bar{y}=\bar{c}_1+c_2e^x$. Запишем $y^*=c_1(x)+c_2(x)e^x$.
Составим систему для нахождения $c_1(x)$ и $c_2(x)$

$$\begin{cases} c_1'(x)1+c_2'(x)e^x=0 \\ c_1'(x)0+c_2'(x)e^x=\dfrac{1}{1+e^x} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} c_1'+c_2'e^x=0 \\ c_2'e^x=\dfrac{1}{1+e^x} \end{cases},$$

откуда получаем: $c_2'(x)=\dfrac{1}{e^x\left(1+e^x\right)}$.

Следовательно,

$$c_1(x)=-\int\frac{dx}{1+e^x}=-x+\ln\left(1+e^x\right),$$

$$c_2(x)=\int\frac{dx}{e^x\left(1+e^x\right)}=-e^x-x+\ln\left(1+e^x\right).$$

Запишем $y^*=-x+\ln\left(1+e^x\right)+e^x\left[-e^{-x}-x+\ln\left(1+e^x\right)\right]$.
Общее решение: $y=\bar{c}_1+c_2e^x-x+\ln\left(1+e^x\right)-1-xe^x+e^x\ln\left(1+e^x\right)$ или

$$y=c_1+e^x(c_2-x)-x+\left(1+e^x\right)\ln\left(1+e^x\right) \quad (c_1=\bar{c}_1-1).$$

3 Пример выполнения индивидуального задания по теме: Системы дифференциальных уравнений.

Найти общее решение системы дифференциальных уравнений в случае, когда матрица системы имеет вещественные собственные значения.

Пример 1. Решить систему

$$\begin{cases} \dot{x}=x-y+z \\ \dot{y}=x+y-z \\ \dot{z}=2x-y \end{cases}.$$

Решение. Ищем решение в виде $x=\alpha e^{\lambda t}, y=\beta e^{\lambda t}, z=\gamma e^{\lambda t}$. Подставляя это выражение в систему, имеем

$$\alpha(\lambda-1)+\beta-\gamma=0,\ -\alpha+\beta(\lambda-1)+\gamma=0,\ -2\alpha+\beta+\gamma\lambda=0.$$

Составляем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & -\lambda \end{vmatrix}=0,$$

откуда

$$\lambda^3-2\lambda^2+\lambda+2=0.$$

Корни этого уравнения $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -1$ – простые. Поэтому частные решения представляются следующим образом:

$$x_1 = \alpha_1 e^t, \quad x_2 = \alpha_2 e^{2t}, \quad x_3 = \alpha_3 e^{-t},$$
$$y_1 = \beta_1 e^t, \quad y_2 = \beta_2 e^{2t}, \quad y_3 = \beta_3 e^{-t},$$
$$z_1 = \gamma_1 e^t, \quad z_2 = \gamma_2 e^{2t}, \quad z_3 = \gamma_3 e^{-t},$$

Для установления связи между постоянными $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$, пользуясь системой, имеем

$$\alpha_k(\lambda_k - 1) + \beta_k - \gamma_k = 0, \quad -\alpha_k + \beta_k(\lambda_k - 1) + \gamma_k = 0, \ -2\alpha_k + \beta_k + \gamma_k\lambda_k = 0, \ k = 1,2,3.$$

Нетрудно получить решение последней системы:

$\beta_1 = \alpha_1 = \gamma_1$; $\alpha_2 = \gamma_2$, $\beta_2 = 0$; $\beta_3 = -3\alpha_3$, $\gamma_3 = -5\alpha_3$.

Поскольку часть найденных постоянных произвольна, можно положить $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 1$, $\alpha_3 = 1$. Тогда $\beta_1 = \alpha_1 = 1$; $\alpha_2 = 1$; $\beta_3 = -3$; $\gamma_3 = -5$. Таким образом, общее решение имеет вид

$$x = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + c_3 e^{-t},$$
$$y = c_1 e^t - 3c_3 e^{-t},$$
$$z = c_1 e^t + c_2 e^{2t} - 5c_3 e^{-t}.$$

2. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений в случае, когда матрица системы имеет комплексные собственные значения.

Пример 2. Решить систему

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = x + 3y - z, \\ \dot{z} = -x + 2y + 3z. \end{cases}$$

Решение. Составляем и решаем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & -1 \\ -1 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \ ; \lambda_1 = 2 \ , \lambda_2 = 3 + i \ , \lambda_3 = 3 - i.$$

При этом частные решения будут иметь вид

$$x_1 = A_1 e^{2t} \ ; \quad x_2 = A_2 e^{(3+i)t} \ ; \quad x_3 = A_3 e^{(3-i)t} \ ;$$
$$y_1 = B_1 e^{2t} \ ; \quad y_2 = B_2 e^{(3+i)t} \ ; \quad y_3 = B_3 e^{(3-i)t} \ ;$$
$$z_1 = C_1 e^{2t} \ ; \quad z_2 = C_2 e^{(3+i)t} \ ; \quad z_3 = C_3 e^{(3-i)t} \ .$$

Для определения постоянных A_k, B_k, C_k, k=1,2,3 пользуемся системой алгебраических уравнений:

$$A_k(2 - \lambda_k) + B_k = 0 \ , \ A_k + (3 - \lambda_k)B_k - C_k = 0 \ ,$$
$$-A_k + 2B_k + (3 - \lambda_k)C_k = 0 \ , \ k = 1,2,3.$$

Решив систему уравнений относительно A_k, B_k, C_k, k=1,2,3, получаем:

$B_1 = 0, \ A_1 = C_1 = A_2 = A_3 = 1, \ B_2 = 1 + i, \ C_2 = 2 - i, \ B_3 = 1 - i, \ C_3 = 2 + i.$ Следовательно, общее решение:

$$x=\tilde{c}_1e^{2t}+\tilde{c}_2e^{3t}(\cos t+i\sin t)+\tilde{c}_3e^{3t}(\cos t-i\sin t);$$
$$y=\tilde{c}_2(1+i)e^{3t}(\cos t+i\sin t)+\tilde{c}_3(1-i)e^{3t}(\cos t-i\sin t);$$
$$z=\tilde{c}_1e^{2t}+\tilde{c}_2(2-i)e^{3t}(\cos t+i\sin t)+\tilde{c}_3(2+i)e^{3t}(\cos t-i\sin t).$$

Чтобы получить общее решение данной системы дифференциального уравнения в действительной форме, надо взять вещественную и мнимые части найденного комплексного решения. В частности, если положить

$$\tilde{c}_2=c_2+ic_3\quad,\quad \tilde{c}_3=c_2-ic_3,$$

где c_2 , c_3 – действительные постоянные, и считать также $c_1=\tilde{c}_1$ действительной постоянной, можно дописать общее решение данной системы в действительной форме:

$$x=c_1e^{2t}+2e^{3t}(c_2\cos t-c_3\sin t),$$
$$y=2e^{3t}((c_2-c_3)\cos t-(c_2-c_3)\sin t),$$
$$z=c_1e^{2t}+2e^{3t}((2c_2+c_3)\cos t+(c_2-2c_3)\sin t).$$

3. Найти общее решение, используя метод вариации постоянных.

Пример 3. Применяя метод вариации, решить систему уравнений

$$\begin{cases}\dot{x}=-4x-2y+\dfrac{2}{e^t-1},\\ \dot{y}=6x+3y-\dfrac{3}{e^t-1}.\end{cases}$$

Решение. Прежде всего решаем однородную систему уравнений, соответствующую данной системе: $\begin{cases}\dot{x}=-4x-2y,\\ \dot{y}=6x+3y.\end{cases}$

Подставляя значение $y=-2x-\frac{1}{2}\dot{x}$ во второе уравнение, получаем $\ddot{x}+\dot{x}=0$, откуда $x=c_1+c_2e^{-t}$, тогда $y=-2c_1-\frac{3}{2}c_2e^{-t}$. Для определения общего решения неоднородной системы, согласно методу вариации произвольных постоянных, считаем c_1 и c_2 некоторыми функциями: $c_1(t)$ и $c_2(t)$.

Эти функции найдем из системы уравнений, которая получится в результате подстановки значений x и y в неоднородную систему:

$$\begin{cases}c_1'(t)+c_2'(t)e^{-t}=\dfrac{2}{e^t-1},\\ -2c_1'(t)-\dfrac{3}{2}c_2'(t)e^{-t}=-\dfrac{3}{e^t-1}.\end{cases}$$

Отсюда положим $c_2'(t)=\dfrac{2e^t}{e^t-1}$, $c_1'(t)=0$. Интегрируя последние уравнения, получаем $c_1(t)=\tilde{c}_1$, $c_2(t)=2\ln(e^t-1)+\tilde{c}_2$, где $\tilde{c}_1$ и $\tilde{c}_2$ – произвольные постоянные. Подставляя значения $c_1(t)$ и $c_2(t)$ в общее решение однородной системы, имеем общее решение исходной системы:

$$\begin{cases}x=\tilde{c}_1+\tilde{c}_2e^{-t}+2e^{-t}\ln|e^t-1|,\\ y=-2\tilde{c}_1-\dfrac{3}{2}\tilde{c}_2e^{-t}-3e^{-t}\ln|e^t-1|.\end{cases}$$

Общее решение линейной неоднородной системы есть сумма общего решения соответствующей ей однородной системы и частного решения неоднородной системы.

4. Найти решение неоднородной системы уравнений.

Пример 4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - 5\cos t, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + y. \end{cases}$$

Решение. Найдем общее решение однородной системы:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + y. \end{cases}$$

Составляем и решаем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$ л^2-л-2=0; л$_1$=-1, л$_2$=2.

Общее решение соответствующей однородной системы:

$$\begin{cases} x_{\text{од.}} = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t}, \\ y_{\text{од.}} = -c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{2t}. \end{cases}$$

Частное решение неоднородной системы найдем методом неопределенных коэффициентов, полагая

$$\begin{cases} x = A_1 \sin t + B_1 \cos t, \\ y = A_2 \sin t + B_2 \cos t. \end{cases}$$

Подставляя эти выражения в данную систему уравнений, получим уравнения для определения коэффициентов A_1, A_2, B_1, B_2:

$$\begin{cases} A_1 - B_2 = -5, \\ B_1 + A_2 = 0, \\ A_2 - 2B_1 - B_2 = 0, \\ 2A_1 + B_2 + A_2 = 0. \end{cases}$$

Решая эти уравнения, найдем A_1=-2, B_1=-1, A_2=1, B_2=3. Общее решение данной системы уравнений запишем в виде

$$\begin{cases} x = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} - 2\sin t - \cos t, \\ y = -c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{2t} + \sin t + 3\cos t. \end{cases}$$

4. Пример выполнения индивидуального задания по теме: «Линейные разностные стационарные уравнения».

Пример 1. Найти общее решение линейного однородного разностного стационарного уравнения:

$y_{k+2} + y_{k+1} - 2y_k = 0.$

Характеристическое уравнение имеет вид

$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0.$

Его корни $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$. Общее решение рассматриваемого уравнения

$$y_k = C_1(-2)^k + C_2,$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Пример 2.

$y_{k+2} - 4y_{k+1} + 4y_k = 0$

Характеристическое уравнение

$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0$

имеет корень $\lambda = 2$ кратности два. Следовательно, общее решение заданного уравнения имеет вид

$y_k = (C_1 + C_2k)\, 2^k,$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Пример 3. Решить уравнение

$y_{k+2} + y_k = 0.$

Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 1 = 0$ имеет корни $\lambda = \pm\, i$. Следовательно, общее комплексное решение уравнения имеет вид

$$y_k = \hat{C}_1 i^k + \hat{C}_2(-i)^k,$$

где $\hat{C}_1$ и $\hat{C}_2$ – произвольные комплексные постоянные.

Найдем общее вещественное решение. Так как

$$\lambda = i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2},$$

то $\lambda^k = i^k = \cos\dfrac{k\pi}{2} + i\sin\dfrac{k\pi}{2}$.

Следовательно,

$$y_k = C_1\cos\frac{k\pi}{2} + C_2\sin\frac{k\pi}{2},$$

где C_1 и C_2 – произвольные вещественные постоянные, является общим вещественным решением заданного уравнения.

Пример 4. Решить уравнение

$y_{k+2} - 4y_{k+1} + 3y_k = k\, 2^k.$

Характеристическое уравнение

$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$

имеет корни $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$. Следовательно, общее решение заданного уравнения имеет вид

$y_k = C_1 + C_2\, 3^k + y_k^{(0)}.$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные, а $y_k^{(0)}$ – частное решение заданного уравнения. На основании теоремы 1 можно утверждать, что

$y_k^{(0)} = (ak + b)\, 2^k,$

где a и b – неопределенные коэффициенты. Их находим подстановкой $y_k^{(0)}$ в уравнение. Имеем

$[a(k + 2) + b]\, 2^{k+2} - 4[a(k + 1) + b]\ \ 2^{k+1} + 3[ak + b]\, 2^k = k\, 2^k.$

После вычислений находим, $a = -1$, $b = 0$. Следовательно, общее решение заданного уравнения имеет вид

$y_k = C_1 + C_2\, 3^k - k\, 2^k.$

Пример 5. Решить уравнение

$y_{k+2} - 3y_{k+1} + 2y_k = 4.$

Характеристическое уравнение

$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$

имеет корни $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Следовательно, общее решение заданного уравнения имеет вид
$y_k = C_1 + C_2\, 2^k + y_k^{(0)}$.
где C_1 и C_2 – произвольные постоянные, а $y_k^{(0)}$ – частное решение заданного уравнения.
На основании теоремы можно сделать вывод, что
$y_k^{(0)} = a\, k$,
где a – неопределенный коэффициент, который находится подстановкой $y_k^{(0)}$ в уравнение. Имеем
$a(k + 2) – 3a(k + 1) + 2ak = 4$.
Отсюда $a = – 4$ и, значит,
$y_k = C_1 + C_2\, 2^k – 4\, k$.
является общим решением заданного уравнения.

Заключение.

При изучении дисциплины «Дифференциальные и разностные уравнения» студент приобретает практические навыки построения математических моделей простейших физических явлений и решения (аналитического и численного) получающихся при этом математических задач. После изучения дисциплины студент должен свободно ориентироваться в основных разделах дисциплины, что включает: дифференциальные и разностные уравнения первого порядка, дифференциальные и разностные уравнения высших порядков, системы дифференциальных и разностных уравнений. Учится подбирать соответствующий метод решения дифференциальных и разностных уравнений, применять дифференциальные и разностные уравнения на практике для исследования различных физических явлений.

В результате освоения данной дисциплины студент должен овладеть: способностью использовать в профессиональной деятельности знания и методы, полученные при изучении математических и естественнонаучных дисциплин.