Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное образовательное учреждение
высшего образования
Амурский государственный университет
(ФГБОУ ВО «АмГУ)

ЛИНЕЙНЫЕ И НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ФИЗИКИ

Сборник учебно-методических материалов

Для направления подготовки 03.03.02 – Физика

Квалификация выпускника: бакалавр

Благовещенск, 2017

Печатается по решению
редакционно-издательского совета
факультета математики и информатики
Амурского государственного университета

Составитель: Труфанова Т.В.
Линейные и нелинейные уравнения физики: сборник учебно-методических материалов для направления подготовки 03.03.02 – Физика. – Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2017.- 33 с.

© Амурский государственный университет, 2017
© Кафедра математического анализа и моделирования, 2017
Труфанова Т.В., составление,2017

СОДЕРЖАНИЕ

Введение 4
Краткое содержание теоретического материала 5
Методические указания к практическим занятиям 16
Методические рекомендации для самостоятельной работы 20
Заключение 33

ВВЕДЕНИЕ

При изучении явлений природы, решении многих задач физики и техники, химии и биологии, других наук не всегда удается найти прямую зависимость между величинами, описывающими тот или иной эволюционный процесс. Однако в большинстве случаев можно установить связь между искомыми характеристиками изучаемого явления (функциями) и скоростями их изменения относительно других переменных, т.е. найти уравнения, в которые входят производные неизвестных функций. Такие уравнения называют дифференциальными. Если неизвестная функция зависит от одной переменной, дифференциальное уравнение называется обыкновенным, если от двух или большего числа переменных – уравнением в частных производных.

Дисциплина «Линейные и нелинейные уравнения физики» посвящена изучению математических моделей естественнонаучных явлений, которые приводят к задачам для дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка.

Целью дисциплины является знакомство с методами построения математических моделей различных процессов и явлений естествознания, изучение основных методов исследования возникающих при этом математических задач и их решение, выяснение физического смысла полученного решения.

Задачи изучения дисциплины: научить студентов решать дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка. Изучить основные методы решения дифференциальных уравнений. Изучить вопрос о влиянии применения начальных данных на решение дифференциальных уравнений в частных производных.

При изучении дисциплины студент приобретает практические навыки решения и исследования дифференциальных уравнений в частных производных. Должен уметь подобрать соответствующий метод решения дифференциальных уравнений в частных производных. Уметь применять дифференциальные уравнения в частных производных на практике для исследования различных физических явлений. Дисциплина «Линейные и нелинейные уравнения физики» вырабатывает у студентов навыки построения математических моделей простейших физических явлений и решения (аналитического и численного) получающихся при этом математических задач. Студент должен свободно ориентироваться в основных разделах дисциплины, что включает: уравнения гиперболического типа, уравнения параболического типа, уравнения эллиптического типа, свойства и методы решений этих уравнений.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА

Лекции №1. Введение. Основные примеры уравнений математической физики. Практическое применение уравнений математической физики для описания закономерностей различных физических явлений. Основные этапы исторического развития математической физики.

План лекции.

Введем основные определения дисциплины «Линейные и нелинейные уравнения физики»: что называется, дифференциальным уравнением с частными производными порядка n; что называется, регулярным решением; фундаментальные решения; линейность и порядок уравнения; число независимых переменных; однородность и неоднородность уравнения.

Большинство физических явлений, как динамика жидкости, электричество и магнетизм, механика, оптика, теплопередача, могут быть описаны с помощью уравнений с частными производными (УЧП). При некоторых упрощениях, предложениях эти уравнения сводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям, но полное описание таких систем неминуемо приводит к исследованию уравнений с частными производными.

В качестве примера можно привести уравнение Максвелла, закон теплообмена Ньютона, уравнение движения Ньютона и т.д. Во всех этих уравнениях физические явления описываются на языке пространственных и временных переменных. Производные появляются в уравнениях потому, что они описывают важнейшие физические величины (такие, как скорость, ускорение, сила, трение, поток, ток и т.д.). Таким образом, возникают уравнения с частными производными, содержащие производную функции, которую необходимо определить.

В этом курсе мы будем заниматься главным образом линейными уравнениями второго порядка с одной неизвестной. Такими уравнениями являются, например:

1. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}$ - уравнение теплопроводности;

2. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}$ - волновое уравнение;

3. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = 0$ - уравнение Лапласа.

Метод исследования, характеризует эту отрасль науки, является математическим по своему существу. Однако постановка задач математической физики тесно связана с изучением физических проблем.

Цель лекции Ввести студентов в дисциплину «Уравнения математической физики», обозначить структуру курса, содержание практического и лекционного материала по основным разделам, предусмотренным Государственным образовательным стандартом, озвучить междисциплинарные связи, правила организации аудиторной и самостоятельной работы студентов, дать методические рекомендации по изучению дисциплины, указать список основной и дополнительной литературы, рекомендуемой студентам, ознакомить студентов с формами текущего и итогового контроля по дисциплине.

Ключевые вопросы

1) Дать определение дифференциального уравнения с частными производными (УЧП)
2) Какие уравнения называются линейными, нелинейными, квазилинейными.
3) Что такое порядок уравнения, что такое число неизвестных.
4) Привести примеры уравнений с частными производными.

Лекции №2 Классификация уравнений с частными производными второго порядка и приведение их к каноническому виду. Уравнения эллиптического, гиперболического и параболического типов. Уравнение смешанного типа. Простейшие примеры трёх основных типов уравнений с частными производными второго порядка: уравнения Лапласа, волновое уравнение, уравнение теплопроводности.

План лекции. Дифференциальные уравнения с двумя независимыми переменными

Понятие характеристической формы и классификация линейных уравнений второго порядка: эллиптического, гиперболического и параболического типов. Уравнение смешанного типа. Характеристические кривые и характеристические направления.

Дадим необходимые определения.

Уравнением с частными производными 2-го порядка с двумя независимыми переменными x, y называется соотношение между неизвестной функцией $u(x,y)$ и ее частными производными до 2-го порядка включительно:

$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy}, u_{xy}) = 0$

Аналогично записывается уравнение и для большего числа независимых переменных.

Уравнение называется *линейным относительно старших производных*, если оно имеет вид

$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F_1(x, y, u, u_x, u_y) = 0,$

где a_{11}, a_{12}, a_{22} являются функциями x и y.

Это уравнение мы будем называть в точке M уравнением

гиперболического типа, если в точке M $\quad a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0,$

эллиптического типа, если в точке M $\quad a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0,$

параболического типа, если в точке M $\quad a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0.$

Если коэффициенты a_{11}, a_{12}, a_{22} зависят не только от x и y, а являются, подобно F_1, функциями x, y, u, u_x, u_y,то такое уравнение называется *квазилинейным*. Уравнение называется *однородным*, если $f(x, y) = 0$.

С помощью преобразования переменных

$\xi = \varphi(x, y), \qquad \eta = \psi(x, y),$

допускающего обратное преобразование, мы получаем новое уравнение, эквивалентное исходному. Естественно поставить вопрос: как выбрать ξ и η, чтобы уравнение в этих переменных имело наиболее простую форму?

В этом пункте мы дадим ответ на поставленный вопрос для уравнений, линейных относительно старших производных с двумя независимыми переменными x и y.

Цель лекций состоит в том, чтобы научить студентов:

1) Составлять характеристическое уравнение.2) Находить характеристики и делать замену переменных.3) Приводить уравнения к каноническому виду.

Ключевые вопросы: 1) Записать линейное уравнение в частных производных второго порядка. 2) Как составить характеристическое уравнение?3) Какая замена переменных в гиперболическом, параболическом и эллиптическом случаях? 4) Привести к каноническому виду уравнение и определить его тип. 5) Что называется квадратичной формой? 6) Как привести квадратичную форму к каноническому виду? 6) Когда уравнение второго порядка со многими независимыми переменными называется уравнением эллиптического, гиперболического, ультрагиперболического или параболического типов?

Лекция 3. Простейшие задачи, приводящие к уравнениям гиперболического типа. Постановка краевых задач. Уравнение малых поперечных колебаний струны. Уравнение продольных колебаний стержней и струн. Энергия колебания струны. Уравнение электрических колебаний в проводах. Граничные и начальные условия.

План лекции. Вывод уравнения малых поперечных колебаний струны**.** Уравнения продольных колебаний стержней и струн**.**

Краткое пояснение.

Каждую точку струны длины l можно охарактеризовать значением ее абсциссы x. Описание процесса колебания струны может быть проведено при помощи задания положения точек струны в различные моменты времени. Для определения положения струны в момент времени t достаточно задать компоненты вектора смещения $\{u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t)\}$ точки x в момент времени t.

Мы рассмотрим наиболее простую задачу о колебаниях струны. Будем предполагать, что смещения струны лежат в одной плоскости x, u и что вектор смещения $\boldsymbol{u}$ перпендикулярен в лю-

бой момент к оси x; тогда процесс колебания можно описать одной функцией $u(x,t)$, характеризующей вертикальное перемещение струны. Будем рассматривать струну как гибкую упругую нить. Математическое выражение понятия гибкости заключается в том, что напряжения, возникающие в струне, всегда направлены по касательным к ее мгновенному профилю. Это условие выражает собой то, что струна не сопротивляется изгибу.

Величина натяжения, возникающего в струне вследствие упругости, может быть вычислена по закону Гука. Будем рассматривать малые колебания струны и пренебрегать квадратом u_x по сравнению с единицей.

В случае постоянной плотности ρ=const этому уравнению обычно придают вид

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t) \qquad \left(a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}} \right),$$

где

$$f(x,t) = \frac{1}{\rho} F(x,t)$$

есть плотность силы, отнесенная к единице массы. При отсутствии внешней силы получим однородное уравнение

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

или

$$u_{xx} - u_{yy} = 0 \quad (y=at),$$

описывающее свободные колебания струны. Это уравнение является простейшим примером уравнения гиперболического типа.

Цель лекций состоит в том, чтобы научить студентов по заданному физическому процессу построить математическую модель. Показать, как физическую задачу записать в виде уравнения в частных производных на примере колебания струны. Показать, что полученное уравнение гиперболического типа описывает не только колебания струны, но и ряд других физических процессов, которые называют волновыми. Научить дополнять математическое описание процессов колебания начальными и граничными условиями.

Ключевые вопросы:1) Приведите примеры уравнений гиперболического типа.2) Записать уравнение малых поперечных колебаний струны. 3) Записать уравнение свободных колебаний струны. 4) Какой физический закон использовали для вывода уравнения колебания? 5) Сформулировать основные типы граничных условий. 6).Записать начальные условия для колебания струны.

Лекция 4. Задача Коши для волнового уравнения и распространение волн в неограниченном пространстве. Формула Даламбера. Физическая интерпретация. Устойчивость решений. Полуограниченная прямая и метод продолжений.

План лекции. Рассмотрим свободные колебания бесконечной струны, т.е. достаточно длинной струны, влиянием концов которой на процесс колебаний можно пренебречь. Решение задачи проведем методом Даламбера. Рассмотрим задачу Коши для неоднородного уравнения. Доказательство лемм о свойствах решений уравнений колебаний, определенных на бесконечной прямой. Решение уравнения колебания, удовлетворяющего начальным условиям и граничному условию первого рода. Решение уравнения колебания, удовлетворяющего начальным условиям и граничному условию второго рода. Устойчивость решения.

Краткое пояснение.

Причинами, вызывающими такие колебания, могут являться начальные отклонения струны от равновесного положения или сообщенный струне начальный импульс, обусловливающий некоторое распределение скоростей частиц струны. Поэтому, описывая свободные колебания бесконечной струны, мы должны решить однородное уравнение свободных колебаний

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t>0, \quad -\infty<x<+\infty,$$

при начальных условиях

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x); \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x),$$

где функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ заданы на всей числовой оси.

Начальные условия вполне однозначно определяют колебания бесконечной струны. Эту задачу называют *задачей с начальными условиями*, или *задачей Коши*.

Решение этой задачи проведем методом Даламбера. В результате решения получим

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\theta)d\theta.$$

Если функция $\varphi(x)$ имеет производные до второго порядка включительно, а функция $\psi(x)$ - до первого порядка, то формула определяет решение задач Коши. При этом полученное соотношение называют *формулой Даламбера.*

Из формулы Даламбера следует, что задача Коши для волнового уравнения имеет единственное решение, непрерывно зависящее от начальных условий, т.е. если $|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)| \prec \delta_1$ и $|\psi_1(x)-\psi_2(x)| \prec \delta_2$, то $|u_1(x,t)-u_2(x,t)| \prec \varepsilon$, причем $\varepsilon \to 0$ при $\delta_{1,2} \to 0$. Это свойство непрерывной зависимости решения от начальных условий обеспечивает корректность постановки задачи Коши для гиперболического уравнения.

Доказательство лемм о свойствах решений уравнений колебаний, определенных на бесконечной прямой. Решение уравнения колебания, удовлетворяющего начальным условиям и граничному условию первого рода. Решение уравнения колебания, удовлетворяющего начальным условиям и граничному условию второго рода. Устойчивость решения.

Краткое пояснение.

Если при описании процесса колебаний струны учесть влияние одного из ее концов (x=0), то можно проанализировать колебания в полуограниченной струне, вызванные граничным возмущением, и изучить процесс отражения волн от конца струны.

Сформулируем следующую начально-краевую задачу для полуограниченной прямой:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ t>0,\ x>0$$

- уравнение,

$$u(0,t) = \mu(t),\ t \ge 0$$

- граничное условие и

$$u(x,0) = \varphi(x),\ x \ge 0$$

$$u_t(x,0) = \psi(x),\ x \ge 0$$

- начальные условия.

Здесь заданная функция $\mu(t)$ описывает закон движения конца струны. В частном случае она может быть периодической функцией времени.

Решаем поставленную задачу при помощи метода продолжения на основании лемм.

<u>Цель лекции</u>. Научить студентов решать задачу Коши для гиперболического уравнения. Научить студентов решать уравнения гиперболического типа на полуограниченной прямой с граничными условиями первого и второго рода.

<u>Ключевые вопросы.</u> 1) Сформулировать теорему существования и единственности решения краевых задач. 2) Записать задачу с начальными условиями для свободных колебаний бесконечной струны. 3) Записать формулу Даламбера. 4) Дать физическую интерпретацию каждого слагаемого в этой формуле. 5) Записать решение задачи Коши для неоднородного уравнения. 6) Сформулировать задачу о распространении волн на полуограниченной прямой. 7) Доказать лемму о свойствах решений колебаний, если начальные данные являются нечетными функциями. 8) Доказать лемму о свойствах решений колебаний, если начальные данные являются четными функциями. 9) Сформулировать теорему об устойчивости решения.

Лекция 5-6. Методы решения краевых задач. Метод разделения переменных. Собственные значения и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля. Неоднородные уравнения. Общая первая краевая задача. Краевые задачи со стационарными неоднородностями.

План лекции. Уравнение свободных колебаний струны. Метод разделения переменных, или метод Фурье. Задача на собственные значения. Интерпретация решения. Общая первая краевая задача для уравнения колебаний, неоднородное уравнение и неоднородные граничные условия. Краевые задачи со стационарными неоднородностями, когда граничные условия и правая часть уравнения не зависят от времени.

Краткое пояснение.

Метод разделения переменных, или метод Фурье, является одним из основных методов решения задач математической физики в ограниченных областях. Изложим этот метод для задач о свободных колебаниях ограниченной струны с закрепленными концами, которая формулируется следующим образом: найти решение однородного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad 0 < x < l$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \le x \le l,$$

и однородным граничным условиям

$$u\big|_{x=0} = 0, u\big|_{x=l} = 0, t \ge 0$$

Идея метода Фурье основана на линейности и однородности уравнения и граничных условий. В этом случае справедлив принцип суперпозиции для любых частных решений u_1 и u_2 уравнения, удовлетворяющих условиям, т.е. функция $u = C_1 u_1 + C_2 u_2$, где $C_{1,2} = const$, также удовлетворяет уравнению и граничным условиям. Оказывается, что с помощью суперпозиции линейно независимых частных решений можно выполнить также и начальные условия.

Будем искать нетривиальное решение уравнения в виде произведения двух функций

$$u(x,t) = X(x)T(t),$$

одна из которых, зависит только от переменного x, а другая – только от t.

Дифференцируя дважды это выражение по x и по t, после подстановки его в уравнение получим

$$X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t),$$

или

$$\frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} .$$

Отсюда следует, что функции $T(t)$ и $X(x)$ можно определить из решения обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0; \quad X''(x) + \lambda X(x) = 0$$

Обозначив постоянную разделения буквой λ со знаком минус.

Чтобы такие частные решения вида $u(x,t) = X(x)T(t)$, удовлетворяли граничным условиям для любого $t \ge 0$, необходимо потребовать выполнения условий $X(0)=0$ и $X(l)=0$.

Таким образом, для отыскания координатной функции $X(x)$ приходим к следующей задаче. Найти такие решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \; 0 < x < l,$$

которые в граничных точках $x=0$ и $x=l$ удовлетворяют условиям

$$X(0)=0, \; X(l)=0.$$

При любом $\lambda = const$ эта задача имеет тривиальное решение $X(x) \equiv 0$. Однако ниже будет показано, что при некоторых положительных значениях постоянной λ задача имеет и нетривиальные

решения. Такие «особенные» значения λ называют собственными значениями, а соответствующие им нетривиальные решения $X(x)$ - собственными функциями. Задачу отыскания собственных значений и собственных функций называют задачей Штурма – Лиувилля.

Цель лекции. Ознакомить студентов с одним из наиболее распространенных методов решения уравнений с частными производными методом разделения переменных или методом Фурье. Научить студентов решать неоднородные уравнения колебаний струны с неоднородными граничными условиями методом разделения переменных.

Ключевые вопросы: 1) Сформулировать задачу Штурма-Лиувилля. 2) В каком виде Фурье представил решение уравнения свободных колебаний струны? 3) Какое движение струны называется стоячей волной? 4) Чему равна собственная частота колебаний струны? 5) Сформулировать общую первую краевую задачу для уравнений колебаний. 6) Сформулировать краевую задачу со стационарными неоднородностями для уравнений колебаний. 7) В каком виде ищем решение неоднородного уравнения? 8) Как обнулить граничные условия? 9) В каком виде можно искать решение уравнения со стационарными неоднородностями?

Лекция 6. Общая схема метода разделения переменных. Решение общих линейных уравнений гиперболического типа.

План лекции.

Метод разделения переменных применим не только для уравнения колебаний однородной струны, но и для уравнений колебаний неоднородной струны. Общая схема метода разделения переменных. Рассмотрим метод разделения переменных для уравнений колебаний неоднородной струны. Формулировка основных свойств собственных функций и собственных значений краевой задачи. 1) Существование счетного множества собственных значений. 2) Положительность собственных значений. 3) Ортогональность собственных функций. 4) Теорема разложимости В.А. Стеклова. Решим неоднородное линейное уравнение с неоднородными граничными условиями.

Цель лекции: Ознакомить с основными свойствами собственных значений и собственных функций. Дать общую схему метода разделения переменных.

Ключевые вопросы: 1) Сформулировать основные свойства собственных значений и собственных функций. 2) Записать условие ортогональности собственных функций. 3) Разложить произвольную Функцию, дважды непрерывно дифференцируемую и удовлетворяющую тривиальным граничным условиям в равномерно и абсолютно сходящийся ряд по собственным функциям.

Выводы по теме: метод разделения переменных или метод Фурье является основным аналитическим методом решения уравнений в частных производных, и требуют качественного теоретического и практического освоения.

Лекция 7. Простейшие задачи, приводящие к уравнениям параболического типа. Постановка краевых задач. Линейная задача о распространении тепла. Принцип максимального значения. Теорема единственности.

План лекции.

Процесс передачи теплоты от более нагретых частей тела к менее нагретым связан с изменением температуры в различных частях тела. Вывод уравнения теплопроводности. Диффузионный процесс переноса массы. Диффузия частиц в веществе. Проникновение магнитного поля в проводящую среду. Начальные и граничные условия. Постановка краевых задач. Сформулируем и докажем свойство решений уравнения теплопроводности, которое называется принципом максимального значения. Следствия из принципа максимального значения. Теорема единственности. Принцип физической определенности задачи. Теорема единственности для бесконечной прямой.

Цель лекции: состоит в том, чтобы научить студентов по заданному физическому процессу теплопроводности построить математическую модель. Показать, как физическую задачу записать в виде уравнения в частных производных на примере распространения температуры в стержне. Научить студентов правильно ставить краевые задачи.

Ключевые вопросы: 1) Какие процессы описывают уравнения параболического типа? 2) Записать уравнение теплопроводности. 3) Записать уравнение диффузии. 4) Сформулировать три основных

типа граничных условий в зависимости от температурных режимов на границе. 5) Что называется решением первой краевой задачи? 6) Сформулировать основные краевые задачи для процесса теплопроводности. 7) Сформулировать принцип максимального значения для уравнения теплопроводности. 8) Сформулировать теорему единственности для первой краевой задачи. 9) Сформулировать следствия из принципа максимального значения. 10) Доказать теорему единственности для бесконечной прямой.

Лекция 8. Метод разделения переменных. Однородная краевая задача. Функция источника Неоднородное уравнение теплопроводности. Общая первая краевая задача.

План лекции. Однородная краевая задача. Функция мгновенного точечного источника. Свойства функции источника. Решение первой краевой задачи с нулевыми граничными условиями и непрерывным начальным условием. Рассмотрим неоднородное уравнение теплопроводности с нулевым начальным условием и однородными граничными условиями. Решение поставленной задачи будем искать в виде ряда Фурье по собственным функциям однородной задачи. Выясним смысл полученного решения. Общая первая краевая задача для уравнения теплопроводности. Подбор вспомогательной функции для обнуления граничных условий. Решение задачи для ограниченного стержня, концы которого поддерживаются при постоянной температуре.

Цель лекции: Научить студентов решать задачи параболического типа методом разделения переменных или методом Фурье. Научить студентов решать неоднородные уравнения теплопроводности с однородными и неоднородными граничными условиями методом разделения переменных.

Ключевые вопросы: 1) Сформулировать первую краевую задачу для уравнения теплопроводности. 2) Сформулировать основную вспомогательную задачу в методе разделения переменных. 3) Записать выражение для функции температурного влияния мгновенного точечного источника тепла. 4) Записать математическую постановку задачи для неоднородного уравнения. 5) Решить задачу о нагревании тонкой однородной проволоки, если начальная температура, граничная температура, а также температура окружающей среды равна нулю. 6) Нахождение решения неоднородного уравнения теплопроводности с ненулевым начальным условием и неоднородными граничными условиями.

Лекция 9. Задача на бесконечной прямой. Функция источника для неограниченной области. Краевые задачи для полуограниченной прямой.

План лекции. Рассмотрим распространение тепла на бесконечной прямой. Дадим сначала формальную схему решения поставленной задачи, основанную на разделении переменных. Пользуясь обратным преобразованием Фурье приходим к интегральному представлению решения. Найдем фундаментальное решение уравнения теплопроводности- функцию источника. Покажем графически поведение функции источника в зависимости от времени. Докажем, что интеграл Пуассона представляет собой ограниченное решение уравнения теплопроводности на бесконечной прямой. В качестве примера рассмотрим задачу, если начальная температура имеет постоянные, но различные значения. Определим решение уравнения теплопроводности на полуограниченной прямой. Подробно исследуем первую краевую задачу. Решение поставленной задачи представим в виде суммы двух функций, где одна представляет влияние только начальных условий, а вторая влияние только граничного условия. Докажем две леммы относительно решения уравнения теплопроводности определяемого интегралом Пуассона. Пользуясь этими леммами решим первую и вторую краевые задачи. Применим полученную формулу к решению задачи об остывании равномерно нагретого стержня, на границе которого поддерживается постоянная температура.

Цель лекции: Научить студентов решать задачи о распространение тепла на бесконечной прямой (задачу Коши). Дать алгоритм решения уравнений теплопроводности для полуограниченной прямой с различными краевыми условиями.

Ключевые вопросы: 1) Сформулировать задачу Коши для уравнения теплопроводности. 2)Записать фундаментальное решение уравнения теплопроводности. 3) Докажите, что интеграл Пуассона представляет собой ограниченное решение уравнения теплопроводности на бесконечной прямой.

4) Сформулировать краевую задачу распределения температуры для полуограниченной прямой.5) Сформулировать две леммы относительно функции определяемой интегралом Пуассона. 6) Пользуясь леммами решить задачу для полуограниченной прямой с граничным условием первого рода. 7) Пользуясь леммами решить задачу для полуограниченной прямой с граничным условием второго рода.

семестр5, курс 3

Раздел 4. Уравнения эллиптического типа

Лекция 1. Задачи, приводящие к уравнению Лапласа. Специальные функции математической физики. Стационарное тепловое поле. Уравнения Лапласа и Пуассона. Постановка основных краевых задач. Уравнение Лапласа в криволинейной системе координат.

План лекции. Исследование стационарных процессов (колебания, теплопроводности, диффузии). Стационарное тепловое поле. Уравнения Лапласа и Пуассона. Сформулируем основные краевые задачи о стационарном распределении температуры. Выведем выражение для оператора Лапласа в ортогональной криволинейной системе координат. Введем криволинейные координаты. Рассмотрим элемент объема в новых координатах. Запишем условия ортогональности ребер. Выведем выражение дивергенции векторного поля в ортогональных криволинейных координатах. Используя это, запишем уравнение Лапласа в ортогональных криволинейных координатах. Рассмотрим частные случаи: сферические координаты; цилиндрические координаты; полярные координаты.

Цель лекции: Ознакомить студентов с задачами, приводящими к уравнениям эллиптического типа. Ввести уравнения Лапласа и Пуассона, являющимися дифференциальными уравнениями второго порядка и принадлежащие к уравнениям эллиптического типа.

Ключевые вопросы. 1) Какие физические процессы описывают уравнения эллиптического типа? 2) Записать уравнения Лапласа и Пуассона. 3) Сформулировать основные краевые задачи для уравнений эллиптического типа. 4) Запишите уравнение Лапласа в криволинейной системе координат. 5) Запишите уравнение Лапласа в сферической системе координат.6) Запишите уравнение Лапласа в цилиндрической системе координат. 6) Запишите уравнение Лапласа в полярной системе координат.

Лекция 2. Фундаментальные решения уравнения Лапласа. Гармонические функции и аналитические функции комплексного переменного Формулы Грина. Интегральное представление решения. Основные свойства гармонических функций. Единственность и устойчивость первой краевой задачи. Внешние краевые задачи. Единственность решения для двух и трёхмерных задач. Вторая краевая задача. Теорема единственности.

План лекции. Выведем частные решения уравнения Лапласа обладающие сферической, цилиндрической симметрией. Фундаментальные решения уравнения Лапласа на плоскости и в пространстве. Необходимые и достаточные условия аналитичности функции, условия Коши-Римана. Докажем, что действительная и мнимая части аналитической функции удовлетворяют условиям Коши- Римана. Сопряженные гармонические функции.

Цель лекции: Показать, как решаются уравнения Лапласа обладающие сферической или цилиндрической симметрией. Напомнить понятия гармонических и аналитических функций.

Ключевые вопросы: 1) Записать частные решения уравнения Лапласа, обладающие сферической симметрией. 2) Записать частные решения уравнения Лапласа, обладающие цилиндрической симметрией. 3) Записать необходимые и достаточные условия аналитичности функции условия Коши- Римана. 4) Какие функции называются гармоническими?

Лекция 3 Фундаментальные решения уравнения Лапласа. Гармонические функции и аналитические функции комплексного переменного Формулы Грина. Интегральное представление решения. Основные свойства гармонических функций. Единственность и устойчивость первой краевой задачи. Внешние краевые задачи. Единственность решения для двух и трёхмерных задач. Вторая краевая задача. Теорема единственности.

План лекции. Выведем формулы Грина, являющиеся, прямым следствием формулы Остроградского. Первая формула Грина. Вторая формула Грина для функций двух и трех

переменных. Основная интегральная формула Грина. Три частных случая, когда точка лежит на поверхности области Т, внутри области Т и вне области Т. Установим несколько важных свойств гармонических функций: условие отсутствия источника внутри области; теорема среднего значения; принцип максимального значения. Следствия из принципа максимального значения. Докажем теорему единственности для первой краевой задачи. Докажем непрерывную зависимость решения первой краевой задачи от граничных условий

Цель лекции: Дать интегральное представление гармонических функций, являющихся основным аппаратом для изучения общих свойств гармонических функций. Научить студентов правильно ставить внешние и внутренние краевые задачи для двух и трех независимых переменных. Уметь доказывать теоремы единственности решения.

Ключевые вопросы: 1) Записать формулу Остроградского. 2) Пользуясь формулой Остроградского вывести первую формулу Грина. 3) Записать вторую формулу Грина. 4) Записать основную интегральную формулу Грина. 5) Сформулировать основные свойства гармонических функций. 6) Сформулировать внутреннюю задачу Дирихле. 7) Сформулировать внутреннюю задачу Неймана. 8) Сформулировать внешнюю задачу Дирихле. 9) Сформулировать внешнюю задачу Неймана. 10) Сформулировать теорему единственности для первой краевой задачи. 11) Сформулировать теорему единственности для второй краевой задачи.

Лекция 4. Решение краевых задач для простейших областей методами разделения переменных. Первая краевая задача для круга (внешняя и внутренняя задачи Дирихле). Интеграл Пуассона. Функция источника (функция Грина). Функция источника для уравнения Лапласа и её основные свойства. Метод электростатических изображений и функция источника для сферы. Функция источника для круга. Функция источника для полупространства. Интеграл Пуассона для сферы и круга.

План лекции. Первая краевая задача для круга. Введем полярную систему координат и запишем уравнение Лапласа в полярных координатах. Будем решать задачу методом разделения переменных. Получим формальное решение первой внутренней и внешней задачи. Преобразуем полученные решения, получим формулу дающую решение первой краевой задачи внутри круга, которая называется интегралом Пуассона.

Цель лекции: Научить студентов решать краевые задачи для уравнения Лапласа методом разделения переменных на примере первой краевой задачи для круга.

Ключевые вопросы: 1) Сформулировать первую краевую задачу для круга. 2) Записать уравнение Лапласа в полярной системе координат. 3) Записать решение первой внутренней задачи для круга. 4) Записать решение первой внешней задачи для круга. 5) Записать формулу Пуассона, дающую решение первой краевой задачи для круга.

Раздел 5. Распространение волн в пространстве

Лекция 5. Уравнение колебаний в пространстве. Метод усреднения. Формула Пуассона. Метод спуска

План лекции. Рассмотрим задачу с начальными условиями (задачу Коши) для уравнения колебания в неограниченном пространстве. Рассмотрим частные решения однородного уравнения обладающего центральной симметрией относительно некоторой точки. Метод усреднения. Найдем интегральное представление для задачи Коши. Пользуясь начальными условиями, получим формулу Пуассона. Метод спуска. Из формулы Пуассона в пространстве получим решение задачи Коши на плоскости. Аналогично получим решение и на прямой. Уравнения с тремя, двумя и, соответственно, одним пространственным аргументом часто называют уравнениями сферических, цилиндрических и плоских волн.

Цель лекции: Научить студентов как из формулы, определяющей решение уравнение для многих переменных, извлечь решение задачи для уравнения с меньшим числом независимых переменных.

Ключевые вопросы: 1) Сформулировать задачу Коши в неограниченном пространстве. 2) Записать формулу для решения задачи Коши в пространстве. 3) Записать формулу для решения задачи Коши на плоскости. 4) Записать формулу для решения задачи Коши на прямой.

Лекция 6. Колебания ограниченных объемов. Общая схема метода разделения переменных. Колебания прямоугольной мембраны. Колебания круглой мембраны.

План лекции. Проиллюстрируем общую схему метода разделения переменных на примере решения задачи колебания ограниченных объемов. С задачами подобного типа мы встречаемся при изучении процессов колебания мембраны, акустических колебаний газа, электромагнитных процессах в непроводящих средах. Сначала решим задачу на собственные значения. Рассмотрим общие свойства собственных функций и собственных значений. 1) существование собственных значений. 2) Положительность собственных значений. 3) Ортогональность собственных функций. 4) Теорема разложимости. Проведем формальную схему метода разделения переменных. Рассмотрим колебание прямоугольной мембраны при заданных начальных условиях и однородных граничных условиях первого рода. Решение будем искать методом разделения переменных. Получим задачу на собственные значения, которую также решать методом разделения переменных. Рассмотрим колебания круглой мембраны. Для этого перейдем к полярным координатам. При решении уравнения на собственные функции получим уравнение Бесселя. Решениями этого уравнения будут функции Бесселя и Неймана. Отметим основные свойства собственных функций Бесселя. Выведем норму этих функций.

Цель лекции: Научить студентов применять метод разделения переменных для уравнения с несколькими пространственными координатами.

Ключевые вопросы: 1) Сформулировать задачу о колебаниях ограниченных объемов. 2) Найти нетривиальное решение однородного уравнения методом разделения переменных.3) Сформулировать задачу Штурма - Лиувилля. 4) Сформулировать основные свойства собственных функций и собственных значений. 5) Сформулировать и записать первую краевую задачу процесса колебания прямоугольной мембраны. 6) Записать решение поставленной задачи. 7) Записать уравнение колебания круглой мембраны в полярной системе координат. 8) Сформулировать основные свойства собственных функций Бесселя. 9) Записать решение для колебания круглой мембраны.

Раздел 6. Распространение тепла в пространстве

Лекция 7. Распространение тепла в неограниченном пространстве. Функция температурного влияния. Распространение тепла в ограниченных телах. Схема метода разделения переменных.

План лекции. Рассмотрим задачу распространение тепла в неограниченном пространстве. Построим функцию источника для уравнения теплопроводности в неограниченном пространстве. Сформулируем основные свойства функции влияния. Определим вид функции влияния в случае двух измерений. Используя функцию источника, найдем решение задачи Коши о распространение тепла в пространстве. Решим задачу о распространение тепла в ограниченных телах. Сначала решим задачу с однородными граничными условиями первого рода. Решать будем методом разделения переменных. Рассмотрим вспомогательную задачу на отыскание собственных функций и собственных значений. Затем решим неоднородное уравнение с однородными граничными и начальном условиях. Изложим метод решения задачи и с неоднородными граничными условиями.

Цель лекции: Научить студентов, пользуясь функцией источника, решать задачу о распространении начальной температуры в неограниченном пространстве.

Научит студентов решать задачи о распространение тепла в ограниченном пространстве методом разделения переменных.

Ключевые вопросы: 1) Сформулировать задачу о распространение тепла в неограниченном пространстве. 2) Записать функцию температурного влияния мгновенного источника тепла. 3) Написать решение задачи о распространение тепла в неограниченном пространстве.

4) Сформулировать первую краевую задачу о распространение тепла в ограниченном теле. 5) В каком виде ищется решение неоднородное уравнение с однородными граничными и начальном условиях? 6) Как решить задачу с неоднородными граничными условиями?

Лекция 8-9. Краевые задачи остывания нагретых тел. Остывание круглого цилиндра, остывание прямоугольного параллелепипеда. Диффузионный процесс в активной среде с размножением. Задача экологического прогнозирования.

План лекции. Рассмотрим примеры решения задач остывания тел правильной формы, когда задача может быть решена точно в аналитическом виде. Запишем математическую модель остывания тела из однородного материала. Задачу будем решать методом Фурье. Решим задачу остывание круглого цилиндра. Решение задачи обладает осевой симметрией, и задача на собственные значения приводит к уравнению Бесселя. Получаем в качестве собственных функций – цилиндрические функции. В качестве второго примера рассмотрим остывание прямоугольного параллелепипеда. Собственные функции записываются в виде тройного тригонометрического ряда. Запишем диффузионное уравнение цепной реакции. Используя это уравнение, опишем процесс эволюции нейтронов в активной среде, представляющей собой шар, если начальное распределение нейтронов в этом шаре задано сферически симметричной функцией. Проведем анализ полученного решения. Рассмотрим задачу экологического прогнозирования, в основе математической модели которой лежит уравнение диффузии в движущейся среде.

Цель лекции: Продемонстрировать примеры решения задач, остывания тел правильной формы на конкретных примерах.

Ключевые вопросы: 1) Записать математическую модель процесса остывания тела из однородного материала. 2) Записать математическую модель процесса остывания тела представляющего собой прямоугольный параллелепипед. 3) сформулировать задачу остывание круглого цилиндра. 3) Опишите процесс эволюции нейтронов в активной среде, представляющей собой шар, если начальное распределение нейтронов в этом шаре задано сферически симметричной функцией. 4) Поставить краевую задачу нестационарного распределения концентрации загрязняющего вещества.

При подготовке к теоретической части удобно дополнить конспект лекций материалом из учебной литературы:

1. Карчевский, М.М. Лекции по уравнениям математической физики. [Электронный ресурс] : Учебные пособия — Электрон. дан. — СПб. : Лань, 2016. — 164 с. — Режим доступа: http://e.lanbook.com/book/72982 — Загл. с экрана.

2. Миносцев, В.Б. (под ред.) Курс математики для технических высших учебных заведений. Часть 3. Дифференциальные уравнения. Уравнения математической физики. Теория оптимизации [Электронный ресурс] : учебное пособие / В.Б. Миносцев (под ред.), Е.А. Пушкарь (под ред.), Н.А. Берков [и др.]. — Электрон. дан. — СПб. : Лань, 2013. — 514 с. — Режим доступа: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=30426 — Загл. с экрана.

3. Труфанова, Т. В. Методы решения уравнений математической физики [Электронный ресурс] : учеб. пос.: доп. УМО РФ / Т. В. Труфанова, А. Г. Масловская, Е. М. Веселова ; АмГУ, ФМиИ. - Благовещенск : Изд-во Амур. гос. ун-та, 2015. - 196 с. - Б. ц. http://irbis.amursu.ru/DigitalLibrary/AmurSU_Edition/7321.pdf

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ (УКАЗАНИЯ) К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ

Практические занятия направлены на закрепление теоретического материала на практическом уровне и предусматривают реализацию аналитических методов по вариантам индивидуальных заданий. Для выполнения индивидуальных заданий необходимо освоить теоретические основы соответствующего раздела, закрепить теорию на практических занятиях и пользоваться методической литературой по данной теме. Каждое индивидуальное задание оформляется в соответствии с требованиями преподавателя и защищается на консультациях.

Перед практическим занятием разобрать материал, изложенный на лекции и выполнить самостоятельную работу, предусмотренную рабочим планом. Для этого используются: конспект лекций, соответствующие разделы печатных и электронных учебников, ответы на вопросы для самоконтроля знаний. После практического занятия самостоятельно решить рекомендованные задачи на дом и индивидуальные задания.

Если у студента возникают вопросы по выполнению индивидуальных заданий или домашних заданий, то он может обратиться к преподавателю за консультацией, которая проводится один раз в неделю в заранее установленное время. Кроме этого по выполнению домашнего задания и освоению лекционного курса, вопросы желательно задавать и на практических и на теоретических занятиях.

Студент обязан проходить промежуточный и итоговый контроль в виде защит индивидуальных и практических работ, аттестации в форме тестового контроля знаний; сдачи зачета и экзамена в предлагаемой преподавателем форме.

Практический курс предусматривает практические занятия по следующим темам (объем в часах – 2, отводимый на выполнение каждой работы).

Номера задач для аудиторных и домашних занятий из сборника: Бицадзе А.В. Сборник задач по уравнениям математической физики: учеб. пособие/ А. В. Бицадзе, Д. Ф. Калиниченко. -3-е изд. -М.: Альянс, 2007. -311 с.

4 семестр

Занятие 1-2. Дифференциальное уравнение с частными производными и его решения. Классификация уравнений с частными производными

Вопросы для подготовки: 1) Дать определение дифференциального уравнения с частными производными (УЧП). 2) Какие уравнения называются линейными, нелинейными, квазилинейными? 3) Что такое порядок уравнения, что такое число неизвестных? 4)Что называется квадратичной формой? 5) Как привести квадратичную форму к каноническому виду? 6) Когда уравнение второго порядка со многими независимыми переменными называется уравнением эллиптического, гиперболического, ультрагиперболического или параболического типов?

Практические занятия и самостоятельная работа включают в себя решение задач №1-6; 7-12; 13-24; №25-37;38-49;52-62.

Занятие 3. Приведение к каноническому виду линейных уравнений с частными производными второго порядка с двумя независимыми переменными. Приведение к каноническому виду линейных уравнений с частными производными второго порядка с тремя независимыми переменными.

Вопросы для подготовки. 1) Как составить характеристическое уравнение? 2) Какая замена переменных в гиперболическом случае? 3) Какая замена переменных в параболическом случае? 4) Какая замена переменных в эллиптическом случае? 5) Как привести уравнение к каноническому виду. 6) При помощи какой замены можно сделать дальнейшее упрощение уравнения? 7) Как привести квадратичную форму к каноническому виду, пользуясь методом Лагранжа? 8) Как составить матрицу невырожденного аффинного преобразования, приводящего исходное уравнение к каноническому виду?

Практические занятия и самостоятельная работа включают в себя решение задач №74-94; №107-120.

Занятие 4-5. Волновое уравнение. Общее решение волнового уравнения. Задача Коши для волнового уравнения

Вопросы для подготовки: 1) Приведите примеры уравнений гиперболического типа.2) Записать уравнение малых поперечных колебаний струны. 3) Записать уравнение свободных колебаний струны.4) Какой физический закон использовали для вывода уравнения колебания? 5) Записать задачу с начальными условиями для свободных колебаний бесконечной струны. 6) Записать формулу Даламбера решения задачи Коши для волнового уравнения. 7) Дать физическую интерпретацию каждого слагаемого в этой формуле. 8) Записать решение задачи Коши для неоднородного уравнения.9) Что такое прямая и обратная волна?

Практические занятия и самостоятельная работа включают в себя решение задач № 131;135;359;363;369; №384-396.

Занятие 6. Решение уравнений гиперболического типа на полуограниченной прямой. Задача Коши для волнового уравнения с двумя и тремя пространственными переменными.

Вопросы для подготовки: 1) Записать задачу о распространении волн на полуограниченной прямой. 2) Сформулировать лемму о свойствах решений уравнения колебаний, если начальные данные являются нечетными функциями. 3) Сформулировать лемму о свойствах решений уравнения колебаний, если начальные данные являются четными функциями.

Практические занятия и самостоятельная работа включают в себя решение задач: №371-380;420-428; №445-4484 453-454.

Занятие 7-8. Смешанная задача для уравнения гиперболического типа. Метод разделения переменных - метод Фурье для однородного уравнения с однородными граничными условиями

Вопросы для подготовки: 1) Сформулировать задачу Штурма-Лиувилля. 2) В каком виде Фурье представил решение уравнения свободных колебаний струны? 3) Какое движение струны называется стоячей волной? 4) Чему равна собственная частота колебаний струны? 5)В чем заключается принцип суперпозиции? Имеет ли он место для нелинейных уравнений?

Практические занятия и самостоятельная работа включают в себя решение задач №642-653.

Занятие 9- 10. Неоднородная смешанная задача для уравнения гиперболического типа с однородными и неоднородными граничными условиями

Вопросы для подготовки: 1) В чем заключается метод решения неоднородной смешанной задачи? 2) Какие неоднородности называются стационарными? 3) В каком виде ищем решение неоднородного уравнения? 4) Как обнулить граничные условия?

Практические занятия и самостоятельная работа включают в себя решение задач №654-658;659-660; 664-669; 670-674.

Занятие 11-13. Постановка задачи для уравнения теплопроводности. Метод разделения переменных. Однородная краевая задача.

Вопросы для подготовки: 1) Дайте физическое толкование различным типам граничных условий. 2)Что называется решением первой краевой задачи? 3) Сформулировать основные краевые задачи для процесса теплопроводности. 6) В чем заключается принцип максимального значения? 7) Сформулировать первую краевую задачу для уравнения теплопроводности. 8) Сформулировать основную вспомогательную задачу в методе разделения переменных. 9) Записать выражение для функции температурного влияния мгновенного точечного источника тепла.

Практические занятия и самостоятельная работа включают в себя решение задач №142-146; № 686;687-693.

Занятие 14-15. Неоднородное уравнение теплопроводности с однородными граничными условиями. Уравнение теплопроводности с неоднородными граничными условиями.

Вопросы для подготовки: 1) Как найти решение неоднородного уравнения теплопроводности с ненулевым начальным условием и однородными граничными условиями? 2) Как найти решение неоднородного уравнения теплопроводности с ненулевым начальным условием и неоднородными граничными условиями?

Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач №694-697;702; №698-701; 703-704.

Занятие 16-17.Задача Коши для однородного уравнения теплопроводности. Задача Коши для неоднородного уравнения теплопроводности.

Вопросы для подготовки: 1) Дайте физическое толкование функции мгновенного источника. 2) Сформулировать задачу Коши для уравнения теплопроводности. 3) Записать фундаментальное решение уравнения теплопроводности. 4) Докажите, что интеграл Пуассона представляет собой ограниченное решение уравнения теплопроводности на бесконечной прямой.

Практические занятия и самостоятельная работа включают в себя решение задач №574;577;581-584. №585-599.

Занятие 18. Контрольная работа

3 курс, 5 семестр

Занятие 1. Решение смешанной задачи для неоднородного уравнения теплопроводности с неоднородными граничными условиями. Решение краевых задач для уравнения теплопроводности в пространственных областях.

Занятие 2. Основные свойства гармонических функций. Постановка задач для уравнения Лапласа и Пуассона. Задача Дирихле и Неймана

Вопросы для подготовки: 1) Записать необходимые и достаточные условия аналитичности функции условия Коши- Римана. 2) Какие функции называются гармоническими? 3) Сформулировать основные свойства гармонических функций. 4) Записать частные решения уравнения Лапласа, обладающие сферической симметрией. 5) Записать частные решения уравнения Лапласа, обладающие цилиндрической симметрией.6) какие решения называются фундаментальными? 7) Сформулировать внутреннюю задачу Дирихле. 8) Сформулировать внутреннюю задачу Неймана. 9) Сформулировать внешнюю задачу Дирихле. 10) Сформулировать внешнюю задачу Неймана. 10) Сформулировать теорему единственности для первой краевой задачи.

Практические занятия и самостоятельная работа включают в себя решение задач №168-171; №188-190; №191-194; 196-205.

Занятие 3-4. Задачи на собственные значения и собственные функции оператора Лапласа. Решение краевых задач для уравнения Лапласа методом разделения переменных.

Решение уравнения Лапласа в круге и вне круга. Для кольца, кругового сектора найти гармонические функции. Решение уравнения Лапласа в прямоугольнике.

Вопросы для подготовки: 1) Как решить уравнение Лапласа в прямоугольнике? 2) Каким методом решить уравнение Лапласа вне круга? 3) Решение уравнения Лапласа в круговом секторе.

Практические занятия и самостоятельная работа включают в себя решение задач №717-722.

Занятие 5. Специальные функции. Асимптотическое разложение. Полиномы Лежандра.

Вопросы для подготовки: 1) Записать уравнение Бесселя n-го порядка. 2) Какие функции являются решениями уравнения Бесселя? 3) Записать уравнение Чебышева. 3) Какие функции называются функциями Чебышева?

Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач №723; 725;726;730;769; 771:778;779.

Занятие 6. Нелинейные уравнения волновых процессов. Уравнение Кортевега – де Фриза.

Вопросы для подготовки:

1) Построить математическую модель поперечных колебаний однородной прямоугольной мембраны с жестко закрепленными краями для заданных начальных условий.
2) Построить математическую модель поперечных колебаний однородной круглой мембраны с жестко закрепленными краями для заданных начальных условий.
3) Построить математическую модель поперечных колебаний однородной круглой мембраны с упруго закрепленными краями для заданных начальных условий.
4) Записать уравнение Кортевега – де Фриза.

Практические занятия и самостоятельная работа включают в себя решение задач №684-686; 769-776.

Занятие7-8.Краевые задачи остывания нагретых тел.

Вопросы для подготовки: 1) Построить математическую модель распределения температуры в прямоугольнике с заданной начальной температурой и с граничными условиями различных типов. 2) Построить математическую модель распределение температуры в круге. 3) Записать

Бесселеву функцию для любого индекса. 4) Построить математическую модель распределение температуры в прямоугольнике. 5) Составить математическую модель распределения тепла в бесконечном однородном круглом цилиндре с заданной начальной температурой и с теплоизолированной поверхностью.

Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач: №705-706; 708-710; № 712; 713-715; 777(а),б),в) ; 710; 778-780.

Занятие 9. Контрольная работа

3. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

Самостоятельная работа – проявляется в узнавании, осмыслении, запоминании, подведении известного метода решения под новую задачу.

К самостоятельной работе помимо подготовки к лекционным и практическим занятиям относится выполнение индивидуальных заданий. Для выполнения индивидуальных заданий необходимо освоить теоретические основы соответствующего раздела, закрепить теорию на практических занятиях и пользоваться методической литературой по данной теме. Каждое индивидуальное задание оформляется в соответствии с требованиями преподавателя и защищается на консультациях.

Требования к защите индивидуальных заданий

При защите расчетно-графических работ студент должен уметь:

- четко сформулировать поставленную задачу (что дано, что требуется найти);
- объяснить каким методом пользовался при решении задачи (сформулировать его, указать основные свойства, область применимости);
- знать основные используемые формулы и определения;
- рассказать последовательность решения задачи (общий план и особенности варианта);
- объяснить полученный результат (если требуется провести его анализ);
- отвечать на дополнительные вопросы по теме индивидуальных заданий;
- отстаивать свою точку зрения при объяснении.

Индивидуальные задания выполняются по всем разделам дисциплины. Варианты заданий берутся из методического пособия:

Самостоятельная работа – проявляется в узнавании, осмыслении, запоминании, подведении известного метода решения под новую задачу.

К самостоятельной работе помимо подготовки к лекционным и практическим занятиям относится выполнение индивидуальных заданий. Для выполнения индивидуальных заданий необходимо освоить теоретические основы соответствующего раздела, закрепить теорию на практических занятиях и пользоваться методической литературой по данной теме. Каждое индивидуальное задание оформляется в соответствии с требованиями преподавателя и защищается на консультациях.

Требования к защите индивидуальных заданий

При защите расчетно-графических работ студент должен уметь:

- четко сформулировать поставленную задачу (что дано, что требуется найти);
- объяснить каким методом пользовался при решении задачи (сформулировать его, указать основные свойства, область применимости);
- знать основные используемые формулы и определения;
- рассказать последовательность решения задачи (общий план и особенности варианта);
- объяснить полученный результат (если требуется провести его анализ);
- отвечать на дополнительные вопросы по теме индивидуальных заданий ;
- отстаивать свою точку зрения при объяснении.

Индивидуальные задания выполняются по всем разделам дисциплины. Варианты заданий берутся из методических пособий:

1. Труфанова Т.В. Уравнения математической физики: учеб. пособие /Т.В. Труфанова, Е.М. Веселова; АмГУ, ФМ и И.- Благовещенск: Изд-во Амур. гос. ун-та, 2010.-112 с.

2.Труфанова, Т. В. Методы решения уравнений математической физики [Элек-тронный ресурс] : учеб. пос.: доп. УМО РФ / Т. В. Труфанова, А. Г. Масловская, Е. М. Ве-селова ; АмГУ, ФМиИ. - Благовещенск: Изд-во Амур. гос. ун-та, 2015. - 196 с. - Б. ц. http://irbis.amursu.ru/DigitalLibrary/AmurSU_Edition/7321.pdf

1. Пример выполнения индивидуального задания по теме «Уравнения гиперболического типа»

1. Найти решение неоднородной смешанной задачи:

$$u_{tt} + 2u_t = u_{xx} + 4x + 8e^t \cos x, \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2},$$

$$u_x|_{x=0} = 2t, \qquad u|_{x=\frac{\pi}{2}} = \pi t,$$

$$u|_{t=0} = \cos x, \qquad u_t|_{t=0} = 2x.$$

Решение. Подберем функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую граничным условиям (см. *е*), 1.4), можно взять $u(x,t) = 2xt$. Решение исходной задачи ищем в виде: $u(x,t) = v(x,t) + 2xt$. Тогда функция $v(x,t)$ удовлетворяет уравнению $v_{tt} + 2v_t = v_{xx} + 8e^t \cos x$, однородным граничным условиям и начальным условиям:

$$v_x|_{x=0} = 0, \qquad v|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0,$$

$$v|_{t=0} = \cos x, \qquad v_t|_{t=0} = 0.$$

Далее будем искать $v(x,t)$ в виде: $v(x,t) = W(x,t) + \widetilde{W}(x,t)$, где W и $\widetilde{W}$ являются решениями задач:

а) $\widetilde{W}_{tt} + 2\widetilde{W}_t = W_{xx}$; $\widetilde{W}_x|_{x=0} = \widetilde{W}|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0$, $\widetilde{W}|_{t=0} = \cos x$, $\widetilde{W}_t|_{t=0} = 0$.

б) $W_{tt} + 2W_t = W_{xx} + 8e^t \cos x$; $W_x|_{x=0} = W|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0$, $W|_{t=0} = W_t|_{t=0} = 0$.

Задачу а) решаем методом разделения переменных. Полагая:

$\widetilde{W}(x,t) = T(t) \cdot X(x)$, получим $T''X + 2T'X = TX'$, отсюда

$$\frac{T'' + 2T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2.$$

Приходим к следующей задаче Штурма-Лиувилля:

$X'' + \lambda^2 X = 0$, $\quad X'(0) = X\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ имеет собственные значения

$\lambda_k^2 = (2k+1)^2 \quad (k = 0,1,2,\ldots)$ и собственные функции

$X_k(x) = \cos(2k+1)x$. Решая уравнение: $T_k'' + 2T_k' + (2k+1)^2 T_k = 0$,

получим $T_0 = \mathrm{A}_0 e^{-t} + \mathrm{B}_0 t e^{-t}$, $T_k = \mathrm{A}_k e^{-t} \cos 2\sqrt{k^2+k} \cdot t + \mathrm{B}_k e^{-t} \sin 2\sqrt{k^2+k} \cdot t$, $(\mathrm{k} = 0,1,2,3,\ldots)$. Решение $\widetilde{W}(x,t)$ имеет вид:

$$\widetilde{W}(x,t) = (\mathrm{A}_0 + \mathrm{B}_0 t)e^{-t} \cos x + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\mathrm{A}_k \cos 2\sqrt{k^2+k} \cdot t + \mathrm{B}_k \sin 2\sqrt{k^2+k} \cdot t \right) *$$

$$* \, e^{-t} \cos(2k+1)x .$$

Из начальных условий найдем коэффициенты A_0, B_0, A_k, B_k

$$\widetilde{W}(x,0) = \cos x = A_0 \cos x + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(2k+1)x \Rightarrow A_0 = 1, A_k = 0, \quad k = 1,2,\ldots$$

$$W_t(x,0) = 0 = (-A_0 + B_0)\cos x + \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{B}_k 2\sqrt{k^2+k} \cdot \cos(2k+1)x$$

отсюда следует, что $B_0 = 1$, $B_k = 0$, $(k = 1,2,3,\ldots)$. Решение задачи а) будет:

$\widetilde{W}(x,t) = (1+t)e^{-t} \cos x$. Решение задачи б) ищем в виде:

$W(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t) \cos(2k+1)x$. Подставляя в уравнение, получим:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[T_k'' + 2T_k + (2k+1)^2 T_k \right] \cos(2k+1)x = 8e^t \cos x .$$

Отсюда $T_0'' + 2T_0' + T_0 = 8e^t$; $\quad T_k'' + 2T_k' + (2k+1)^2 T_k = 0$, $\quad (k = 1,2,\ldots)$.

Кроме того, из начальных условий для $W(x,t)$ имеем:

$T_k(0) = T_k'(0) = 0$, $\quad (k = 0,1,2,\ldots)$. Решая задачу Коши, найдем:

$T_0 = -2e^{-t} - 4te^{-t} + 2e^t$; $T_k \equiv 0$, $\quad (k = 1,2,\ldots)$. Таким образом,

$W(x,t) = \left(-2e^{-t} - 4te^{-t} + 2e^t\right)\cos x$, $W + \widetilde{W} = \left(-e^{-t} - 3te^{-t} + 2e^t\right)\cos x$

и решение исходной смешанной задачи запишется в виде:

$$u = \left(2e^t - e^{-t} - 3te^{-t}\right)\cos x + 2xt .$$

2. Найти решение уравнения:

$$u_{tt} = 4u_{xx} + 5(u-2) + (1+x)\left(7 - 5t^2\right) - (t+8)\sin 2t \cdot \sin \frac{3}{2}x,$$

удовлетворяющее условиям:

$$u\big|_{x=0} = t^2 + 1 \; u_x\big|_{x=\pi} = t^2 - 1 \qquad 0 < t < \infty$$

$$u\big|_{t=0} = \sin\frac{3}{2}x + 1 - x \quad u_t\big|_{t=0} = 0 \qquad\qquad 0 < x < \pi$$

Решение. Подберем функцию $U(x,t)$, удовлетворяющую граничным условиям (см. *б*)) $U(x,t) = t^2 + 1 + x(t^2 - 1)$. Решение исходной задачи ищем в виде: $u(x,t) = v(x,t) + t^2 + 1 + x(t^2 - 1)$. Вычислим:

$$u_t = v_t + 2t + 2xt, \qquad\qquad u_x = v_x + t^2 - 1,$$

$$u_{tt} = v_{tt} + 2 + 2x, \qquad\qquad u_{xx} = v_{xx}.$$

Тогда функция $v(x,t)$ удовлетворяет уравнению:

$v_{tt} = 4v_{xx} + 5v - (t+8)\sin 2t \cdot \sin\frac{3}{2}x$, однородным граничным:

$v\big|_{x=0} = 0$, $\qquad v_x\big|_{x=\pi} = 0$ и начальным условиям:

$$v\big|_{t=0} = \sin\frac{3}{2}x \qquad\qquad v_t\big|_{t=0} = 0$$

Далее будем искать $v(x,t)$ в виде: $v(x,t) = W(x,t) + \widetilde{W}(x,t)$, где $\widetilde{W}$ и W являются соответственно решениями задач:

а) $\quad \widetilde{W}_{tt} = 4\widetilde{W}_{xx} + 5\widetilde{W}$,

$$\widetilde{W}\big|_{x=0} = 0, \qquad\qquad \widetilde{W}_x\big|_{x=\pi} = 0,$$

$$\widetilde{W}\big|_{t=0} = \sin\frac{3}{2}x, \qquad \widetilde{W}_t\big|_{t=0} = 0.$$

б) $\quad W_{tt} = 4W_{xx} + 5W - (t+8)\sin 2t \cdot \sin\frac{3}{2}x$

$$W\big|_{x=0} = 0, \qquad\qquad W_x\big|_{x=\pi} = 0,$$

$$\mathrm{W}\big|_{\mathrm{t}=0} = 0, \qquad\qquad \mathrm{W_t}\big|_{\mathrm{t}=0} = 0.$$

Применяем метод разделения переменных для решения задачи *а*)

$\widetilde{W}(x,t) = X(x)\cdot T(t)$, получаем: $\dfrac{T'' - 5T}{4T} = \dfrac{X''}{X} = -\lambda^2$. Решаем задачу Штурма-Лиувилля: $X'' + \lambda^2 X = 0$, $\qquad X(0) = X'(\pi) = 0$, получаем:

$$X = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x, \quad X'(x) = -\lambda A\sin\lambda x + \lambda B\cos\lambda x,$$

отсюда: $A = 0$, $\qquad \cos\lambda\pi = 0$, $\lambda_k = k - \dfrac{1}{2}$, $X_k(x) = \sin\left(k - \dfrac{1}{2}\right)x$, $\qquad k = 1,2\ldots.$

Решая уравнение $T'' + \left(4\lambda_k^2 - 5\right)T = 0$ или $T'' + 4\left(k^2 - k - 1\right)T = 0$,

получим:при $k = 1$ $T_1(t) = C_1 e^{2t} + D_1 e^{-2t}$,при $k = 2,3\ldots$ $T_k = C_k \cos\tilde{\lambda}_k t + Д_k \sin\tilde{\lambda}_k t$,где $\tilde{\lambda}_k = 2\sqrt{k^2 - k - 1}$.

Решение $\widetilde{W}(x,t)$ имеет вид:

$$\widetilde{W}(x,t) = C_1 e^{2t} + D_1 e^{-2t} + \sum_{k=3}^{\infty}\left(C_k \cos\tilde{\lambda}_k t + D_k \sin\tilde{\lambda}_k t\right)\sin\left(k - \frac{1}{2}\right)x,$$

используя начальные условия, получим:

$C_1 = 0$, $D_1 = 0$, $C_2 = 1$, $D_2 = 0$. Итак,

$\widetilde{W}(x,t) = \cos 2t \cdot \sin\frac{3}{2}x$. Решение задачи *б*) ищем в виде:

$$W(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)\sin\lambda_k x, \qquad \lambda_k = k - \frac{1}{2}.$$

Подставляя предполагаемую форму решения в уравнение, получаем:

$\sum_{л=1}^{\infty}\left(T_k'' + \left(4\lambda_k^2 - 5\right)T_k\right)\sin\lambda_k x = -(t+8)\sin 2t \cdot \sin\frac{3}{2}x$, отсюда следует, что

$T_k(t) \equiv 0$ при $k = 1,3,4\ldots$,а при $k = 2$ $T_2'' + 4T_2 = -(t+8)\sin 2t$.

Решая это уравнение, получаем с учетом начальных значений:

$$T_2(t) = -\sin 2t + \frac{t}{16}\left[2(t+16)\cos 2t - \sin 2t\right]$$

Итак,

$$W(x,t) = T_2 \cdot \sin\frac{3}{2}x = -\sin 2t \cdot \sin\frac{3}{2}x + \frac{t}{16}\left[2(t+16)\cos 2t - \sin 2t\right]\sin\frac{3}{2}x.$$

Решение исходной задачи: $u(x,t) = U(x,t) + \widetilde{W}(x,t) + W(x,t)$ имеет вид:

$$u(x,t) = \frac{1}{16}\left[2\left(t^2 + 16t + 8\right)\cos 2t - (t+16)\sin 2t\right]\sin\frac{3}{2}x + t^2 + 1 + x\left(t^2 - 1\right).$$

2. Пример выполнения индивидуального задания по теме «Уравнения теплопроводности»

Решить смешанную задачу для неоднородного уравнения теплопроводности

$$u_t = u_{xx} + x(t^2 + 1),\ 0 < x < 1,\ t > 0,$$

$$u_x\big|_{x=0} = t,\ u\big|_{x=1} = t,\ u\big|_{t=0} = 0.$$

<u>Решение.</u> Подберем функцию $U(x,t)$, удовлетворяющую граничным условиям:

$U(x,t) = xt$.

Поэтому, если искать решение в виде $u = v + xt$, то для функции v получим следующую задачу:

$$v_t = v_{xx} + xt^2,$$

$$v_x\big|_{x=0} = v\big|_{x=1} = 0,$$

$$v\big|_{t=0} = 0.$$

Применяя метод разделения переменных для решения однородного уравнения, $v_t - v_{xx} = 0$, положим $v(x,t)=X(x)\cdot T(t)$.

Получим задачу Штурма-Лиувилля

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \qquad X'(0) = 0, \quad X(1) = 0,$$

из решения которой найдем систему собственных значений и собственных функций:

$$\lambda_k = \frac{(2k+1)\pi}{2}, \qquad X_k(x) = \cos\lambda_k x.$$

Решение задачи ищем в виде

$$v(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t)\cos\lambda_k x$$

Разложим функцию x в ряд Фурье по системе функций $\lambda_k = \dfrac{(2k+1)\pi}{2}, \qquad X_k(x) = \cos\lambda_k x.$

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} D_k \cos\lambda_k x,$$

$$D_k = 2\int_0^1 x\cos\frac{(2k+1)\pi x}{2}\,dx = \frac{4}{\pi(2k+1)} - x\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2}\bigg|_0^1 - \frac{4}{\pi(2k+1)} *$$

$$* \int_0^1 \sin\frac{(2k+1)\pi x}{2}\,dx = \frac{4(-1)^k}{\pi(2k+1)} - \frac{8}{\pi^2(2k+1)^2}.$$

Подставляя в исходное уравнение, получим

$T_k' + \lambda_k^2 T_k = D_k t^2$ и начальное условие $T_k(0) = 0$.

Решение этой задачи будет $T_k = A_k e^{-\lambda_k^2 t} + \widetilde{T}_k$.

Здесь $\widetilde{T}_k$ – частное решение неоднородного уравнения, его можно искать в виде $\widetilde{T}_k = b_k t^2 + c_k t + d_k$; найдя b_k, c_k, d_k, получим

$\widetilde{T}_k(t) = A_k e^{a^2\lambda_k^2 t} + \dfrac{D_k}{\lambda_k^2}(t^2 - \dfrac{2t}{\lambda_k^2} + \dfrac{2}{\lambda_k^4})$. А из начального условия следует, что

$A_k = -\dfrac{2D_k}{\lambda_k^6}$. Следовательно, $T_k = \dfrac{D_k}{\lambda_k^2}(t^2 - \dfrac{2t}{\lambda_k^2} + \dfrac{2}{\lambda_k^4}(e^{-\lambda_k^2 t} - 1))$.

Решение исходной задачи имеет вид

$$u(x,t) = tx + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D_k}{\lambda_k^2}(t^2 - \frac{2t}{\lambda_k^2} + \frac{2t}{\lambda_k^4}(e^{-\lambda_k^2 t} - 1))\cos\lambda_k x,$$

где $\lambda_k = \dfrac{\pi(2k+1)}{2}$, $D_k = \dfrac{4}{\pi(2k+1)}\left((-1)^k - \dfrac{2}{\pi(2k+1)}\right)$.

2. Найти решение смешанной неоднородной задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u = xt(2-t) + 2\cos t, 0 < x < \pi,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = t^2, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=\pi} = t^2; \qquad u(x,0) = \cos 2x.$$

<u>Решение.</u> Подберем функцию $U(x,t)$, удовлетворяющую граничным условиям (см. п. 1.4, случай *д*)

$$U(x,t) = t^2 \cdot x + \frac{t^2 - t^2}{2}x^2 = t^2 \cdot x.$$

Поэтому, если искать решение в виде $u = v + t^2 \cdot x$, то для функции v получим следующую задачу:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - v = 2\cos t,$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=\pi} = 0; \qquad v(x,0) = \cos 2x.$$

Решение ищем в виде:

$$v = \widetilde{W} + W,$$

где

$$\frac{\partial \widetilde{W}}{\partial t} - \frac{\partial^2 \widetilde{W}}{\partial x^2} - \widetilde{W} = 0,$$

$$\left.\frac{\partial \widetilde{W}}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial \widetilde{W}}{\partial x}\right|_{x=\pi} = 0, \qquad \widetilde{W}(x,0) = \cos 2x.$$

$$\frac{\partial W}{\partial t}-\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}-W=2\cos t,$$

$$\left.\frac{\partial W}{\partial x}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial W}{\partial x}\right|_{x=\pi}=0, \qquad W(x,0)=0.$$

Для построения функции $\widetilde{W}(x,t)$ применим метод Фурье:

$$\widetilde{W}(x,t)=T(t)\cdot X(x).$$

Подставляя в уравнение $\widetilde{W}(x,t)$ и в граничные условия, получим:

$$T'X-TX''-TX=0, \qquad \frac{T'}{T}-1=\frac{X''}{X}=-\lambda^2;$$

$T'+\left(\lambda^2-1\right)T=0$. Отсюда $T=e^{-\left(\lambda^2-1\right)t}$.

Задача Штурма-Лиувилля: $\left.\begin{array}{l} X''+\lambda^2 X=0 \\ X'(0)=X'(\pi)=0 \end{array}\right\}$.

Отсюда $X_k(x)=\cos kx$, $\lambda_{\mathrm{k}}^2=\mathrm{k}^2$, $\left(k^2=0,1,2,\ldots\right)$.

Применяя принцип суперпозиции, запишем $\widetilde{W}(x,t)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}A_k e^{-\left(k^2-1\right)t}\cos kx$. Удовлетворим начальному условию $\widetilde{W}(x,0)=\cos 2x=\sum\limits_{k=0}^{\infty}A_k\cos kx$.

Отсюда $A_2=1$, $\quad A_k=0$, $\quad (k=0,1,3,4,\ldots)$, $\widetilde{W}(x,t)=e^{-3t}\cos 2x$.

Решение $W(x,t)$ ищем в виде ряда по собственным функциям соответствующей однородной задачи:

$$W(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}T_k(t)\cos kx, T_k(0)=0.$$

Подставляя $W(x,t)$ в уравнение, получим:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[T_k't'+\left(k^2-1\right)T_k\right]\cos kx=2\cos t, T_k(0)=0.$$

Разлагая правую часть в ряд Фурье

$2\cos t=\sum\limits_{k=0}^{\infty}f_k(t)\cos kx$, получим: $f_0(t)=2\cos t$, $\quad f_k(t)\equiv 0, (k=1,2,3,\ldots)$.

Задачу для T_k можем записать в виде:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[T_k'+\left(k^2-1\right)T_k-f_k(t)\right]\cos kx=0, \qquad T_k(0)=0.$$

Отсюда $T_0' - T_0 - 2\cos t = 0$, $\qquad T_0(0) = 0$.

Решая, получим:

$T_0(t) = e^t + \sin t - \cos t$;

$T_k' - T_k = 0$, $\qquad T_k(0) = 0$.

Отсюда $T_k(t) = 0 \qquad (k = 1,2,\ldots)$

Таким образом, имеем: $W(x,t) = \left(e^t + \sin t - \cos t\right)\cos(0x)$.

Подставляя в выражение $u(x,t) = v(x,t) + t^2 x$ значение

$v(x,t) = \widetilde{W}(x,t) + W(x,t)$,

получим решение исходной неоднородной задачи:

$u(x,t) = e^{-3t}\cos 2x + \left(e^t + \sin t - \cos t\right)\cdot 1 + t^2 x$.

3. Пример выполнения индивидуального задания по теме: «Уравнений эллиптического типа».

1. Найти функцию, гармоническую в кольце $1 < r < 2$ и такую, что

$u|_{r=1} = 2,\ u|_{r=2} = \sin 2\varphi$.

<u>Решение.</u> Как было показано выше, решение задачи можно искать в виде ряда

$$u(r,\varphi) = a_0 \ln r + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n r^n + \frac{c_n}{r^n}\right)\cos n\varphi + \sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n r^n + \frac{d_n}{r^n}\right)\sin n\varphi .$$

Используя граничные условия, получаем следующие соотношения для нахождения неизвестных коэффициентов

$$2 = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + c_n)\cos n\varphi + \sum_{n=1}^{\infty}(b_n + d_n)\sin n\varphi,$$

$$\sin 2\varphi = a_0 \ln 2 + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n 2^n + \frac{c_n}{2^n}\right)\cos n\varphi + \sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n 2^n + \frac{d_n}{2^n}\right)\sin n\varphi.$$

Интегрируя первое и второе уравнения по φ от 0 до 2π, получим следующую систему для определения коэффициентов a_0 и b_0

$$\begin{cases} 2 = b_0, \\ 0 = a_0 \ln 2 + b_0, \end{cases} \quad \text{откуда } a_0 = -\frac{2}{\ln 2}, \quad b_0 = 2.$$

Для определения коэффициентов a_n, c_n, b_n, d_n будем последовательно домножать уравнения на $\cos m\varphi$, $\quad m = 1,2,\ldots$ или на $\sin m\varphi$, $\quad m = 1,2,\ldots$ и интегрировать от 0 до 2π. Легко

заметить, что невырожденная система получится только для коэффициентов b_2, d_2, остальные коэффициенты $a_n = c_n = 0, b_n = d_n = 0\ (n \neq 2)$. А для b_2 и d_2 система будет иметь вид:

$$\begin{cases} 0 = b_2 + d_2, \\ 1 = 4b_2 + \dfrac{d_2}{4} \end{cases}.$$

Откуда находим $b_2 = \dfrac{4}{15}, d_2 = -\dfrac{4}{15}$. А общее решение задачи имеет вид:

$$u(r,\varphi) = 2\left(1 - \frac{\ln r}{\ln 2}\right) + \frac{4}{15}\left(r^2 - \frac{1}{r^2}\right)\sin 2\varphi.$$

2. Найти функцию, гармоническую внутри круга радиуса R с центром в начале координат такую, что: $u(R,\varphi) = \varphi(2\pi - \varphi)$.

Решение. Решение будем искать в виде (1.114):

$$u(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \left(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right), \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

Используя граничные условия, найдем A_n и B_n.

$$\varphi(2\pi - \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} R^n \left(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right).$$

Отсюда:

$$\frac{A_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(2\pi - \varphi)d\varphi = \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{2\pi} 2\pi\varphi\, d\varphi - \int_0^{2\pi} \varphi^2 d\varphi\right] = \frac{1}{2\pi}\left[\pi\varphi^2\Big|_0^{2\pi} - \frac{\varphi^3}{3}\Big|_0^{2\pi}\right],$$

или

$$\frac{A_0}{2} = \frac{2\pi^2}{3}, \qquad B_0 = 0.$$ Найдем A_n, $n = 1,2,\ldots$

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(2\pi - \varphi)\cos n\varphi d\varphi = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{2\pi} 2\pi\varphi \cos n\varphi d\varphi - \int_0^{2\pi} \varphi^2 \cos n\varphi d\varphi\right].$$

Вычисляя эти интегралы по частям, находим, что

$$\int_0^{2\pi} \varphi \cos n\varphi d\varphi = 0, \int_0^{2\pi} \varphi^2 \cos n\varphi d\varphi = \frac{4\pi}{n^2}.$$

Таким образом, $A_n = -\dfrac{4}{n^2}$, $B_n = 0$.Решение имеет вид:

$$U(r,\varphi) = \frac{2\pi^2}{3} - 4\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}\left(\frac{r}{R}\right)^n \cdot \cos\varphi$$

3. Решение уравнения Лапласа в прямоугольнике

Найти в прямоугольнике D:

$$0 < x < a$$

$$0 < y < b$$

решение уравнения Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$\begin{array}{lll} u(0,y) = \varphi_0(y), & \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=a} = \varphi_1(y), & (0 \le y \le b) \\ u(x,0) = \psi_0(x), & \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=b} = \psi_1(x), & (0 \le x \le a) \end{array},$$

причем $\varphi_0(0) = \psi_0(0)$.

<u>Решение.</u> Решение задачи будем искать в виде $u = v + W$. Потребуем, чтобы функция v удовлетворяла условиям:

а) $\Delta v = 0, \qquad v(x,0) = 0, \qquad \left.\dfrac{\partial v}{\partial y}\right|_{y=b} = 0;$

$$v(0,y) = \varphi_0(y), \qquad \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=a} = \varphi_1(y).$$

Тогда для W получаем:

б) $\Delta W = 0, \qquad W(0,y) = 0, \qquad \left.\dfrac{\partial \mathrm{W}}{\partial \mathrm{x}}\right|_{\mathrm{x=a}} = 0;$

$$W(x,0) = \psi_0(x), \qquad \left.\frac{\partial W}{\partial y}\right|_{y=b} = \psi_1(x).$$

Решаем задачу, *а*) методом Фурье. Полагаем:

$$v = X(x) \cdot Y(y),$$

получаем

$$X''Y + XY'' = 0. \qquad X(x) \cdot Y(0) = X(x) \cdot Y'(b) = 0.$$

Разделяя переменные, получим

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \lambda^2.$$

Таким образом, приходим к задаче Штурма-Лиувилля (независимая переменная $y \in [0,b]$).

$$\left.\begin{aligned} &Y'' + \lambda^2 Y = 0 \\ &Y(0) = Y'(b) = 0 \end{aligned}\right\},$$

отсюда находим:

$$\lambda_k = \frac{(2k+1)\pi}{2b} \qquad (k = 0,1,2,\ldots)$$

$$Y_k(y) = \frac{\sin(2k+1)\pi}{2b} y,$$

и к уравнению

$$X'' - \lambda_k^2 X = 0,$$

отсюда

$$X_k(x) = A_k ch \frac{(2k+1)\pi x}{2b} + B_k sh \frac{(2k+1)\pi x}{2b}.$$

Воспользуемся принципом суперпозиции, запишем решение задачи *а*):

$$v(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(x) Y_k(y) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(A_k \operatorname{ch} \frac{(2k+1)\pi x}{2b} + B_k \operatorname{sh} \frac{(2k+1)\pi x}{2b} \right) \sin \frac{(2k+1)\pi y}{2b}.$$

Потребуем, чтобы эта функция удовлетворяла условиям

$$v(0,y) = \varphi_0(y) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \sin \frac{(2k+1)\pi y}{2b},$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=a} = \varphi_1(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(A_k \operatorname{sh} \frac{(2k+1)\pi a}{2b} + B_k \operatorname{ch} \frac{(2k+1)\pi a}{2b} \right) \cdot$$

$$\cdot \frac{(2k+1)\pi}{2b} \sin \frac{(2k+1)\pi y}{2b}.$$

Рассмотрим полученные равенства как разложение функций $\varphi_0(y)$ и $\varphi_1(y)$ в ряд по собственным функциям краевой задачи, это разложение будет иметь вид:

$$A_k = \frac{2}{b} \int_0^b \varphi_0(y) \sin \frac{(2k+1)\pi y}{2b} dy,$$

$$\left(A_k \operatorname{sh} \frac{(2k+1)\pi a}{2b} + B_k \operatorname{ch} \frac{(2k+1)\pi a}{2b} \right) \frac{(2k+1)\pi}{2b} = \frac{2}{b} \int_0^b \varphi_1(y) \sin \frac{(2k+1)\pi y}{2b} dy.$$

Вычислив A_k и B_k, подставив их значения в ряд для $v(x,y)$ и приведя подобные члены, получим решение задачи *а*):

$$v(x,y)=\frac{2}{b}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\operatorname{ch}\frac{(2k+1)\pi(x-a)}{2b}\int_0^b\varphi_0(y)\sin\frac{(2k+1)\pi y}{2b}dy+\right.$$

$$\left.+\frac{2b}{(2k+1)\pi}\operatorname{sh}\frac{(2k+1)\pi x}{2b}\int_0^b\varphi_1(y)\sin\frac{(2k+1)\pi y}{2b}dy\right)\frac{\sin\frac{(2k+1)\pi y}{2b}}{\operatorname{ch}\frac{(2k+1)\pi a}{2b}}.$$

Теперь решим задачу *б*). Ее отличие от задачи *а*) состоит в том, что независимой переменной задачи Штурма-Лиувилля будет $x\in[0,a]$, а дополнительные условия будут по переменной y. Отсюда заключаем, что решение $W(x,y)$ задачи *б*) может быть получено из решения $v(x,y)$ задачи *а*) путем замены *x* на *y*, а на b, а $\varphi_0(y)$ и $\varphi_1(y)$ на $\psi_0(x)$ и $\psi_1(x)$:

$$W(x,y)=\frac{2}{a}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\operatorname{ch}\frac{(2k+1)\pi}{2a}\int_0^a\psi_0(x)\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2a}dx+\right.$$

$$\left.+\frac{2a}{(2k+1)\pi}\operatorname{sh}\frac{(2k+1)\pi y}{2a}\int_0^a\psi_1(x)\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2a}dx\right)\frac{\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2a}}{\operatorname{sh}\frac{(2k+1)\pi b}{2a}}.$$

Подставляя в равенство $u=v+W$ выражения *v* и W, получим решение исходной задачи.

Заключение.

При изучении дисциплины «Линейные и нелинейные уравнения физики» студент приобретает практические навыки построения математических моделей простейших физических явлений и аналитического решения получающихся при этом математических задач. После изучения дисциплины студент должен свободно ориентироваться в основных разделах дисциплины, что включает: дифференциальные уравнения в частных производных гиперболического, параболического и эллиптического типов. Должен уметь подобрать соответствующий метод решения уравнений в частных производных. Уметь: решать линейные и нелинейные уравнения физики различных типов, формулировать и доказывать теоремы, применять методы математической физики для решения задач. Уметь применять уравнения на практике для исследования различных физических явлений.

В результате освоения данной дисциплины выпускник формирует и демонстрирует следующие профессиональные компетенции:

-способностью использовать базовые знания естественных наук, математики и информатики, основные факты, концепции, принципы теорий, связанных с прикладной математикой и информатикой ;

-способностью понимать, совершенствовать и применять современный математический аппарат.

В результате освоения данной дисциплины студент должен овладеть: способностью использовать в профессиональной деятельности знания и методы, полученные при изучении математических и естественнонаучных дисциплин.