Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное образовательное учреждение
высшего образования
Амурский государственный университет
(ФГБОУ ВО «АмГУ)

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Сборник учебно-методических материалов

Для направления подготовки 01.03.02 – Прикладная математика и информатика
Квалификация выпускника: бакалавр

Благовещенск, 2017

Печатается по решению
редакционно-издательского совета
факультета математики и информатики
Амурского государственного университета

Составитель: Труфанова Т.В.
Дифференциальные уравнения: сборник учебно-методических материалов для направления подготовки 01.03.02 – Прикладная математика и информатика. – Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2017.- 84 с.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

При изучении явлений природы, решении многих задач физики и техники, химии и биологии, других наук не всегда удается найти прямую зависимость между величинами, описывающими тот или иной эволюционный процесс. Однако в большинстве случаев можно установить связь между искомыми характеристиками изучаемого явления (функциями) и скоростями их изменения относительно других переменных, т.е. найти уравнения, в которые входят производные неизвестных функций. Такие уравнения называют дифференциальными. Если неизвестная функция зависит от одной переменной, дифференциальное уравнение называется обыкновенным, если от двух или большего числа переменных – уравнением в частных производных.

Целью изучения преподавания учебной дисциплины дифференциальные уравнения является показать, что такое обыкновенные дифференциальные уравнения, где и как они возникают, какие физические явления могут быть описаны с помощью обыкновенных дифференциальных уравнений. Задачи изучения дисциплины: научить студентов решать дифференциальные уравнения различных порядков и системы дифференциальных уравнений. Изучить основные методы решения дифференциальных уравнений. Изучить вопрос о влиянии применения начальных данных на решение систем дифференциальных уравнений.

При изучении дисциплины студент приобретает практические навыки решения и исследования дифференциальных уравнений. Должен уметь подобрать соответствующий метод решения дифференциальных уравнений. Уметь применять дифференциальные уравнения на практике для исследования различных физических явлений.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА

Дифференциальные уравнения первого порядка

Лекции 1-2. Введение. Теория дифференциальных, уравнений и ее приложения. Место теории дифференциальных уравнений среди математических дисциплин и ее приложения. Основные понятия и определения теории дифференциальных уравнений. Изоклины.

Цель лекции. Ввести студентов в дисциплину «Дифференциальные уравнения», обозначить структуру курса, содержание практического и лекционного материала по основным разделам, предусмотренным Государственным образовательным стандартом, озвучить междисциплинарные связи, правила организации аудиторной и самостоятельной работы студентов, дать методические рекомендации по изучению дисциплины, указать список основной и дополнительной литературы, рекомендуемой студентам, ознакомить студентов с формами текущего и итогового контроля по дисциплине. Дать основные понятия и определения.

План лекции.

При изучении физических явлений часто не удается непосредственно найти закон, связывающий независимые переменные и искомую функцию, но можно установить связь между этой функцией и ее производными или дифференциалами.

Определение 1.Уравнения, в которых неизвестная функция или вектор-функция входит под знаком производной или дифференциала, называются дифференциальными уравнениями. Примеры.

Нахождение неизвестных функций, определяемых дифференциальными уравнениями, и является основной задачей теории дифференциальных уравнений.

Определение 2. Если в дифференциальном уравнении неизвестные функции или вектор-функции являются функциями одной переменной, то дифференциальное уравнение называется обыкновенным.

Определение 3. Если неизвестная функция, входящая в дифференциальное уравнение, является функцией двух или большего числа независимых переменных, то дифференциальное уравнение называется уравнением в частных производных.

Определение 4. Порядком дифференциального уравнения называется максимальный порядок входящей в уравнение производной (или дифференциала) неизвестной функции.

Определение 5. Решением дифференциального уравнения называется функция, которая при подстановке в дифференциальное уравнение обращает его в тождество.

Процесс нахождения решений дифференциального уравнения называется интегрированием дифференциального уравнения. Примеры.

Понятия общего и частного решения уравнения с начальными или граничными условиями.

Точное или приближенное решение задач с начальными условиями и граничных задач является основной задачей теории дифференциальных уравнений, однако иногда требуется выяснить или приходится ограничиваться выяснением лишь некоторых свойств решений.

Дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной, устанавливает зависимость между координатами точки и угловым коэффициентом касательной к графику решения в той же точке. Следовательно, дифференциальное уравнение рассматриваемого вида определяет поле направлений, и задача интегрирования дифференциального уравнения заключается в том, чтобы найти кривые, называемые интегральными кривыми, направление касательных к которым в каждой точке совпадает с направлением поля.

Ключевые вопросы:1) Дать определение обыкновенного дифференциального уравнения. 2) Дать определение дифференциального уравнения с частными производными (УЧП). 3) Какие уравнения называются линейными, нелинейными. 4) Что такое порядок уравнения, что такое число неизвестных? 5) Что называется решением дифференциального уравнения? 6) Сформулировать задачу с начальными условиями.7) Привести примеры дифференциальных уравнений. 8) Записать дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной.9) Что называется изоклинами?

Сделать дополнения в своем конспекте лекций, обращаясь к рекомендуемой литературе [1].

Лекции 3-4. Дифференциальные уравнения 1-го порядка разрешенные относительно производной. Задача Коши, интегральные кривые. Уравнения, с разделяющимися переменными. Уравнения, приводящиеся, к уравнениям с разделяющимися переменными.

Цель лекции. Выделить класс уравнений с разделяющимися переменными и уравнений, сводящихся к уравнениям с разделяющимися переменными. Объяснить методы решения таких уравнений.

План лекции.

Определение1. Дифференциальное уравнение вида $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$,называется уравнением первого порядка разрешённым относительно производной.

В дальнейшем будет доказано, что при некоторых ограничениях налагаемых на функцию $f(x,y)$, уравнение $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ имеет единственное решение, удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$, а его общее решение, т.е. множество решений, содержащее все без исключения решения, зависят от одной произвольной постоянной.

Дифференциальное уравнение $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ устанавливает зависимость между координатами точки и угловым коэффициентом касательной $\frac{dy}{dx}$ к графику решения в той же точке. Зная x и y, можно вычислить $\frac{dy}{dx}$. Следовательно, дифференциальное уравнение рассматриваемого вида определяет поле направлений (рис. 1.1) и задача интегрирования дифференциального уравнения заключается в том, чтобы найти кривые, называемые интегральными кривыми, направление касательных к которым в каждой точке совпадает с направлением поля.

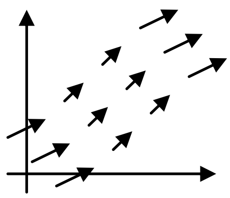


Рис. 1.

Для построения поля направлений найдем геометрическое место точек, в которых касательные к искомым интегральным кривым сохраняют постоянное направление. Такие линии называются изоклинами. Примеры.

2.1. Уравнения с разделяющимися переменными

Определение1. Дифференциальные уравнения вида

$$f_2(y)dy = f_1(x)dx$$

называется уравнениями с разделенными переменными. Функции $f_1(x)$ и $f_2(y)$ будем считать непрерывными. Примеры.

Определение 2. Уравнения вида $\varphi_1(x)\psi_1(y)dx = \varphi_2(x)\psi_2(y)dy$, в которых коэффициенты при дифференциалах распадаются на множители, зависящие только от x и только от y, называются дифференциальными уравнениями с разделяющимися переменными, т. к. путем деления на $\psi_1(y)\varphi_2(x)$ они приводятся к уравнению с разделенными переменными $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}dx = \frac{\psi_2(y)}{\psi_1(y)}dy$.

Замечание. Деление на $\psi_1(y)\varphi_2(x)$ может привести к потере частных решений, обращающих в нуль произведение $\psi_1(y)\varphi_2(x)$, а если функции $\psi_1(y),\varphi_2(x)$ могут быть разрывными, то возможно появление лишних решений. Примеры.

2.2 Уравнения, приводящиеся к уравнениям с разделяющимися переменными

I. К числу таких уравнений относятся уравнения вида

$$\frac{dy}{dx} = f(ax+by),$$

где a и b постоянные величины, которые заменой переменных $z = ax+by$ преобразуется в уравнение с разделяющими переменными. Доказательство. Примеры.

II. К уравнениям с разделяющимися переменными приводятся и так называемые однородные дифференциальные уравнения первого порядка, имеющие вид $\frac{dy}{dx} = f(\frac{y}{x})$.

Действительно, после подстановки $z = \frac{y}{x}$, или $y = zx$ получим

$$\frac{dz}{f(z)-z} = \frac{dx}{x},\ \int\frac{dz}{f(z)-z} = \ln|x| + \ln c,\ x = ce^{\int\frac{dz}{f(z)-z}}.$$

Заметим, что правая часть однородного уравнения является функцией переменных x и y нулевой степени однородности, поэтому уравнение вида $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ будет однородным, если $M(x,y)$ и $N(x,y)$ являются однородными функциями x и y одинаковой степени однородности, т. к. в этом случае $\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)} = f(\frac{y}{x})$.Примеры.

III. Уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = f(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2})$$

преобразуется в однородные уравнения путем переноса начала координат в точку пересечения (x_1,y_1) прямых

$$a_1x+b_1y+c_1=0 \text{ и } a_2x+b_2y+c_2=0.$$

Действительно, свободный член в уравнениях этих прямых в новых координатах $X = x-x_1$, $Y = y-y_1$ будет равен нулю, коэффициенты при текущих координатах остаются неизменными, а $\frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dX}$, и уравнение преобразуется к виду $\frac{dY}{dX} = f(\frac{a_1X+b_1Y}{a_2X+b_2Y})$ или

$\frac{dY}{dX} = f(\frac{a_1+b_1\frac{Y}{X}}{a_2+b_2\frac{Y}{X}}) = \varphi(\frac{Y}{X})$ и является уже однородным уравнением.

Этот метод нельзя применить лишь в случае параллельности прямых $a_1x+b_1y+c_1=0$ и $a_2x+b_2y+c_2=0$. Но в этом случае коэффициенты при текущих координатах пропорциональны $\frac{a_2}{a_1}=\frac{b_2}{b_1}=k$ и уравнение может быть записано в виде $\frac{dy}{dx}=f(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{k(a_1x+b_1y)+c_2})=F(a_1x+b_1y)$, и пользуясь заменой $z=a_1x+b_1y$ преобразуют рассматриваемое уравнение в уравнение с разделяющимися переменными. Примеры.

Ключевые вопросы:1) Какие уравнения называются уравнениями, с разделяющимися переменными? 2) Как интегрируются уравнения с разделяющимися переменными? 3) Перечислить три вида уравнений, сводящихся к уравнениям с разделяющимися переменными. 4) При помощи каких замен они сводятся к уравнениям с разделяющимися переменными? 5) Какие уравнения называются однородными?

Лекция 5. Линейные уравнения первого порядка. Уравнения Бернулли, Риккати.

Цель лекции. Ввести понятие линейного уравнения первого порядка и дать методы решения этого уравнения. Ввести некоторые классы уравнений, сводящихся к линейным уравнениям.

План лекции.

3.1 Линейные уравнения первого порядка

Определение 1. Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение линейное относительно неизвестной функции и ее производной. Линейное уравнение имеет вид

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=f(x)$$

где $p(x)$ и $f(x)$ в дальнейшем будем считать непрерывными функциями x в области интегрирования уравнения.

Если $f(x)\equiv 0$, то уравнение называется линейным однородным. В линейном однородном уравнении переменные разделяются.

Для интегрирования неоднородного линейного уравнения

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=f(x)$$

может быть применен метод вариации постоянной. При применении этого метода сначала интегрируется соответствующее (т.е. имеющее ту же левую часть) однородное уравнение общее решение, которого имеет вид $y=ce^{-\int p(x)dx}$.

При $c=const$ функция $ce^{-\int p(x)dx}$ является решением однородного уравнения. Потребуем удовлетворить неоднородному уравнению, считая c функцией x, т.е. совершаем замену переменных $y=c(x)e^{-\int p(x)dx}$, где $c(x)$ – новая неизвестная функция x.

Вычисляя производную

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dc}{dx}e^{-\int p(x)dx}-c(x)p(x)e^{-\int p(x)dx}$$

и подставляя в исходное неоднородное уравнение , получаем

$$\frac{dc}{dx}e^{-\int p(x)dx}-c(x)p(x)e^{-\int p(x)dx}+p(x)c(x)e^{-\int p(x)dx}=f(x)$$

или

$$\frac{dc}{dx} = f(x)e^{\int p(x)dx}$$

откуда, интегрируя, находим

$$c(x) = \int f(x)e^{\int p(x)dx}dx + c_1,$$

а, следовательно

$$y = c(x)e^{-\int p(x)dx} = c_1e^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx}\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx.$$

Итак, общее решение неоднородного линейного уравнения равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения

$$c_1e^{-\int p(x)dx}$$

и частного решения неоднородного уравнения

$$e^{-\int p(x)dx}\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx.$$

Примеры.

3.2. Уравнение Бернулли и Риккати

Многие дифференциальные уравнения путем замены переменных могут быть сведены к линейным. Например, уравнение Бернулли, имеющее вид

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x)y^n,\ n \neq 1,$$

заменой переменных $y^{1-n} = z$ сводится к линейному уравнению. Доказательство. Примеры.

Уравнение $\frac{dy}{dx} + p(x)y + q(x)y^2 = f(x)$, называется уравнением Риккати, в общем виде не интегрируется в квадратурах, но может быть заменой переменных преобразовано в уравнение Бернулли, если известно одно частное решение $y_1(x)$ этого уравнения. Действительно, полагая $y = y_1 + z$, получим

$$y_1' + z' + p(x)(y_1 + z) + q(x)(y_1 + z)^2 = f(x)$$

или, т. к. $y_1' + p(x)y_1 + q(x)y_1^2 \equiv f(x)$, будем иметь уравнение Бернулли

$z' + [p(x) + 2q(x)y_1]z + q(x)z^2 = 0$. Примеры.

Ключевые вопросы: 1) Какое уравнение называется линейным дифференциальным уравнением первого порядка? 2) Какое уравнение называется однородным, а какое неоднородным? 3) Методы решения линейного уравнения первого порядка. 4) В чем заключается идея метода Лагранжа? 5) Уравнение Бернулли и замена, сводящая это уравнение к линейному. 6) Уравнение Риккати и замена, сводящая это уравнение к уравнению Бернулли.

Лекция 6. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель.
Метод Эйлера приближенного интегрирования Д.У. (ломаные Эйлера). Теорема существования и единственности решения уравнения. Ломаные Эйлера. Существование и единственность решения. Особые точки.

Цель лекции. Познакомить студентов с уравнением в полных дифференциалах и методами решения этого уравнения. Научить сводить некоторые дифференциальные уравнения при помощи интегрирующего множителя к уравнениям в полных дифференциалах. В виде теоремы сформулировать условия, которые гарантируют существование и единственность решения дифференциального уравнения первого порядка.

План лекции.

4.1. Уравнения в полных дифференциалах

Для того, чтобы левая часть дифференциального уравнения

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

является полным дифференциалом некоторой функции $u(x,y)$:

$$du(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy$$

и, следовательно, уравнение принимает вид

$$du(x,y) = 0,$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \equiv \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}.$$

Если это условие, впервые указанное Эйлером, выполнено, то уравнение легко интегрируется. Изложим два метода.

I. Действительно, $du = Mdx + Ndy$. С другой стороны, $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$. Следовательно, $\frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y)$; $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y)$, откуда $u(x,y) = \int M(x,y)dx + c(y)$.

При вычислении интеграла $\int M(x,y)dx$ величина y рассматривается как постоянная, поэтому $c(y)$ является произвольной функцией y. Для определения функции $c(y)$ дифференцируем найденную функцию $u(x,y)$ по y и, т. к. $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y)$, получаем $\frac{\partial}{\partial y}(\int M(x,y)dx) + c'(y) = N(x,y)$.

Из этого уравнения определяем $c'(y)$ и, интегрируя, находим $c(y)$.

II. Можно определить функцию $u(x,y)$ по ее полному дифференциалу $du = M(x,y)dx + N(x,y)dy$, взяв криволинейный интеграл от $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ между некоторой фиксированной точкой (x_0, y_0) и точкой с переменными координатами (x,y) по любому пути

$$u(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} M(x,y)dx + N(x,y)dy.$$

Чаще всего в качестве пути интегрирования удобно брать ломаную, составленную из двух звеньев, параллельных осям координат в этом случае

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Mdx + Ndy = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y_0)} Mdx + \int_{(x,y_0)}^{(x,y)} Ndy$$

или

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Mdx + Ndy = \int_{(x_0,y_0)}^{(x_0,y)} Ndy + \int_{(x_0,y)}^{(x,y)} Mdx.$$

4.2 Интегрирующий множитель

В некоторых случаях, когда левая часть уравнения

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

не является полным дифференциалом, легко удается подобрать функцию $\mu(x,y)$, после умножения, на которую левая часть уравнения превращается в полный дифференциал

$$du = \mu M dx + \mu N dy$$

Такая функция μ называется интегрирующим множителем. Заметим, что умножение на интегрирующий множитель $\mu(x,y)$ может привести к появлению лишних частных решений, обращающих этот множитель в ноль.

В общем случае для нахождения интегрирующего множителя надо подобрать хотя бы одно не равное тождественно нулю частное решение уравнения в частных производных $\frac{\partial \mu M}{\partial y} = \frac{\partial \mu N}{\partial x}$

или в развернутом виде $\frac{\partial \mu}{\partial y} M + \mu \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x} N + \frac{\partial N}{\partial x}\mu$, которое после деления на μ и переноса некоторых членов в другую часть равенства приводится к виду

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} M - \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} N = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}.$$

Например, найдем условия, при которых уравнение $Mdx + Ndy = 0$ имеет интегрирующий множитель, зависящий только от x, $\mu = \mu(x)$. При этом уравнение упрощается и приобретает вид

$$-\frac{d \ln \mu}{dx} N = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$$

откуда, считая $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}$ непрерывной функцией x, получим

$$\ln \mu = \int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} dx + \ln c$$

$$\mu = c e^{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} dx}$$

Можно считать $c = 1$, т. к. достаточно иметь лишь один интегрирующий множитель.

Если $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}$ является функцией только x, то интегрирующий множитель, зависящий лишь от x существует и равен $\mu = c e^{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} dx}$, в противном случае интегрирующий множитель $\mu(x)$ не существует. Примеры.

Лекция 7. Теорема существования и единственности решения уравнения $y' = f(x,y)$

Класс интегрирующихся в квадратуре дифференциальных уравнений весьма узок, поэтому приближенные методы в теории дифференциальных уравнений приобрели большое значение. Даже в тех случаях, когда уравнение интегрируется в квадратурах часто целесообразно применять приближенные методы. При этом надо быть уверенным в существовании искомого решения, а также и в единственности решения, т.к. при отсутствии единственности неясно, какое именно решение требуется приближенно определить.

Чаще всего доказательство теоремы существования решения одновременно дает и метод точного или приближенного нахождения решения. Например, доказываемая ниже теорема дает обоснование метода Эйлера приближенного интегрирования дифференциальных уравнений, который заключается в том, что искомая интегральная кривая дифференциального уравнения $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$, проходящая через точку $\left(x_0,y_0\right)$, заменяется ломаной, состоящей из прямоугольных отрезков, каждое звено которой касается интегральной кривой в одной из своих граничных точек. При применении этого метода приближенного вычисления значения искомого решения $y(x)$ в точке $x=b$, отрезок $x_0\le x\le x_1$ (если $b>x_0$) делиться на n равных частей точками $x_0,x_1,...,x_n$, где $x_n=b$. Длина каждой части $x_{i+1}-x_i=h$ называется шагом вычисления. Приближенные значения искомого решения в точках x_i обозначается y_i.

Для вычисления y_1 заменяем на отрезке $x_0\le x\le x_1$ искомую интегральную кривую отрезком ее касательной в точке $\left(x_0,y_0\right)$. Следовательно, $y_1=y_0+hy_0'$, где $y_0'=f(x_0,y_0)$.

Аналогично вычисляем:

$y_2=y_1+hy_1'$, где $y_1'=f(x_1,y_1)$;

$y_3=y_2+hy_2'$, где $y_2'=f(x_2,y_2)$;

…………………………………

$y_n=y_{n-1}+hy_{n-1}'$, где $y_n=y_{n-1}+hy_{n-1}'$.

Если $b<x_0$, то схема вычисления остается прежней, но шаг h отрицателен.

При $h\to 0$ ломанная Эйлера приближается к искомой интегральной кривой, т.е с уменьшением шага h метод Эйлера дает все более точное значение искомого решения в точке b.

Доказательство этого утверждения приводит к следующей фундаментальной теореме о существовании и единственности решения уравнения $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ с начальными условиями $y(x_0)=y_0$ при общих достаточных условиях, наложенных на функцию $f(x,y)$.

Теорема 1 (о существовании и единственности решения).

Если в уравнении $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$

функция $f(x,y)$:

1) непрерывна в прямоугольнике $D:\begin{matrix}x_0-a\le x\le x_0+a\\ y_0-b\le y\le y_0+b\end{matrix}$;

2) удовлетворяет в D условию Липшица: $\left|f\left(x,y_1\right)-f\left(x,y_2\right)\right|\le N\left|y_1-y_2\right|$, где N – постоянная, то существует единственное решение $y=\overline{y}(x)$, $x_0-H\le x\le x_0+H$, уравнения $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$, удовлетворяющее условию $y(x_0)=y_0$, где

$H<\min\left(a,\frac{b}{M},\frac{1}{N}\right)$ в D.

$M=\max f(x,y)$

Условие Липшица $|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le N|y_1-y_2|$ может быть заменено более грубым, но зато обычно легко проверяемым условием существования ограниченности по модулю частей производной $f'_y(x,y)$ в области D.

Действительно, если в прямоугольнике D $|f'_y(x,y)|\le N$, то, пользуясь теоремой о конечном приращении получим $|f(x,y_1)-f(x,y_2)|=f'_y(x,\xi)|y_1-y_2|$, где ξ - промежуточное между y_1 и y_2 значение. Следовательно, точка (x,ξ) лежит в D, поэтому $|f'_y(x,\xi)|\le N$ и $|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le N|y_1-y_2|$.

Доказательство теоремы существовании и единственности.

4.4. Особые точки

Рассмотрим теперь точки (x_0,y_0), в окрестности которых решения уравнения $\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)$, удовлетворяющего условию $y(x_0)=y_0$, не существует или решение существует, но не единственно. Такие точки называются особыми точками.

Кривая, состоящая сплошь из особых точек называется особой. Если график некоторого решения сплошь состоит из особых точек, то решение называется особым.

Для нахождения особых точек или особых кривых надо прежде всего найти множество точек, в которых нарушены условия теоремы существовании и единственности решения, т.к. только среди таких точек могут быть особые (но не каждая точка, т.к. условия достаточны, но не являются необходимыми).

Первое условие теоремы существовании и единственности решения нарушается в точке разрыва функции $f(x,y)$, причем, если при приближении по любому пути к некоторой изолированной точке разрыва (x_0,y_0) функции $f(x,y)$ неограниченно возрастает по модулю, то в тех задачах, в которых переменные x и y равноправны, т.е. $\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)$ должно быть заменено уравнением $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{f(x,y)}$, для которого правая часть уже непрерывна в точке (x_0,y_0), если считать $\dfrac{1}{f(x_0,y_0)}\to 0$.

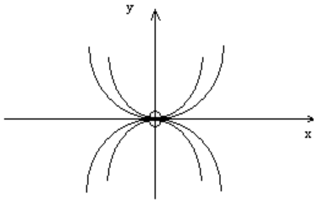
Следовательно, в задачах, в которых x и y равноправны, первое условие теоремы существовании и единственности нарушается в тех точках, в которых функции $f(x,y)$ и $\dfrac{1}{f(x,y)}$ разрывны.

Часто рассматривают уравнения вида

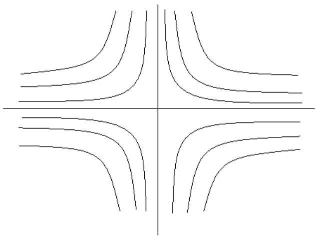
$$\frac{dy}{dx}=\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$$

где $M(x,y)$ и $N(x,y)$ непрерывны. В этом случае функции $\dfrac{M(x,y)}{N(x,y)}$, и $\dfrac{N(x,y)}{M(x,y)}$ будут одновременно разрывны лишь в тех точках (x_0,y_0), в которых $M(x_0,y_0)=N(x_0,y_0)=0$ и не существует пределов $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\dfrac{M(x,y)}{N(x,y)}$, и $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\dfrac{N(x,y)}{M(x,y)}$.

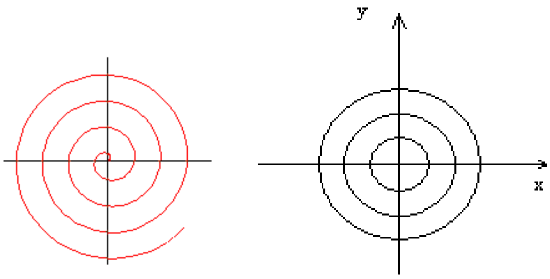
Пример 1. $\frac{dy}{dx}=\frac{2y}{x}$ и $\frac{dx}{dy}=\frac{2y}{x}$ разрывны при $x=0, y=0$. Интегрируя, получим $y=cx^2$ - семейство парабол и $x=0$ в начале координат особая точка, называется узлом $y=cx^2$.



Пример 2. $\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$; $\frac{dx}{dy}=-y$, разрыв в точке $x=0, y=0$. Интегрируя, получаем $y=\frac{c}{x}$ - семейство гипербол и прямая $x=0$ в начале координат особая точка, называется седлом.



Пример 3. $\frac{dy}{dx}=\frac{y+x}{x-y}$ и $\frac{dx}{dy}=\frac{x-y}{x+y}$ при $x=0, y=0$ - разрыв. Интегрируя получаем $\sqrt{x^2+y^2}=c\cdot e^{arctg\frac{y}{x}}$, или в полярных координатах $\rho=c\cdot e^{\varphi}$ - логарифмическая спираль. Особая точка такого типа называется фокусом.



Пример 4. $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$ и $\frac{dx}{dy}=-\frac{y}{x}$. Разрыв в точке $x=0, y=0$, интегрируя получим $x^2+y^2=c^2$ - семейство окружностей. Особая точка называется центром. В этом примере не существует решения, удовлетворяющего условию $y(0)=0$.

<u>Ключевые вопросы</u>:1) Какие уравнения называются уравнения в полных дифференциалах? 2) Записать необходимые и достаточные условия Эйлера. 3) Как проинтегрировать уравнения в полных дифференциалах? 4) Что называется интегрирующим множителем? 5) Записать формулу для нахождения интегрирующего множителя, зависящего от x. 6) Записать формулу для нахождения интегрирующего множителя, зависящего от y. 7) На чем основан метод Эйлера приближенного решения дифференциального уравнения, разрешенного относительно производной? 8) Сформулировать теорему существования и единственности решения уравнения 9) Основные этапы доказательства теорему существования и единственности решения.

Лекции 8-9. Дифференциальные уравнения первого порядка неразрешенные относительно производной. Простейшие типы уравнений, неразрешенных относительно производной.

Цель лекции. Ознакомить студентов с методами интегрирования дифференциальных уравнений 1-го порядка не разрешенных относительно производной. Продемонстрировать на конкретных примерах интегрирование дифференциальных уравнений с помощью дифференцирования

План лекции.

Дифференциальное уравнение первого порядка, неразрешенное относительно производной, имеет вид

$F(x, y, y') = 0$.

Если это уравнение удается разрешить относительно y', то получим одно или нескольких уравнений $y' = f_i(x, y)$, ($i = 1,2,\ldots$).

Интегрируя эти уравнения, найдем решение исходного уравнения.

Пример: $(y')^2 - (x + y)y' + xy = 0$

Разрешая относительно y', получим: $y' = x$ и $y' = y$. Проинтегрируем каждое:

$$y = \frac{x}{2} + c,$$

$$y = c \cdot e^x.$$

Оба семейства решений удовлетворяют исходному уравнению.

Итак, уравнение $F(x, y, y') = 0$ может быть проинтегрировано путем разрешения относительно y' и интеграции полученных при этом уравнений $y' = f_i(x, y)$, ($i = 1,2,\ldots$). Однако не всегда это уравнение разрешается относительно y' и еще реже полученные после разрешения относительно y' уравнения $y' = f_i(x, y)$ легко интегрируются, поэтому часто приходиться интегрировать уравнения вида $F(x, y, y') = 0$ иными методами.

Рассмотрим следующие частные случаи:

1. Уравнение имеет вид $F(y') = 0$.

Причем существует, по крайней мере, один действительный корень $y' = k_i$ этого уравнения. Т.к. уравнение $F(y') = 0$ не содержит x и y, то k_i - постоянное. Интегрируя уравнения $y' = k_i$ получим: $y = k_i x + c$, или $k_i = \frac{y - c}{x}$, но k_i является корнем исходного уравнения, следовательно $F\left(\frac{y - c}{x}\right) = 0$ является интегралом рассматриваемого уравнения.

Пример 1. $(y')^7 - (y')^5 + y' + 3 = 0$.

Интеграл уравнения: $\left(\frac{y - c}{x}\right)^7 + \left(\frac{y - c}{x}\right)^5 + \left(\frac{y - c}{x}\right) + 3 = 0$.

2. Уравнение имеет вид $F(x, y') = 0$.

Если это уравнение трудно разрешить относительно y', то целесообразно ввести параметр t и заменить это уравнение двумя уравнениями: $x = \varphi(t)$ и $y' = \psi(t)$. Т.к. $dy = y'dx$, то в данном случаи $dy = \psi(t)\varphi'(t)dt$, откуда $y = \int \psi(t)\varphi'(t)dt + c$ и, следовательно, интегральные кривые уравнения определяются в параметрической форме следующими уравнениями:

$x=\varphi(t)$

$y=\int\psi(t)\varphi'(t)dt+c$.

Если исходное уравнение легко разрешить относительно x, $x=\varphi(y')$, то почти всегда удобно в качестве параметра ввести $y'=t$. Тогда $x=\varphi(t)$, $dy=y'dx=t\cdot\varphi'(t)dt$, $y=\int t\varphi'(t)dt+c$.

Пример 2. $x=(y')^3-y'-1$.

Положим $y'=t$, тогда

$x=t^3-t-1$,

$dy=y'dx=t(3t^2-1)dt$,

$y=\dfrac{3t^4}{4}-\dfrac{t^2}{2}+c_1$.

Уравнения $x=t^3-t-1$и $y=\dfrac{3t^4}{4}-\dfrac{t^2}{2}+c_1$.определяют в параметрической форме семейство искомых интегральных кривых.

Пример 3. $x\sqrt{1+y'^2}=y'$.

Пологая $y'=tgt$, $-\dfrac{\pi}{2}<t<\dfrac{\pi}{2}$, тогда

$x=\sin t$,

$dy=y'dx=tgt\cdot\cos tdt=\sin tdt$,

$y=-\cos t+c_1$.

или исключая t из уравнений и получим $x^2+(y-c_1)^2=1$ - семейство окружностей.

3. Уравнение имеет вид $F(y,y')=0$.

Если это уравнение трудно разрешить относительно y', то, как и в предыдущем случаи, вводим параметр t и заменяем уравнение (11) двумя уравнениями $y=\varphi(t)$ и $y'=\psi(t)$. Т.к. $dy=y'dx$, то $dx=\dfrac{dy}{y'}=\dfrac{\varphi'(t)dt}{\psi(t)}$, откуда $x=\int\dfrac{\varphi'(t)dt}{\psi(t)}+c$.

Следовательно, искомая интегральная кривая определяется в параметрической форме следующими уравнениями: $x=\int\dfrac{\varphi'(t)dt}{\psi(t)}+c$ и $y=\varphi(t)$.

В частности, если уравнение (11) легко разрешимо относительно y, то обычно за параметр удобно взять y', то пологая

Действительно, если $y=\varphi(y')$, то полагая $y'=t$, получим $y=\varphi(t)$, $dx=\dfrac{dy}{y'}=\dfrac{\varphi'(t)dt}{t}$, $x=\int\dfrac{\varphi'(t)dt}{t}+c$.

Пример 4. $y=(y')^5+(y')^3+y'+5$.

Пологая $y'=t$ получим

$y=t^5+t^3+t+5$,

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{(5t^4 + 3t^2 + 1)dt}{t} = \left(5t^3 + 3t + \frac{1}{t}\right)dt$$

$$x = \frac{5}{4}t^4 + \frac{3}{2}t^2 + \ln|t| + c\,.$$

Пример 5. $\frac{y}{\sqrt{1 + y'^2}} = 1\,.$

Полагаем $y' = sht$, тогда

$$y = cht\,,$$

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{shtdt}{sht} = dt\,,$$

$x = t + c$. Исключая из (14) параметр t, получаем $y = ch(x - c)$.

Рассмотрим теперь общий случай: левая часть уравнения

$$F(x, y, y') = 0$$

зависит от всех трех аргументов x, y и y'.

Заменим уравнение его параметрическим представлением: $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, $y' = \chi(u, v)$. Пользуясь зависимостью $dy = y'dx$, будем иметь $\frac{\partial\psi}{\partial u}du + \frac{\partial\psi}{\partial v}dv = \chi(u, v)\left[\frac{\partial\varphi}{\partial u}du + \frac{\partial\varphi}{\partial v}dv\right]$, откуда разрешая относительно производной $\frac{dv}{du}$, получим

$$\frac{dv}{du} = \frac{\chi(u, v)\frac{\partial\varphi}{\partial u} - \frac{\partial\psi}{\partial u}}{\frac{\partial\psi}{\partial v} - \chi(u, v)\frac{\partial\varphi}{\partial v}}.$$

В результате получено уравнение первого порядка, уже разрешимое относительно производной, и тем самым задача сведена к уже рассмотренной в предыдущих параграфах, конечно уравнение не всегда будет интегрироваться в квадратурах.

Если уравнение $F(x, y, y') = 0$ легко разрешимо относительно y, то за параметры u и v часто удобно брать x и y'.

Действительно, если это уравнение приводиться к виду

$$y = f(x, y')$$

то, считая x и $y' = p$ - параметрами, получим $y = f(x, p)$, $dy = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial p}dp$ или

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx}\,,$$

$$p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx}.$$

Интегрируя последнее уравнение (если это возможно в квадратурах) получим $\phi(x, p, c) = 0$ и $y = f(x, p)$, где p – параметр, определяют семейство интегральных кривых.

Заметим, что это уравнение можно получить дифференцируя исходное по x. Действительно, дифференцируя $y = f(x, y')$ и пологая $y' = p$ получим

$$p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx}.$$

Поэтому этот метод часто называют интегрированием дифференциальных уравнений с помощью дифференцирования.

Совершенно аналогично часто интегрируется уравнение $F(x, y, y') = 0$, если оно разрешимо относительно x.

В качестве примеров рассмотрим уравнения Лагранжа и Клеро.

Ключевые вопросы: 1) Дать определение дифференциальному уравнению, не разрешенному относительно производной. 2) Как проинтегрировать уравнение, если в него входит только производная от неизвестной функции? 3) Как проинтегрировать уравнение, если в него не входит искомая функция? 4) Как проинтегрировать уравнение, если в него не входит независимое переменное? 5) Общий метод интегрирования дифференциального уравнения, не разрешенного относительно производной. 6) Дать определение особых решений. 7) Записать уравнение Лагранжа. 8) Метод интегрирования уравнение Лагранжа.9) Записать уравнение Клеро.10) Метод интегрирования уравнения Клеро.

Раздел 2. Дифференциальные уравнения n- порядка

Лекция 10-11. Дифференциальные уравнения любого порядка. Простейшие случаи понижения порядка. Теорема существования и единственности для дифференциального уравнения n-го порядка. Линейный дифференциальный оператор L и его свойства.

Теоремы о решениях линейного однородного уравнения

Цель лекции. Познакомить студентов с уравнениями n-го порядка и доказать теорему существования и единственности для дифференциального уравнения n-го порядка.

План лекции.

Дифференциальное уравнение n-го порядка имеет вид

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0,$$

где x – независимая переменная, y – искомая функция, а функция F определена и непрерывна в некоторой области $G \subseteq \mathbf{R}^{n+2} (n \geq 1)$.

Дифференциальное уравнение n-го порядка, разрешенное относительно старшей производной, имеет вид

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right), \tag{1}$$

где функция f также предполагается непрерывной в некоторой области $D \subseteq \mathbf{R}^{n+1}$ изменения своих аргументов.

Решением уравнения (1) на интервале $(a;b)$ называется функция $y(x)$, удовлетворяющая условиям:

1) $y(x)$ непрерывно дифференцируема n раз на $(a;b)$;
2) $\left(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)\right) \in D, \forall x \in (a,b)$;
3) $y(x)$ обращает уравнение (1) в тождество для $\forall x \in (a;b)$.

Задачей Коши для дифференциального уравнения (1) называется задача отыскания решения $y(x)$, удовлетворяющего заданным начальным условиям:

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \tag{2}$$

где $x_0 \in (a,b)$, y_0, $y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$ – заданные числа.

Существование и единственность решения задачи Коши определяется теоремой Коши – Пикара.

Теорема Коши – Пикара. Если функция f непрерывна в области D и имеет непрерывные частные производные $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, ..., \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$, то для любой точки $\left(x_0, y_0, y'_0, ... y_0^{(n-1)}\right) \in D$ существует единственное решение уравнение (1), определенное в некоторой окрестности точки $x_0 \in (a,b)$ и удовлетворяющее условиям (2).

Общим решением уравнения (1) называется такая функция $y = \varphi(x, c_1, ..., c_n)$, которая при любых допустимых значениях параметров $c_1, c_2, ..., c_n$ является решением этого дифференциального уравнения и для любой задачи Коши с условиями (2) найдутся постоянные $c_1, c_2, ..., c_n$, определяемые из системы уравнений:

$$\begin{cases} y_0 = \varphi(x_0, c_1, c_2, ..., c_n) \\ y'_0 = \varphi'(x_0, c_1, c_2, ..., c_n) \\ .... \\ y_0^{(n-1)} = \varphi^{(n-1)}(x_0, c_1, c_2, ..., c_n) \end{cases}.$$

Частным решением уравнения (1) или (2) называется любое решение, получаемое из общего решения при конкретных числовых значениях $c_1, c_2, ..., c_n$.

Аналогично вводится понятие частного интеграла.

Если $y(x)$ – решение уравнения (1), то график функции $y = y(x)$ называется интегральной кривой уравнения (1).

Геометрически общее решение (общий интеграл) представляет собой семейство интегральных кривых на плоскости, зависящих от n параметров $c_1, c_2, ..., c_n$.

Функция $\phi(x)$ называется особым решением дифференциального уравнения (1), если:

1) $\phi(x)$ обращает дифференциальное уравнение (1) в тождество;

2) для любой точки $x_0 \in (a,b)$ задача Коши с начальными условиями $y(x_0) = \phi(x_0), y'(x_0) = \phi'(x_0), ..., y^{(n-1)}(x_0) = \phi^{(n-1)}(x_0)$ имеет более одного решения.

7.2. Уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка

Ниже приводятся некоторые виды дифференциальных уравнений n-го порядка, допускающие понижение порядка.

7.2.1. Уравнения вида

$$F(x, y^{(k)}, ..., y^{(n)}) = 0, \tag{3}$$

т.е. уравнения, не содержащие явно искомой функции и ее производных до порядка k-1 включительно.

С помощью замены $y^{(k)} = p(x)$, где $p(x)$ – новая неизвестная функция, порядок уравнения понижается на k единиц: $F(x, p, p', ..., p^{(n-k)}) = 0$.

Предположим, что для полученного уравнения мы можем найти общее решение $p(x) = \varphi(x, c_1, c_2, ..., c_{n-k})$.

Следовательно, имеем промежуточный интеграл $\boldsymbol{y^{(k)} = \varphi(x, c_1, c_2, ..., c_{n-k})}$.

Общее решение уравнения (3) получается путем k-кратного интегрирования обеих частей полученного выражения.

Пример 1. Найти частное решение уравнения

$$x^4y'''+2x^3y''=1,\ y(1)=\frac{1}{2},\ y'(1)=\frac{1}{2},\ y''(1)=-1.$$

Решение. Данное уравнение не содержит y и y'. Положим $y''=p(x)$, тогда $y'''=\dfrac{dp}{dx}$ и уравнение имеет вид $x^4\dfrac{dp}{dx}+2x^3p=1$ или $\dfrac{dp}{dx}+\dfrac{2}{x}p=\dfrac{1}{x^4}$.

Это линейное уравнение первого порядка, которое решается заменой $p(x)=u(x)v(x)$, $p'=u'v+uv'$. Производя замену, получим:

$$u'v+uv'+\frac{2}{x}uv=\frac{1}{x^4},\quad v\left(u'+\frac{2u}{x}\right)+v'u=\frac{1}{x^4},$$

откуда, с учетом возможности произвольного выбора функции u(x),

$$\begin{cases}\dfrac{du}{dx}+\dfrac{2u}{x}=0\\ \dfrac{dv}{dx}u=\dfrac{1}{x^4}\end{cases}.$$

Решая первое уравнение системы, найдем функцию $u=\dfrac{1}{x^2}$, из второго уравнения – функцию $v=-\dfrac{1}{x}+c_1$. Найдем функцию $p=uv$, $p=-\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{c_1}{x^2}$.

Используя начальное условие $y''(1)=p(1)=-1$, получим $c_1=0$. Следовательно, $y''=-\dfrac{1}{x^3}$, откуда $y'=\dfrac{1}{2x^2}+c_2$. Начальное условие $y'(1)=\dfrac{1}{2}$ позволяет найти $c_2=0$. Следовательно, $y'=\dfrac{1}{2x^2}$, $y=-\dfrac{1}{2x}+c_3$. Из условия $y(1)=\dfrac{1}{2}$ следует, что $c_3=1$.

Итак, искомое частное решение есть $y=1-\dfrac{1}{2x}$.

7.2.2. Уравнения вида

$$F(y,y',...,y^{(n)})=0 \tag{4}$$

Уравнение (4) явно не содержит независимой переменной.

Подстановкой $y'=p(y)$, $y''=p\dfrac{dp}{dy}$, $y'''=p\left(\dfrac{dp}{dy}\right)^2+p^2\dfrac{d^2p}{dy^2}=pp'^2+p^2p''$ и т.д. порядок уравнения понижается на единицу.

<u>*Пример 2*</u>. Найти общее решение уравнения $y'y'''-3y''^2=0$.

Решение. Пусть $y'=p(y)$, $y''=p\dfrac{dp}{dy}$, $y'''=p\left(\dfrac{dp}{dy}\right)^2+p^2\dfrac{d^2p}{dy^2}$. Тогда уравнение преобразуется к виду $p\left(p\left(\dfrac{dp}{dy}\right)^2+p^2\dfrac{d^2p}{dy^2}\right)-3p^2\left(\dfrac{dp}{dy}\right)^2=0$.

Приведя подобные члены и сократив на p^2 (при этом следует учесть теряемое решение p=0 или y=c), получим: $p\frac{d^2p}{dy^2}-2\left(\frac{dp}{dy}\right)^2=0$, $pp''-2p'^2=0$.

Положив здесь $\frac{dp}{dy}=z$, $\frac{d^2p}{dy^2}=z\frac{dz}{dp}$, приводим уравнение к виду $pz\frac{dz}{dp}-2z^2=0$.

Сократив на z (при этом следует учесть еще одно решение $z=\frac{dp}{dy}=0$, т.е. $p=c_1$ и $y=c_1x+c_2$), получим $\frac{dz}{z}-\frac{2dp}{p}=0$, откуда $\ln|z|-\ln p^2=\ln|c_1|$, или $z=\frac{dp}{dy}=-c_1p^2$. Интегрируя последнее уравнение, находим: $-\frac{1}{p}=-c_1y-c_2$, или $\frac{dx}{dy}=c_1y+c_2$.

Общий интеграл уравнения запишется в виде $x=c_1y^2+c_2y+c_3$.

В общее решение входят потерянные ранее частные решения.

7.2.3. Уравнения вида

$$\frac{d}{dx}F(x,y,y',...,y^{(n-1)})=0, \quad (5)$$

т.е. уравнения, в которых левая часть может быть представлена как полная производная по x от некоторой функции $F(x,y,y',...,y^{(n-1)})$.

Интегрируя (5) по x, получим новое уравнение, порядок которого на единицу ниже порядка исходного уравнения. Такие уравнения называются уравнениями в точных производных.

Пример 3. Найти общее решение уравнения

$$\left(1+x^2\right)y''+2xy'=x^3.$$

Решение. Левая часть уравнения есть полная производная по x от функции $\left(1+x^2\right)y'$, а правая – от функции $\frac{x^4}{4}$, т.е. уравнение можно переписать так:

$$((1+x^2)y')'=\left(\frac{x^4}{4}\right)'$$

Отсюда интегрированием получаем $\left(1+x^2\right)y'=\frac{x^4}{4}+\frac{c_1}{4}$ или $dy=\frac{x^4+c_1}{4\left(1+x^2\right)}dx$.

Следовательно, $y=\frac{1}{12}x^3-\frac{1}{4}x+\frac{c_1}{4}\operatorname{arctg}x+c_2$ есть общее решение уравнения.

7.2.4. Уравнения вида

$$F(x,y,y',...,y^{(n)})=0$$

– однородные относительно функции и ее производных, если $F(x,\lambda y,\lambda y',...,\lambda y^{(n)})=\lambda^m F(x,y,y',...,y^{(n)})$, ($\lambda>0$, однородность порядка m).

Подстановкой $y'=yz$ порядок уравнения понижается на единицу, где $z=z(x)$ – новая неизвестная функция.

Пример 4. Найти общее решение уравнения $xyy''-xy'^2-yy'=0$.

Решение. Проверим однородность уравнения.

Пусть $$F(x,y,y',y'')=xyy''-xy'^2-yy',$$

$$F(x,\lambda y,\lambda y',\lambda y'')=x\lambda y\lambda y''-x(\lambda y')^2-\lambda y\lambda y'=\lambda^2(xyy''-xy'-yy')=$$
$$=\lambda^2F(x,y,y',y''),\quad \text{m=2}.$$

Положим $y'=yz$, тогда $y''=(yz)'=y'z+z'y=yz^2+yz'$, или $y''=y(z^2+z')$, и уравнение запишется $xy^2(z^2+z')-xy^2z^2-y^2z^2=0$.

Сокращая на y^2 (при этом теряется решение y=0), находим $xz'-z=0$ или $\frac{dz}{z}-\frac{dx}{x}=0$, $z=c_1x$. Так как $z=\frac{y'}{y}$, то $y'=c_1xy$, $\frac{dy}{y}=c_1xdx$.

Откуда $\ln|y|=\frac{c_1x^2}{2}+\ln|c_2|$ или $y=c_2e^{c_1\frac{x^2}{2}}$ – общее решение уравнения (содержит потерянное частное решение y=0, если $c_2=0$).

7.2.5. Уравнения вида

$$F(x,y,y',...,y^{(n)})=0 \tag{6}$$

обобщенно – однородные, если существуют числа k и m, такие что:

$$F(\lambda x,\lambda^k y,\lambda^{k-1}y',...,\lambda^{k-n}y^{(n)})=\lambda^m F(x,y,y',...,y^{(n)}).$$

С помощью замены $x=e^t$, $y=ze^{kt}$ (при x>0, а при x<0 полагаем $x=-e^t$), где t – новая независимая переменная, $z=z(t)$ – новая искомая функция.

Уравнение (6) приводится к уравнению, не содержащему независимой переменной t и, следовательно, допускающему понижение порядка на единицу.

Производные при замене преобразуются по формулам

$$y'=\frac{dy}{dt}e^{-t}=\left(\frac{dz}{dt}e^{kt}+kze^{kt}\right)e^{-t}=(z'+kz)e^{(k-1)t},$$

$$y''=\frac{dy'}{dt}e^{-t}=\left(\frac{d^2z}{dt^2}+(2k-1)\frac{dz}{dt}+k(k-1)z\right)e^{(k-2)t} \text{ и т.д.}$$

__Пример 5__. Найти общее решение уравнения $x^4y''+(xy'-y)^3=0$.

Решение. Положим $F(x,y,y',y'')=x^4y''+(xy'-y)^3$.

Имеем

$$F(\lambda x,\lambda^k y,\lambda^{k-1}y',\lambda^{k-2}y'')=\lambda^4\lambda^{k-2}x^4y''+(\lambda x\lambda^{k-1}y'-\lambda^k y)^3=\lambda^{k+2}x^4y''+\lambda^{3k}(xy'-y)^3=$$
$$=\lambda^3F(x,y,y',y'')\quad \text{(k=1)},$$

откуда следует, что данное уравнение является обобщенно однородным (m=3, k=1).

Выполним замену $x=e^t$, $y=ze^t$. Тогда $y'=z'+z$, $y''=(z''+z)e^{-t}$.

Отсюда $e^{4t}(z''+z)e^{-t}+\left[e^t(z'+z)-ze^t\right]^3=0$, $z''+z'+z'^3=0$.

Полученное уравнение явно не содержит независимой переменной t.

Пусть $z' = p(z)$, ($z'' = p\dfrac{dp}{dz}$). Тогда $p\dfrac{dp}{dz} + p + p^3 = 0$, $p\left(\dfrac{dp}{dz} + 1 + p^2\right) = 0$, откуда имеем два уравнения $\dfrac{dp}{dz} + 1 + p^2 = 0$ и $p = 0$.

Из второго уравнения $p = 0$ следует $z' = 0$, $z = c$ или $y = cx$.

Из первого уравнения: $\dfrac{dp}{1+p^2} = -dz$, $\operatorname{arctg} p = c_1 - z$, $p = tg(c_1 - z)$.

Поэтому

$$z' = tg(c_1 - z),\ ctg(c_1 - z)dz = dt,$$

$$\int ctg(c_1 - z)dz = t - \ln c \ \ (c > 0),$$

$$\ln\left|\sin(z - c_1)\right| = -t + \ln c,$$

$$\sin(z - c_1) = c_2 e^{-t} \ \ (c_2 \neq 0),\ z = c_1 + \arcsin c_2 e^{-t}.$$

Учитывая замену $y = zx$, $e^{-t} = \dfrac{1}{x}$, находим $y = x\left(c_1 + \arcsin\dfrac{c_2}{x}\right)$.

Если $c_1 = c$, $c_2 = 0$, то имеем рассмотренное выше решение $y = cx$.

Замечание В некоторых случаях найти решение дифференциального уравнения методом понижения порядка в виде явной или неявной функции затруднительно, однако удается получить решение в параметрической форме.

Пример 6 (к замечанию). Найти общее решение уравнения

$$y''(1 + 2\ln y') = 1.$$

Решение. Пусть $y' = t$, $y'' = \dfrac{dt}{dx}$. Тогда уравнение примет вид

$$\frac{dt}{dx}(1 + 2\ln t) = 1, \text{ или } dx = (1 + 2\ln t)dt,$$

откуда $x = -t + 2t\ln t + c_1$. Так как $dy = tdx$, то $dy = t(1 + 2\ln t)dt$, откуда $y = t^2 \ln t + c_2$.

Общее решение запишется в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = t(-1 + 2\ln t) + c_1 \\ y = t^2 \ln t + c_2. \end{cases}$$

Ключевые вопросы: 1) Какой вид имеет дифференциальное уравнение n-го порядка? 2) Сформулировать теорему существования и единственности для дифференциального уравнения n-го порядка. 3) Что называется общим решением дифференциального уравнения n-го порядка? 4) Перечислить уравнения, допускающие понижение порядка и методы решения этих уравнений.

Лекция 12-13. Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка. Линейно независимые функции на отрезке. Определитель Вронского. Формула Остроградского - Лиувилля.

Цель лекции. Ввести линейные дифференциальные уравнения n-го порядка с переменными коэффициентами и доказать ряд теорем о решениях линейного однородного уравнения. Дать понятие определителя Вронского и вывести формулу Остроградского - Лиувилля.

План лекции.

Линейным дифференциальным уравнением n-го порядка называется уравнение вида

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+a_2(x)y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x). \tag{1}$$

Здесь функции $a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x), f(x)$ непрерывны на интервале (a,b).

Если $f(x)\equiv 0$, уравнение (1) называется линейным однородным, если $f(x)\neq 0$, – линейным неоднородным, или линейным уравнением с правой частью.

Краткая запись линейного неоднородного уравнения (1) имеет вид $L(y)=f(x)$, где L – линейный дифференциальный оператор n-го порядка, т.е.

$$L(y)=y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_n(x)y,$$

определенный на множестве n раз непрерывно дифференцируемых на (a,b) функций.

Краткая запись линейного однородного уравнения соответственно имеет вид $L(y)=0$.

8.1. Решение линейных однородных и неоднородных дифференциальных уравнений n-го порядка методом понижения порядка уравнения.

Зная одно частное решение $y_1(x)$ линейного однородного уравнения, можно с помощью замены искомой функции $y(x)=y_1(x)\int z(x)dx$ понизить его порядок, а следовательно и порядок соответствующего неоднородного уравнения (1), на единицу. Полученное уравнение (n-1)-го порядка относительно z также является линейным.

<u>Пример 1</u>. Дано уравнение $y'''+\frac{2}{x}y''-y'+\frac{1}{x\ln x}y=x$ и известно частное решение $y_1=\ln x$ соответствующего однородного уравнения: $y'''+\frac{2}{x}y''-y'+\frac{1}{x\ln x}y=0$. Понизить порядок уравнения.

Решение. Выполним замену $y=\ln x\int zdx$, где z – новая неизвестная функция. Тогда, подставляя соответствующие производные $y'=\frac{1}{x}\int zdx+z\ln x$, $y''=-\frac{1}{x^2}\int zdx+\frac{2z}{x}+z'\ln x$, $y'''=\frac{2}{x^3}\int zdx-\frac{3z}{x^2}+\frac{3z'}{x}+z''\ln x$ в данное уравнение, получим: $z''\ln x+\frac{3+2\ln x}{x}z'+\left(\frac{1}{x^2}-\ln x\right)z=x$.

Порядок линейного неоднородного уравнения понижен на единицу.

<u>Пример 2</u>. Найти общее решение уравнения $y''+\frac{2}{x}y'+y=0$, если известно его частное решение $y_1=\frac{\sin x}{x}$.

Решение. Выполним замену $y=\frac{\sin x}{x}\int zdx$, тогда

$$y'=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}\int zdx+\frac{\sin x}{x}z,$$

$$y''=\frac{\sin x}{x}z'+\frac{2(x\cos x-\sin x)}{x^2}z-\frac{(x^2-2)\sin x+2x\cos x}{x^3}\int zdx.$$

Имеем уравнение $z'\sin x+2z\cos x=0$, решая которое, найдем функцию $z=\frac{c_1}{\sin^2 x}$.

Следовательно, $y=\frac{\sin x}{x}\int\frac{c_1dx}{\sin^2 x}=\frac{\sin x}{x}(c_2-c_1\operatorname{ctg}x)=c_2\frac{\sin x}{x}-c_1\frac{\cos x}{x}$.

Общее решение уравнения: $y = c_2 \dfrac{\sin x}{x} - c_1 \dfrac{\cos x}{x}$.

8.2. Линейные однородные уравнения

Линейное однородное уравнение n-го порядка имеет вид

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0 \qquad (2)$$

или $L(y) = 0$.

1. Введем основные свойства линейного дифференциального оператора.

2. На основании свойств линейного дифференциального оператора докажем ряд теорем о решениях линейного однородного уравнения.

3. Введем понятие определителя Вронского и выведем формулу Остроградского - Лиувилля.

Общее решение линейного однородного уравнения (2) записывается так:

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_n y_n(x),$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_n$ – произвольные постоянные, а $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ – фундаментальная система частных решений уравнения (2).

Для линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$$

и общее решение имеет вид

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x),$$

где $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – два линейно независимых решения (фундаментальная система).

Если для такого уравнения известно одно частное решение $y_1(x)$, то второе его частное решение $y_2(x)$, линейно независимое с первым, можно найти по формуле, являющейся следствием формулы Лиувилля–Остроградского

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int a_1(x)dx}}{y_1^{\,2}(x)} dx.$$

Таким образом, общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_1 \int \frac{e^{-\int a_1(x)dx}}{y_1^{\,2}(x)} dx$$

и называется формулой Абеля.

<u>*Пример 1*</u>. Найти общее решение уравнения $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$.

Решение. Непосредственной проверкой убеждаемся, что это уравнение имеет частное решение $y_1 = x$. Найдем общее решение с помощью формулы Абеля, заметив, что $a_1(x) = \dfrac{-2x}{1 - x^2}$.

$$y_2 = x \int \frac{e^{\int \frac{2x}{1-x^2} dx}}{x^2} dx = x \int \frac{e^{-\ln\left|1-x^2\right|}}{x^2} dx = x \int \frac{dx}{x^2\left|1-x^2\right|} = x \int \left(\pm \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{2(1+x)} \right) dx =$$

$$= x\left[\pm \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| \right].$$

Общее решение имеет вид $y = c_1 x + c_2\left(\frac{1}{2}x\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| \pm 1\right)$.

Лекция 14-15. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Случай различных действительных и мнимых корней характеристического уравнения. Уравнение Эйлера (различные случаи корней характеристического уравнения).

Цель лекции. Дать понятие линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами. Метод решения однородного уравнения. Ввести уравнение Эйлера и метод сведения его к уравнению с постоянными коэффициентами.

Научить студентов решать линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.

План лекции.

10.1. Линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами

Линейным однородным уравнением n-го порядка с постоянными коэффициентами называется уравнения вида

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_n y = 0, \qquad (1)$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – некоторые действительные числа.

Для нахождения частных решений составляют характеристическое уравнение

$$k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_{n-1}k + a_n = 0, \qquad (2)$$

которое получается из уравнения (2), если искать частные решения этого уравнения в виде $y = e^{kx}$ (метод подбора решений).

Уравнение (2) является уравнением n-й степени и имеет n корней действительных или комплексных, среди которых могут быть и равные.

Частные решения уравнения (2) зависят от вида корней характеристического уравнения (2) и при их нахождении полезно использовать таблицу 1.

Таблица 1

Характер корней характеристического уравнения (2)	Частные решения уравнения (1)
k – простой вещественный корень	e^{kx}
k – вещественный корень кратности r	$e^{kx}, xe^{kx}, x^2e^{kx}, \ldots, x^{r-1}e^{kx}$
$\alpha \pm \beta i$ – комплексно сопряженные корни	$e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x$
$\alpha \pm \beta i$ – комплексно сопряженные корни кратности r	$e^{\alpha x}\cos\beta x, xe^{\alpha x}\cos\beta x, \ldots, x^{(r-1)}e^{\alpha x}\cos\beta x$ $e^{\alpha x}\sin\beta x, xe^{\alpha x}\sin\beta x, \ldots, x^{(r-1)}e^{\alpha x}\sin\beta x$

Общее решение уравнения (1) записывается так:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_{n-1} y_{n-1} + c_n y_n,$$

где $y_1, y_2, ..., y_n$ – частные линейно независимые решения, образующие фундаментальную систему, а $c_1, c_2, ..., c_n$ – произвольные постоянные.

<u>Пример 1</u>. Найти общее решение уравнения $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$.

Решение. Запишем характеристическое уравнение и найдем его корни.

$$k^3 - k^2 + 4k - 4 = 0, \quad k^2(k-1) + 4(k-1) = 0, \quad (k^2+4)(k-1) = 0, \quad k_1 = 1, \quad k_{2,3} = \pm 2i.$$

Все корни простые, следовательно, согласно табл. 1 соответствующие частные решения запишутся: $y_1 = e^x, y_2 = \cos 2x, y_3 = \sin 2x$.

Общее решение имеет вид: $y = c_1 e^x + c_2 \cos 2x + c_3 \sin 3x$.

<u>Пример 2</u>. Найти общее решение уравнения $y^{\mathrm{V}} + 9y''' = 0$.

Решение. Напишем характеристическое уравнение $k^5 + 9k^3 = 0$, где $k_1 = 0$ корень кратности $r = 3$, $k_{2,3} = \pm 3i$.

Частные решения: $y_1 = e^{0x} = 1$, $y_2 = x$, $y_3 = x^2$, $y_4 = \cos 3x$, $y_5 = \sin 3x$.

Общее решение: $y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 \cos 3x + c_5 \sin 3x$.

<u>Пример 3</u>. Найти частное решение уравнения $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1, y'(0) = 2, y''(0) = 3$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^3 - 3k^2 + 3k - 1 = 0$ имеет единственный корень $k = 1$ кратности $r = 3$, поэтому частные решения запишутся $y_1 = e^x, y_2 = xe^x, y_3 = x^2 e^x$. Следовательно, $y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) e^x$ – общее решение уравнения.

Для определения произвольных постоянных найдем производные

$$y' = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) e^x + (c_2 + 2c_3 x) e^x, \quad y'' = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) e^x + 2(c_2 + 2c_3 x) e^x + 2c_3 e^x.$$

Подставляя начальные условия, получим систему уравнений: $\begin{cases} c_1 = 1 \\ c_1 + c_2 = 2 \\ c_1 + c_2 + 2c_3 = 3. \end{cases}$

Откуда $c_1 = 1, c_2 = 1, c_3 = 0$. Следовательно искомое частное решение имеет вид

$$y = (1 + x) e^x.$$

10. 2. Дифференциальные уравнения, сводящиеся к линейным уравнениям с постоянными коэффициентами

<u>10.2.1. Уравнение Эйлера</u>

Уравнение вида

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0,$$

где $a_i = const$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Заменой $x = e^t$ (или $x = -e^t$ при $x < 0$) уравнение сводится к линейному уравнению с постоянными коэффициентами. На практике решение уравнения Эйлера ищут в виде $y = e^{rt} = (e^t)^r = x^r$. Для нахождения r получают характеристическое уравнение. Простому корню r_1 соответствует решение x^{r_1}, а m-кратному корню r_1 – m линейно независимых решений вида x^{r_1}, $x^{r_1} \ln x$, $x^{r_1} (\ln x)^2, \ldots, x^{r_1} (\ln x)^{m-1}$. Если коэффициенты уравнения действительны, а характеристическое уравнение имеет комплексно сопряженные корни $r_0 = \alpha_0 \pm i\beta_0$ кратности μ, то уравнение Эйлера имеет 2μ линейно независимых решений вида

$$x^{\alpha_0}\cos(\beta_0 \ln x),\quad x^{\alpha_0}\ln x\cos(\beta_0 \ln x),\ \dots,\quad x^{\alpha_0}(\ln x)^{\mu-1}\cos(\beta_0 \ln x),$$
$$x^{\alpha_0}\sin(\beta_0 \ln x),\quad x^{\alpha_0}\ln x\sin(\beta_0 \ln x),\ \dots,\quad x^{\alpha_0}(\ln x)^{\mu-1}\sin(\beta_0 \ln x).$$

Пример 1. Найти общее решение уравнения Эйлера $x^2y'' + 5xy' + 4y = 0.$

Решение Будем искать решение в виде $y = x^r$, тогда получим: $x^2r(r-1)x^{r-2} + 5xrx^{r-1} + 4x^r = 0,\ \ r(r-1)+5r+4=0,\ \ r^2+4r+4=0,\ \ r_1 = r_2 = -2$ - двукратный корень характеристического уравнения. Поэтому общее решение имеет вид $y = C_1x^{-2} + C_2x^{-2}\ln x.$

10.2.2. Уравнение Лагранжа

Уравнение вида

$$(ax+b)^n y^{(n)} + a_1(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(ax+b)y' + a_ny = 0,\quad \dots$$

где $a,\ b,\ a_i = const\quad (i = 1, 2, \dots, n).$ Заменой $ax+b = e^t$ уравнение Лагранжа сводится к линейному уравнению с постоянными коэффициентами.

10.2.3. Уравнение Чебышева

Уравнение вида

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2y = 0,$$

где $n = const.$ Заменой $x = \cos t$ (при $|x|<1$) уравнение Чебышева сводится к уравнению $\dfrac{d^2y}{dt^2} + n^2y = 0.$

Пример 2. Найти общее решение уравнения Чебышева

$$(1-x^2)y'' - xy' + 4y = 0\quad (|x|<1).$$

Решение. Выполним замену $x = \cos t\ \ (t\in(0,\pi)),$ тогда

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\left(-\frac{1}{\sin t}\right),$$
$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\left(-\frac{1}{\sin t}\right)\right)\frac{dt}{dx} = \left(\frac{d^2y}{dt^2}\left(-\frac{1}{\sin t}\right) + \frac{dy}{dt}\cdot\frac{\cos t}{\sin^2 t}\right)\times$$
$$\times\left(-\frac{1}{\sin t}\right) = \frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{1}{\sin^2 t} - \frac{dy}{dt}\cdot\frac{\cos t}{\sin^3 t},$$

получим $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 4y = 0$, откуда $y = C_1\cos 2t + C_2\sin 2t = C_1\cos(2\arccos x) +$ $+ C_2\sin(2\arcsin x) = C_1(2x^2-1) + 2C_2x\sqrt{1-x^2}.$

Ключевые вопросы:

1) Записать линейное однородные уравнения с постоянными коэффициентами. 2) Какое уравнение называется характеристическим? 3) Метод Эйлера интегрирования линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами. 4) Записать общий вид решения дифференциального уравнения, если корни характеристического уравнения действительные и различные. 5) Записать общий вид решения дифференциального уравнения, если корни характеристического уравнения действительные и кратные. 6) Записать общий вид решения дифференциального уравнения, если корни характеристического уравнения комплексные. 7) Записать общий вид решения диффе-

ренциального уравнения, если корни характеристического уравнения кратные комплексные. 8) Записать вид уравнения Эйлера. 9) При помощи каких замен независимого переменного и искомой функции, уравнение Эйлера сводится к линейному уравнению с постоянными коэффициентами?

Лекция 16-17. Линейные неоднородные уравнения с переменными коэффициентами. Метод вариации произвольных постоянных.

Цель лекции. Дать понятие линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами. Методы решения неоднородных уравнений.

План лекции.

Структура общего решения линейного неоднородного уравнения

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_n(x)y = f(x),$$

где $a_1(x),...,a_n(x)$ – переменные или постоянные коэффициенты, – имеет вид

$$y = \bar{y} + y^*.$$

Здесь $\bar{y}$ – общее решение линейного однородного уравнения $L(y)=0$, соответствующего данному уравнению, а y^* – произвольное частное решение неоднородного уравнения $L(y)=f(x)$.

Рассмотрим общий метод нахождения произвольного частного решения y^* методом Лагранжа.

11.1. Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа)

Линейное уравнение с постоянными или переменными коэффициентами и с любой правой частью $f(x)$ можно решить методом вариации произвольных постоянных, если известно общее решение линейного однородного уравнения $\bar{y}$.

Если известна фундаментальная система решений $y_1, y_2,..., y_n$ соответствующего однородного уравнения, его общее решение имеет вид

$$\bar{y} = c_1 y_1 + c_2 y_2 + ... + c_n y_n.$$

Тогда частное решение неоднородного уравнения следует искать в виде

$$y^* = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2 + ... + c_n(x)y_n,$$

где $c_1(x), c_2(x),..., c_n(x)$ – неизвестные функции, которые определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1 + c_2'(x)y_2 + ... + c_n'(x)y_n = 0 \\ c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2' + ... + c_n'(x)y_n' = 0 \\ \quad .... \\ c_1'(x)y_1^{(n-2)} + c_2'(x)y_2^{(n-2)} + ... + c_n'(x)y_n^{(n-2)} = 0 \\ c_1'(x)y_1^{(n-1)} + c_2'(x)y_2^{(n-1)} + ... + c_n'(x)y_n^{(n-1)} = f(x), \end{cases}$$

где $f(x)$ – правая часть уравнения.

Пример 1. Найти общее решение уравнения $y'' - \dfrac{y'}{x} = x$.

Решение. Найдем общее решение однородного уравнения $y'' - \dfrac{y'}{x} = 0$.

Так как $\dfrac{y''}{y'} = \dfrac{1}{x}$, то $\ln y' = \ln|x| + \ln c_1$, $y' = c_1 x$, $y = c_1 x^2 + c_2$ или $\bar{y} = c_1 x^2 + c_2$ – общее решение.

Запишем $y^* = c_1(x)x^2 + c_2(x)$ – частное решение данного уравнения. Составим систему уравнений для нахождения $c_1(x)$ и $c_2(x)$:

$$\begin{cases} c_1'(x)x^2 + c_2'(x)1 = 0 \\ 2c_1'(x)x + c_2'(x)0 = x \end{cases} \text{ или } \begin{cases} c_1'x^2 + c_2' = 0 \\ 2c_1'x = x. \end{cases}$$

Решая систему, находим $c_1' = \frac{1}{2}$, $c_2' = -\frac{1}{2}x^2$, откуда в результате интегрирования получим: $c_1(x) = \int c_1'(x)dx = \int \frac{1}{2}dx = \frac{x}{2} + \overline{c_1}$ (будем считать $\overline{c_1} = 0$, т.к. находим частное решение),

$$c_2(x) = \int c_2'(x)dx = -\int \frac{1}{2}x^2 dx = -\frac{x^3}{6} + \overline{c_2} \text{ (будем считать } \overline{c_2} = 0\text{)}.$$

Частное решение запишется $y^* = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2 = \frac{x}{2}x^2 - \frac{x^3}{6}1$ или $y^* = \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6} = \frac{x^3}{3}$.

Общее решение данного уравнения: $y = \overline{y} + y^*$, т.е. $y = c_1x^2 + c_2 + \frac{x^3}{3}$.

<u>*Пример 2*</u>. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y'' - y' = \frac{1}{1+e^x},$$

удовлетворяющее начальным условиям $y\big|_{x=0} = 1, y'\big|_{x=0} = 2$.

Решение. Общее решение данного уравнения запишется $y = \overline{y} + y^*$.

Найдем $\overline{y}$ – общее решение соответствующего линейного однородного уравнения $y'' - y' = 0$. Корни его характеристического уравнения $k^2 - k = 0$ вещественные разные $k_1 = 0, k_2 = 1$, тогда $\overline{y} = \overline{c}_1 + c_2e^x$. Запишем $y^* = c_1(x) + c_2(x)e^x$.

Составим систему (4) для нахождения $c_1(x)$ и $c_2(x)$

$$\begin{cases} c_1'(x)1 + c_2'(x)e^x = 0 \\ c_1'(x)0 + c_2'(x)e^x = \frac{1}{1+e^x} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} c_1' + c_2'e^x = 0 \\ c_2'e^x = \frac{1}{1+e^x} \end{cases},$$

откуда получаем: $c_2'(x) = \frac{1}{e^x(1+e^x)}$.

Следовательно,

$$c_1(x) = -\int \frac{dx}{1+e^x} = -x + \ln(1+e^x),$$

$$c_2(x) = \int \frac{dx}{e^x(1+e^x)} = -e^{-x} - x + \ln(1+e^x).$$

Запишем $y^* = -x + \ln(1+e^x) + e^x\left[-e^{-x} - x + \ln(1+e^x)\right]$.

Общее решение: $y = \overline{c}_1 + c_2e^x - x + \ln(1+e^x) - 1 - xe^x + e^x\ln(1+e^x)$ или

$$y = c_1 + e^x(c_2 - x) - x + (1+e^x)\ln(1+e^x) \quad (c_1 = \overline{c}_1 - 1).$$

Для определения частного решения найдем производную

$$y' = -1 + e^x\left[c_2 - x + \ln(1+e^x)\right].$$

Подставляя значения $x=0,\ y=1,\ y'=2$ в выражение

$$y=c_1+e^x(c_2-x)-x+(1+e^x)\ln(1+e^x) \text{ и } y'=-1+e^x\left[c_2-x+\ln(1+e^x)\right],$$

получим систему

$$\begin{cases} 1=c_1+c_2+2\ln 2 \\ 2=-1+c_2+\ln 2. \end{cases}$$

Откуда $c_1=-2-\ln 2,\ c_2=3-\ln 2.$ Искомое частное решение запишется так:

$$y=-x+e^x(3-\ln 2-x)+(1+e^x)\ln(1+e^x)-2-\ln 2\,.$$

Пример 3. Найти общее решение уравнения

$$y'''-\frac{3}{x}y''+\frac{6}{x^2}y'-\frac{6}{x^3}y=\sqrt{x}\,.$$

Решение. Структура общего решения имеет вид $y=\overline{y}+y^*$.

Найдем $\overline{y}$ - общее решение уравнения $y'''-\frac{3}{x}y''+\frac{6}{x^2}y'-\frac{6}{x^3}y=0$.

Решение будем искать в виде многочлена $y=ax^n$ методом подбора. Непосредственной проверкой убедимся, что многочлены $y_1=x,\ y_2=x^2,\ y_3=x^3$ являются решениями уравнения и образуют фундаментальную систему решений. Тогда $\overline{y}=c_1x+c_2x^2+c_3x^3$.

Методом Лагранжа найдем частное решение y^* данного уравнения, т.е.

$$y^*=c_1(x)x+c_2(x)x^2+c_3(x)x^3\,.$$

Составим систему (4) для определения $c_1(x),\ c_2(x),\ c_3(x)$:

$$\begin{cases} c_1'(x)x+c_2'(x)x^2+c_3'(x)x^3=0 \\ c_1'(x)1+c_2'(x)2x+c_3'(x)3x^2=0 \\ \qquad c_2'(x)2+c_3'(x)6x=\sqrt{x} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} c_1'x+c_2'x^2+c_3'x^3=0 \\ c_1'+2c_2'x+3c_3'x^2=0 \\ \quad 2c_2'\ +\ 6c_3'x\ =\sqrt{x}. \end{cases}$$

Решая систему, получим $c_1'(x)=\frac{1}{2}\sqrt{x^3},\ c_2'(x)=-\sqrt{x},\ c_3'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, откуда

$$c_1(x)=\frac{1}{5}\sqrt{x^5}\ ,\ c_2(x)=-\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\ ,\ c_3(x)=\sqrt{x}\,.$$

Частное решение запишется так: $y^*=\frac{1}{5}\sqrt{x^5}\,x-\frac{2}{3}\ \sqrt{x^3}x^2+\sqrt{x}x^3=\frac{8}{15}\sqrt{x^7}$.

Следовательно, общее решение имеет вид $y=c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\frac{8}{15}\sqrt{x^7}$.

Лекция 18. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами. Понятия о краевых задачах. Функция Грина.

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, т.е. уравнение вида

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x),$$

где a_i $(i=1,2,\ldots,n)$ - действительные числа, а $f(x)\neq 0$.

Общее решение уравнения записывается в виде $y=\overline{y}+y^*$, где $\overline{y}$ – общее решение $L(y)=0$. соответствующего данному, y^* – любое частное решение уравнения $L(y)=f(x)$.

Общее решение $\overline{y}$ находится с помощью табл. 1.

Для отыскания y^* в общем случае можно воспользоваться методом Лагранжа вариации произвольных постоянных.

В частных случаях, когда функция $f(x)$ имеет специальный вид, частное решение находится методом неопределенных коэффициентов (метод подбора частного решения). При этом используют табл. 2.

Таблица 2

Вид правой части уравнения (2.17)	Корни характеристического уравнения $L(y)=0$.	Вид частного решения уравнения (2.17)
$f(x)=e^{\alpha x}P_m(x)$	1) α – не является корнем характеристического уравнения 2) α – корень характеристического уравнения кратности r	1) $y^*=e^{\alpha x}Q_m(x)$ 2) $y^*=x^r e^{\alpha x}Q_m(x)$
$f(x)=A\cos\beta x+B\sin\beta x$	1) $\pm\beta i$ – не является корнем характеристического уравнения 2) $\pm\beta i$ – корень характеристического уравнения кратности r	1) $y^*=M\cos\beta x+N\sin\beta x$ 2) $y^*=x^r(M\cos\beta x+N\sin\beta x)$
$f(x)=e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x+$ $+P_n(x)\sin\beta x]$	1) $\alpha\pm\beta i$ – не является корнем характеристического уравнения 2) $\alpha\pm\beta i$ – корень характеристического уравнения кратности r	1) $y^*=e^{\alpha x}[M_k(x)\cos\beta x+N_k(x)\sin\beta x]$ 2) $y^*=x^r e^{\alpha x}[M_k(x)\cos\beta x+N_k(x)\sin\beta x]$

Замечание 1. (к табл. 2). $M_k(x)=A_0+A_1x+A_2x^2+...+A_kx^k$,

$N_k(x)=B_0+B_1x+B_2x^2+...+B_kx^k$, где k – наибольшее из чисел m и n.

Замечание 2. Если $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$, то $y^*=y_1^*+y_2^*$, где y_1^* соответствует $f_1(x)$, а y_2^* - $f_2(x)$.

Замечание 3. Многочлены $Q_m(x)$ должны быть полными (т.е. содержать все степени x от 0 до m). Если в выражение функции $f(x)$ входит хотя бы одна из функций $\cos\beta x$ или $\sin\beta x$, то в y^* нужно всегда вводить обе функции.

__Пример 1__. Записать вид частного решения уравнения $y'''-y''=f(x)$, если

а) $f(x)=2$; б) $f(x)=3x^2-2x+5$; в) $f(x)=2e^{-3x}$; г) $f(x)=2xe^x$; д) $f(x)=3\sin 2x$; е) $f(x)=3\sin x+5\cos 2x$ ж) $f(x)=\sin 2x+5x\cos 2x$

Решение. Характеристическое уравнение запишется: $k^3-k^2=0$, его корни $k_{1,2}=0,\ k_3=1$. Запишем частные решения уравнения в общем виде (не находя коэффициентов):

а) $y^* = Ax^2$; б) $y^* = x^2\left(Ax^2 + Bx + C\right)$; в) $y^* = Ae^{-3x}$; г) $y^* = x(Ax + B)e^x$; д) $y^* = A\cos 2x + B\sin 2x$; е) $y^* = y_1{}^* + y_2{}^* = A\cos x + B\sin x + C\cos 2x + D\sin 2x$; ж) $y^* = (Ax + B)\cos 2x + (Cx + D)\sin 2x$.

Пример 2. Найти общее решение уравнения $y^{\mathrm{IV}} + y'' = x^2 + x$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^4 + k^2 = 0$, его корни $k_{1,2} = 0,\ k_{3,4} = \pm i$. Общее решение соответствующего однородного уравнения запишется

$$\bar{y} = c_1 + c_2 x + c_3 \cos x + c_4 \sin x.$$

Частное решение имеет вид $y^* = x^2\left(Ax^2 + Bx + C\right) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2$.

Для определения неизвестных коэффициентов A,B,C вычислим производные от y^*: $y^{*\prime} = 2Cx + 3Bx^2 + 4Ax^3$, $y^{*\prime\prime} = 2C + 6Bx + 12Ax^2$, $y^{*\prime\prime\prime} = 6B + 24Ax$, $y^{*\mathrm{IV}} = 24A$ и подставим в уравнение $y^{\mathrm{IV}} + y'' = x^2 + x$. Из полученного тождества

$$24A+2C+6Bx+12Ax^2 \equiv x^2+x$$

определим коэффициенты A,B,C двумя методами:

1) приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x, получим

$$\begin{cases} 12A = 1 \\ 6B = 1 \\ 24A + 2C = 0, \end{cases} \quad \text{откуда } A = \frac{1}{12},\ B = \frac{1}{6},\ C = -1.$$

2) зададим x произвольные значения. Пусть $x = 0 \ \Rightarrow\ 24A + 2C = 0$,

$x = -1 \ \Rightarrow\ 24A + 2C - 6B + 12A = 0,$

$x = 1 \ \Rightarrow\ 24A + 2C + 6B + 12A = 2.$

Решая полученную систему, найдем $A = \frac{1}{12},\quad B = \frac{1}{6},\quad C = -1$. При определении коэффициентов используется либо первый либо, второй метод, а иногда уместно применить одновременно оба.

Частное решение запишется $y^* = \frac{x^4}{12} + \frac{1}{6}x^3 - x^2$. Следовательно,

$y = C_1 + C_2 x + C_3 \cos x + C_4 \sin x - x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{x^4}{12}$ есть общее решение уравнения.

Пример 3. Найти частное решение дифференциального уравнения $y''' - 2y'' + y' = 4(\sin x + \cos x)$, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y\big|_{x=0} = 1, \quad y'\big|_{x=0} = 0, \quad y''\big|_{x=0} = -1.$$

Решение. Запишем характеристическое уравнение и найдем его корни: $k^3 - 2k^2 + k = 0,\quad k_1 = 0,\quad k_2 = k_3 = 1.$ Общее решение однородного уравнения имеет вид $\bar{y} = C_1 + (C_2 + C_3 x)e^x$. Запишем частное решение $y^* = A\cos x + B\sin x.$ Вычислим производные:

$(y^*)' = -A\sin x + B\cos x$, $(y^*)'' = -A\cos x - B\sin x$, $(y^*)''' = A\sin x - B\cos x;$

после подстановки $y^*,\ (y^*)',\ (y^*)'',\ (y^*)'''$ в левую часть данного уравнения получим $2A\cos x + 2B\sin x \equiv 4\cos x + 4\sin x$ – тождество, из которого $A = 2,\ B = 2;\ y^* = 2\cos x + 2\sin x$ – частное решение. Общее решение неоднородного уравнения $y = \bar{y} + y^*$, или $y = C_1 + (C_2 + C_3 x)e^x + 2\cos x + 2\sin x.$

Найдем частное решение, соответствующее заданным начальным условиям. Продифференцируем последовательно два раза общее решение и получим три равенства:

$$y = C_1 + (C_2 + C_3 x)e^x + 2\cos x + 2\sin x,$$
$$y' = [C_2 + C_3(1+x)]e^x + 2(-\sin x + \cos x),$$
$$y'' = [C_2 + C_3(2+x)]e^x - 2(\cos x + \sin x).$$

Подставляя в эти равенства начальные условия $x=0,\ y=1,\ y'=0,\ y''=-1$, получим систему уравнений с неизвестными $C_1,\ C_2,\ C_3$.

$$\begin{cases} 1 = C_1 + C_2 + 2 \\ 0 = C_2 + C_3 + 2 \\ -1 = C_2 + 2C_3 - 2, \end{cases}$$

откуда $C_1 = 4,\ C_2 = -5,\ C_3 = 3$. Следовательно, $y = 4 + (-5+3x)e^x + 2(\cos x + \sin x)$ – искомое частное решение данного уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

Пример 3. Найти общее решение уравнения $y'' + 2xy' + (x^2 + 6)y = 0$.

Решение. Имеем уравнение вида (2.21). Найдем $Q(x)$:

$$Q(x) = a_2(x) - \frac{1}{4}a_1^2(x) - \frac{1}{2}a_1'(x) = x^2 + 6 - \frac{1}{4}\cdot 4x^2 - \frac{1}{2}\cdot 2 = 5\,.$$

Заменой $y = u\cdot e^{\left(-\frac{1}{2}\int 2x dx\right)}$ данное уравнение сводится к уравнению $u'' + 5u = 0$.

Составим характеристическое уравнение $k^2 + 5 = 0,\ k_{1,2} = \pm\sqrt{5}i.$ Общее решение запишется в виде $y = e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot(C_1\cos\sqrt{5}x + C_2\sin\sqrt{5}x).$

Ключевые вопросы:

1). Записать линейное неоднородные уравнения с переменными коэффициентами. 2) Сформулировать основные теоремы, определяющие свойства решений неоднородного уравнения. 3) Чему равно общее решение неоднородного уравнения? 4) В чем заключается метод вариации произвольных постоянных? 5) Привести пример применение метода Лагранжа.

Лекция 18. Функция влияния или функция Грина. Построение функции Грина. Приближенные методы решения дифференциальных уравнений.

Цель лекции. Научить студентов наряду с основной начальной задачей решать так называемые краевые или граничные задачи. Дать метод построения функции Грина. Научить интегрировать дифференциальных уравнений при помощи степенных рядов. Ввести уравнение Бесселя.

План лекции.

12.1 Понятие краевых задач. Функция влияния или функция Грина. Построение функции Грина.

12.2. Интегрирование дифференциальных уравнений при помощи рядов

В некоторых случаях, когда интегрирование дифференциального уравнения в элементарных функциях невозможно, решение его ищут в виде степенного ряда

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n.$$

Неопределенные коэффициенты c_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ находят подстановкой ряда в дифференциальное уравнение и приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях разности $(x - x_0)$

в обеих частях полученного равенства. Если удается найти все коэффициенты ряда, полученный ряд определяет решение во всей своей области сходимости.

В тех случаях, когда для уравнения $y'=f(x,y)$ требуется решить задачу Коши при начальных условиях $y\big|_{x=x_0}=y_0$, решение можно искать с помощью ряда Тейлора: $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n$, где $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=f(x_0,y_0)$, а дальнейшие производные $y^{(n)}(x_0)$ находим последовательным дифференцированием исходного уравнения и подстановкой вместо $x,\ y,\ y',\ldots$ значений $x_0,\ y_0,\ y_0',\ldots$.

Аналогично с помощью ряда Тейлора можно интегрировать и уравнения высших порядков.

Пример 1. Найти общее решение уравнения $y''-x^2y=0$.

Решение. Будем искать решение этого уравнения в виде ряда $y=C_0+C_1x+C_2x^2+\ldots+C_nx^n+\ldots$.

Подставляя y и y'' в исходное уравнение, находим

$$\left[2\cdot 1C_2+3\cdot 2C_3x+4\cdot 3C_4x^2+\ldots+(n+2)(n+1)C_{n+1}x^n+\ldots\right]-$$
$$-x^2\left[C_0+C_1x+C_2x^2+\ldots+C_nx^n+\ldots\right]\equiv 0.$$

Сгруппируем члены с одинаковыми степенями x:

$$2\cdot 1C_2+3\cdot 2C_3x^2+\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+4)(n+3)C_{n+4}-C_n\right]x^{n+2}\equiv 0.$$

Приравнивая к нулю все коэффициенты полученного ряда (чтобы уравнение обратилось в тождество), находим $C_2=C_3=0$; $C_{n+4}=\frac{C_n}{(n+3)(n+4)}$ $(n=0,1,2,\ldots)$. Последнее соотношение позволяет найти последовательно все коэффициенты искомого разложения (C_0 и C_1 остаются произвольными и считаются произвольными постоянными интегрирования):

$$C_{4k}=\frac{C_0}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8\cdot\ldots\cdot(4k-1)\cdot 4k};\quad C_{4k+1}=\frac{C_1}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9\cdot\ldots\cdot 4k(4k+1)};$$
$$C_{4k+2}=C_{4k+3}=0\quad (k=0,1,2,\ldots).$$

Таким образом, $y=C_0\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{x^{4k}}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8\cdot\ldots\cdot(4k-1)4k}+C_1\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{x^{4k+1}}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9\cdot\ldots\cdot 4k(4k+1)}$.

Полученные ряды сходятся на всей числовой оси и определяют два линейно независимых частных решения исходного уравнения.

Пример 2. Проинтегрировать приближенно с помощью ряда Тейлора уравнение $y''=x+y^2$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$. Найти четыре первых (отличных от нуля) члена разложения.

Решение. Дифференцируя уравнение $y''=x+y^2$, имеем $y'''=1+2yy'$, $y^{(4)}=2yy''+2y'^2$, $y^{(5)}=2yy'''+6y'y''$, $y^{(6)}=2yy^{(4)}+8y'y'''+6y''^2$.

При $x=0$ получаем

$$y(0)=0,\quad y'(0)=1,\quad y''(0)=0,\quad y'''(0)=1,\quad y^{(4)}(0)=2,\quad y^{(5)}(0)=0,\ y^{(6)}(0)=16.$$

Решение имеет вид $y=\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{2x^4}{4!}+\frac{16x^5}{6!}+\ldots=x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{12}+\frac{x^6}{45}+\ldots$.

12.3. Уравнение Бесселя.

Уравнением Бесселя называется дифференциальное уравнение вида

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2) y = 0,$$

где $n = const$.

Решение уравнения определяют в виде произведения некоторой степени x на степенной ряд $y = x^r \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.

Коэффициент a_0 мы можем считать отличным от нуля ввиду неопределенности показателя х.

Перепишем $y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{r+k}$ и найдем производные:

$$y' = \sum_{k=0}^{\infty} (r+k) a_k x^{r+k-1}, \quad y'' = \sum_{k=0}^{\infty} (r+k)(r+k-1) a_k x^{r+k-2}.$$

Подставим эти выражения в уравнение (2.23):

$$x^2 \sum_{k=0}^{\infty} (r+k)(r+k-1) a_k x^{r+k-2} + x \sum_{k=0}^{\infty} (r+k) a_k x^{r+k-1} + (x^2 - n^2) \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{r+k} = 0.$$

Приравнивая к нулю коэффициенты при x в степени $r,\ r+1,\ r+2, \ldots, r+k$, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \left[r(r-1) + r - n^2 \right] a_0 = 0 \\ \left[(r+1)r + (r+1) - n^2 \right] a_1 = 0 \\ \left[(r+2)(r+1) + (r+2) - n^2 \right] a_2 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left[(r+k)(r+k-1) + (r+k) - n^2 \right] a_k + a_{k-2} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}, \text{ или } \begin{cases} (r^2 - n^2) a_0 = 0 \\ \left[(r+1)^2 - n^2 \right] a_1 = 0 \\ \left[(r+2)^2 - n^2 \right] a_2 + a_0 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left[(r+k)^2 - n^2 \right] a_k + a_{k-2} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}.$$

Рассмотрим равенство $\left[(r+k)^2 - n^2 \right] a_k + a_{k-2} = 0$. Его можно переписать в виде $\left[(r+k-n)(r+k+n) \right] a_k + a_{k-2} = 0$.

По условию $a_0 \neq 0$, $r^2 - n^2 = 0, \quad r_1 = n, \quad r_2 = -n$.

1. Пусть n не равно целому числу.

Тогда из системы уравнений последовательно определяются все коэффициенты $a_1, a_2, \ldots; \quad a_0$ остается произвольным.

Пусть $r = n$, тогда $a_0 = 1, a_1 = 0$ тогда $a_k = -\dfrac{a_{k-2}}{k(2n+k)}$, k=(2,3,…). Придавая различные значения k, найдем

$$\begin{cases} a_1 = 0, \quad a_3 = 0 \quad \textit{и, вообще}, a_{2m+1} = 0 \\ a_2 = -\dfrac{1}{2(2n+2)}, \quad a_4 = \dfrac{1}{2 \cdot 4 (2n+2)(2n+4)}, \ldots, \\ a_{2m} = (-1)^m \dfrac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2m (2n+2)(2n+4) \ldots (2n+2m)}, \ldots \qquad m = (1,2\ldots) \end{cases}$$

Подставив найденные коэффициенты в решение уравнения $y = x^r \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, получим частное решение

$$y_1 = x^n \left[1 - \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4(2n+2)(2n+4)} - \frac{x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6(2n+2)(2n+4)(2n+6)} + \dots \right].$$

Решение y_1, умноженное на некоторую постоянную $a_0 = \dfrac{1}{2^n \Gamma(n+1)}$, называется функцией Бесселя первого рода n-го порядка и обозначается символом $J_n(x)$.

Решение y_2, соответствующее значению r = -n, обозначают символом $J_{-n}(x)$ и находят по формулам

$$y_2 = x^{-n} \left[1 - \frac{x^2}{2(-2n+2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4(-2n+2)(-2n+4)} - \frac{x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6(-2n+2)(-2n+4)(-2n+6)} + \dots \right].$$

Таким образом, при n, не равном целому числу, общее решение уравнения (2) имеет вид $y = C_1 J_n(x) + C_2 J_{-n}(x)$.

В выборе a_0 участвует гамма-функция $\Gamma(n+1)$, которая определяется несобственным интегралом

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-1} dx \quad (n > 0) \qquad (\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)),$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}, \quad \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}, \quad \Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{15}{8}\sqrt{\pi}, \dots .$$

2. Если $n \geq 0$ – целое число, то первое решение y_1 будет иметь смысл и являться первым частным решением уравнения (2), но второе решение не будет иметь смысла, так как один из множителей знаменателя в разложении обратится в нуль.

При целом положительном n функция Бесселя имеет вид $J_n(x) = \dfrac{1}{2^n \cdot n!} y_1$

(а при $n = 0$, y_1 умножается на 1), т. е.

$$J_n(x) = \frac{x^n}{2^n n!} \left[1 - \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4(2n+2)(2n+4)} - \frac{x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6(2n+2)(2n+4)(2n+6)} + \dots \right]$$

или

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(n+m)!} \left(\frac{x}{2} \right)^{n+2m} .$$

Можно показать, что второе частное решение в этом случае нужно искать в форме $K_n(x) = J_n(x) \ln x + x^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$.

Подставляя это выражение в уравнение (2), определим коэффициенты b_k. Функция $K_n(x)$ с определенными таким образом коэффициентами, умноженная на некоторое постоянное, называется функцией Бесселя второго рода n-го порядка. Это и есть решение уравнения (2), образующее с первым линейно независимую систему.

Общее решение будет иметь вид $Y = C_1 I_n(x) + C_2 K_n(x)$.

Отметим, что $\lim\limits_{x\to\infty} K_n(x)=\infty$, следовательно, если мы хотим рассматривать конечные решения при n = 0, то в общем решение нужно положить $C_2=0$.

Пример 1. Найти функцию Бесселя при n=0

Решение

$$I_n(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!(n+m)}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2m}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m}}{4^m(m!)^2}$$

$$I_0(x)=1-\frac{x^2}{4}+\frac{x^4}{4^2(1\cdot 2)^2}-\frac{x^6}{4^3(1\cdot 2\cdot 3)^2}+\cdots\ .$$

Пример 2. Решить уравнение $x^2y''+xy'+(x^2-\frac{1}{4})y=0$.

Решение Так как $n=\frac{1}{2}$, общее решение уравнения имеет вид:

$$y=C_1I_{1/2}(x)+C_2I_{-1/2}(x),$$

где
$$I_{1/2}(x)=\frac{1}{2^{1/2}\Gamma(\frac{3}{2})}\cdot x^{\frac{1}{2}}[1-\frac{x^2}{2\cdot 3}+\frac{x^4}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}-\frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 3\cdot 5\cdot 7}+...]=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+...)=\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ .$$

Точно так же получим: $I_{-1/2}(x)=\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

Следовательно, общее решение: $y=(C_1\sin x+C_2\cos x)\sqrt{\frac{2}{\pi x}}$.

Ключевые вопросы. 1. Какая функция называется функцией влияния или функцией Грина? 2) Сформулировать основные свойства функции Грина. 3)Как решить неоднородное уравнение с использованием функции Грина? 4) Приближенные методы решения дифференциальных уравнений. 5) Какой вид имеет уравнение Бесселя? 6) Вид решения уравнения Бесселя при n, не равном целому числу.

Семестр 4.

Раздел 3. Системы дифференциальных уравнений

Лекции 1-5. Системы дифференциальных уравнений. Общие понятия. Интегрирование системы дифференциальных уравнений. Системы линейных дифференциальных уравнений. Линейные неоднородные системы. Метод вариации произвольных постоянных. Решения линейных систем методами неопределенных коэффициентов.

Цель и задачи лекции. Познакомить студентов с теорией систем дифференциальных уравнений. Рассмотрим задачи, в которых требуется найти несколько неизвестных функций от одной независимой переменной, удовлетворяющих заданной системе дифференциальных уравнений, число которых равно числу неизвестных функций. Изложить метод вариации произвольных постоянных. Решения линейных систем методами неопределенных коэффициентов

План лекции. Основные понятия. Что называется, системой дифференциальных уравнений. Нормальная система дифференциальных уравнений. Решение системы дифференциальных уравнений. Динамическая система. Фазовое пространство, фазовая траектория. Теорема существования и единственности решения системы дифференциальных уравнений. Основные методы интегрирования систем дифференциальных уравнений. Метод сведения к одному уравнению более высокого порядка. Нахождение интегрируемых комбинаций. Симметрическая форма записи системы уравнений.

Система уравнений вида

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + f_i(t) \quad , \qquad i = \overline{1,k},$$

где a_{ij}=const, $x_i = x_i(t)$ – неизвестные функции, $f_i(t)$ – заданные функции (свободные члены), называется неоднородной системой линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Будем считать, что свободные члены $f_i(t)$ являются непрерывными функциями на некотором интервале (a,b). Решением системы уравнений (1) является любая совокупность непрерывно дифференцируемых функций $x_i(t)$ $(i = \overline{1,k})$, удовлетворяющих этой системе.

Система дифференциальных уравнений $\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j , \qquad i = \overline{1,k}$

называется однородной. Введя в рассмотрение векторы $\mathrm{x} = (x_1(t), x_2(t),..., x_n(t))$, $\mathrm{f} = (f_1(t), f_2(t),..., f_n(t))$ и матрицу $A = (a_{ij})$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$, системы неоднородную и однородную можно представить в векторной форме:

$$\frac{d\mathrm{x}}{dt} = A\mathrm{x} + \mathrm{f},$$

$$\frac{d\mathrm{x}}{dt} = A\mathrm{x}.$$

Матрица

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & ... & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & ... & x_{2n}(t) \\ ... & ... & ... & ... \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & ... & x_{nn}(t) \end{pmatrix},$$

где x_{ij} – координаты линейно независимых решений (векторов) $\mathrm{x}_1 = (x_{11}, x_{21},..., x_{n1}), \mathrm{x}_2 = (x_{12}, x_{22},..., x_{n2}),..., \mathrm{x}_n = (x_{1n}, x_{2n},..., x_{nn})$ векторного уравнения, называется фундаментальной матрицей этого уравнения. Иногда ее называют матрицей Вронского.

Определитель

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & ... & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & ... & x_{2n}(t) \\ ... & ... & ... & ... \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & ... & x_{nn}(t) \end{vmatrix},$$

составленный из частных решений система $\frac{d\mathrm{x}}{dt} = A\mathrm{x}.$, называется определителем Вронского.

Ключевые вопросы: 1) Дать определение системы обыкновенных дифференциальных уравнений. 2) Что называется решением системы дифференциальных уравнений? 3) Сформулировать теорему существования и единственности решения системы дифференциальных уравнений. 4) Что называется частным решением системы?

Лекции 6-7. Линейные системы с постоянными коэффициентами. Интегрирование систем Д.У. путем сведения к одному уравнению более высокого порядка. Нахождение интегрируемых комбинаций для систем Д.У. Метод Эйлера.

План лекции.

6.1. Общее решение системы $\dfrac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \qquad i = \overline{1,k}$

можно найти, пользуясь методом исключения неизвестных. Для этого из уравнений системы и из уравнений, получающихся дифференцированием уравнений, входящих в систему, исключают все неизвестные функции, кроме одной, для определения которой получают одно дифференциальное уравнение более высокого порядка. Интегрируя это уравнение, находят одну из неизвестных функций, а остальные неизвестные функции последовательно определяют из исходных уравнений.

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = 3x + 4y \end{cases} \quad (\dot{x} \text{ означает } \frac{dx}{dt} \text{ и т.д.}).$$

Решение. Исключая y из первого уравнения, имеем $y = \dot{x} - 2x$. Подставляя это во второе уравнение, получаем $\ddot{x} - 6\dot{x} + 5x = 0$. Корни характеристического уравнения $\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$ есть $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 5$. Следовательно, общее решение последнего уравнения будет $x = c_1 e^t + c_2 e^{5t}$. Подставляя выражение x в первое уравнение системы, найдем

$$y = (c_1 e^t + c_2 e^{5t})' - 2(c_1 e^t + c_2 e^{5t}) = -c_1 e^t + 3c_2 e^{5t},$$

значит, $\begin{matrix} x = c_1 e^t + c_2 e^{5t}, \\ y = -c_1 e^t + 3c_2 e^{5t}. \end{matrix}$

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y + z \\ \dot{y} = x - y + z \\ \dot{z} = x + y - z \end{cases}$$

Решение. Дифференцируя первое равенство и используя затем все три уравнения данной системы, имеем: $\ddot{x} = -\dot{x} + \dot{y} + \dot{z} = 3x - (\dot{x} + x) = 2x - \dot{x}$, или $\ddot{x} + \dot{x} - 2x = 0$; интегрируя полученное уравнение, находим $x = c_1 e^t + c_2 e^{-2t}$.

Далее, вычитая почленно из первого уравнения второе и учитывая полученное выражение для функции x, приходим к уравнению $\dot{y} + 2y = 3c_1 e^t$. Решив его, получим $y = c_1 e^t + c_3 e^{-2t}$.

Подставляя x и y в первое уравнение системы, находим z:

$$z = \dot{x} + x - y = (c_1 e^t + c_2 e^{-2t})' + (c_1 e^t + c_2 e^{-2t}) - c_3 e^{-2t} - c_1 e^t = c_1 e^t - (c_2 + c_3) e^{-2t}.$$

Таким образом, $\begin{cases} x = c_1 e^t + c_2 e^{-2t}, \\ y = c_1 e^t + c_3 e^{-2t}, \\ z = c_1 e^t - (c_2 + c_3) e^{-2t}. \end{cases}$

6.2. Общее решение системы $\dfrac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \qquad i = \overline{1,k}$

можно также найти методом Эйлера. Для этого определяем корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

т.е. находим собственные значения матрицы А. Каждому простому корню λ_i соответствует решение $c_i \mathrm{v}^i e^{\lambda_i t}$, где c_i – произвольная постоянная, $\boldsymbol{v}^i$ – собственный вектор матрицы А, соответствующий этому λ_i. Произвольная линейная комбинация

$$\mathrm{x} = \sum_{i=1}^{n} c_i v^i e^{\lambda_i t}$$

есть общее решение системы уравнений.

Если для корня λ кратности k имеется L линейно независимых собственных векторов и L<k, то решение, соответствующее этому λ, можно искать в виде произведения многочлена степени k-L на $e^{\lambda t}$, то есть в виде

$$\begin{cases} x_1 = \left(a + bt + \dots + dt^{k-l}\right)e^{\lambda t} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = \left(p + qt + \dots + st^{k-l}\right)e^{\lambda t} \end{cases}.$$

Чтобы найти коэффициенты a,b,…s, надо подставить решение предполагаемую форму решения в исходную систему и приравнять коэффициенты при подобных членах в левой и правой частях уравнений. Получим систему линейных алгебраических уравнений относительно $a, b, \dots, s$. Надо найти общее решение этой системы. Коэффициенты $a, b, \dots, s$ должны зависеть от k произвольных постоянных. Найдя для каждого λ решения указанного вида и сложив их, получим общее решение системы. Примеры.

__Пример 5__. Решить систему

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + y - 2z, \\ \dot{y} = x - 2y + 2z, \\ \dot{z} = 3x - 3y + 5z. \end{cases}$$

Решение. Составляем и решаем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & -2 \\ 1 & -2-\lambda & 2 \\ 3 & -3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \; ; \lambda^3 - \lambda^2 - 5\lambda - 3 = 0$$

$\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$. Для простого корня $\lambda_1 = 3$ находим собственный вектор (α, β, γ), решая систему

$$\begin{cases} -5\alpha + \beta - 2\gamma = 0, \\ \alpha - 5\beta + 2\gamma = 0, \\ 3\alpha - 3\beta + 2\gamma = 0. \end{cases}$$

Получаем $\alpha = -\beta$, $\gamma = 3\beta$. Значит, вектор (-1;1;3) – собственный и корню $\lambda = 3$ соответствует решение

$$x=-c_1e^{3t},\ y=c_1e^{3t},\ z=3c_1e^{3t}.$$

Для корня $\lambda=-1$ кратность k=2. Определим число L линейно независимых собственных векторов. При $\lambda=-1$ для координат собственного вектора получаем систему однородных уравнений с матрицей

$$\begin{pmatrix}-1 & 1 & -2\\ 1 & -1 & 2\\ 3 & -3 & 6\end{pmatrix}.$$

Ее порядок n=3, ранг r=1. Число L – линейно независимых собственных векторов равно n-r=2. Степень многочленов равна k-L=0. Ищем решение в виде

$$x=ae^{-t}\ ;\ y=be^{-t}\ ;\ z=ce^{-t}$$

Подставляем подставляя в систему и приравнивая коэффициенты при подобных членах, получаем:

$$\begin{cases}-a=-2a+b-2c,\\ -b=a-2b+2c,\\ -c=3a-3b+5c,\end{cases}\quad \text{или}\quad \begin{cases}a=b-2c,\\ b=a+2c,\\ b=a+2c,\end{cases}$$

которая соответствует одному скалярному уравнению $a-b+2c=0$, или $a=b-2c$ (b,c – произвольные постоянные). Положив $b=c_2$; $c=c_3$, имеем $a=c_2-2c_3$.

Подставив найденные a,b,c в предполагаемую форму решения и прибавив первое решение получаем общее решение системы:

$$\begin{aligned}&x=-c_1e^{3t}+(c_2-2c_3)e^{-t},\\ &y=c_1e^{3t}+c_2e^{-t},\\ &z=3c_1e^{3t}+c_3e^{-t}.\end{aligned}$$

3. В случае, когда имеются комплексные корни λ, изложенный способ дает выражение решения через комплексные функции. Если коэффициенты системы вещественны, можно выразить решение только через вещественные функции, так как вещественная и мнимая части решения, соответствующего корню $\lambda=\alpha+\beta i$ ($\beta\neq 0$), являются вещественными линейно независимыми решениями.

<u>Пример 7</u>. Решить систему

$$\begin{cases}\dot{x}=4x-y\\ \dot{y}=5x+2y\end{cases}$$

Решение. Составляем и решаем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix}4-\lambda & -1\\ 5 & 2-\lambda\end{vmatrix}=0\ ;\lambda^2-6\lambda+13=0\ ,\ \lambda=3\pm 2i.$$

Для корня $\lambda=3\pm 2i$ находим собственный вектор (a,b):

(1-2i) a - b =0; 5 a -(1+2i) b =0.

Можно взять $a=1$; b =1-2i. Имеем частное решение $x=e^{(3+2i)t}; y=(1-2i)e^{(3+2i)t}$.

Чтобы получить два вещественных решения, надо взять вещественную и мнимую части найденного комплексного решения:

$$x=e^{(3+2i)t}=e^{3t}\cos 2t+ie^{3t}\sin 2t=x_1+ix_2;$$

$$y=(1-2i)e^{(3+2i)t}=e^{3t}(\cos 2t+2\sin 2t+ie^{3t}(\sin 2t-2\cos 2t))=y_1+iy_2;$$

(x_1, y_1) и (x_2, y_2) – вещественные решения. Общее решение выражается через эти два решения:

$$x=c_1x_1+c_2x_2=c_1e^{3t}+c_2e^{3t}\sin 2t;$$
$$y=c_1y_1+c_2y_2=c_1e^{3t}(\cos 2t+2\sin 2t)+c_2e^{3t}(\sin 2t-2\cos 2t).$$

Пример 8. Решить систему

$$\begin{cases}\dot{x}=2x+y,\\ \dot{y}=x+3y-z,\\ \dot{z}=-x+2y+3z.\end{cases}$$

Решение. Составляем и решаем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix}2-\lambda & 1 & 0\\ 1 & 3-\lambda & -1\\ -1 & 2 & 3-\lambda\end{vmatrix}=0\ ;\lambda_1=2\ ,\lambda_2=3+i\ ,\lambda_3=3-i.$$

При этом частные решения будут иметь вид

$$x_1=A_1e^{2t}\ ;\quad x_2=A_2e^{(3+i)t}\ ;\quad x_3=A_3e^{(3-i)t}\ ;$$
$$y_1=B_1e^{2t}\ ;\quad y_2=B_2e^{(3+i)t}\ ;\quad y_3=B_3e^{(3-i)t}\ ;$$
$$z_1=C_1e^{2t}\ ;\quad z_2=C_2e^{(3+i)t}\ ;\quad z_3=C_3e^{(3-i)t}\ .$$

Для определения постоянных A_k, B_k, C_k, k=1,2,3 пользуемся системой алгебраических уравнений:

$$A_k(2-\lambda_k)+B_k=0\ ,\ A_k+(3-\lambda_k)B_k-C_k=0\ ,$$
$$-A_k+2B_k+(3-\lambda_k)C_k=0\ ,\ k=1,2,3.$$

Решив систему уравнений относительно A_k, B_k, C_k, k=1,2,3, получаем:

$B_1=0,\ A_1=C_1=A_2=A_3=1,\ B_2=1+i,\ C_2=2-i,\ B_3=1-i,\ C_3=2+i.$ Следовательно, общее решение:

$$x=\tilde{c}_1e^{2t}+\tilde{c}_2e^{3t}(\cos t+i\sin t)+\tilde{c}_3e^{3t}(\cos t-i\sin t);$$
$$y=\tilde{c}_2(1+i)e^{3t}(\cos t+i\sin t)+\tilde{c}_3(1-i)e^{3t}(\cos t-i\sin t);$$
$$z=\tilde{c}_1e^{2t}+\tilde{c}_2(2-i)e^{3t}(\cos t+i\sin t)+\tilde{c}_3(2+i)e^{3t}(\cos t-i\sin t).$$

Чтобы получить общее решение данной системы дифференциального уравнения в действительной форме, надо взять вещественную и мнимые части найденного комплексного решения. В частности, если положить

$$\tilde{c}_2=c_2+ic_3\ \ ,\ \ \tilde{c}_3=c_2-ic_3,$$

где c_2 , c_3 – действительные постоянные, и считать также $c_1=\tilde{c}_1$ действительной постоянной, можно дописать общее решение данной системы в действительной форме:

$$x=c_1e^{2t}+2e^{3t}(c_2\cos t-c_3\sin t),$$
$$y=2e^{3t}((c_2-c_3)\cos t-(c_2-c_3)\sin t),$$
$$z=c_1e^{2t}+2e^{3t}((2c_2+c_3)\cos t+(c_2-2c_3)\sin t).$$

7.1. Системы, не приведенные к нормальному виду, решаются теми же способами, как и нормальные системы. Продемонстрируем это на примерах.

Пример 9. Решить систему

$$\begin{cases} \ddot{x} = 3x + 4y, \\ \ddot{y} = -x - y. \end{cases}$$

Решение. Выразим x из второго уравнения системы и, подставив его в первое уравнение, получим

$$\left(-y'' - y\right)'' = 3\left(-y'' - y\right) + 4y, \; y^{IV} - 2y'' = 0 \; .$$

Решив последнее уравнение, будем иметь

$$y = (c_1 + c_2 t)e^t + (c_3 + c_4 t)e^{-t}.$$

Из второго уравнение находим x:

$$x = 2(c_4 - c_3 - c_4 t)e^{-t} - 2(c_1 + c_2 + c_2 t)e^t.$$

Пример 10. Решить систему

$$\begin{cases} \ddot{x} + \dot{x} + \dot{y} - 2y = 0, \\ \dot{x} - \dot{y} + x = 0. \end{cases}$$

Решение. Складывая почленно оба уравнения системы, имеем $\ddot{x} + \dot{x} + x = 2y$, откуда находим $y = \frac{1}{2}\left(\ddot{x} + \dot{x} + x\right)$.

Подставляя это значение y во второе уравнение системы, получим дифференциальное уравнение относительно функции x: $\dddot{x} + 2\ddot{x} - \dot{x} - 2x = 0$.

Решив его, имеем $x = c_1 e^{-2t} + c_2 e^t + c_3 e^{-t}$.

Учитывая полученное решение, находим $y = \frac{1}{2} c_1 e^{-2t} + 2c_2 e^t$.

Пример 11. Решить систему

$$\begin{cases} \ddot{x} + 5\dot{x} + 2\dot{y} + y = 0, \\ 3\ddot{x} + 5x + \dot{y} + 3y = 0. \end{cases}$$

Решение. Составляем и решаем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 + 5\lambda & 2\lambda + 1 \\ 3\lambda^2 + 5 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = 0 \;,\; \lambda_1 = \lambda_2 = 1 \;,\; \lambda_3 = -1.$$

Для корня λ=1 кратности k=2 получаем матрицу $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$ ранга r=1. Число L – линейно независимых собственных векторов – равно n-r=1, следовательно степень многочленов равна k-L=1 и решение можно искать в виде

$$x = (a + bt)e^t \;\; ; \;\; y = (c + dt)e^t .$$

Подставляя это выражение в исходную систему, получаем для a, b, c, d систему линейных уравнений. Решив ее, найдем $a = c_1$, $b = c_2$, $c = -2c_1 - c_2$, $d = -2c_2$. Для простого корня λ=-1 матрица имеет вид $\begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$ и собственный вектор (1,-4). Получаем решение $x = c_3 e^{-t}$, $y = -4c_3 e^{-t}$. Таким образом, общее решение представляется в следующем виде: $\begin{matrix} x = (c_1 + c_2 t)e^t + c_3 e^{-t} \\ y = (-2c_1 - c_2 - 2c_2 t)e^t - 4c_3 e^{-t} \end{matrix}$

Ключевые вопросы: 1) Изложить метод сведения к одному уравнению более высокого порядка. 2) Изложить метод нахождения интегрируемых комбинаций. 3) Записать нормальную систему в симметричной форме.

Лекция 8. Системы, не приведенные к нормальному виду. Фундаментальная матрица системы

План лекции.

1. Метод последовательных приближений.
2. метод Эйлера.
3. Разложение по формуле Тейлора.
4. Матричная экспонента.

Экспонентой e^A матрицы A называется сумма ряда

$$e^A = E + \frac{1}{1!}A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \ldots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}A^j,$$

где E – единичная матрица. Свойства матричной экспоненты:

а) если AB=BA, то $e^{A+B} = e^A \cdot e^B = e^B \cdot e^A$;

б) если A=CMC^{-1}, то $e^A = Ce^M C^{-1}$;

в) матрица X(t)= e^{At} является решением матричной задачи Коши: $\frac{dX}{dt} = AX$, X(0)=E, то есть является фундаментальной матрицей системы.

Из свойства в) следует, что решение x(t), удовлетворяющее условию $x(0) = x_0$, определяется выражением $x(t) = e^{At}x_0$. Таким образом, задача нахождения решений системы уравнений эквивалентна задаче отыскания матрицы e^{At} по матрице A. Последнее можно осуществить следующими двумя способами.

1. Путем решения системы дифференциальных уравнений. В силу свойства в) i-й столбец матрицы e^{At} есть решение системы уравнений (в векторной записи) $\dot{x} = Ax$ с начальными условиями $x_i(0) = 1$, $x_k(0) = 0$ при $k \neq i$ (x_i - i-я координата вектора x).

2. Путем приведения матрицы к жордановой форме. Пусть известна такая матрица C, что $C^{-1}AC = M$ имеет жорданову форму, то есть состоит из клеток K_j. Каждая жорданова клетка имеет вид K=λE+F, у матрицы F все элементы – нули, кроме первого косого ряда над диагональю. Поэтому F^m=0, где m – порядок матрицы F, и e^F легко найти с помощью ряда. Так как еще

$e^{\lambda E} = e^{\lambda}E$, то $e^K = e^{\lambda E + F} = e^{\lambda E}e^F = e^{\lambda}Ee^F = e^{\lambda}e^F$.

Составив из клеток e^{K_j} матрицу e^M, найдем e^A с помощью свойства б).

Пример 12. Вычислить e^{At}, если

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. По определению матричной экспоненты имеем $e^{At} = E + At + \frac{A^2t^2}{2!} + ...$

Вычислим матрицы A^k (k=2,3,...):

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$A^4 = A^3 A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда видно, что $A^{2k}=(-1)^kE$, $A^{2k+1}=(-1)^kA$, k=0,1,2,... Поэтому

$$e^{At} = E + At - E\frac{t^2}{2!} - A\frac{t^3}{3!} + E\frac{t^4}{4!} + ... =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}t - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{t^2}{2!} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\frac{t^3}{3!} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{t^4}{4!} + ... =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + ... & t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - ... \\ -t + \frac{t^3}{3!} - \frac{t^5}{5!} + ... & 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - ... \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

<u>*Пример 13*</u>. Вычислить матрицу e^{At}, если

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Собственные числа данной матрицы $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-1$. Найдем такую невырожденную матрицу

$C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, чтобы $A=C^{-1}JC$, где $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Для определения матрицы C получаем уравнение

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{pmatrix} 3a+4b & -2a-3b \\ 3c+4d & -2c-3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -c & -d \end{pmatrix};$$

отсюда $a+2b=0$, c+d=0. Одно из решений полученных уравнений есть $a=2$, $b=-1$, c=-1, d=1, поэтому в качестве C можно взять матрицу

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица к матрице C имеет вид

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, справедливо равенство

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Учитывая равенство $e^{At}=C^{-1}e^{Jt}C$, имеем

$$e^{At}=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^t&0\\0&e^{-t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^t&e^{-t}\\e^t&2e^{-t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1\\-1&1\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}2e^t-e^{-t}&-e^t+e^{-t}\\2e^t-2e^{-t}&-e^t+2e^{-t}\end{pmatrix}.$$

Пример 14. Решить систему уравнений

$$\frac{d\mathrm{x}}{dt}=A\mathrm{x},\ \mathrm{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\ \mathrm{A}=\begin{pmatrix}-2&-2\\4&4\end{pmatrix},\text{ вычислив матрицу } e^{At}.$$

Решение. Собственными числами матрицы A являются $\lambda_1=0$, $\lambda_2=2$. Найдем такую матрицу $T=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$, чтобы $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&-2\\4&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$.

Перемножая матрицы в обеих частях записанного равенства, получим систему уравнений для определения чисел a,b,c,d: $-a+2b=0$, $-c+d=0$. Эта система алгебраических уравнений имеет решение $a=2$, $b=1$, $c=1$, $d=1$. Поэтому

$$T=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix},\ T^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}.$$

Учитывая равенство $A=T^{-1}JT$, находим

$$e^{At}=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}e^{\begin{pmatrix}0&0\\0&2\end{pmatrix}t}\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&e^{2t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}1&-e^{2t}\\-1&2e^{2t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-e^{2t}&1-e^{2t}\\-2+2e^{2t}&-1+2e^{2t}\end{pmatrix}.$$

Таким образом, любое решение x(t) данной системы уравнений, проходящее при t=0 через точку x_0, запишем в виде

$$\mathrm{x}(t)=\begin{pmatrix}2-e^{2t}&1-e^{2t}\\-2+2e^{2t}&-1+2e^{2t}\end{pmatrix}\mathrm{x}_0.$$

Ключевые вопросы: 1) Приближённый метод интегрирования систем дифференциальных уравнений, метод Эйлера. и уравнений n-го порядка. 2) решение систем используя фундаментальную матрицу.

Лекция 9. Линейные неоднородные системы. Метод вариации произвольных постоянных. Периодические решения. Решения линейных систем методами неопределенных коэффициентов.

Цель и задачи лекции. Ввести линейные системы с постоянными коэффициентами и построить линейно независимые частные решения. Изложить метод неопределенных коэффициентов для решения неоднородных систем

План лекции.

Линейной неоднородной системой называется система вида

$$\frac{dx_i}{dt}=a_{i1}(t)x_1+a_{i2}(t)x_2+...+a_{in}(t)x_n+f_i(t),\ i=\overline{1,n},$$

или в векторной записи

$$\frac{d\mathrm{x}}{dt}=A(t)\mathrm{x}+\mathrm{f}(t),$$

где x – вектор с компонентами $x_1, ..., x_n$; $A(t)=\{a_{ij}(t)\}$ – матрица, компонентами которой являются функции $a_{ij}(t)$; f(t) – вектор-функция с компонентами $f_i(t)$.

9.1. Систему линейных неоднородных уравнений можно решать путем приведения их к одному уравнению более высокого порядка.

Пример 1. Решить систему

$$\begin{cases} \dot{x} = y + 2e^t \\ \dot{y} = x + t^2 \end{cases}.$$

Решение. Исключая у из первого уравнения, имеем $y = \dot{x} - 2e^t$. Подставляя это выражение во второе уравнение, получаем $(\dot{x} - 2e^t)' = x + t^2$, или $\ddot{x} - x = t^2 + 2e^t$. Интегрируем последнее уравнение. Сначала найдем решение однородного уравнения: $\ddot{x} - x = 0$, $\lambda^2 - 1 = 0$; $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$. Получаем общее решение однородного уравнения $x = c_1 e^{-t} + c_2 e^t$. Частное решение неоднородного уравнения найдем методом неопределенных коэффициентов.

В результате будем иметь

$$x = c_1 e^{-t} + c_2 e^t - t^2 + te^t - 2.$$

Далее, подставляя x в первое уравнение системы, найдем

$$y = (c_1 e^{-t} + c_2 e^t - t^2 + te^t - 2)' - 2e^t = -c_1 e^{-t} + c_2 e^t - 2t + e^t + te^t - 2e^t =$$

$$= -c_1 e^{-t} + c_2 e^t + (t-1)e^t - 2t;$$

значит, $x = c_1 e^{-t} + c_2 e^t + te^t - t^2 - 2$, $y = c_1 e^{-t} + c_2 e^t + (t-1)e^t - 2e^t$.

Пример 2. Решить систему

$$\dot{x} + y = t^2 + 6t + 1, \quad \dot{y} - x = -3t^2 + 3t + 1.$$

Решение. Подставляя значения $y = t^2 + 6t + 1 - \dot{x}$, найденное из первого уравнения системы, во второе уравнение, имеем

$$\ddot{x} + x = 3t^2 - t + 5.$$

Интегрируя это уравнение, получаем общее решение: $x = c_1 \sin t + c_2 \cos t + \bar{x}(t)$ где $\bar{x}(t)$ – частное решение неоднородного уравнения, которое проще всего найти методом неопределенных коэффициентов. В результате имеем

$$x = c_1 \sin t + c_2 \cos t + 3t^2 - t - 1.$$

Далее, подставив значение x в первое уравнение системы, найдем

$$y = c_2 \sin t - c_1 \cos t + t^2 + 2.$$

9.2. Решение линейной неоднородной системы можно найти методом вариации постоянных, если известно общее решение однородной системы с теми же коэффициентами $a_{ij}(t)$. Для этого в формуле общего решения однородной системы надо заменить произвольные постоянные c_i на неизвестные функции $c_i(t)$. Полученные выражения для x_i надо подставить в систему (3.25) и из этой системы найти функции $c_i(t)$.

Пример 3. Применяя метод вариации, решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = -4x - 2y + \dfrac{2}{e^t - 1}, \\ \dot{y} = 6x + 3y - \dfrac{3}{e^t - 1}. \end{cases}$$

Решение. Прежде всего решаем однородную систему уравнений, соответствующую данной системе: $\begin{cases} \dot{x} = -4x - 2y, \\ \dot{y} = 6x + 3y. \end{cases}$

Подставляя значение $y=-2x-\frac{1}{2}\dot{x}$ во второе уравнение, получаем $\ddot{x}+\dot{x}=0$, откуда $x=c_1+c_2e^{-t}$, тогда $y=-2c_1-\frac{3}{2}c_2e^{-t}$. Для определения общего решения неоднородной системы, согласно методу вариации произвольных постоянных, считаем c_1 и c_2 некоторыми функциями: $c_1(t)$ и $c_2(t)$.
Эти функции найдем из системы уравнений, которая получится в результате подстановки значений x и y в неоднородную систему:

$$\begin{cases} c_1'(t)+c_2'(t)e^{-t}=\dfrac{2}{e^t-1}, \\ -2c_1'(t)-\dfrac{3}{2}c_2'(t)e^{-t}=-\dfrac{3}{e^t-1}. \end{cases}$$

Отсюда положим $c_2'(t)=\frac{2e^t}{e^t-1}$, $c_1'(t)=0$. Интегрируя последние уравнения, получаем $c_1(t)=\tilde{c}_1$, $c_2(t)=2\ln(e^t-1)+\tilde{c}_2$, где $\tilde{c}_1$ и $\tilde{c}_2$ – произвольные постоянные. Подставляя значения $c_1(t)$ и $c_2(t)$ в общее решение однородной системы, имеем общее решение исходной системы:

$$\begin{cases} x=\tilde{c}_1+\tilde{c}_2e^{-t}+2e^{-t}\ln|e^t-1|, \\ y=-2\tilde{c}_1-\dfrac{3}{2}\tilde{c}_2e^{-t}-3e^{-t}\ln|e^t-1|. \end{cases}$$

Общее решение линейной неоднородной системы есть сумма общего решения соответствующей ей однородной системы и частного решения неоднородной системы.

9.3. Частные решения линейной неоднородной системы с постоянными коэффициентами можно искать методом неопределенных коэффициентов в том случае, когда функции $f_i(t)$ состоят из сумм и произведений функций t^m, $e^{\alpha t}$, $\cos\beta t$, $\sin\beta t$. Это делается по тем же правилам, что и для одного линейного уравнения с постоянными коэффициентами, но со следующими изменениями. Если $f_i(t)=P_{m_i}(t)e^{\gamma t}$, где $P_{m_i}(t)$ – многочлен степени m_i, то частное решение системы ищется в виде

$$Q^i_{m+s}(t)e^{\gamma t},\ i=\overline{1,n},$$

где $Q^i_{m+s}(t)$ - многочлен степени m+s с неизвестными коэффициентами, $m=\max\{m_i,s\}=0$, если γ – не корень характеристического уравнения, а если γ – корень, то s следует взять равным кратности этого корня.

Аналогично определяются степени многочленов в случае, когда $f_i(t)$ содержит $e^{\alpha t}\cos\beta t$ и $e^{\alpha t}\sin\beta t$,; здесь $\gamma=\alpha+\beta i$.

Неизвестные коэффициенты многочлена определяются путем подстановки (3.27) в данную систему и сравнения коэффициентов подобных членов.

Пример 4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=y-5\cos t, \\ \dfrac{dy}{dt}=2x+y. \end{cases}$$

Решение. Найдем общее решение однородной системы:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + y. \end{cases}$$

Составляем и решаем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0,\ \lambda^2\text{-}\lambda\text{-}2=0;\ \lambda_1=-1,\ \lambda_2=2.$$

Общее решение соответствующей однородной системы:

$$\begin{cases} x_{\text{од.}} = c_1e^{-t} + c_2e^{2t}, \\ y_{\text{од.}} = -c_1e^{-t} + 2c_2e^{2t}. \end{cases}$$

Частное решение неоднородной системы найдем методом неопределенных коэффициентов, полагая

$$\begin{cases} x = A_1\sin t + B_1\cos t, \\ y = A_2\sin t + B_2\cos t. \end{cases}$$

Подставляя эти выражения в данную систему уравнений, получим уравнения для определения коэффициентов A_1, A_2, B_1, B_2:

$$\begin{cases} A_1 - B_2 = -5, \\ B_1 + A_2 = 0, \\ A_2 - 2B_1 - B_2 = 0, \\ 2A_1 + B_2 + A_2 = 0. \end{cases}$$

Решая эти уравнения, найдем A_1=-2, B_1=-1, A_2=1, B_2=3. Общее решение данной системы уравнений запишем в виде

$$\begin{cases} x = c_1e^{-t} + c_2e^{2t} - 2\sin t - \cos t, \\ y = -c_1e^{-t} + 2c_2e^{2t} + \sin t + 3\cos t. \end{cases}$$

Пример 5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y + 2e^{t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y - 3e^{4t}. \end{cases}$$

Решение. Находим корни характеристического уравнения соответствующей однородной системы:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0,\ \lambda^2\text{-}4\lambda\text{+}3=0,\ \lambda_1=1,\ \lambda_2=3.$$

Общее решение однородной системы:

$$\begin{cases} x_{\text{од.}} = c_1e^{t} + c_2e^{3t}, \\ y_{\text{од.}} = -c_1e^{t} + c_2e^{3t}. \end{cases}$$

Поскольку λ – корень характеристического уравнения однородной системы, частное решение данной системы ищем в виде

$$x_{\text{ч.н.}} = (A_1 + A_2t)e^{t} + A_3e^{4t},\ \ y_{\text{ч.н.}} = (B_1 + B_2t)e^{t} + B_3e^{4t}.$$

Подставляя эти выражения в данную систему, получаем уравнения для определения неизвестных коэффициентов A_i, B_i $(i=\overline{1,3})$:

$$\begin{cases} -A_1+A_2-B_1=2, \\ A_1+B_1-B_2=0, \\ A_2+B_2=0, \\ 2A_3-B_3=0, \\ 2B_3-A_3=3. \end{cases}$$

Из этих уравнений находим $A_1=0$, $A_2=1$, $A_3=-1$, $B_1=-1$, $B_2=-1$, $B_3=-2$. Частное решение неоднородной системы:

$$\begin{cases} x_{ч.н.}=te^t-e^{4t}, \\ y_{ч.н.}=-(t+1)e^t-2e^{4t}, \end{cases}$$

а ее общее решение:

$$\begin{cases} x=c_1e^t+c_2e^{3t}+te^t-e^{4t}, \\ y=-c_1e^t+c_2e^{3t}-(t+1)e^t-2e^{4t}. \end{cases}$$

Ключевые вопросы: 1) Как решить систему не приведенных к нормальному виду. 2)Какими методами можно найти решения неоднородных систем? 3) Метод вариации произвольных постоянных. 4) Что называется матричной экспонентой? 5)Какова идея метода неопределенных коэффициентов, отыскания частных решений неоднородной системы дифференциальных уравнений?

Раздел 4. Теория устойчивости

Лекция 10-12. Основные понятия. Устойчивость по Ляпунову.

Фазовые траектории двумерной линейной системы с постоянными коэффициентами. Простейшие типы точек покоя.

План лекции.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(t,x_1,x_2,...,x_n),\ \ i=\overline{1,n}, \tag{1}$$

или в векторной записи

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x),\ \ x=(x_1,x_2,\dots,x_n). \tag{2}$$

Пусть f_i и $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_k}$ непрерывны при $t_0\le t<\infty$.

Решение $x=\varphi(t)$ системы (2) называется устойчивым по Ляпунову, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что для всякого решения $x(t)$ той же системы, начальное значение которого удовлетворяет неравенству

$$|x(t_0)-\varphi(t_0)|<\delta; \tag{3}$$

при всех $(t_0\le t<\infty)$ выполняется неравенство

$$|x(t)-\varphi(t)|<\varepsilon. \tag{4}$$

Если же для некоторого $\varepsilon>0$ такого δ не существует, то решение $\varphi(t)$ называется неустойчивым.

Если решение $\varphi(t)$ устойчиво по Ляпунову и удовлетворяет условию

$$\lim_{t\to+\infty}|x(t)-\varphi(t)|=0,$$

то оно называется асимптотически устойчивым.

Исследование на устойчивость решения φ(t) может быть сведено к исследованию на устойчивость тривиального решения (точки покоя) с помощью замены $y = x-\varphi(t)$.

Пользуясь определением устойчивости по Ляпунову, выясните, устойчиво ли тривиальное решение дифференциальных уравнений в следующих примерах.

Пример 1. $\dot{x}=4x-t^2x.$

Решение. Разделяя переменные и интегрируя, находим общее решение:

$$x(t)=ce^{(4t-\frac{t^3}{3})}.$$

Это решение описывает однопараметрическое семейство интегральных кривых и содержит при c=0 тривиальное решение. Полагая t_0=0, имеем в общем случае c=x(0). Отсюда

$|x(t)=|x(0)|e^{4t-\frac{t^3}{3}}\le|x(0)|e^{\frac{16}{3}}<|x(0)|e^6$ при $t\ge 0.$

Пусть любое $\varepsilon>0$ задано. Тогда ясно, что из неравенства (3) будет следовать неравенство (4) при $\varphi(t)\equiv 0$, если взять $\delta(\varepsilon)=\varepsilon e^{-6}$. Таким образом, решение $\varphi(t)\equiv 0$ устойчиво по Ляпунову. Кроме того, поскольку $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}c\exp(4t-\dfrac{t^3}{3})=0,$ то согласно определению это решение асимптотически устойчиво.

Пример 2. $3(t-1)\dot{x}=x.$

Решение. Общее решение данного уравнения имеет вид

$$x(t)=c(t-1)^{\frac{1}{3}}$$

и при c=0 содержит тривиальное решение $x=\varphi(t)\equiv 0.$ Полагая t_0=2, имеем в общем случае c=x(2).

Отсюда $|x(t)|=|x(2)|\cdot|t-1|^{\frac{1}{3}}$.Возьмем $\varepsilon\ge 0.$ Тогда, каким бы малым ни было $\delta>0,$ несмотря на выполнение неравенства

$$|x(2)|<\delta,$$

можно указать момент t (любое $t>t^*=1+\dfrac{\varepsilon}{|x(2)|^3}$), в который $|x(t)|>\varepsilon.$

Следовательно, тривиальное решение неустойчиво.

12.2. Особые точки

Пусть в системе дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt}=M(x,y),\quad \frac{dy}{dt}=N(x,y)$$

функции M,N непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности точки (x_0,y_0) где они одновременно обращаются в нуль, то есть $M(x_0,y_0)$=0, $N(x_0,y_0)$=0.

Точка (x_0,y_0), в окрестности которой функции M, N непрерывно дифференцируемы и $M(x_0,y_0)$=$N(x_0,y_0)$=0, называется особой точкой системы на плоскости 0xy.

Для исследования расположения траекторий вблизи особой очки (0,0) системы

$$\dot{x}=ax+by;\quad \dot{y}=cx+dy$$

надо найти собственные значения λ_1,λ_2 характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Если λ_1, λ_2 вещественны, различны и одного знака, то особая точка – узел (картина интегральных кривых в окрестности начала координат напоминает семейство парабол, вершины которых совпадают с точкой (0, 0)). Если корни имеют разные знаки, то особая точка называется седлом, а интегральные кривые представляют собой несколько деформированные гиперболы. Если корни комплексные, но $\operatorname{Re}\lambda_{1,2} \neq 0$, то особая точка называется фокусом, а интегральные кривые имеют вид спиралей, закручивающихся вокруг начала координат. Если же $\operatorname{Re}\lambda_{1,2} = 0$, но $\operatorname{Im}\lambda_{1,2} \neq 0$, то особая точка – центр. Интегральные кривые в этом случае замкнуты и охватывают начало координат.

Кроме этих (основных) особых точек различают еще точки *вырожденный узел* ($\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$) и докритический узел (лишь в случае, когда система имеет вид $\frac{dx}{dt} = ax;\ \frac{dy}{dt} = ay;\ a \neq 0$).

Выясним, как расположены траектории вблизи особой точки относительно осей координат. Вдоль каждого собственного вектора матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

системы в особую точку входит прямолинейная траектория этой системы. В случае узла остальные траектории касаются с двух сторон прямой, идущей вдоль собственного вектора с меньшим по модулю собственным значением. В случае фокуса и вырожденного узла надо определить направление закручивания траектории.

В следующих примерах нужно исследовать особые точки и изобразить графически семейство интегральных кривых в окрестности особой точки.

Пример 1.

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 3y, \\ \dot{y} = -6x - 5y. \end{cases}$$

Решение. Составляем и решаем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ -6 & -5-\lambda \end{vmatrix} = 0;\ \ \lambda_{1,2} = -2 \pm 3i.$$

Поскольку $\operatorname{Re}\lambda_{1,2} < 0$, то точка (0, 0) является устойчивым фокусом (рис. 1).

Чтобы выяснить направление закручивания интегральных кривых (спиралей) построим вектор скорости в точке (1, 0):

$$\dot{x} = 1,\ \ \dot{y} = -6 \text{ (рис.1).}$$

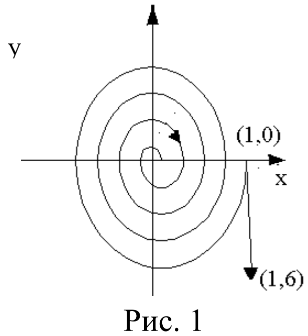


Рис. 1

Пример 2. $\dot{x} = -2x - 5y,\ \ \dot{y} = 2x + 2y.$

Решение. Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & -5 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

имеет корни $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{6}$. Следовательно, особая точка – центр. Направление движения по траектории определяем по вектору скорости: $(\dot{x}(0,1); \dot{y}(0,1)) = (-5,2)$. Для установления уравнений прямых y=kx, на которых расположены оси эллипсов, найдем экстремумы функций $f = f(x, y) = x^2 + y^2$ при условии, что $\dfrac{y}{x} = k$ и $\dot{x} = -2x - 5y,\ \ \dot{y} = 2x + 2y.$

Из необходимого условия экстремума получаем уравнение $\dfrac{df}{dt} = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 0,$

подставив в которое значения $\dot{x}, \dot{y}, y = kx,$ после сокращения на x^2 приходим к уравнению

$$2k^2 - 3k - 2 = 0.$$

Следовательно, на прямых $y = 2x,$

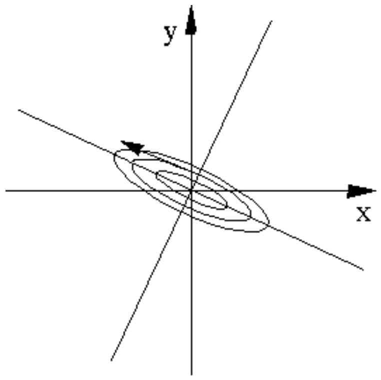


Рис. 2.

Пример 3. $\dot{x} = 3x - 4y,\ \ \dot{y} = x - 2y.$

Решение. Из уравнения

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

находим $\lambda_{1,2} = \dfrac{1 \pm 3}{2}$. Так как корни $\lambda_{1,2}$ действительны и имеют разные знаки, то особая точка – седло. В этом случае семейство интегральных кривых (гипербол) имеет две прямые, проходящие через начало координат x=t, y=kt (t – параметр). Для нахождения углового коэффициента k подставим параметрические уравнения прямых в систему дифференциальных уравнений.

После исключения параметра t получим уравнение для k: $4k^2-5k+1=0$, откуда $k_1=1$, $k_2 = \dfrac{1}{4}$. Следовательно, среди интегральных кривых имеются две прямые: $y = x,\ \ y = \dfrac{x}{4}.$ Построив четыре вектора скорости:

$$v_1(0,-1) = (4,2); v_2(0,1) = (-4,-2); v_3(1,\frac{1}{2}) = (0,1); v_4(-1,-\frac{1}{2}) = (-1,0),$$

устанавливаем направление движения по траекториям (рис. 3).

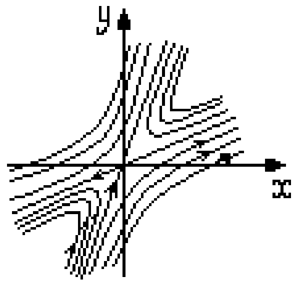


Рис. 3

<u>Ключевые вопросы</u>: 1) Какое решение системы называется устойчивым? 2) Какое решение системы называется неустойчивым? 3) Какое решение системы называется асимптотически устойчивым? 4) Что называется точкой покоя? 5) Сформулируйте условия устойчивости в применении к точке покоя. 6) Какая точка покоя называется устойчивым узлом? 7) Какая точка покоя называется неустойчивым узлом. 3) Какая особая точка называется седлом? 8) Какая особая точка называется устойчивым фокусом? 9) Какая особая точка называется неустойчивым фокусом? 10) Какая точка покоя называется центром? 11) Что такое дикритический узел?

<u>Лекция</u> 13. Второй метод Ляпунова, исследование на устойчивость при помощи функций Ляпунова.

Производной от функции $V(t,x_1,\ldots,x_n)$ в силу системы (1) называется функция

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(2.1)} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x_1} f_1 + \ldots + \frac{\partial v}{\partial x_n} f_n.$$

где $f_1,\ldots,f_n$ – правые части системы (1).

<u>Теорема Ляпунова</u> (об устойчивости тривиального решения нелинейной системы). Пусть система (4.1) обладает тривиальным решением $\bar{x} = \bar{0}$. Если существует дифференцируемая функция $v(x_1,\ldots,x_n)$, удовлетворяющая в области $|\bar{x}| < \varepsilon_0$ условиям:

1) $v>0$ при $\bar{x} \neq \bar{0}$, $v(0)=0$;
2) $\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(2.1)} \le 0$ при $|\bar{x}| < \varepsilon_0$, $t>t_0$,

то тривиальное решение системы (4.1) устойчиво.

Если вместо условия 2) выполнено более сильное условие:

3) $\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(2.1)} \le -W(\bar{x}) < 0$ при $0 < |\bar{x}| < \varepsilon_0$, $t>t_0$,

а функция $W(\bar{x})$ непрерывна при $|\bar{x}| < \varepsilon_0$, $t>t_0$, то тривиальное решение системы (1) асимптотически устойчиво.

<u>Теорема Четаева</u> (о неустойчивости). Пусть система (1) обладает тривиальным решением $\bar{x} = \bar{0}$. Пусть в некоторой области $G \subset R^n$ существует дифференцируемая функция $v(x_1,\ldots,x_n)$, причем:

1) точка $\bar{x} = \bar{0}$ принадлежит границе области G;
2) $v=0$ на границе области G при $|\bar{x}| < \varepsilon_0$;
3) в области G при $t>t_0$ имеем $v>0$, $\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(2.1)} \ge W(\bar{x}) > 0,$ функция $W(\bar{x})$

непрерывная.

Тогда тривиальное решение системы (4.1) неустойчиво.

Построив функцию Ляпунова и применив теорему Ляпунова или Четаева, исследовать устойчивость нулевого решения в следующих задачах.

Пример 1.

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 - x_1 + x_1x_2,\\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 - x_1^2 - x_2^3.\end{cases}$$

Решение. Дифференцируемая функция $v = v(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2$ удовлетворяет условиям

а) $v(x_1,x_2) > 0$ при $x_1^2 + x_2^2 \neq 0,\ \ v(0,0) = 0;$

б) $\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{\partial v}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \dfrac{\partial v}{\partial x_2}\dot{x}_2 = 2x_1(x_2 - x_1 + x_1x_2) + 2x_2(x_1 - x_2 - x_1^2 - x_2^3) =$

$= -2((x_1 - x_2)^2 + x_2^4) \leq 0.$

Следовательно, согласно теореме Ляпунова, нулевое решение устойчиво. Более того, так как функция

$W(\bar{x}) = 2((x_1 - x_2)^2 + x_2^4)$

удовлетворяет условию 3) теоремы Ляпунова, тривиальное решение асимптотически устойчиво.

Пример 2.

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = 2x_2^3 - x_1^5,\\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2^3 + x_2^5.\end{cases}$$

Решение. Поскольку дифференцируемая функция $v = v(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^4$ удовлетворяет условиям

а) $v(x_1,x_2) > 0$ при $x_1^2 + x_2^2 \neq 0,$ $v(0,0) = 0;$

б) $\dfrac{dv}{dt} = 2x_1(2x_2^3 - x_1^5) + 4x_2^3(-x_1 - x_2^3 + x_2^5) = -2(x_1^6 + x_2^6 - 2x_2^8) \leq 0$

в некоторой малой окрестности точки (0,0), то по второй теореме Ляпунова нулевое решение устойчиво.

Пример 3.

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = 2x_2 - x_1 - x_2^3,\\ \dot{x}_2 = x_1 - 2x_2.\end{cases}$$

Решение. Функция $v = v(x_1,x_2) = (x_1 + x_2)^2 + \dfrac{1}{2}x_2^4$ дифференцируема, неотрицательна при $x_1^2 + x_2^2 \neq 0$ и $v(0,0) = 0.$ Ее полная производная $\dfrac{dv}{dt}$ в силу уравнений данной системы имеет вид

$$\frac{dv}{dt} = 2(x_1 + x_2)(\dot{x}_1 + \dot{x}_2) + 2x_2^3\dot{x}_2 = -6x_2^4 \leq 0.$$

Следовательно, согласно теореме Ляпунова, нулевое решение устойчиво.

Пример 4.

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_1^3 - x_2,\\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2^3.\end{cases}$$

Решение. Функция $v = v(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2$ удовлетворяет условиям а) $v(x_1,x_2)>0$ в области $G: x_1^2+x_2^2\neq 0$; на границе области G (в точке (0,0)) $v(0,0)=0$;

б) $\dfrac{dv}{dt}=2x_1\dot{x}_1+2x_2\dot{x}_2=2x_1(x_1^3-x_2)+2x_2(x_1+x_2^3)=2(x_1^4+x_2^4)>0$ при $(x_1,x_2)\in G.$

Следовательно, согласно теореме Четаева, нулевое решение неустойчиво (заметим, что в качестве функции $W=W(x)$ здесь можно взять выражение $W=2(x_1^4+x_2^4)$).

<u>Ключевые вопросы</u>: 1) Сформулируйте теорему Ляпунова об устойчивости. 2) Сформулируйте теорему Ляпунова об асимптотической устойчивости. 3) Сформулируйте теорему Четаева о неустойчивости. 4) Какая функция называется функцией Ляпунова?

<u>Лекция</u> 14. Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению и ее применение. Признаки отрицательности действительных частей всех корней многочлена. Теорема Гурвица. Устойчивость при постоянных действующих возмущениях.

<u>План лекции.</u>

14.1. Рассмотрим действительную дифференциальную систему

$$\frac{d\bar{x}}{dt}=A\bar{x}+\bar{g}(t,\bar{x}), \tag{5}$$

где A – постоянная матрица; $\bar{g}(t,\bar{x})\in C(t_0\le t<\infty, \|\bar{x}\|<H)$, причем $\bar{g}(t,\bar{x})=o(\|\bar{x}\|)$ равномерно по t, т.е.

$$|\bar{g}(t,\bar{x})|\le\alpha_i(\bar{x})\|\bar{x}\|,\ \ \alpha_i\to 0 \text{ при } \bar{x}\to 0,\ \ i=\overline{1,n} \tag{6}$$

Систему (5) будем называть квазилинейной; очевидно, эта система допускает тривиальное решение $\bar{x}=0.$ В этом случае систему $\dfrac{d\bar{\xi}}{dt}=A\bar{\xi}$ называют системой первого приближения системы (4.5) при $\bar{x}\to 0.$

Теорема Ляпунова (об устойчивости по первому приближению). Если все собственные значения λ_j $(j=\overline{1,n})$ матрицы A имеют отрицательные вещественные части, Re $\lambda_j<0$ $(j=\overline{1,n})$, то тривиальное решение системы (5) асимптотически устойчиво по Ляпунову при $t\to+\infty$; если же хотя бы одно собственное значение имеет положительную вещественную часть (Re $\lambda_j>0$), то тривиальное решение неустойчиво.

Чаще всего используются следующие нормы:

$$\|x(t)\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i(t)|^2},\ \ \|x(t)\|=\max_k|x_k(t)|,\ \ \|x(t)\|=\sum_{k=1}^{n}|x_k(t)|.$$

В примерах 1–3 требуется исследовать на устойчивость тривиальное решение системы.

<u>Пример 1</u>.

$$\begin{cases} x_1'=2x_1x_2-x_1+x_2,\\ x_2'=2x_1-3x_2+5x_1^4+x_2^5.\end{cases}$$

Решение. Поскольку для нелинейных членов $g_1(t,x_1,x_2)=2x_1x_2$, $g_2(t,x_1,x_2)=5x_1^4+x_2^5$ справедливы оценки

$$|g_1|=2|x_1x_2|\le x_1^2+x_2^2=\alpha_1(x_1,x_2)||x||,\ \ g_2=|5x_1^4+x_2^5|\le\alpha_2(x_1,x_2)||x||,$$

где $\alpha_1(x_1,x_2)=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$, $\alpha_2(x_1,x_2)=\dfrac{5x_1^4+x_2^5}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}$, $||x||=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$; $\alpha_1\to 0$, $\alpha_2\to 0$ при $||x||\to 0$, то согласно указанной теореме будем исследовать на устойчивость нулевое решение линейной системы:

$$\begin{cases} x_1' = -x_1 + x_2, \\ x_2' = 2x_1 - 3x_2. \end{cases}$$

Составив и решив характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 1; \ \lambda_1 = -2+\sqrt{3}, \ \lambda_2 = -2-\sqrt{3},$$

видим, что Re $\lambda_1<0$, Re $\lambda_2<0$. Следовательно, нулевое решение данной системы асимптотически устойчиво.

Пример 2.

$$\begin{cases} x_1' = \ln(4x_2 + e^{-3x_1}), \\ x_2' = 2x_2 - 1 + (1-6x_1)^{\frac{1}{3}}. \end{cases}$$

Решение. Для выделения линейных членов разложим правые части данных уравнений, пользуясь формулой Маклорена:

$$\ln(4x_2 + e^{-3x_1}) = \ln(4x_2 + 1 - 3x_1 + \frac{9}{2}x_1^2 + o(x_1^2)) = \ = -3x_1 + 4x_2 - 8x_2^2 + 12x_1x_2 + o(x_1^2 + x_2^2);$$

$$2x_2 - 1 + (1-6x_1)^{\frac{1}{3}} = 2x_2 - 1 + (1 - 2x_1 - 4x_1^2) + o(x_1^2 + x_2^2) = \qquad = 2x_2 - 2x_1 - 4x_1^2 + o(x_1^2 + x_2^2).$$

Поэтому соответствующая линейная система запишется в виде

$$\begin{cases} x_1' = -3x_1 + 4x_2, \\ x_2' = -2x_1 + 2x_2. \end{cases}$$

Составим и решим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & 4 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda + 2 = 0; \ \lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}.$$

Так как Re $\lambda_{1,2}<0$, нулевое решение данной системы асимптотически устойчиво.

Пример 3.

$$\begin{cases} x_1' = e^{x_1} - e^{-3x_3}, \\ x_2' = 4x_3 - 3\sin(x_1 + x_2), \\ x_3' = \ln(1 + x_3 - 3x_1). \end{cases}$$

Решение. Пользуясь формулой Маклорена, представляем правые части в виде:

$$e^{x_1} - e^{-3x_3} = x_1 + 3x_3 + \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{9}{2}x_3^2 + o(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2),$$

$$4x_3 - 3\sin(x_1 + x_2) = 4x_3 - 3(x_1 + x_2) + o(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2),$$

$$\ln(1 + x_3 - 3x_1) = x_3 - 3x_1 - \frac{1}{2}(x_3 - 3x_1)^2 + o(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2).$$

Далее исследуем на устойчивость нулевое решение системы:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + 3x_3, \\ \dot{x}_2 = -3x_1 - 3x_2 + 4x_3, \\ \dot{x}_3 = -3x_1 + x_3. \end{cases}$$

Корни λ_k характеристического уравнения:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 3 \\ -3 & -3-\lambda & 4 \\ -3 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ есть } \lambda_1=-3,\ \lambda_{2,3} = 1 \pm 3i.$$

Поскольку Re $\lambda_{2,3}>0$, то по теореме Ляпунова нулевое решение системы неустойчиво.
В примерах 4, 5 для данных систем найти все положения равновесия и исследовать их на устойчивость.

Пример 4.

$$\begin{cases} x_1' = x_2 - x_1^2 - x_1, \\ x_2' = 3x_1 - x_1^2 - x_2. \end{cases}$$

Решение. Сначала на плоскости Ox_1x_2 находим точки, в которых $x_1' = x_2' = 0$ (точки покоя, или положения равновесия), т.е. решаем систему уравнений

$$\begin{cases} x_2 - x_1 - x_1^2 = 0, \\ 3x_1 - x_1^2 - x_2 = 0. \end{cases}$$

Имеем две точки равновесия: (0,0) и (1,2). Составим матрицу из значений частных производных от правых частей исходной системы:

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-2x_1 & 1 \\ 3-2x_1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Находим собственные значения матрицы при $x_1=0$, $x_2=0$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{3}.$$

Так как $-1+\sqrt{3} > 0$, точка (0, 0) неустойчива.
При $x_1=1$, $x_2=2$ имеем

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda_{1,2} = -2 \pm \sqrt{2}.$$

Так как $\lambda_1<0$, $\lambda_2<0$, точка (1, 2) асимптотически устойчива.

Пример 5. $\begin{cases} \dot{x}_1 = 3 - \sqrt{4 + x_1^2 + x_2}, \\ \dot{x}_2 = \ln(x_1^2 - 3). \end{cases}$

Решение. Решаем систему уравнений

$$\begin{cases} 3 - \sqrt{4 + x_1^2 + x_2} = 0, \\ \ln(x_1^2 - 3) = 0. \end{cases}$$

Находим точки равновесия: (-2, 1); (2, 1).
Составим матрицу из значений частных производных от правых частей системы

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{x_1}{\sqrt{4 + x_1^2 + x_2}} & -\dfrac{1}{2\sqrt{4 + x_1^2 + x_2}} \\ \dfrac{2x_1}{x_1^2 - 3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Находим собственные значения матрицы A при $x_1=-2$, $x_2=1$:

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{1}{6}\\ -4 & 0\end{pmatrix},\ \begin{vmatrix}\frac{2}{3}-\lambda & -\frac{1}{6}\\ -4 & -\lambda\end{vmatrix}=0,\ \lambda^2-\frac{2}{3}\lambda-\frac{2}{3}=0;\ \lambda_{1,2}=\frac{1}{3}\pm\frac{\sqrt{7}}{6}.$$

Один из корней $\lambda=\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{7}}{6}$ положителен, следовательно точка (-2, 1) неустойчива.

Проверим точку (2, 1). Получим характеристическое уравнение

$$\lambda^2+\frac{2}{3}\lambda+\frac{2}{3}=0;\ \lambda_{1,2}=-\frac{1}{3}\pm \mathrm{i}\sqrt{\frac{5}{9}}.$$

Отсюда следует, что точка (2, 1) устойчива, так как Re $\lambda_{1,2}<0$.

14.2. Признаки отрицательности действительных частей всех корней многочлена. Теорема Гурвица. Устойчивость при постоянных действующих возмущениях.

Собственные значения матрицы А с действительными коэффициентами являются корнями характеристического многочлена det(A-λE)=0, или корнями уравнения

$$a_0\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\lambda+a_n=0\ \ (a_0>0)$$

с действительными коэффициентами. Здесь коэффициенты $a_i\ \ (i=\overline{1,n})$ однозначно выражаются через элементы матрицы А.

Необходимым условием отрицательности всех действительных частей корней уравнения

$$a_0\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\lambda+a_n=0,\ a_0>0 \tag{8}$$

являются неравенства $a_i>0,\ i=\overline{1,n}.$

Матрица вида

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0\\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & \ldots & 0\\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{pmatrix}, \tag{9}$$

получаемая заменой чисел a_i с индексами $i>n$ или $i<0$ нулями, называется матрицей Гурвица.

<u>1. Критерий Рауса-Гурвица</u>

Для отрицательности всех действительных частей корней уравнения (8) необходимо и достаточно, чтобы были положительными все главные диагональные миноры матрицы Гурвица:

$$\Delta_1=a_1,\ \Delta_2=\begin{vmatrix}a_1 & a_0\\ a_3 & a_2\end{vmatrix},\ \Delta_3=\begin{vmatrix}a_1 & a_0 & 0\\ a_3 & a_2 & a_1\\ a_5 & a_4 & a_3\end{vmatrix},\ \ldots \tag{10}$$

<u>2. Критерий Льенара-Шипара</u>

Для отрицательности всех действительных частей корней уравнения (8) необходимо и достаточно, чтобы все $a_i>0$ и чтобы $\Delta_{n-1}>0,\ \Delta_{n-3}>0,\ \Delta_{n-5}>0,\ \ldots$

<u>3. Критерий Михайлова</u>

Для отрицательности всех действительных частей корней уравнения (8) необходимо и достаточно, чтобы $a_na_{n-1}>0$ и чтобы корни многочленов

$$\begin{aligned} p(\xi)&=a_n-a_{n-2}\xi+a_{n-4}\xi^2-\ldots,\\ q(\eta)&=a_{n-1}-a_{n-3}\eta+a_{n-5}\eta^2-\ldots, \end{aligned} \tag{11}$$

удовлетворяли неравенствам

$$0 < \xi_1 < \eta_1 < \xi_2 < \eta_2 < \ldots \ . \qquad (12)$$

В примерах 1-4 исследовать устойчивость нулевого решения, пользуясь условиями отрицательности действительных частей всех корней многочлена с действительными коэффициентами.

Пример 1.

$$x^{\mathrm{IV}} + 2x''' + 4x'' + 3x' + 2x = 0.$$

Решение. Для исследования устойчивости нулевого решения воспользуемся критерием Рауса-Гурвица. Матрица Гурвица в данном случае имеет вид

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Поскольку ее главные миноры

$$\Delta_1 = a_1 = 2 > 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5 > 0,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 7 > 0,\ \Delta_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 14 > 0,$$

то согласно указанному критерию действительные части всех корней характеристического многочлена $\lambda^4 + 2\lambda^3 + 4\lambda^2 + 3\lambda + 2$ отрицательны. Следовательно, нулевое решение асимптотически устойчиво.

Пример 2.

$$x^{\mathrm{IV}} + 2x''' + 6x'' + 5x' + 6x = 0.$$

Решение. Матрица Гурвица

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

имеет положительные главные диагональные миноры

$$\Delta_1 = 2 > 0,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 2 \\ 0 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 11 > 0.$$

Поскольку, кроме того, все коэффициенты характеристического уравнения $\lambda^4 + 2\lambda^3 + 6\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$ положительны, то, по критерию Льенара-Шипара, действительные части всех корней этого уравнения отрицательны. Таким образом, мы имеем асимптотическую устойчивость.

Пример 3.

$$x^{V} + x^{IV} + 4x''' + 3x'' + \frac{15}{4}x' + 2x = 0.$$

Решение. Для исследования на устойчивость воспользуемся критерием Михайлова. В данном случае корни многочленов

$$p(\xi) = 2 - 2\xi + \xi^2 \quad , \quad q(\eta) = \eta^2 - 4\eta + \frac{15}{4}$$

имеют вид $\xi_{1,2}=1,\ 2;\ \eta_{1,2}=\frac{3}{2}\ ,\ \frac{5}{2}$. Следовательно, $0<\xi_1<\eta_1<\xi_2<\eta_2$. Как видим, здесь выполняется условие критерия Михайлова, поэтому нулевое решение асимптотически устойчиво.

Пример 4.

$$x^{IV}+2x'''+3x''+7x'+2x=0.$$

Решение. Составляя и вычисляя первые главные диагональные миноры матрицы Гурвица

$$A_1=2,\quad A=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 7 & 3\end{vmatrix}=-1,$$

замечаем, что не все корни уравнения

$$\lambda^4+2\lambda^3+3\lambda^2+7\lambda+2=0$$

имеют отрицательные действительные части. Предположим, что один из корней имеет нулевую действительную часть: $\lambda=i\omega$. Тогда должно быть

$$\omega^4-2i\omega^3-3\omega^2+7i\omega+2=0,$$

или

$$\begin{cases}\omega^4-3\omega^2+2=0,\\ -2\omega^3+7\omega=0.\end{cases}.$$

Последнее соотношение показывает, что это невозможно. Следовательно, хотя бы один корень имеет положительную действительную часть. Значит, нулевое решение неустойчиво.

Ключевые вопросы: : 1)Какая система называется системой уравнений первого приближения? 2) Сформулировать теорему об асимптотической устойчивости по первому приближению. 3) Сформулировать теорему о неустойчивости по первому приближению.4) Когда нельзя исследовать на устойчивость тривиальное решение по первому приближению? 5) Сформулировать необходимые и достаточные условия отрицательности действительных частей всех корней многочлена. 6) Составить матрицу Гурвица для многочлена n-ой степени. 7) Записать главные диагональные миноры матрицы Гурвица.

Раздел 5 Уравнения в частных производных 1-го порядка

Лекция 15-16. Уравнение в частных производных 1-го порядка. Основные понятия и определения. Линейные и квазилинейные уравнения в частных производных. Уравнения в частных производных для случая n независимых переменных.

Цель лекции. Дать понятие уравнения в частных производных 1-го порядка. Методы решения уравнений в частных производных.

План лекции.

1. Линейным неоднородным дифференциальным уравнением (ДУ) первого порядка с частными производными.

2. Линейное однородное ДУ первого порядка с частными производными

3. Решением ДУ первого порядка с частными производными.

Ключевые вопросы: 1) Какое уравнение называется уравнением в частных производных? 2) Сформулировать теорему Ковалевской о существовании единственного аналитического решения уравнения в частных производных в окрестности начальной точки. 3) Какое уравнение называется линейным неоднородным уравнением первого порядка в частных производных? 4) Изложить метод интегрирования линейного однородного уравнения первого порядка в частных производных.

Лекция 17-18. Неоднородные линейные уравнения 1-го порядка. Уравнения Пфаффа и его решение. Необходимое условие существования интегрирующего множителя для уравнения Пфаффа. Нелинейные уравнения 1-го порядка в частных производных.

Цель лекции. Дать понятие неоднородные уравнения в частных производных 1-го порядка. Уравнения Пфаффа. Методы решения уравнений в частных производных.

План лекции.

1. Понятие Линейным неоднородным уравнением или квазилинейным уравнением первого порядка в частных производных
2. Методы решения неоднородных уравнений в частных производных.
3. Уравнения Пфаффа и его решение.
4. Необходимое условие существования интегрирующего множителя для уравнения Пфаффа.

Ключевые вопросы: 1) Какое уравнение описывает поверхности ортогональные векторным линиям? 2) Как проинтегрировать уравнение Пфаффа если поле потенциально? 3) Как подобрать скалярный множитель, после умножения на который вектора **F** поле становится потенциальным? 4) Второй метод интегрирования уравнения Пфаффа. 5) Записать условия интегрируемости уравнения Пфаффа одним соотношением

При подготовке к теоретической части удобно дополнить конспект лекций материалом из учебной литературы:

1. Бибиков Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений [Электронный ресурс]: учеб. / Ю.Н. Бибиков. – СПб.,М.: Лань, 2011. – 304с. Режим доступа: http://e.lanbook.com/view/book/1542/
2. Егоров А. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями [Текст] : [учеб.] / А. И. Егоров. - 2-е изд., испр. и доп. - М. : Физматлит, 2007. - 448 с. : рис. - Библиогр. : с. 438 . - Предм. указ. : с. 441 . - ISBN 978-5-9221-0785-3 (в пер.)
3. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений: Учеб. пособие/ Н. М. Матвеев. -5-е изд., доп.. -СПб.: Лань, 2003. -832 с.:а-ил
4. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения : [Учеб. пособие]/ М.В. Федорюк . -3-е изд., стер.. -СПб.: Лань, 2009. -448 с.

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ (УКАЗАНИЯ) К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ

Задачей практических занятий является изучение методов решения дифференциальных уравнений, а также практическое осмысление основных теоретических положений курса. При решении задач обращается внимание на алгоритмы решения. Далее проводится анализ полученного решения, строятся интегральные кривые, находятся частные решения.

Цель практических занятий – научить правильно строить математические модели раз личных физических процессов, решать различные дифференциальные уравнения с учетом начальных и граничных условий.

В итоге изучения дисциплины студент должен знать основные понятия дифференциальных уравнений, виды уравнений, методы решения. Уметь по общему решению найти частное. Анализировать полученное решение полученного решения.

В дифференциальных уравнениях первого порядка научиться:

- правильно определить тип уравнения;
- правильно выбрать методы решения этого уравнения, знать замены переменных для каждого уравнения;
- по общему решению найти частное решение, проанализировать полученное решение.

В дифференциальных уравнениях порядка выше первого научиться:

- правильно определить тип уравнения;
- правильно выбрать методы решения этого уравнения, знать замены переменных для каждого уравнения;
- по общему решению найти частное решение, проанализировать полученное решение.

В системы дифференциальных уравнений научиться:

- научиться выбирать рациональный метод интегрирования системы;
-интегрировать системы выбранным методом;
-находить частные решения линейной неоднородной системы методом вариации постоянных или методом неопределенных коэффициентов в зависимости от правой части системы уравнений.

В теории устойчивости:

-знать определения устойчивости по Ляпунову;
-научиться исследовать на устойчивость по первому приближению;
-научиться исследовать на устойчивость с помощью функций Ляпунова.

Перед практическим занятием студент должен прочитать лекцию, которую рекомендует преподаватель, ответить на вопросы, которые даются после лекции. Сделать домашнее задание по предыдущей теме и если необходимо сделать индивидуальное задание.

При решении задач следует:

- определить тип дифференциального уравнения;
- подобрать соответствующую замену и метод интегрирования;
-решить уравнение и построить интегральную кривую, если требуется
-найти частное решение, если есть начальные условия и проанализировать полученное решение.

Практические занятия направлены на закрепление теоретического материала на практическом уровне и предусматривают реализацию аналитических методов по вариантам индивидуальных заданий.

Перед практическим занятием разобрать материал, изложенный на лекции и выполнить самостоятельную работу, предусмотренную рабочим планом. Для этого используются: конспект лекций, соответствующие разделы печатных и электронных учебников, ответы на вопросы для самоконтроля знаний. После практического занятия самостоятельно решить рекомендованные задачи на дом и индивидуальные задания.

Если у студента возникают вопросы по выполнению индивидуальных заданий или домашних заданий, то он может обратиться к преподавателю за консультацией, которая проводится один раз в неделю в заранее установленное время. Кроме этого по выполнению домашнего задания и освоению лекционного курса, вопросы желательно задавать и на практических и на теоретических занятиях.

Студент обязан проходить промежуточный и итоговый контроль в виде защит индивидуальных и практических работ, аттестации в форме тестового контроля знаний; сдачи зачета в предлагаемой преподавателем форме.

Номера задач для аудиторных и домашних занятий из сборника:

Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям/ А.Ф. Филиппов . -М.; Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2005. -176 с

Практические занятия

Занятие1-2. Изоклины. Составление дифференциальных уравнений семейства кривых. Уравнения с разделяющимися переменными. Однородные уравнения.

Вопросы для подготовки: 1) Что называется изоклинами? 2) Как, не решая уравнения, строить интегральные кривые? 3) Как составить дифференциальное уравнение семейства кривых? 4) Какие уравнения называются уравнениями, с разделяющимися переменными? 5) Как интегрируются уравнения с разделяющимися переменными? 6) Перечислить три вида уравнений, сводящихся к уравнениям с разделяющимися переменными. 7) При помощи каких замен они сводятся к уравнениям с разделяющимися переменными? 8) Какие уравнения называются однородными?

Практические занятия и самостоятельная работа включают в себя решение задач №1-14; 17-29. задачи №51-65; 101-129.

Занятие 3-4. Линейные уравнения первого порядка. Уравнения Бернулли, Риккати.

Вопросы для подготовки: 1) Какое уравнение называется линейным дифференциальным уравнением первого порядка? 2) Какое уравнение называется однородным, а какое неоднородным? 3) Методы решения линейного уравнения первого порядка. 4) В чем заключается идея метода Лагранжа? 5) Уравнение Бернулли и замена, сводящая это уравнение к линейному. 6) Уравнение Риккати и замена, сводящая это уравнение к уравнению Бернулли

Практические занятия и самостоятельная работа включают в себя решение задач №136-160; 167-171.

Занятие 5-7. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель. Существование и единственность решения.

Вопросы для подготовки: 1) Какие уравнения называются уравнения в полных дифференциалах? 2) Записать необходимые и достаточные условия Эйлера. 3) Как проинтегрировать уравнения в полных дифференциалах? 4) Что называется интегрирующим множителем? 5) Записать формулу для нахождения интегрирующего множителя, зависящего от x. 6) Записать формулу для нахождения интегрирующего множителя зависящего от y. 7) Сформулировать теорему существования и единственности решения уравнения $y' = f(x, y)$. 8) Какие точки называются особыми? 9) Перечислить типы особых точек.

Практические занятия и самостоятельная работа включают в себя решение задач №186-194; 195-220. №221;222;223.

Занятие 8-9. Геометрические и физические задачи.

Методические указания: чтобы решить геометрическую задачу, надо построить чертеж, обозначить искомую кривую через $y(x)$ и составить дифференциальное уравнение. Затем проинтегрировать полученное решение.

В физических задачах надо решить, какую из величин взять за независимое переменное, а какую - за искомую функцию. Затем составить дифференциальное уравнение. Решить полученное уравнение.

Практические занятия и самостоятельная работа включают в себя решение задач №71-76; 77-79;80, 81, 83,84,85,87,88,89,91,92,93.

Занятие 10-11 . Уравнения, не разрешенные относительно производной. Уравнение Лагранжа, Клеро. Другие уравнения, разрешимые относительно у или х

Вопросы для подготовки: 1) Дать определение дифференциальному уравнению, не разрешенному относительно производной. 2) Как проинтегрировать уравнение, если в него входит только производная от неизвестной функции? 3) Как проинтегрировать уравнение, если в него не входит искомая функция? 4) Как проинтегрировать уравнение, если в него не входит независимое переменное? 5) Общий метод интегрирования дифференциального уравнения, не разрешенного относительно производной. 6) Дать определение особых решений. 7) Записать уравнение Лагранжа. 8)Метод интегрирования уравнение Лагранжа.9) Записать уравнение Клеро. 10) Метод интегрирования уравнения Клеро.

Практические занятия и самостоятельная работа включают в себя решение задач №241-250; 251-266; 267-286. №287-296; 298; 300.

Занятие 12.Уравнения, допускающие понижение порядка.

Вопросы для подготовки: 1) Перечислить уравнения, допускающие понижение порядка. 2) Методы решения этих уравнений?

Практические занятия и самостоятельная работа включают в себя решение задач №421-450; 455-462; 463-470; 501-503.

Занятие 13-14. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами.

Вопросы для подготовки: 1) Метод Эйлера интегрирования линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами. 2) Записать общий вид решения дифференциального уравнения, если корни характеристического уравнения действительные и различные.3) Записать общий вид решения дифференциального уравнения, если корни характеристического уравнения действительные и кратные 4) Записать общий вид решения дифференциального уравнения, если корни характеристического уравнения комплексные 5) Записать общий вид решения дифференциального уравнения, если корни характеристического уравнения кратные комплексные

Практические занятия и самостоятельная работа включают в себя решение задач №511-532

Занятие 15. Линейные неоднородные уравнения.

Вопросы для подготовки:1) Для каких правых частей уравнений можно использовать метод неопределенных коэффициентов? 2) Какой вид имеет частное решение в зависимости от вида правой части и корней характеристического уравнения? 3) Каким методом решается линейное неоднородное уравнение с любой правой частью?

Практические занятия и самостоятельная работа включают в себя решение задач №533-548; 575-581; 582-588.

Занятие 16. Линейные уравнения с переменными коэффициентами. Уравнения Эйлера, Лагранжа, Чебышева

Вопросы для подготовки: 1) Как по заданной системе решений построить дифференциальное уравнение? 2) Записать формулу Остроградского – Лиувилля. 3) Как формула Остроградского

– Лиувилля может быть использована для интегрирования линейного однородного уравнения второго порядка? 4) Записать вид уравнения Эйлера. 5) Записать вид уравнения Лагранжа. 6) Записать вид уравнения Чебышева. 7) При помощи каких замен независимого переменного и искомой функции, уравнение Эйлера сводится к линейному уравнению с постоянными коэффициентами? 8) При помощи каких замен независимого переменного уравнение Чебышева сводится к линейному уравнению с постоянными коэффициентами?

Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач: №589-600; .№641-662;674-678;681-701.

Занятие17. Краевые задачи. Функции Грина. Контрольная работа.

Вопросы для подготовки: 1) Понятие краевых задач. 2) Какая функция называется функцией влияния или функцией Грина? 3) Сформулировать основные свойства функции Грина. 4)Как решить неоднородное уравнение с использованием функции Грина? 5) Построение функции Грина.

Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач: .№751-7584 764-771.

Занятие18. Контрольная работа. Уравнения порядка выше первого.

4-ой семестр

Занятие1. Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами (метод исключения).

Вопросы для подготовки: 1) Что называется решением системы дифференциальных уравнений? 2) Что называется частным решением системы?3) Изложить метод сведения к одному уравнению более высокого порядка.4) Изложить метод нахождения интегрируемых комбинаций.5) Записать нормальную систему в симметричной форме.

Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач №786-796.

Занятие 2. Линейные системы с постоянными коэффициентами. (Метод Эйлера).

Вопросы для подготовки: 1) Какая система с постоянными коэффициентами называется линейной? 2) Какое уравнение называется характеристическим? 3)От чего зависит структура фундаментальной системы решений?

Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач №797-812.

Занятие 3. Матричный метод.

Вопросы для подготовки: 1) Как решить систему, записанную в векторной форме? 2) Что называется матричной экспонентой?

Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач№851-865; 867-873.

Занятие 4,5. Линейные неоднородные системы. Метод неопределенных коэффициентов.

Вопросы для подготовки: 1) В каком виде можно частное решение линейной неоднородной системы? 2)В чем состоит отличие отыскания частных решений от одного линейного уравнения?

Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач№826-845.

Занятие 6. Линейные неоднородные системы, метод вариации.

Вопросы для подготовки: 1) Чему равно общее решение неоднородного уравнения? 2) В чем заключается метод вариации произвольных постоянных для системы дифференциальных уравнений?

Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач№846-850.

Занятие 7. Контрольная работа.

Занятие 8. Устойчивость решений дифференциальных уравнений. Устойчивость решений линейных систем дифференциальных уравнений.

Вопросы для подготовки: 1)Какое решение системы называется устойчивым? 2) Какое решение системы называется неустойчивым? 3) Какое решение системы называется асимптотически устойчивым? 4) Что называется точкой покоя? 5) Сформулируйте условия устойчивости в применении к точке покоя.

Практические занятия и самостоятельная работа включают в себя решение задач№881-898;932-939.

Занятие 9. Критерий устойчивости по первому приближению

Вопросы для подготовки: 1) Какая система называется системой уравнений первого приближения? 2) Сформулировать теорему об асимптотической устойчивости по первому приближению. 3) Сформулировать теорему о неустойчивости по первому приближению.4) Когда нельзя исследовать на устойчивость тривиальное решение по первому приближению?

Практические занятия и самостоятельная работа включают в себя решение задач№899-906;915-922.

Занятие 10. Исследование устойчивости методом функций Ляпунова.

Вопросы для подготовки: 1) Сформулируйте теорему Ляпунова об устойчивости. 2) Сформулируйте теорему Ляпунова об асимптотической устойчивости. 3) Сформулируйте теорему Четаева о неустойчивости. 4) Какая функция называется функцией Ляпунова

Практические занятия и самостоятельная работа включают в себя решение задач№923-930.

Занятие 11-12. Особые точки. Фазовая плоскость.

Вопросы для подготовки1) Какая точка покоя называется устойчивым узлом? 2) Какая точка покоя называется неустойчивым узлом. 3) Какая особая точка называется седлом? 4) Какая особая точка называется устойчивым фокусом? 5) Какая особая точка называется неустойчивым фокусом? 6) Какая точка покоя называется центром? 6) Что такое дикритический узел?

Практические занятия и самостоятельная работа включают в себя решение задач№961-978; 979-992; №1021-1034.

Занятие 13-14. Зависимость решений от начальных данных и параметров. Приближенное решение систем дифференциальных уравнений.

Практические занятия и самостоятельная работа включают в себя решение задач№1064-1072; 1074-1078.

Занятие 15,16. Уравнения в частных производных 1-го порядка

Вопросы для подготовки. 1) Какое уравнение называется линейным неоднородным уравнением первого порядка в частных производных? 2) Изложить метод интегрирования линейного однородного уравнения первого порядка в частных производных.

Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач№1167-1188;1189-1191.

Занятие 17. Контрольная работа. Системы дифференциальных уравнений (1 час); Теория устойчивости (1 час).

Занятие 18. Уравнения Пфаффа

Вопросы для подготовки 1) Какое уравнение описывает поверхности ортогональные векторным линиям? 2) Как проинтегрировать уравнение Пфаффа если поле потенциально? 3) Как подобрать скалярный множитель, после умножения на который вектора F поле становится потенциальным? 4) Второй метод интегрирования уравнения Пфаффа. 5) Записать условия интегрируемости уравнения Пфаффа одним соотношением.

Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач№1194-1198; 120-1223.

3. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

Самостоятельная работа – проявляется в узнавании, осмыслении, запоминании, подведении известного метода решения под новую задачу.

К самостоятельной работе помимо подготовки к лекционным и практическим занятиям относится выполнение индивидуальных заданий. Для выполнения индивидуальных заданий необходимо освоить теоретические основы соответствующего раздела, закрепить теорию на практических занятиях и пользоваться методической литературой по данной теме. Каждое индивидуальное задание оформляется в соответствии с требованиями преподавателя и защищается на консультациях.

Требования к защите индивидуальных заданий

При защите расчетно-графических работ студент должен уметь:

- четко сформулировать поставленную задачу (что дано, что требуется найти);
- объяснить каким методом пользовался при решении задачи (сформулировать его, указать основные свойства, область применимости);
- знать основные используемые формулы и определения;
- рассказать последовательность решения задачи (общий план и особенности варианта);
- объяснить полученный результат (если требуется провести его анализ);
- отвечать на дополнительные вопросы по теме индивидуальных заданий;
- отстаивать свою точку зрения при объяснении.

Индивидуальные задания выполняются по всем разделам дисциплины. Варианты заданий берутся из методического пособия:

Труфанова Т.В. Прикладные задачи и примеры по дифференциальным уравнениям [Электронный ресурс] : учеб. пособие: рек. УМО вузов РФ для спец. 160400.65 и напр. подготовки 230100.62 / Т. В. Труфанова, Е. М. Веселова, В. А. Труфанов; АмГУ, ФМиИ. - Благовещенск: Изд-во Амур. гос. ун-та, 2014. - 164 с. - http://irbis.amursu.ru/DigitalLibrary/AmurSU_Edition/6936.pdf

1. *Пример выполнения индивидуального задания по теме «Дифференциальные уравнения первого порядка»*

Пример 1. Решить уравнение

$y'(x-y)=1+x-y$.

Решение. Разрешаем это уравнение относительно производной:

$$y'=\frac{1}{x-y}+1.$$

Полагая, что $x-y=z$ ($z(x)$ – новая искомая функция), получим

$$\frac{dy}{dx}=1-\frac{dz}{dx},\quad 1-\frac{dz}{dx}=\frac{1}{z}+1,\quad \frac{dz}{dx}=-\frac{1}{z},\quad zdz=-dx.$$

Теперь проинтегрируем:

$$\int zdz=-\int dx+c,\ z^2=-2x+c_1.$$

Возвращаясь от *z* к *y*, получаем $(x-y)^2=-2x+c_1$ – общее решение уравнения.

Пример 2. Решить уравнение

$$(x^2+y^2)dx+xydy=0.$$

Решение. Разрешаем это уравнение относительно производной:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x^2+y^2}{xy} \qquad (1)$$

Уравнение (1) является однородным. Введем замену $y=zx$, $z=z(x)$. Тогда $y'=z'x+z$. Подставляем в (1):

$$z'x+z=-\frac{x^2+z^2x^2}{x^2z}; \quad z'x+z=-\frac{z^2+1}{z}; \quad z'x=-\frac{2z^2+1}{z}.$$

Разделяем переменные и затем интегрируем:

$$\frac{dx}{x}=-\frac{zdz}{1+2z^2}, \quad \ln\left|\frac{x}{c}\right|=-\frac{1}{4}\ln\left(1+2z^2\right), \quad x=\frac{c}{\sqrt[4]{1+2z^2}}.$$

Возвращаясь от z к y, получаем

$$x^4=\frac{c^4x^2}{x^2+2y^2}, \quad 2y^2+x^2=\frac{c^4}{x^2}.$$

Общее решение уравнения . $y=\pm\sqrt{\frac{c^4}{2x^2}-\frac{x^2}{2}}$.

Пример 3. Решить уравнение

$$y'+y\cos x=e^{-\sin x}$$

Решение. Решаем сначала соответствующее однородное уравнение:

$$\frac{dy}{dx}+y\cos x=0, \quad \frac{dy}{y}+\cos x dx=0, \quad y=0, \quad \ln|y|+\sin x=\ln c, \quad y=ce^{-\sin x}.$$

Решение исходного уравнения ищем в виде $y=c(x)e^{-\sin x}$ и подставляем в исходное уравнение:

$$\frac{dc}{dx}e^{-\sin x}-\cos xe^{-\sin x}c(x)+c(x)e^{-\sin x}\cos x=e^{-\sin x}, \quad \frac{dc}{dx}=1, \quad c(x)=x+c_1.$$

Получаем общее решение: $y=(x+c_1)e^{-\sin x}$.

Пример 4. Решить уравнение

$$x\frac{dy}{dx}+y=y^2\ln x.$$

Решение. Это уравнение Бернулли. Его можно решить с помощью замены $z=\frac{1}{y}$, но удобнее – при помощи замены $y=u(x)\mathrm{v}(x)$. Тогда

$$xu\frac{d\mathrm{v}}{dx}+x\mathrm{v}\frac{du}{dx}+u\mathrm{v}=u^2\mathrm{v}^2\ln x,$$

$$xu\frac{d\mathrm{v}}{dx}+\mathrm{v}(x\frac{du}{dx}+u)=u^2\mathrm{v}^2\ln x.$$

Функцию $u(x)$ найдем как частное решение уравнения $x\frac{du}{dx}+u=0,$ – например, $u=\frac{1}{x}$. Тогда $x^2\frac{d\mathrm{v}}{dx}=\mathrm{v}^2\ln x$. Отсюда, разделяя переменные и интегрируя, получим

$-\frac{1}{v}=\int\frac{\ln x}{x^2}dx=-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}-c,\qquad v(x)=\frac{x}{1+Cx+\ln x}.$ Тогда $y=\frac{1}{1+Cx+\ln x}$. Кроме найденных, решением исходного уравнения является еще функция $y=0$.

Пример 5. Решить уравнение

$$(2xy+3y^2)dx+(x^2+6xy-3y^2)dy=0$$

Решение. В данном случае

$$M(x,y)=2xy+3y^2,\quad N(x,y)=x^2+6xy-3y^2,$$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=2x+6y,\quad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=2x+6y.$$

Так как $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$, то это уравнение в полных дифференциалах. Найдем функцию $F(x,y)$, у которой полный дифференциал $dF=F'_x dx+F'_y dy$ равен левой части уравнения . Для искомой функции $F(x,y)$ имеем

$$F'_x=2xy+3y^2,\quad F'_y=x^2+6xy-3y^2.$$

Интегрируя первое уравнение по x, считая y постоянным, получим

$$F(x,y)=x^2y+3xy^2+\varphi(y).$$

Для определения функции $\varphi(y)$ дифференцируем последнее равенство по y:

$$F'_y=x^2+6xy+\varphi'(y).$$

Подставляя это во второе уравнение , находим $\varphi(y)$:

$$x^2+6xy+\varphi'(y)=x^2+6xy-3y^2,$$

т.е. $\varphi'(y)=-3y^2$, $\varphi(y)=-y^3+C_1$.

Поэтому $F(x,y)=x^2y+3xy^2-y^3+C_1$.

Общее решение уравнения имеет вид $x^2y+3xy^2-y^3=C$.

Пример 6. Решить уравнение

$y'^2-2xy'+y=0$.

Решение. Это уравнение Лагранжа. Положим $y'=p$, тогда $y=2xp-p^2$. Из равенств $dy=pdx$ и $dy=2pdx+2xdp-2pdp$ получим $pdx+2(x-p)dp=0$. Отсюда p=0 или $\frac{dx}{dp}+\frac{2x}{p}$=2. Это линейное уравнение. Решая его, находим x=$\frac{2}{3}$p+$\frac{c}{p^2}$.

Решение исходного уравнения имеет вид $\begin{cases} x=\frac{2}{3}p+\frac{c}{p^2}, \\ y=2xp-p^2, y=0. \end{cases}$

Задача 1. Найти уравнение кривой, проходящей через точку (1,1), если для любого отрезка $[1,x]$ площадь криволинейной трапеции, ограниченной соответствующей дугой этой кривой, в два раза больше произведения координат точки *M(x,y)* кривой ($x>0$, $y>0$).

Решение. Согласно условию задачи и в силу геометрического смысла интеграла с переменным верхним пределом имеем

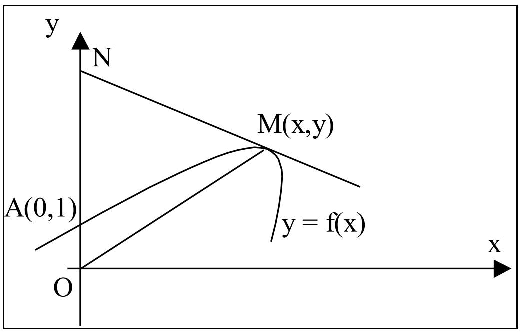
$$\int_1^x y(t)dt = 2xy(x).$$

Дифференцируя это равенство по x, получаем дифференциальное уравнение $y = 2(y + xy')$, или

$y' = -\frac{y}{2x}$.

Интегрируя это уравнение и учитывая начальное условие y(1) = 1, найдем уравнение искомой кривой: $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

<u>*Задача 2*</u>. Найти кривую, проходящую через точку A(0,1), для которой треугольник, образованный осью OY, касательной к кривой в произвольной ее точке и радиусом вектором точки касания, – равнобедренный (причем основанием его служит отрезок касательной от точки касания до оси OY).



Решение. Пусть искомое уравнение кривой $y = f(x)$. Проведем касательную *MN* в произвольной точке кривой *M(x,y)* до пересечения с осью *OY* в точке *N*. Должно иметь место равенство *OM* = *ON*; но $OM = \sqrt{x^2 + y^2}$; из уравнения касательной *Y-y=y'(X-x)* находим, полагая *X=0*: $Y = ON = y - y'x$.

Приходим к однородному уравнению $\sqrt{x^2 + y^2} = y - xy'$; полагая *y = tx*, после замены и разделения переменных получим уравнение $\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = -\frac{dx}{x}$, откуда

$$\ln\left(t + \sqrt{1+t^2}\right) = \ln c - \ln x,$$

или $x^2 = c(c - 2y)$ (семейство парабол, осью которых является ось Oy).

Подставляя координаты точки A в найденное общее решение, получим $0 = c \cdot (c-2)$; из двух значений c (c=0 и c=2) годится лишь второе, поскольку при c=0 парабола вырождается в ось Oy. При c=2 получим частное решение

$$x^2 = 2(2 - 2y) = 4(1 - y).$$

<u>*Задача 3*</u>. Распад радия происходит таким образом, что скорость распада пропорциональна количеству радия. Найти закон, выражающий изменение количества радия с течением времени, если известно, что через 1600 лет останется половина прежнего количества.

Решение. Пусть *x* – количество радия и *t* – время (лет). Надо найти зависимость *x* от *t*: $x = x(t)$.

Дифференциальное уравнение составляем сразу на основании условий задачи (скорость изменения есть производная по времени): $\frac{dx}{dt} = kx$.

Решаем полученное уравнение $\frac{dx}{x}=kdt$.

$$\ln x = kt + c \quad (*)$$

Пусть в начальный момент $t=0$ количество радия $x=x_0$. Это дает возможность из (*) найти соответствующее значение c: $\ln x_0 = c$.

Таким образом, $\ln\frac{x}{x_0}=kt$.

Коэффициент k находим из условия, что при $t=1600$ $\frac{x}{x_0}=\frac{1}{2}$; $\ln\frac{1}{2}=1600k$, откуда $k=-\frac{\ln 2}{1600}\approx -0{,}00043$.

Следовательно, $\ln\frac{x}{x_0}=-0{,}00043t$, или $x=x_0e^{-0{,}00043t}$.

Парашютист прыгнул с высоты 1,5 км, а раскрыл парашют на высоте 0,5 км. Сколько времени он падал до раскрытия парашюта?

<u>*Задача 3.*</u> Известно, что предельная скорость падения человека в воздухе нормальной плотности составляет 50 м/сек. Изменением плотности с высотой можно пренебречь. Сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости.

Решение. Введем обозначения: S – путь; $V=\frac{ds}{dt}$ – скорость, $a=\frac{dv}{dt}$ – ускорение. На парашютиста действуют силы: его вес $P=mg$ (по направлению движения) и сопротивление воздуха $F=kv^2$ (против направления движения). На основании второго закона Ньютона составим дифференциальное уравнение падения парашютиста: $ma=P-kv^2$, $\frac{mdv}{dt}=mg-kv^2$, $\frac{dv}{dt}=g-\frac{kv^2}{m}$. Полагая $\frac{mg}{k}=b^2$, имеем $\frac{dv}{b^2-v^2}=\frac{k}{m}dt$. Интегрируя, находим ($v\le b$): $\frac{1}{2b}\ln\left(\frac{b+v}{b-v}\right)=\frac{kt}{m}+c_1$. Из начального условия $V\big|_{t=0}=0$ следует $c_1=0$. Таким образом, $\ln\left(\frac{b+v}{b-v}\right)=\frac{2bk}{m}t$, или $\frac{b+v}{b-v}=e^{\frac{2bk}{m}t}$.

Отсюда $V=b\frac{e^{\frac{2bkt}{m}}-1}{e^{\frac{2bkt}{m}}+1}=b\frac{e^{\frac{bkt}{m}}-e^{-\frac{bkt}{m}}}{e^{\frac{bkt}{m}}+e^{-\frac{bkt}{m}}}=b\cdot \mathrm{th}\left(\frac{bkt}{m}\right)$.

Но $\frac{bk}{m}=\sqrt{\frac{mg}{k}}\frac{k}{m}=\sqrt{\frac{kg}{m}}$, заменяя скорость через $\frac{ds}{dt}$, находим $\frac{ds}{dt}=b\cdot \mathrm{th}\left(t\sqrt{\frac{kg}{m}}\right)$. Интегрируя, находим S:

$$S=b\sqrt{\frac{m}{kg}}\ln\left(\mathrm{ch}\left(t\sqrt{\frac{kg}{m}}\right)\right)+c_2=\frac{m}{k}\ln\left(\mathrm{ch}\left(t\sqrt{\frac{kg}{m}}\right)\right)+c_2.$$

Поскольку $S\big|_{t=0} = 0$, находим $c_2 = 0$. Итак, $S = \frac{m}{k}\ln\left(ch\left(t\sqrt{\frac{kg}{m}}\right)\right)$; $V = b\cdot th\left(t\sqrt{\frac{kg}{m}}\right)$. По условию задачи $\lim\limits_{t\to\infty} V = 50$ (м/сек). Т.к. $\lim\limits_{t\to\infty}\left(th\left(t\sqrt{\frac{kg}{m}}\right)\right) = 1$, то $b = \sqrt{\frac{p}{k}} = 50$. Итак, $V(t) = 50th\left(\frac{t}{5}\right)$, ($\sqrt{\frac{kg}{m}} = \frac{1}{5}$, т.к. $b^2 = \frac{mg}{k} = 2500$, отсюда $\frac{m}{k} = 250$), $S(t) = 250\ln\left(ch\frac{t}{5}\right)$.

Найдем время падения парашютиста, учитывая, что парашютист прыгнул с высоты 1500 м, а раскрыл парашют на высоте 500 м, т.е.

$$S(t) = 1000 = 250\ln\left(ch\frac{t}{5}\right).$$

Отсюда $\ln(ch\frac{t}{5}) = 4$, $ch\frac{t}{5} = e^4 \approx 54{,}5$, следовательно, $t \approx 23{,}4\, сек$.

2 Пример выполнения индивидуального задания по теме «Дифференциальные уравнения порядка выше первого»

1. Определить тип дифференциального уравнения и найти его общее решение.

<u>Пример 1</u>. Найти общее решение уравнения $y'''y'' = \sqrt{1 + y''^2}$.

Решение. Пусть $y'' = u$, тогда $u'u = \sqrt{1+u^2}$, $\frac{udu}{\sqrt{1+u^2}} = dx$, $\sqrt{1+u^2} = x + c_1$, $u = \pm\sqrt{(x+c_1)^2 - 1}$, или $y'' = \pm\sqrt{(x+c_1)^2 - 1}$.

Последовательным интегрированием находим

$$y' = \pm\left[\frac{1}{2}(x+c_1)\sqrt{(x+c_1)^2 - 1} - \frac{1}{2}\ln\left|x + c_1 + \sqrt{(x+c_1)^2 - 1}\right|\right] + c_2,$$

$$y = \pm\left[\frac{1}{6}\sqrt{\left((x+c_1)^2 - 1\right)^3} - \frac{1}{2}(x+c_1)\ln\left|x + c_1 + \sqrt{(x+c_1)^2 - 1}\right| + \frac{1}{2}\sqrt{(x+c_1)^2 - 1}\right] + c_2 x + c_3.$$

Знак плюс соответствует общему решению для области $y'' > 0$, знак минус – для области $y'' < 0$.

<u>Пример 2</u>. Найти частное решение уравнения, удовлетворяющее указанным начальным условиям.

$y'' - 2y' = 1$, $y(0) = \frac{5}{4}$, $y'(0) = 1$.

Решение. Пусть $y' = u$, тогда $u' - 2u = 1$, $\frac{du}{1+2u} = dx$, $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+2u}{c_1}\right| = x$, $u = c_1 e^{2x} - \frac{1}{2}$ или $y' = c_1 e^{2x} - \frac{1}{2}$.

Интегрируя полученное уравнение, находим общее решение:

$$y = \frac{1}{2}c_1 e^{2x} - \frac{1}{2}x + c_2.$$

Учитывая начальные условия, определим c_1 и c_2: $c_1 = \frac{3}{2}$, $c_2 = \frac{1}{2}$.

Частное решение уравнения запишется $y = \frac{3}{4}e^{2x} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

3. Понизить порядок данного уравнения, пользуясь однородностью, и решить уравнение.

   Пример 3. Найти общее решение уравнения $xyy'' - xy'^2 - yy' = 0$.

   Решение. Проверим однородность уравнения.

Пусть $$F(x, y, y', y'') = xyy'' - xy'^2 - yy',$$

$$F(x, \lambda y, \lambda y', \lambda y'') = x\lambda y\lambda y'' - x(\lambda y')^2 - \lambda y\lambda y' = \lambda^2(xyy'' - xy' - yy') =$$
$$= \lambda^2 F(x, y, y', y''), \quad \text{m=2}.$$

Положим $y' = yz$, тогда $y'' = (yz)' = y'z + z'y = yz^2 + yz'$, или $y'' = y(z^2 + z')$, и уравнение запишется $xy^2(z^2 + z') - xy^2z^2 - y^2z^2 = 0$.

Сокращая на y^2 (при этом теряется решение y=0), находим $xz' - z = 0$ или $\frac{dz}{z} - \frac{dx}{x} = 0$, $z = c_1 x$. Так как $z = \frac{y'}{y}$, то $y' = c_1 xy$, $\frac{dy}{y} = c_1 x dx$.

Откуда $\ln|y| = \frac{c_1 x^2}{2} + \ln|c_2|$ или $y = c_2 e^{c_1 \frac{x^2}{2}}$ – общее решение уравнения (содержит потерянное частное решение y=0, если $c_2 = 0$).

4. Решить задачу Коши.

   Пример4. Найти частное решение уравнения $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1, y'(0) = 2, y''(0) = 3$.

   Решение. Характеристическое уравнение $k^3 - 3k^2 + 3k - 1 = 0$ имеет единственный корень $k = 1$ кратности $r = 3$, поэтому частные решения запишутся $y_1 = e^x, y_2 = xe^x, y_3 = x^2e^x$. Следовательно, $y = (c_1 + c_2x + c_3x^2)e^x$ – общее решение уравнения.

Для определения произвольных постоянных найдем производные

$$y' = (c_1 + c_2x + c_3x^2)e^x + (c_2 + 2c_3x)e^x, \quad y'' = (c_1 + c_2x + c_3x^2)e^x + 2(c_2 + 2c_3x)e^x + 2c_3e^x.$$

Подставляя начальные условия, получим систему уравнений: $\begin{cases} c_1 = 1 \\ c_1 + c_2 = 2 \\ c_1 + c_2 + 2c_3 = 3. \end{cases}$

Откуда $c_1 = 1, c_2 = 1, c_3 = 0$. Следовательно, искомое частное решение имеет вид

$y = (1 + x)e^x$.

5. Найти общее решение дифференциального уравнения.

   Пример 5

   $y^{\text{IV}} + y'' = x^2 + x$.

   Решение. Характеристическое уравнение $k^4 + k^2 = 0$, его корни $k_{1,2} = 0,\ k_{3,4} = \pm i$.

Общее решение соответствующего однородного уравнения запишется

$$\bar{y} = c_1 + c_2x + c_3\cos x + c_4\sin x.$$

Частное решение имеет вид $y^* = x^2(Ax^2 + Bx + C) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2$.

Для определения неизвестных коэффициентов A,B,C вычислим производные от y^*: $y^{*\prime}=2Cx+3Bx^2+4Ax^3$, $y^{*\prime\prime}=2C+6Bx+12Ax^2$, $y^{*\prime\prime\prime}=6B+24Ax$, $y^{*\mathrm{IV}}=24A$

и подставим в уравнение $y^{\mathrm{IV}}+y''=x^2+x$. Из полученного тождества

$$24A+2C+6Bx+12Ax^2\equiv x^2+x$$

определим коэффициенты A,B,C двумя методами:

1) уравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим

$$\begin{cases}12A=1\\ 6B=1\\ 24A+2C=0,\end{cases} \quad \text{откуда } A=\frac{1}{12},\ B=\frac{1}{6},\ C=-1.$$

2) зададим x произвольные значения. Пусть $x=0 \Rightarrow 24A+2C=0$,

$x=-1 \Rightarrow 24A+2C-6B+12A=0,$

$x=1 \Rightarrow 24A+2C+6B+12A=2.$

Решая полученную систему, найдем $A=\frac{1}{12}$, $B=\frac{1}{6}$, $C=-1$. При определении коэффициентов используется либо первый либо, второй метод, а иногда уместно применить одновременно оба.

Частное решение запишется $y^*=\frac{x^4}{12}+\frac{1}{6}x^3-x^2$. Следовательно,

$y=C_1+C_2x+C_3\cos x+C_4\sin x-x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{x^4}{12}$ есть общее решение уравнения.

6. Найти общее решение дифференциального уравнения методом вариации произвольных постоянных.

<u>*Пример*</u> *6*

$$y''-y'=\frac{1}{1+e^x}.$$

Решение. Общее решение данного уравнения запишется $y=\bar{y}+y^*$.

Найдем $\bar{y}$ – общее решение соответствующего линейного однородного уравнения $y''-y'=0$. Корни его характеристического уравнения $k^2-k=0$ вещественные разные $k_1=0,\ k_2=1$, тогда $\bar{y}=\bar{c}_1+c_2e^x$. Запишем $y^*=c_1(x)+c_2(x)e^x$.

Составим систему для нахождения $c_1(x)$ и $c_2(x)$

$$\begin{cases}c_1'(x)1+c_2'(x)e^x=0\\ c_1'(x)0+c_2'(x)e^x=\frac{1}{1+e^x}\end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases}c_1'+c_2'e^x=0\\ c_2'e^x=\frac{1}{1+e^x}\end{cases},$$

откуда получаем: $c_2'(x)=\frac{1}{e^x(1+e^x)}$.

Следовательно,

$$c_1(x)=-\int\frac{dx}{1+e^x}=-x+\ln(1+e^x),$$

$$c_2(x)=\int\frac{dx}{e^x(1+e^x)}=-e^x-x+\ln(1+e^x).$$

Запишем $y^*=-x+\ln(1+e^x)+e^x\left[-e^{-x}-x+\ln(1+e^x)\right]$.

Общее решение: $y=\bar{c}_1+c_2e^x-x+\ln(1+e^x)-1-xe^x+e^x\ln(1+e^x)$ или

$$y = c_1 + e^x(c_2 - x) - x + (1 + e^x)\ln(1 + e^x) \quad (c_1 = \bar{c}_1 - 1).$$

7. Найти общее решение уравнения Эйлера, Лагранжа или Чебышева.

<u>Пример 7</u>. Найти общее решение уравнения Эйлера $x^2 y'' + 5xy' + 4y = 0$.

Решение. Будем искать решение в виде $y = x^r$, тогда получим: $x^2 r(r-1)x^{r-2} + 5xrx^{r-1} + 4x^r = 0$, $r(r-1) + 5r + 4 = 0$, $r^2 + 4r + 4 = 0$, $r_1 = r_2 = -2$ - двукратный корень характеристического уравнения. Поэтому общее решение имеет вид $y = C_1 x^{-2} + C_2 x^{-2} \ln x$.

<u>Пример 8.</u> Найти общее решение уравнения Чебышева

$$(1 - x^2)y'' - xy' + 4y = 0 \quad (|x| < 1).$$

Решение. Выполним замену $x = \cos t$ $(t \in (0, \pi))$, тогда

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\left(-\frac{1}{\sin t}\right),$$

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\left(-\frac{1}{\sin t}\right)\right)\frac{dt}{dx} = \left(\frac{d^2 y}{dt^2}\left(-\frac{1}{\sin t}\right) + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{\cos t}{\sin^2 t}\right) \times$$

$$\times\left(-\frac{1}{\sin t}\right) = \frac{d^2 y}{dt^2} \cdot \frac{1}{\sin^2 t} - \frac{dy}{dt} \cdot \frac{\cos t}{\sin^3 t},$$

получим $\dfrac{d^2 y}{dt^2} + 4y = 0$, откуда $y = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t = C_1 \cos(2\arccos x) +$ $+ C_2 \sin(2\arcsin x) = C_1(2x^2 - 1) + 2C_2 x\sqrt{1 - x^2}$.

8. Решить дифференциальное уравнение методом разложения в степенной ряд (до указанной степени).

Проинтегрировать приближенно с помощью ряда Тейлора уравнение $y'' = x + y^2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Найти четыре первых (отличных от нуля) члена разложения.

Решение. Дифференцируя уравнение $y'' = x + y^2$, имеем $y''' = 1 + 2yy'$, $y^{(4)} = 2yy'' + 2y'^2$, $y^{(5)} = 2yy''' + 6y'y''$, $y^{(6)} = 2yy^{(4)} + 8y'y''' + 6y''^2$.

При $x = 0$ получаем

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 0, \quad y'''(0) = 1, \quad y^{(4)}(0) = 2, \quad y^{(5)}(0) = 0, \quad y^{(6)}(0) = 16.$$

Решение имеет вид $y = \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{2x^4}{4!} + \dfrac{16x^5}{6!} + \ldots = x + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{12} + \dfrac{x^6}{45} + \ldots$.

9. Решить задачу.

<u>Задача1</u>. Если тело медленно погружается в воду, то его скорость v и ускорение w приближенно связаны уравнением $w = q - k\mathrm{v}$, где q и k постоянны. Установить зависимость между пройденным путем s и временем t, если при t=0 s=v=0.

Решение. Так как ускорение $w = \dfrac{d^2 s}{dt^2}$ и скорость $\mathrm{v} = \dfrac{ds}{dt}$, то зависимость между s и t выражается дифференциальным уравнением второго порядка $\dfrac{d^2 s}{dt^2} = q - k\dfrac{ds}{dt}$, не содержащим неизвестной функции S.

Положив в нем $\frac{ds}{dt} = \text{v}$ и $\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{d\text{v}}{dt}$, получим дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными относительно неизвестной функции v(t): $\frac{d\text{v}}{dt} = q - k\text{v}$, или $\frac{d\text{v}}{q - k\text{v}} = dt$, $-\frac{1}{k}\ln(q - k\text{v}) = t + C_1$.

Определим C_1, учитывая, что v(0)=0. $-\frac{1}{k}\ln q = C_1$. Подставив найденное значение C_1 в предыдущее равенство, получим: $t = \ln(\frac{q}{q - k\text{v}})^{\frac{1}{k}}$ или $\frac{q}{q - k\text{v}} = e^{kt}$,

откуда $\text{v} = \frac{ds}{dt} = \frac{q}{k}(1 - e^{-kt})$. Разделим переменные и проинтегрируем обе части равенства: $S(t) = \frac{q}{k}\int(1 - e^{-kt})dt + C_2$ или $S(t) = \frac{q}{k}t + \frac{q}{k^2}e^{-kt} + C_2$.

Из начального условия S(0)=0 определим C_2: $0 = \frac{q}{k^2} + C_2$, $C_2 = -\frac{q}{k^2}$.

Подставив найденное значение C_2 в предыдущее равенство, получим искомую зависимость: $S(t) = \frac{q}{k}t + \frac{q}{k^2}(e^{-kt} - 1)$.

10. Решить задачу.

Задача 2. Найти кривую, радиус кривизны которой равен кубу нормали; искомая кривая должна проходить через точку M(0;1) и иметь в этой точке касательную, составляющую с осью Ox угол 45 градусов.

Решение. Так как радиус кривизны плоской кривой выражается формулой $R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{|y''|}$, а длина нормали $N = \left|y\sqrt{1 + y'^2}\right|$, то дифференциальное уравнение задачи имеет вид: $\frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''} = (y\sqrt{1 + y'^2})^3$.

Отсюда, сократив на $(1 + y'^2)^{3/2}$, приходим к уравнению $y'' \cdot y^3 = 1$ (см. уравнение (2.10).

Полагая $y' = p;\ y'' = p\frac{dp}{dy}$, получим уравнение $p\frac{dp}{dy} \cdot y^3 = 1$.

Интегрируя его, находим: $pdp = y^{-3}dy$, $\frac{1}{2}p^2 = -\frac{1}{2}y^{-2} + \frac{1}{2}C_1$, $p^2 = C_1 - y^{-2}$.

Возвращаясь к переменной y, приходим к уравнению $y'^2 = C_1 - y^{-2}$.

Произвольную постоянную C_1 найдем из условия, что касательная в точке M(0;1) составляет с осью OX угол 45 градусов, т.е. $tg45^\circ = y'_M = 1$ или $y'(0) = 1$. Следовательно, $1 = C_1 - 1$, т.е. $C_1 = 2$. Таким образом, для определения y получено уравнение первого порядка $y'^2 = 2 - y^{-2}$, откуда $y' = \frac{\sqrt{2y^2 - 1}}{y}$;

разделяя переменные и интегрируя, получим

$$\frac{ydy}{\sqrt{2y^2-1}}=dx;\ \ \frac{1}{2}\sqrt{2y^2-1}=x+\frac{1}{2}C_2;\ \ \ y^2=\frac{1}{2}\left[(2x+C_2)^2+1\right].$$

Произвольную постоянную C_2 находим из условия прохождения кривой через точку M(0;1), т.е. $1=\frac{1}{2}\left[(2\cdot 0+C_2)^2+1\right]$; $C_2=1$.

Следовательно, искомая кривая определяется уравнением

$$y^2=2x^2+2x+1.$$

3 Пример выполнения индивидуального задания по теме: Системы дифференциальных уравнений; Теория устойчивости.

Найти общее решение системы дифференциальных уравнений в случае, когда матрица системы имеет вещественные собственные значения.

Пример 1. Решить систему

$$\begin{cases}\dot{x}=x-y+z\\ \dot{y}=x+y-z\\ \dot{z}=2x-y\end{cases}.$$

Решение. Ищем решение в виде $x=\alpha e^{\lambda t}, y=\beta e^{\lambda t}, z=\gamma e^{\lambda t}$. Подставляя это выражение в систему, имеем

$$\alpha(\lambda-1)+\beta-\gamma=0,\ -\alpha+\beta(\lambda-1)+\gamma=0,\ -2\alpha+\beta+\gamma\lambda=0.$$

Составляем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & -1 & 1\\ 1 & 1-\lambda & -1\\ 2 & -1 & -\lambda\end{vmatrix}=0,$$

откуда

$$\lambda^3-2\lambda^2+\lambda+2=0.$$

Корни этого уравнения $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=-1$ – простые. Поэтому частные решения представляются следующим образом:

$$\begin{aligned}&x_1=\alpha_1e^{t}, && x_2=\alpha_2e^{2t}, && x_3=\alpha_3e^{-t},\\ &y_1=\beta_1e^{t}, && y_2=\beta_2e^{2t}, && y_3=\beta_3e^{-t},\\ &z_1=\gamma_1e^{t}, && z_2=\gamma_2e^{2t}, && z_3=\gamma_3e^{-t},\end{aligned}$$

Для установления связи между постоянными $\alpha_k,\beta_k,\gamma_k$, пользуясь системой, имеем

$$\alpha_k(\lambda_k-1)+\beta_k-\gamma_k=0,\ \ -\alpha_k+\beta_k(\lambda_k-1)+\gamma_k=0,\ -2\alpha_k+\beta_k+\gamma_k\lambda_k=0,\ \ k=1,2,3.$$

Нетрудно получить решение последней системы:

$\beta_1=\alpha_1=\gamma_1$; $\alpha_2=\gamma_2$, $\beta_2=0$; $\beta_3=-3\alpha_3$, $\gamma_3=-5\alpha_3$.

Поскольку часть найденных постоянных произвольна, можно положить $\gamma_1=1$, $\gamma_2=1$, $\alpha_3=1$. Тогда $\beta_1=\alpha_1=1$; $\alpha_2=1$; $\beta_3=-3$; $\gamma_3=-5$. Таким образом, общее решение имеет вид

$$x = c_1e^t + c_2e^{2t} + c_3e^{-t},$$
$$y = c_1e^t - 3c_3e^{-t},$$
$$z = c_1e^t + c_2e^{2t} - 5c_3e^{-t}.$$

2. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений в случае, когда матрица системы имеет комплексные собственные значения.

Пример 2. Решить систему

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = x + 3y - z, \\ \dot{z} = -x + 2y + 3z. \end{cases}$$

Решение. Составляем и решаем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & -1 \\ -1 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \;;\lambda_1 = 2 \;,\lambda_2 = 3 + i \;,\lambda_3 = 3 - i.$$

При этом частные решения будут иметь вид

$$x_1 = A_1e^{2t} \;;\; x_2 = A_2e^{(3+i)t} \;;\; x_3 = A_3e^{(3-i)t} \;;$$
$$y_1 = B_1e^{2t} \;;\; y_2 = B_2e^{(3+i)t} \;;\; y_3 = B_3e^{(3-i)t} \;;$$
$$z_1 = C_1e^{2t} \;;\; z_2 = C_2e^{(3+i)t} \;;\; z_3 = C_3e^{(3-i)t} \;.$$

Для определения постоянных A_k, B_k, C_k, k=1,2,3 пользуемся системой алгебраических уравнений:

$$A_k(2-\lambda_k) + B_k = 0 \;,\; A_k + (3-\lambda_k)B_k - C_k = 0 \;,$$
$$-A_k + 2B_k + (3-\lambda_k)C_k = 0 \;,\; k = 1,2,3.$$

Решив систему уравнений относительно A_k, B_k, C_k, k=1,2,3, получаем:

$B_1 = 0,\; A_1 = C_1 = A_2 = A_3 = 1,\; B_2 = 1 + i,\; C_2 = 2 - i,\; B_3 = 1 - i,\; C_3 = 2 + i.$ Следовательно, общее решение:

$$x = \tilde{c}_1e^{2t} + \tilde{c}_2e^{3t}(\cos t + i\sin t) + \tilde{c}_3e^{3t}(\cos t - i\sin t);$$
$$y = \tilde{c}_2(1+i)e^{3t}(\cos t + i\sin t) + \tilde{c}_3(1-i)e^{3t}(\cos t - i\sin t);$$
$$z = \tilde{c}_1e^{2t} + \tilde{c}_2(2-i)e^{3t}(\cos t + i\sin t) + \tilde{c}_3(2+i)e^{3t}(\cos t - i\sin t).$$

Чтобы получить общее решение данной системы дифференциального уравнения в действительной форме, надо взять вещественную и мнимые части найденного комплексного решения. В частности, если положить

$$\tilde{c}_2 = c_2 + ic_3 \;,\; \tilde{c}_3 = c_2 - ic_3,$$

где c_2, c_3 – действительные постоянные, и считать также $c_1 = \tilde{c}_1$ действительной постоянной, можно дописать общее решение данной системы в действительной форме:

$$x = c_1e^{2t} + 2e^{3t}(c_2\cos t - c_3\sin t),$$
$$y = 2e^{3t}((c_2 - c_3)\cos t - (c_2 - c_3)\sin t),$$
$$z = c_1e^{2t} + 2e^{3t}((2c_2 + c_3)\cos t + (c_2 - 2c_3)\sin t).$$

3. Найти общее решение, используя метод вариации постоянных.

Пример 3. Применяя метод вариации, решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = -4x - 2y + \dfrac{2}{e^t - 1}, \\ \dot{y} = 6x + 3y - \dfrac{3}{e^t - 1}. \end{cases}$$

Решение. Прежде всего решаем однородную систему уравнений, соответствующую данной системе: $\begin{cases} \dot{x} = -4x - 2y, \\ \dot{y} = 6x + 3y. \end{cases}$

Подставляя значение $y = -2x - \frac{1}{2}\dot{x}$ во второе уравнение, получаем $\ddot{x} + \dot{x} = 0$, откуда $x=c_1+c_2e^{-t}$, тогда $y = -2c_1 - \frac{3}{2}c_2e^{-t}$. Для определения общего решения неоднородной системы, согласно методу вариации произвольных постоянных, считаем c_1 и c_2 некоторыми функциями: $c_1(t)$ и $c_2(t)$.

Эти функции найдем из системы уравнений, которая получится в результате подстановки значений x и y в неоднородную систему:

$$\begin{cases} c_1'(t) + c_2'(t)e^{-t} = \dfrac{2}{e^t - 1}, \\ -2c_1'(t) - \dfrac{3}{2}c_2'(t)e^{-t} = -\dfrac{3}{e^t - 1}. \end{cases}$$

Отсюда положим $c_2'(t) = \dfrac{2e^t}{e^t - 1}$, $c_1'(t) = 0$. Интегрируя последние уравнения, получаем $c_1(t) = \tilde{c}_1$, $c_2(t) = 2\ln(e^t - 1) + \tilde{c}_2$, где $\tilde{c}_1$ и $\tilde{c}_2$ – произвольные постоянные. Подставляя значения $c_1(t)$ и $c_2(t)$ в общее решение однородной системы, имеем общее решение исходной системы:

$$\begin{cases} x = \tilde{c}_1 + \tilde{c}_2e^{-t} + 2e^{-t}\ln|e^t - 1|, \\ y = -2\tilde{c}_1 - \dfrac{3}{2}\tilde{c}_2e^{-t} - 3e^{-t}\ln|e^t - 1|. \end{cases}$$

Общее решение линейной неоднородной системы есть сумма общего решения соответствующей ей однородной системы и частного решения неоднородной системы.

4. Найти решение неоднородной системы уравнений.

Пример 4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - 5\cos t, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + y. \end{cases}$$

Решение. Найдем общее решение однородной системы:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + y. \end{cases}$$

Составляем и решаем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \; л^2-л-2=0; \; л_1=-1, \; л_2=2.$$

Общее решение соответствующей однородной системы:

$$\begin{cases} x_{\text{од.}} = c_1e^{-t} + c_2e^{2t}, \\ y_{\text{од.}} = -c_1e^{-t} + 2c_2e^{2t}. \end{cases}$$

Частное решение неоднородной системы найдем методом неопределенных коэффициентов, полагая

$$\begin{cases} x = A_1\sin t + B_1\cos t, \\ y = A_2\sin t + B_2\cos t. \end{cases}$$

Подставляя эти выражения в данную систему уравнений, получим уравнения для определения коэффициентов A_1, A_2, B_1, B_2:

$$\begin{cases} A_1 - B_2 = -5, \\ B_1 + A_2 = 0, \\ A_2 - 2B_1 - B_2 = 0, \\ 2A_1 + B_2 + A_2 = 0. \end{cases}$$

Решая эти уравнения, найдем A_1=-2, B_1=-1, A_2=1, B_2=3. Общее решение данной системы уравнений запишем в виде

$$\begin{cases} x = c_1e^{-t} + c_2e^{2t} - 2\sin t - \cos t, \\ y = -c_1e^{-t} + 2c_2e^{2t} + \sin t + 3\cos t. \end{cases}$$

5. Для заданной системы уравнений найти все положения равновесия и исследовать их на устойчивость.

Пример5.

$$\begin{cases} x_1' = x_2 - x_1^2 - x_1, \\ x_2' = 3x_1 - x_1^2 - x_2. \end{cases}$$

Решение. Сначала на плоскости Ox_1x_2 находим точки, в которых $x_1' = x_2' = 0$ (точки покоя, или положения равновесия), т.е. решаем систему уравнений

$$\begin{cases} x_2 - x_1 - x_1^2 = 0, \\ 3x_1 - x_1^2 - x_2 = 0. \end{cases}$$

Имеем две точки равновесия: (0,0) и (1,2). Составим матрицу из значений частных производных от правых частей исходной системы:

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-2x_1 & 1 \\ 3-2x_1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Находим собственные значения матрицы при x_1=0, x_2=0:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{3}\,.$$

Так как $-1+\sqrt{3} > 0$, точка (0, 0) неустойчива.

При x_1=1, x_2=2 имеем

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda_{1,2} = -2 \pm \sqrt{2}.$$

Так как $\lambda_1<0$, $\lambda_2<0$, точка (1, 2) асимптотически устойчива.

6. Исследовать устойчивость нулевого решения, используя критерий Рауса-Гурвица или критерий Михайлова.

Пример 6.

$$x^{\mathrm{IV}} + 2x''' + 4x'' + 3x' + 2x = 0.$$

Решение. Для исследования устойчивости нулевого решения воспользуемся критерием Рауса-Гурвица. Матрица Гурвица в данном случае имеет вид

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Поскольку ее главные миноры

$$\Delta_1 = a_1 = 2 > 0,\ \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5 > 0,\ \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 7 > 0,\ \ \Delta_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 14 > 0,$$

то согласно указанному критерию действительные части всех корней характеристического многочлена $\lambda^4 + 2\lambda^3 + 4\lambda^2 + 3\lambda + 2$ отрицательны. Следовательно, нулевое решение асимптотически устойчиво.

Заключение.

При изучении дисциплины «Дифференциальные уравнения» студент приобретает практические навыки построения математических моделей простейших физических явлений и решения (аналитического и численного) получающихся при этом математических задач. После изучения дисциплины студент должен свободно ориентироваться в основных разделах дисциплины, что включает: дифференциальные уравнения первого порядка, дифференциальные уравнения высших порядков, системы дифференциальных уравнений, уравнения в частных производных первого порядка. Учится подбирать соответствующий метод решения дифференциальных уравнений, применять дифференциальные уравнения на практике для исследования различных физических явлений.

В результате освоения данной дисциплины студент должен овладеть: способностью использовать в профессиональной деятельности знания и методы, полученные при изучении математических и естественнонаучных дисциплин.