Министерство образования и науки РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
(ФГБОУ ВО «АмГУ»)

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
сборник учебно-методических материалов

для направления подготовки 09.03.01 Информатика и вычислительная техника,

09.03.02 Информационные системы и технологии,

38.03.05 Бизнес-информатика

Благовещенск

2017

Печатается по решению
редакционно-издательского совета
факультета математики и информатики
Амурского государственного
университета

Составитель: Самохвалова С.Г.

Исследование операций: сборник учебно-методических материалов для направлений подготовки для направления подготовки 09.03.01 Информатика и вычислительная техника, 09.03.02 Информационные системы и технологии, 38.03.05 Бизнес-информатика – Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2017. – 75 с.

© Амурский государственный университет, 2017

© Кафедра информационных и управляющих систем, 2017

© Самохвалова С. Г., составление,2017

КРАТКОЕ ИЗЛОЖЕНИЕ ЛЕКЦИОННОГО МАТЕРИАЛА

Основные понятия исследования операций

Исторически сложилось так, что в конце 30-х гг. прошлого столетия все страны лихорадочно искали методы и способы улучшения управления во всех сферах своей деятельности. Экономика выходила из тяжелейшего общего кризиса, фашизм не только планировал передел территорий, а уже кромсал границы – разгоралось пламя страшной мировой бойни. Военные штабы разрабатывали планы боевых операций, правительства, министры, деловые люди и ученые искали наиболее эффективные способы управления организационными системами и процессами. Обострился социальный заказ на новые разработки в этом направлении.

Потребности практики вызвали к жизни специальные научные методы, которые удобно объединять под названием «исследование операций». Под этим термином будем понимать применение математических, количественных методов для обоснования решений во всех областях целенаправленной человеческой деятельности. Решения бывают плохими и хорошими, продуманными и скороспелыми, обоснованными и произвольными.

Исследование операций начинается тогда, когда для обоснования решений применяется тот или другой математический аппарат. До поры до времени решения в любой области практики принимаются без специальных математических расчетов, просто на основе опыта и здравого смысла. Скажем, для решения вопроса о том, как одеться, выходя на улицу, и где ее перейти, математика не нужна, да и вряд ли потребуется в дальнейшем. Оптимизация таких решений происходит как бы сама собой, в процессе жизненной практики. Если порой принятое решение окажется не самым удачным, так что же? На ошибках учатся!

Однако бывают решения куда более ответственные. Пусть, например, организуется работа общественного транспорта в новом городе с сетью предприятий, жилыми массивами и т. д. Необходимо принять ряд решений: по каким маршрутам и какие транспортные средства направить? В каких пунктах сделать остановки? Как изменять частоту следования машин в зависимости от времени суток? и т. д.

Эти решения — гораздо сложнее, а главное, от них очень многое зависит. Неправильный их выбор может отразиться на деловой жизни целого города. Конечно, и в этом случае при выборе решения можно действовать интуитивно, опираясь на опыт и здравый смысл (так оно нередко и делается). Но гораздо разумнее будут решения, если они подкреплены математическими расчетами. Эти предварительные расчеты помогут избежать длительного и дорогостоящего поиска нужного решения «на ощупь».

Первые исследования операций применялись для анализа и исследования боевых операции, отсюда и возникло название. Цель исследования операций – количественное обоснование принимаемых решений. Решение, наиболее выгодное для всей организации называется оптимальным, а решение наиболее выгодное одному или нескольким подразделениям будет субоптимальным. Операция –это сложный процесс с ярко выраженной целью. Собственно любая совокупность целенаправленных действий (именно управляемых действий) для достижения цели называется операцией. Выбор возможных управляемых действий называют решением, наилучшее решение называют оптимальным. Собственно в поиске оптимальных решений заключается основная особенность исследования операций.

Поиск оптимального решения осуществляется комплексно, по многим направлениям, для чего создается операционная группа из специалистов разных областей знаний.

Операционное исследование состоит из этапов:

– постановка задачи,
– построение математической модели,
– решение задачи,
– анализ решения,
– реализация решения на практике.

Операцией называется всякое мероприятие (система действий), объединенное единым замыслом и направленное к достижению какой-то цели.

Операция есть всегда управляемое мероприятие, т. е. от нас зависит, каким способом выбрать некоторые параметры, характеризующие ее организацию. «Организация» здесь понимается в широком смысле слова, включая набор технических средств, применяемых в операции.

Всякий определенный выбор зависящих от нас параметров называется решением . Решения могут быть удачными и неудачными, разумными и неразумными.

Оптимальными называются решения, по тем или другим признакам предпочтительные перед другими. Цель исследования операций — предварительное количественное обоснование оптимальных решений.

Иногда (относительно редко) в результате исследования удается указать одно-единственное строго оптимальное решение, гораздо чаще — выделить область практически равноценных оптимальных (разумных) решений, в пределах которой может быть сделан окончательный выбор.

В некоторых случаях бывает, что операция, сопровождаемая случайными факторами, преследует какую-то вполне определенную цель *A,* которая может быть только достигнута полностью или совсем не достигнута (схема «да — нет»), и никакие промежуточные результаты нас не интересуют. Неправильный выбор показателя эффективности очень опасен. Операции, организованные под углом зрения неудачно выбранного критерия, могут привести к неоправданным затратам и потерям (вспомним хотя бы пресловутый «вал» в качестве основного критерия оценки хозяйственной деятельности предприятий).

Математические модели операций.

Для применения количественных методов исследования в любой области всегда требуется какая-то математическая модель. При построении модели реальное явление (в нашем случае — операция) неизбежно упрощается, схематизируется, и эта схема («макет» явления) описывается с помощью того или другого математического аппарата. Чем удачнее будет подобрана математическая модель, чем лучше она будет отражать характерные черты явления, тем успешнее будет исследование и полезнее — вытекающие из него рекомендации.

Общих способов построения математических моделей не существует. В каждом конкретном случае модель выбирается исходя из вида операции, ее целевой направленности, с учетом задачи исследования (какие параметры требуется определить и влияние каких факторов отразить). Если исходные данные, нужные для расчетов, известны неточно, то, нет смысла входить в тонкости, строить очень подробную модель и тратить время (свое и машинное) на тонкую и точную оптимизацию решения. К сожалению, этим принципом часто пренебрегают и выбирают для описания явлений слишком подробные модели.

Математическая модель должна отражать важнейшие черты явления, все существенные факторы, от которых в основном зависит успех операции. Вместе с тем, модель должна быть по возможности простой, не «засоренной» массой мелких, второстепенных факторов: их учет усложняет математический анализ и делает труднообозримыми результаты исследования. Две опасности всегда подстерегают составителя модели: первая — увязнуть в подробностях («из-за деревьев не увидеть леса») и вторая — слишком огрубить явление («выплеснуть вместе с водой и ребенка»). Искусство строить математические модели есть именно искусство, и опыт в нем приобретается постепенно. Поскольку математическая модель не вытекает с непреложностью из описания задачи, всегда полезно не верить слепо ни одной модели, а сличать результаты, полученные по разным моделям, устраивать как бы «спор моделей». При этом одну и ту же задачу решают не один раз, а несколько, пользуясь разной системой допущений, разным аппаратом, разными моделями. Если научные выводы от модели к модели меняются мало — это серьезный аргумент в пользу объективности исследования. Если они существенно расходятся, надо пересмотреть концепции, положенные в основу различных моделей, посмотреть, какая из них более адекватна действительности, в случае надобности — поставить контрольный эксперимент. Характерным для исследования операций является также повторное обращение к модели (после того, как первый тур расчетов уже проведен) для внесения в модель коррективов.

Создание математической модели — самая важная и ответственная часть исследования, требующая глубокого знания не столько математики, сколько существа моделируемых явлений. Как правило, «чистые» математики (без помощи специалистов в той области, к которой относится задача) с построением модели справляются плохо. В центре внимания у них оказывается математический аппарат с его тонкостями, а не реальная практическая задача.

При построении математической модели может быть (в зависимости от вида операции, задач исследования и точности исходных данных) использован математический аппарат различной сложности. В самых простых случаях явление описывается простыми, алгебраическими уравнениями. В более сложных, когда требуется рассмотреть явление в динамике, применяется аппарат дифференциальных уравнений (обыкновенных или с частными производными). В наиболее сложных случаях, когда развитие операции и ее исход зависят от большого числа сложно переплетающихся между собой случайных факторов, аналитические методы вообще отказываются служить, и применяется метод статистического моделирования. В исследовании операций широко применяются как аналитические, так и статистические модели. Каждый из этих типов имеет свои преимущества и недостатки.

Аналитические модели более грубы, учитывают меньшее число факторов, всегда требуют каких-то допущений и упрощений. Зато результаты расчета по ним легче обозримы, отчетливее отражают присущие явлению основные закономерности. Аналитические модели больше приспособлены для поиска оптимальных решений.

Статистические модели, по сравнению с аналитическими, более точны и подробны, не требуют столь грубых допущений, позволяют учесть большое (в теории — неограниченно большое) число факторов. Но и у них — свои недостатки: громоздкость, плохая обозримость, большой расход машинного времени, а главное, крайняя трудность поиска оптимальных решений, которые приходится искать «на ощупь», путем догадок и проб.

Задачи исследования операций делятся на две категории: а) прямые и б) обратные. Прямые задачи отвечают на вопрос: что будет, если в заданных условиях мы примем какое-то решение $x \in X$? В частности, чему будет равен, при данном решении x, выбранный показатель эффективности W (или же ряд таких показателей)? Для решения такой задачи строится математическая модель, позволяющая выразить один или несколько показателей эффективности через заданные условия и элементы решения.

Обратные задачи отвечают на вопрос: как выбрать решение x для того, чтобы показатель эффективности W обратился в максимум?

По содержательной постановке различают ряд типов задач исследования операций:

1. Задача сетевого планирования и управления.
2. Задача массового обслуживания.
3. Задача управления запасами.
4. Задача составления расписаний.
5. Задача планировки и размещения.
6. Задача выбора маршрута.
7. Задачи теории игр.

Задачи линейного программирования общего типа

Первое упоминание (1938 г.) о математических методах в эффективном управлении производством принадлежит советскому математику Л. В. Канторовичу. В 1939 г., Л. В. Канторович опубликовал работу «Математические методы организации и планирования производства» и практически применил полученные результаты.

Термин «линейное программирование» ввели американские математики Дж. Данциг и Т. Купманс в конце 40-х годов. Дж. Данциг разработал математический аппарат симплексного метода решения задач линейного программирования (1951 г.). Симплексный метод находит применение для решения широкого круга задач линейного программирования и до настоящего времени является одним из основных методов.

Линейное программирование — это раздел математики, ориентированный на нахождение экстремума (максимума или минимума) в задачах, которые описываются линейными уравнения-

ми. Причем линейными уравнениями описывается как сама целевая функция, так и входные параметры (переменные) условия ограничений на входные параметры. Необходимым условием задач линейного программирования является обязательное наличие ограничений на ресурсы (сырье, материалы, финансы, спрос произведенной продукции и т.д.). Другим важным условием решения задачи является выбор критерия останова алгоритма, т. е. целевая функция должна быть оптимальна в некотором смысле. Оптимальность целевой функции должна быть выражена количественно. Если целевая функция представлена одним или двумя уравнениями, то на практике такие задачи решаются достаточно легко. Критерий останова алгоритма (или критерий оптимальности) должен удовлетворять следующим требованиям:

1. быть единственным для данной задачи;
2. измеряться в единицах количества;
3. линейно зависеть от входных параметров.

Исходя из вышесказанного, можно сформулировать задачу линейного программирования в общем виде:

найти экстремум целевой функции

$$F(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \ldots + c_nx_n \to \max(\min)$$

при ограничениях в виде равенств:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nm}x_n = b_m; \end{cases}$$

при ограничениях в виде неравенств:

$$\begin{cases} a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + a_{p3}x_3 + \ldots + a_{pn}x_n < b_p; \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + a_{r3}x_3 + \ldots + a_{rn}x_n < b_r; \\ \ldots \\ a_{v1}x_1 + a_{v2}x_2 + a_{v3}x_3 + \ldots + a_{vn}x_n < b_v; \end{cases}$$

и условиях неотрицательности входных параметров:

$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0; \quad \ldots; \quad x_n \geq 0.$$

В краткой форме задача линейного программирования может быть записана так:

$$L_{(x)} = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

при условии

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i \leq b_i \ (\text{или} \geq b_1) \text{ при } j = 1,2,\ldots,m, \quad x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,n},$$

где $x_1, \ldots, x_n$ - входные переменные;

$c_1, \ldots, c_n$; $a_{11}, \ldots, a_{nv}$; $b_1, \ldots, b_v$ - числа положительные, отрицательные и равные нулю.

В матричной форме эта задача может быть записана так:

$cx \to \max$, при $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ или $\boldsymbol{Ax} \geq \boldsymbol{b}$; $x \geq 0$

Задачи линейного программирования можно решить аналитически и графически.

Каноническая задача линейного программирования

$$\max \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \ i=1,\ldots,m,$$

$$x_j \geq 0, \ j=1,\ldots,n.$$

Основные вычислительные методы решения задач линейного программирования разработаны именно для канонической задачи.

Общей задачей линейного программирования называют задачу: Максимизировать (минимизировать) функцию

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (1)$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} \sum_{j+1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i (i = \overline{1, m_1}), \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i (i = \overline{m_1 + 1, m_2}), \\ \sum_{j+1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i (i = \overline{m_2 + 1, m}) \\ x_j \ge 0 (j = \overline{1, n_1}), \\ x_j - произвольные (j = \overline{n_1 + 1, n}), \end{cases} \qquad (2)$$

где c_j, a_{ij}, b_i -заданные действительные числа, (1) - целевая функция, (2) - ограничения, $\vec{X} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ - план задачи.

Моделируемая система характеризуется наличием нескольких видов «производственной деятельности» $j (j = \overline{1, n})$, для осуществления которых требуются имеющиеся в ограниченном количестве различные ресурсы $b_i, i = \overline{1, m}$. Расход *i-го* ресурса на единицу продукта *j-го* вида производственной деятельности равен a_{ij}. В свою очередь при таком потреблении результат j-го вида производственной деятельности для единицы соответствующего продукта (удельная стоимость или прибыль) характеризуется величиной c_j.

Цель построения модели состоит в определении *уровней* (объемов производства) каждого вида производственной деятельности x_j, при которых оптимизируется (максимизируется или минимизируется) общий результат производственной деятельности системы в целом без нарушения ограничений, накладываемых на использование ресурсов.

Оптимальным решением (или *оптимальным планом*) задачи ЛП называется решение $\vec{X} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ системы ограничений (2), при котором линейная функция (1) принимает оптимальное значение.

Геометрическая интерпретация и графическое решение ЗЛП.

Алгоритм геометрического решения ЗЛП

1. Записать уравнения прямых, соответствующих ограничениям, и построить их на плоскости.

2. Определить области, в которых выполняются ограничения задачи.

3. Определить область допустимых решений задачи как область пересечения полуплоскостей, соответствующих ограничениям задачи.

4. Определить направление возрастания (убывания) целевой функции *f*.

Это можно сделать двумя способами.

Способ 1. Построить вектор-нормаль, и его направление показывает направление возрастания целевой функции *f*, в противоположном направлении функция *f* убывает.

Способ 2. Построить две линии уровня функции *f*: $f=C_1$ и $f=C_2$ (C_1, C_2 – произвольные константы) и по их расположению на плоскости определить направление возрастания (убывания) функции.

5. Определить граничную точку или точки области допустимых решений, в которых целевая функция принимает максимальное (минимальное) значение. Для этого передвигаем нашу линию уровня $f = C$ в направлении возрастания целевой функции *f* (или в направлении убывания

целевой функции *f*) параллельнор самой себе до тех пор, пока хотя бы одна ее точка будет принадлежать области допустимых решений.

6. Определить координаты найденной точки, решая систему уравнений, состоящую из уравнений прямых, на пересечении которых находится эта точка, или выявляя уравнение граничной прямой области допустимых решений, с которой совпадает линия уровня целевой функции.

Пример. Предприятию необходимо изготовить два вида продукции А и В, с использованием трех видов ресурсов R_1, R_2, R_3 количество которых ограничено. Исходные данные задачи представлены в таблице:

Вид ресурсов	Количество ресурсов, идущих на изготовление единицы продукции		Запасы ресурсов
	А	**В**	
R_1	6	6	36
R_2	4	2	20
R_3	4	8	40
Доходы от реализации продукции	12	15	

Требуется составить такой план выпуска продукции, чтобы при ее реализации получить максимальный доход.

Решение.

Процесс построения математической модели можно представить как ответы на следующие три вопроса**:**

1. Для определения каких величин должна быть построена модель?

2. В чем состоит цель, для достижения которой из всех допустимых значений переменных нужно выбрать те, которые будут соответствовать оптимальному (наилучшему) решению задачи?

3. Какие ограничения должны быть наложены на переменные, чтобы выполнить условия, отраженные в содержательной постановке задачи?

Обозначим через x_1 и x_2 количество единиц продукции видов *A* и *B*, планируемых к выпуску.

Известно, что доход от реализации единицы продукции *A* составляет 12 усл. ед. и количество этой продукции - x_1. Следовательно, доход от реализации всей продукции *A* составит $12x_1$ усл. ед. Аналогично, доход от реализации всей продукции *B* составит $15x_2$ усл. ед. Учитывая, что доход от реализации продукции должен быть максимальным, целевая функция задачи будет иметь вид:

$$Z = 12x_1 + 15x_2 \to \max$$

Известно также, что имеющиеся на предприятии ресурсы ограничены. Это обстоятельство в свою очередь необходимо отразить в модели. Предприятие производит продукцию, используя три вида ресурсов. Естественно, что фактический расход никакого вида ресурса не должен превышать запасов соответствующего вида ресурсов на предприятии. Поскольку расход каждого вида ресурсов на единицу каждого вида продукции и запасы ресурсов известны, это обстоятельство отражается в следующих ограничениях:

$$6x_1 + 6x_2 \le 36$$

$$4x_1 + 2x_2 \le 20$$

$$4x_1 + 8x_2 \le 40$$

Смысл первого ограничения состоит в том, что фактический расход ресурса R_1 на производство продукции *A* и *B*, равный $6x_1+6x_2$ (здесь $6x_1$ - количество единиц ресурса R_1, идущего на изготовление x_1 единиц продукции *A*; $6x_2$ - количество единиц ресурса R_1, идущее на изготовление x_2 единиц продукции *B*) не должен превышать запаса этого ресурса на предприятии, равного 36 ед. Аналогичный смысл имеют 2-е и 3-е ограничения только для ресурсов R_2 и R_3 соответственно.

Количество продукции, выпускаемое предприятием, должно быть величиной положительной или равной нулю (если предприятие определенный вид продукции не производит). Следовательно, в модели должны присутствовать ограничения неотрицательности переменных:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Таким образом, построена математическая модель нашей задачи как задачи линейного программирования:

$$Z = 12x_1 + 15x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 6x_2 \leq 36 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 20 \\ 4x_1 + 8x_2 \leq 40 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Начнем решение задачи с построения области допустимых решений.

В первую очередь отобразим в прямоугольной системе координат условия неотрицательности переменных. В двумерном пространстве уравнению соответствует прямая линия, а неравенству - полуплоскость, лежащая по одну сторону от прямой. Прямые $x_1=0$ и $x_2=0$ совпадают с осями координат. Полуплоскости $x_1>0, x_2>0$ лежат соответственно справа от оси Ox_2 и выше оси Ox_1. Множество точек, удовлетворяющих одновременно неравенствам $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ представляют собой пересечение построенных полуплоскостей вместе с граничными прямыми и совпадают с точками первой четверти.

Теперь рассмотрим ограничения задачи. Построим по порядку прямые:

` $6x_1+6x_2=36$	или	$x_1+x_2=6$	(а)
$4x_1+2x_2=20$	или	$2x_2+x_2=10$	(б)
$4x_1+8x_2=40$	или	$x_1+2x_2=10$	(в)

и определяем, с какой стороны от этих прямых лежат полуплоскости, точки которых удовлетворяют строгим неравенствам:

$$6x_1+6x_2<36$$
$$4x_1+2x_2<20$$
$$4x_1+8x_2<40$$

Для определения полуплоскости решений первого неравенства возьмем произвольную точку плоскости, не лежащую на прямой $6x_1+6x_2=36$, например (0;0), и подставим ее координаты в неравенство $6 \cdot 0 + 6 \cdot 0 < 36$.

В результате подстановки получили верное числовое неравенство 0< 36, и это означает, что начало координат лежит в полуплоскости решений первого неравенства. Сторона, в которой располагается полуплоскость от прямой, указывается штриховой. Аналогично строим полуплоскость решений остальных неравенств.

Заштрихованная часть плоскости и представляет собой искомый многоугольник допустимых решений задачи (рисунок 1)

Теперь нужно среди точек построенного многоугольника найти такую, в которой целевая функция $Z=12x_1+15x_2$ достигает максимального значения. Для этого построим прямую, заданную уравнением $12x_1+15x_2=0$, которая является линией нулевого уровня функции Z.

Направление возрастания линейной функции $Z=12x_1+15x_2$ указывает вектор $\bar{c}$ с началом в точке (0;0) и концом в точке $M_1(12,15)$, координаты которой равны коэффициентам при соответствующих переменных функции Z.

Для нахождения оптимального плана нужно «передвигать» линию нулевого уровня Z параллельно самой себе в направлении вектора $\bar{c}$ до точки ее «последней встречи» с многоугольником, которая и является оптимальным планом задачи. В нашем случае это вершина B многоугольника OABCD - точка пересечения прямых (а) и (в). Координаты (x_1^*, x_2^*) точки найдем, решив систему уравнений.

$$\begin{cases} 6x_1 + 6x_2 = 36 \\ 4x_1 + 8x_2 = 40 \end{cases}$$ откуда $x_1^*=2$, $x_2^*=4$.

Найдем соответствующее значение целевой функции:

$$Z = z(\bar{x}^*) = z(2,4) = 12 \cdot 2 + 15 \cdot 4 = 84 \text{ усл. ед.}$$

Ответ. Для обеспечения максимального дохода от реализации готовой продукции предприятию необходимо выпустить 2 ед. продукции вида *A* и 4 ед. продукции вида *B*. При таком плане доход от реализации составит 84 усл. ед.

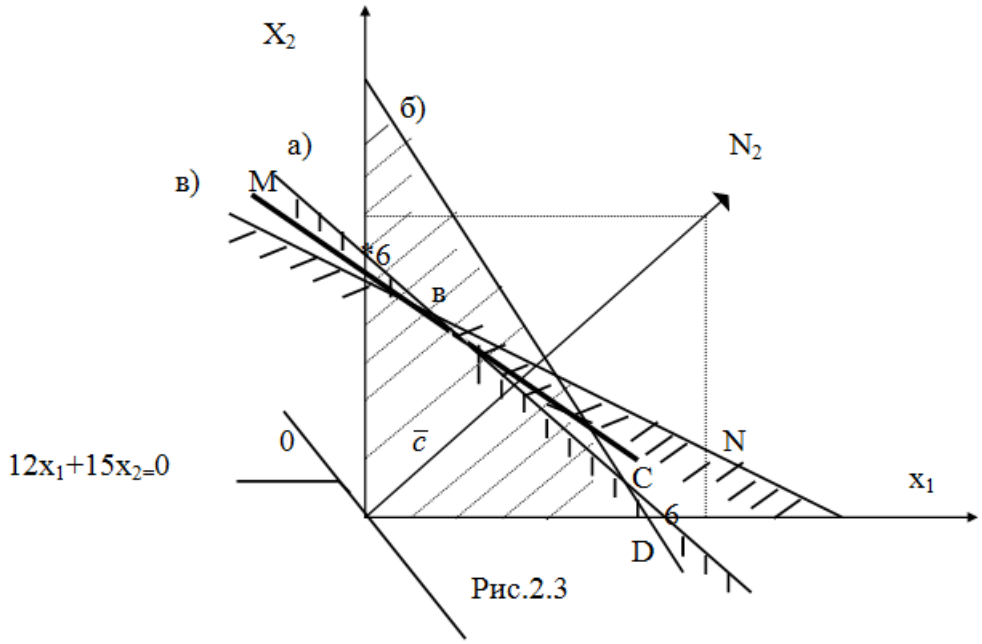


Рисунок 1. Графическое решение задачи

Геометрический метод решения ЗЛП обладает рядом достоинств: он прост, нагляден, позволяет быстро и легко получить ответ. Однако только геометрический метод решения никак не может удовлетворить ни математиков, ни экономистов. Возможны «технические» погрешности, которые неизбежно возникают при приближенном построении графиков. Второй недостаток геометрического метода заключается в том, что многие величины, имеющие четкий экономический смысл (такие, как остатки ресурсов производства, избыток питательных веществ и т.п.), не выявляются при геометрическом решении задач. Но самое главное - геометрический метод неприемлем для решения практических задач. Поэтому необходимы аналитические методы, позволяющие решать ЗЛП с любым числом переменных.

Симплекс-метод

Симплексный метод применим к решению любой задачи линейного программирования. Из геометрического смысла задачи линейного программирования следует, что для ее решения необходимо вычислить координаты всех вершин многогранника ограничений и значения целевой функции в них.

Решить задачу линейного программирования можно методом перебора. Действительно, перебором всех вершин можно найти такую вершину, где функция *f* приобретает экстремальное значение, однако при этом возможны две трудности:

1) если число неизвестных *n* больше числа ограничений *m* ($n > m$), система ограничений линейно зависима, то для построения многоугольника решений необходимо выделение всех линейно независимых систем уравнений и их решение;

2) число вершин многогранника резко возрастает с увеличением числа неизвестных *n* ($n > m$), и такой метод перебора всех вершин может оказаться слишком трудоемким.

Симплексный метод обеспечивает более рациональное решение задачи, чем метод перебора. Суть его состоит в том, что, отправляясь из некоторой произвольной вершины многогранника

ограничений, переходят к вычислению только такой вершины, в которой значение линейной функции будет больше, чем в предыдущей. Остальные варианты не вычисляются. Тогда при конечном сравнительно малом числе шагов может быть найден оптимальный план. Таким образом, производится упорядоченный перебор вершин, при котором происходит постоянное увеличение линейной функции. Поэтому симплексный метод называется также методом последовательного улучшения плана.

Решение задачи симплексным методом включает в себя два этапа.

Первый состоит в нахождении одной произвольной вершины многогранника ограничений, координаты которого определяют начальный опорный план .

Второй этап состоит в последовательном упорядоченном переходе от одной вершины многогранника к другой, смежной данной. Так как прилегающих вершин много, то каждый раз выбирается такая вершина, при переходе к которой обеспечивается наибольшее возрастание целевой функции. На каждом шаге процесса улучшения плана производится проверка на оптимальность. Очевидно, что план будет оптимальным, если среди вершин, прилегающих к данной, нет такой, при переходе к которой происходит возрастание целевой функции.

Симплекс-алгоритм состоит из следующих шагов:

Шаг 1. Используя линейную модель стандартной формы, определяют **начальное допустимое базисное решение** путем приравнивания к нулю небазисных переменных.

Шаг 2. Из числа текущих небазисных переменных выбирается **включаемая в новый базис переменная.** Если такой переменной нет, вычисления прекращаются, так как текущее базисное решение оптимально. В противном случае осуществляется переход к шагу 3.

Шаг 3. Из числа переменных текущего базиса выбирается **исключаемая переменная**.

Шаг 4. Находится новое базисное решение, соответствующее новым составам небазисных и базисных переменных. Осуществляется переход к шагу 2.

Чтобы записать задачу ЛП в стандартной форме необходимо выполнить следующие преобразования:

все ограничения преобразовать в равенства с неотрицательной правой частью;

целевую функцию приравнять к нулю.

Неравенства любого типа (со знаками $\leq$, $\geq$) можно преобразовать в равенства добавлением в левую часть **дополнительных переменных**. Те, переменные которые добавляются в неравенства ($\leq$) называются **остаточным**и, а в неравенства ($\geq$) - **избыточными.**

Пример:

Неравенство $x_1 + 5x_2 \leq 7$ в стандартной форме $x_1 + 5x_2 + S = 7$, где S – дополнительная переменная, которая называется **остаточной**.

Неравенство $x_1 + 3x_2 \geq 6$ в стандартной форме $x_1 + 3x_2 - C = 6$, где C – дополнительная переменная, которая называется **избыточной.**

Рассмотрим алгоритм симплекс-метода на следующем примере.

Пример: Фабрика для производства двух видов вафель А и В использует два вида основного сырья: сахарный песок и муку. Нормы расхода сырья на производство 1 т вафель каждого вида, а также запасы сырья и прибыль от реализации 1 т вафель каждого вида приведены в таблице 1.

Таблица 1

Вид сырья	Нормы расхода сырья на 1 т вафель, т		Запасы сырья, т
	А	В	
Сахарный песок	1	1	4
Мука	5	2	10
Прибыль от реализации 1 т продукции, тыс. руб.	5	3	

Требуется составить план производства вафель, обеспечивающий максимум прибыли от ее реализации.

Решение. Фабрике требуется определить объемы производства (в т) каждого вида вафель, максимизирующие доход от реализации продукции, с учетом ограничений на расход исходных продуктов.

Составим математическую модель задачи.

Обозначим через $x_i, i = 1,2$, – объем производства каждого вида вафель (в т). Цель задачи – максимизации прибыли от реализации при ограничениях на запасы сырья.

$$f(x) = 5x_1 + 3x_2 \to \max$$

при ограничениях

$$x_1 + x_2 \le 4,$$

$$5x_1 + 2x_2 \le 10,$$

$$x_i \ge 0, \quad i = 1,2.$$

Приведем задачу ЛП к стандартной форме.

Целевую функцию приравняем к нулю, а ограничения запишем в виде равенства

$$z - 5x_1 - 3x_2 = 0.$$

$$x_1 + x_2 + S_1 = 4,$$

$$5x_1 + 2x_2 + S_2 = 10,$$

$$x_{1,2} \ge 0.$$

Начальное базисное решение находится путем приравнивая к нулю небазисных переменных ($x_1 = 0,\ x_2 = 0$). Переменные S_1, S_2 играют роль базисных переменных.

Начальное базисное решение запишем в виде симплекс-таблицы:

Базисные переменные	x_1	x_2	S_1	S_2	Решение
z	-5	-3	0	0	0
S_1	1	1	1	0	4
S_2	5	2	0	1	10

Начальное базисное решение будет иметь следующий вид: $S_1 = 4,\ S_2 = 10$.

Как определить, является ли полученное начальное решение оптимальным?

Чтобы ответить на этот вопрос необходимо знать условие оптимальности.

<u>Условие оптимальности</u>. *Если все коэффициенты при небазисных переменных в **z** – уравнении положительны (для задачи максимизации) или отрицательны (для задачи минимизации), или равны нулю, полученное решение является оптимальным.*

*Если решение не оптимально вводимой переменной в задаче максимизации является **небазисная переменная,** имеющая в **z** – уравнении наибольший по абсолютной величине отрицательный коэффициент, для задачи минимизации наибольший положительный коэффициент.*

Анализируя z-уравнение, можно заметить, что небазисные переменные имеют отрицательные коэффициенты, согласно *условию оптимальности* задача буде иметь решение, если небазисные переменные будут положительными или равны нулю, т.е. данное решение не оптимально.

Применяя условие оптимальности к исходной таблице, выберем в качестве переменной, включаемой в базис, переменную имеющую в z-уравнении наибольший по абсолютной величине отрицательный коэффициент, в данном случае это переменная $x_1 = -5$, данную переменную вводим в базис.

Процедура выбора исключаемой переменной предполагает проверку *условия допустимости*.

<u>Условие допустимости</u>. *В задачах максимизации и минимизации в качестве исключаемой переменной выбирается та базисная переменная, для которой отношение постоянной в правой части соответствующего ограничения к* ***положительному*** *коэффициенту ведущего столбца минимально, если все элементы ведущего столбца будут отрицательны, то* оптимального решения задачи не существует.

Для того чтобы определить исключаемую переменную, в столбце соответствующем вводимой переменной x_1, вычисляются отношения постоянных, фигурирующих в правых частях этих ограничений, к положительным элементам данного столбца. Исключаемой переменной будет та переменная, для которой отношение будет минимальным, в нашем случае переменная S_2.

Начальная симплекс-таблица полученная при проверки условия оптимальности и допустимости приведена в таблице.

Базисные переменные	x_1	x_2	S_1	S_2	Решение	Отношение
z	**-5**	-3	0	0	0	
S_1	**1**	1	1	0	4	4/1=4
S_2	**5**	**2**	**0**	**1**	**10**	**10/5=2**

Для удобства описания вычислительных процедур, осуществляемых на следующей итерации, введем некоторые определения:

столбец симплекс-таблицы, ассоциированный с вводимой переменной, будем называть **ведущим столбцом**;

строку, соответствующую исключаемой переменной, назовем **ведущая строка;**

элемент таблицы, находящийся на пересечении ведущего столбца и ведущей строки будем называть **ведущим.**

<u>Процесс вычисления нового базисного решения состоит из двух этапов:</u>

1) Вычисление элементов новой ведущей строки (формирование ведущего уравнения).

2) Вычисление элементов остальных строк, включая z-уравнение.

Выполнение этапа 1 приводит к тому, что в новом ведущем уравнении на пересечении помеченной строки и помеченного столбца ведущий элемент становится равным единице. В результате осуществления этапа 2 все остальные элементы ведущего столбца должны быть равны нулю.

Применяя к таблице 10 этап 1, мы делим S_2 - уравнение на ведущий элемент, равный **5**. На месте ведущего элемента появится 1. Полученная таким образом новая строка пишется на месте прежней в новой таблице (причем из базисных переменных исключается S_2 и на его месте записывается переменная x_1).

Каждая следующая строка новой таблицы образуется сложением соответствующей строки исходной таблицы и ведущей строки, которая предварительно умножается на такое число, чтобы в клетках выделенного столбца появились нули в новой таблице.

<u>z-уравнение</u>: каждый элемент ведущего уравнения умножаем на (5) и складываем его с предыдущем z-уравнением получаем новое z-уравнение, которое записываем в новую симплекс-таблицу.

<u>S_1-уравнение</u>: каждый элемент ведущего уравнения умножаем на (-1) и складываем его с предыдущем S_1-уравнением получаем новое S_1-уравнение, которое записываем в новую симплекс-таблицу.

Получим новое базисное решение – таблица 2.

Таблица 2

Базисные	x_1	x_2	S_1	S_2	Решение	Отношение

пере-менные						
z	0	**-1**	0	1	10	
S_1	**0**	**3/5**	**1**	**-1/5**	**2**	**2:3/5=10/3**
x_1	1	**2/5**	0	1/5	2	2:2/5=**10/2**

Полученное новое базисное решение не будет оптимальным, т.к в *z*-уравнении коэффициент при переменной x_2 отрицательный.

В соответствии с условием оптимальности в качестве вводимой переменной следует выбирать x_2, так как коэффициент при этой переменной в z-уравнении равен - 1. Исходя из условия допустимости, определяем, что исключаемой переменной будет S_1. Преобразуем данную симплекс-таблицу и получим новое базисное решение – таблица 3

Таблица 3

Базисные переменные	x_1	x_2	S_1	S_2	Решение
z	0	0	5/3	2/3	40/3
x_2	0	1	5/3	-1/3	10/3
x_1	1	0	-2/3	1/3	2/3

Последняя симплекс-таблица соответствует оптимальному решению задачи, так как в *z*-уравнении ни одна из небазисных переменных не фигурирует с отрицательным коэффициентом.

Таким образом, для получения максимальной прибыли фабрике необходимо производить **2/3** т вафель вида А и **10/3** т вафель вида В. При этом максимальная прибыль от реализации продукции составит **40/3** тыс. руб.

Двойственность в линейном программировании

Двойственная задача – это вспомогательная задача, формулируемая с помощью определённых правил непосредственно из **прямой задачи**.

Переменные и ограничения двойственной задачи формируются путём симметричных структурных преобразований прямой задачи по следующим правилам:

если прямая задача – максимизации, то двойственная будет задачей минимизации, и наоборот;

коэффициенты целевой функции прямой задачи становятся свободными членами ограничений двойственной задачи;

свободные члены ограничений прямой задачи становятся коэффициентами целевой функции двойственной задачи;

матрицу ограничений двойственной задачи получают транспонированием матрицы ограничений прямой задачи;

знаки неравенств в ограничениях изменяются на обратные;

число ограничений прямой задачи соответствует числу переменных двойственной задачи.

Прямая задача

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \quad \to \max$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \; i = 1,2,..m$$

$$x_j \ge 0, \; j = 1,2..n$$

Двойственная задача

$$f = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \quad \to \min$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j, \; j = 1,2,..n$$

$$y_i \ge 0, \; i = 1,2..m$$

Между прямой и двойственной задачами существует тесная взаимосвязь. Фактически оптимальное решение одной из этих задач непосредственно можно получить из данных симплекс-таблицы для оптимального решения другой задачи.

Теорема. Для существования оптимального решения любой из задач двойственной пары необходимо и достаточно существование допустимого решения для каждой из них.

Теорема: Если одна из пары двойственных задач имеет оптимальное решение, то и двойственная к ней также имеет оптимальное решение. При этом значения целевых функций этих задач на своих оптимальных решениях совпадают.

Если же одна из пары двойственных задач не имеет решения ввиду неограниченности целевой функции, то другая не имеет решения ввиду несовместимости системы ограничений.

Пример.

Прямая задача

$$z = 2x_1 + x_2 - x_3 \quad \to \max$$
$$x_1 + 2x_z - x_3 \le 4$$
$$3x_1 - x_2 + 4x_3 \le 6$$
$$x_i \ge 0,\ i = 1,2,3$$

Двойственная задача

$$f = 4y_1 + 6y_2 \quad \to \min$$
$$y_1 + 3y_2 \ge 2$$
$$2y_1 - y_2 \ge 1$$
$$-y_1 + 4y_2 \ge -1$$
$$y_j \ge 0,\ j = 1,2,3,4$$

Двойственный симплекс-метод

Из теорем следует, что оптимальному решению прямой задачи соответствует допустимое решение двойственной задачи.

Это позволило разработать новый метод решения задач линейного программирования, при использовании которого сначала получается недопустимое, но «лучшее, чем оптимальное» решение (в обычном симплекс-методе сначала находится **допустимое**, но **неоптимальное** решение). Новый метод, получивший название **двойственного симплекс-метода**, обеспечивает выполнение условия оптимальности решения и систематическое «приближение» его к области допустимых решений. Когда полученное решение оказывается допустимым, итерационный процесс вычислений заканчивается, так как это решение является и оптимальным.

Двойственный симплекс-метод позволяет решать задачи линейного программирования, системы ограничений которых при положительном базисе содержат свободные члены любого знака. Этот метод позволяет уменьшить количество преобразований системы ограничений, а также размера симплексной таблицы.

Рассмотрим применение двойственного симплекс-метода на примере.

Пример.

$$z = x_1 + 3x_2 + x_3 \quad \to \min$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 \ge 1$$
$$-x_1 + 3x_2 - 2x_3 \ge 2$$
$$x_i \ge 0,\ i = 1,2,3$$

Чтобы получить начальное базисное решение необходимо преобразовать все ограничения в неравенства со знаком $\le$ и ввести остаточные переменные.

Выполнив эти процедуры, приходим к следующей формулировке задачи:

$$z - x_1 - 3x_2 - x_3 = 0 \quad \to \min$$
$$-2x_1 - x_2 - x_3 + S_1 = -1$$
$$x_1 - 3x_2 + 2x_3 + S_2 = -2$$
$$x_i \ge 0,\ i = 1,2,3$$

Попытка составить для данной задачи начальную симплекс-таблицу приводит к выводу, что значения остаточных переменных (S_1, S_2) не обеспечивают получения допустимой стартовой

точки. Так как целевая функция подлежит минимизации, а все коэффициенты z - уравнения отрицательные, начальное базисное решение ($S_1 = -1,\ S_2 = -2$) оптимальное, но недопустимое. Такая ситуация типична для некоторого типа задач линейного программирования, решение которых обычно получают с помощью двойственного симплекс-метода.

Начальная симплекс-таблица, соответствующая оптимальному, но недопустимому решению, имеет вид

Базисные переменные	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	Решение
z	-1	-3	-1	0	0	0
S_1	-2	-1	-1	1	0	-1
S_2	1	-3	2	0	1	-2

Как и обычный симплексный метод, рассматриваемый метод решения основан на использовании условий допустимости и оптимальности.

<u>Условие допустимости</u>. *В качестве исключаемой переменной выбирается наибольшая по абсолютной величине отрицательная базисная переменная (при наличии альтернатив выбор делается произвольно). Если все базисные переменные неотрицательные, процесс вычислений заканчивается, так как полученное решение допустимое и оптимальное.*

<u>Условие оптимальности</u>. *Включаемая в базис переменная выбирается из числа небазисных переменных следующим образом. Вычисляются отношения коэффициентов левой части z - уравнения к соответствующим коэффициентам уравнения, ассоциированного с исключаемой переменной. Отношения с положительным или нулевым значением знаменателя не учитываются. В задаче минимизации вводимой переменной должно соответствовать наименьшее из указанных отношений, а в задаче максимизации – отношение, наименьшее по абсолютной величине (при наличии альтернатив выбор делается произвольно). Если знаменатели всех отношений равны нулю или положительные, задача не имеет допустимых решений.*

В примере в качестве исключаемой переменной выбирается $S_2 (= -2)$, так как она имеет наибольшее по абсолютной величине отрицательное значение. В качестве включаемой переменной выбирается x_2, так как этой переменной соответствует наименьшее отношение, равное 1.

Определение исключаемой и включаемой переменной запишем в следующую таблицу

Базисные переменные	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	Решение
z	-1	**-3**	-1	0	0	0
S_1	-2	**-1**	-1	1	0	-1
S_2	**1**	**-3**	**2**	**0**	**1**	**-2**
Отношение		**1**				

После выбора включаемой в базис и исключаемой переменных для получения следующего решения осуществляется обычная операция преобразования строк симплекс-таблицы.

Базисные переменные	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	Решение
z	**-2**	0	-3	0	-1	2
S_1	**-7/3**	**0**	**-4/3**	**1**	**-1/3**	**-1/3**
x_2	**-1/3**	1	-2/3	0	-1/3	2/3
Отношение	**6/7**		9/4		3	

Новое решение все еще недопустимое ($S_1 = -1/3$). В качестве новой исключаемой переменной берем $S_1 (= -1/3)$, водимой в базис будет переменная x_1, и в результате будем иметь следующую симплекс таблицу:

Базисные переменные	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	Решение
z	0	0	-13/7	-6/7	-5/7	16/7
x_1	1	0	4/7	-3/7	1/7	1/7
x_2	0	1	10/21	-1/7	-2/7	5/7

Полученное решение является оптимальным и допустимым $x_1 = 1/7,\ x_2 = 5/7,\quad z = 16/7$.

Запишем для данной задачи двойственную задачу

$$f = y_1 + 2y_2 \ \to \max$$
$$2y_1 - y_2 \le 1$$
$$y_1 + 3y_2 \le 3$$
$$y_1 - 2y_2 \le 1$$
$$y_i \ge 0,\ i = 1,2$$

Решение двойственной задачи берем из последней симплекс-таблицы, $y_1 = 6/7,\ y_2 = 5/7,\ f = 16/7$.

Транспортная задача

Методы линейного программирования, являются хорошим инструментом для решения ряда проблем распределения ресурсов. Применение пакетов прикладных программ позволяет значительно упростить решение задачи. Поэтому лицо, принимающее решение, получает возможность уделить большее внимание интерпретации и оценке решения задачи. Однако применение ППП предполагает предварительную формализацию модели линейного программирования. В процессе решения большинства проблем эта задача является основной. При построении модели необходимо идентифицировать ее переменные и сформулировать систему ограничений.

При решении некоторых видов проблем распределения ресурсов использование специально созданных для этих целей алгоритмов упрощает процесс построения исходной модели.

Постановка задачи

Пусть имеется m поставщиков $A_1, A_2, ..., A_m$ однородного груза в количествах соответственно $a_1, a_2, ..., a_m$ единиц и n потребителей $B_1, B_2, ..., B_n$ этого груза, потребность которых составляет соответственно $b_1, b_2, ..., b_n$ единиц. Известна стоимость (тариф) c_{ij} перевозки единицы груза от *i-го* ($i = \overline{1,m}$) поставщика к *j-му* ($j = \overline{1,n}$) потребителю. Требуется составить такой план перевозок, при котором весь продукт вывозится из пунктов A_i в пункты B_j в соответствии с потребностью и общая величина транспортных издержек будет минимальной.

Исходные данные транспортной задачи представляют в виде таблицы 1

Таблица 1

B_j / A_i	b_1	b_2	...	b_n
a_1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}
a_2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}
...	...	...	...	...
a_m	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mn}

При постановке конкретных задач перевозки грузов может возникнуть одна из трех ситуаций:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad (3)$$

Каждой ситуации соответствует определенная модель ТЗ: ситуации (1) (суммарный объем груза, имеющегося у поставщиков, равен суммарному спросу потребителей) отвечает закрытая модель ТЗ (сбалансированная транспортная модель), а ситуациям (2) и (3) - отвечает открытая модель ТЗ (несбалансированная транспортная модель).

Рассмотрим ситуацию (1). Обозначим через $x_{ij}(i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n})$ количество единиц груза, которое необходимо доставить от i-го поставщика к j-му потребителю.

Математическая модель ТЗ должна отражать все условия и цель задачи в математической форме. Переменные $x_{ij}(i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n})$ должны удовлетворять ограничениям по запасам, потребностям и условиям неотрицательности. В математической форме эти условия можно записать так:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j; j=\overline{1,n}, \qquad (4)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i; i=\overline{1,m}, \qquad (5)$$

$$x_{ij} \geq 0 (i=\overline{1,m}; j=\overline{1,n}) \qquad (6)$$

Цель ТЗ - минимизировать общие затраты на реализацию плана перевозок, которые можно представить функцией:

$$f = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + ... + c_{1n}x_{1n} + ... + c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + ... + c_{mn}x_{mn} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min \quad (7)$$

Математически ТЗ ставится так. Даны система ограничений (4) и (5) (ограничения (5) отражают тот факт, что весь груз от всех поставщиков должен быть вывезен, а ограничения (4) отражают тот факт, что каждый потребитель должен получить ровно столько груза, сколько ему необходимо) при условии (6) и линейная функция (7). Найти такое неотрицательное решение, при котором линейная функция (7) принимает минимальное значение.

Для того, чтобы ТЗ (4)-(7) имела допустимые планы, необходимо и достаточно выполнение равенства (1)

Решение транспортной задачи состоит из двух этапов:

1 этап. Нахождение начального плана перевозок $(x_{ij}), i=\overline{1,m}; j=\overline{1,n},$ удовлетворяющего ограничениям (4)-(6);

2 этап. Улучшение начального плана перевозок и получение оптимального плана перевозок $(x_{ij}), i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n},$ доставляющего минимум функции (7).

Построение исходного опорного плана.

Построение опорных планов, а также их преобразование будем производить непосредственно в распределительной таблице (таблица 1). Если в плане перевозок переменная $x_{ij} = a \neq 0,$ то это число a записываем в соответствующую клетку (i, j) и считаем ее занятой или базисной, если $x_{ij} = 0$ то клетку (i,j) оставляем свободной.

Метод «северо-западного угла». Определение значений x_{ij} начинается с левой верхней, условно называемой северо-западной, клетки (1,1) таблице 1. Находим $x_{11}=min(a_1, b_1)$.

1) если $a_1<b_1$, то $x_{11}=a_1$, строка 1 исключается из дальнейшего рассмотрения, а потребность первого потребителя b_1 уменьшается на a_1;

2) если $a_1>b_1$, то $x_{11}=b_1$, столбец 1 исключается из дальнейшего рассмотрения (первый потребитель B_1 будет полностью удовлетворен), а наличие груза у первого поставщика a_1 уменьшается на b_1;

3) если $a_1=b_1$, то $x_{11}= a_1=b_1$, первая строка и первый столбец исключаются из дальнейшего рассмотрения. Эта ситуация приводит к вырождению исходного решения.

Затем аналогичные операции проделывают с оставшейся частью таблицы, начиная с ее северо-западного угла. На последнем шаге процесса остается одна строка (последняя) и один столбец (последний). После заполнения клетки, стоящей на их пересечении, т.е. клетки (m, n), процесс завершается.

После завершения описанного процесса необходимо провести проверку полученного плана (решения) на вырожденность. Если количество заполненных (занятых) клеток равно $m+n-1$, то план является невырожденным, в противном случае - вырожденным.

Если план вырожденный, то незаполненные клетки с минимальными стоимостями перевозок заполняются нулями, чтобы общее число заполненных клеток стало равным $m+n-1$. Однако, при расстановке нулей необходимо помнить, что в таблице не должно быть ни одного прямоугольника, все вершины которого являются заполненными клетками. Например, переменные $x_{11},x_{12},x_{21},x_{22}$ не могут быть одновременно базисными.

Метод минимального элемента. В отличии от метода северо-западного угла данный метод учитывает при построении исходного плана стоимости перевозок. В ряде случаев он позволяет получить лучшее с точки зрения критерия оптимальности решение, сокращая количество итераций для получения оптимального плана.

Определение значений x_{ij} начиная с клетки, имеющей минимальную стоимость перевозки. Если в таблице имеется несколько клеток с одинаковыми минимальными стоимостями, то заполняется прежде та клетка, в которую можно вписать большую поставку.

Переменной, отвечающей выбранной клетке, присваивается минимальное из двух возможных значений: $x_{ij}=min(a_i,b_j)$. Соответствующая строка или столбец исключаются из дальнейшего рассмотрения, а потребность потребителя или наличие груза у поставщика уменьшается на выбранную величину. Если для выбранной клетки с минимальной стоимостью перевозки наличие груза у поставщика равно потребности потребителя, то из дальнейшего рассмотрения исключаются и строка и столбец (это приводит к вырождению исходного плана).

Затем в оставшейся части таблицы проделывают аналогичные операции, опять начиная с клетки, имеющей минимальную стоимость перевозки.

Проверка плана на вырожденность и расстановка (в случае вырожденности плана) нулей осуществляется так же, как это описано для метода северо-западного угла.

Для нахождения оптимального плана перевозок необходимо уметь оценивать полученный план на оптимальность. Как это сделать, не имея в распоряжении всех возможных планов перевозок, которые можно было бы сравнить между собой? Для оценки плана на оптимальность вводится понятие косвенных затрат. Косвенные затраты - это затраты, получаемые для маршрутов, по которым не осуществляются перевозки при данном плане. Рассчитанные косвенные затраты сравниваются с реальными затратами, которые имели бы место, если бы перевозки по данным маршрутам осуществлялись. Если для всех невыбранных маршрутов косвенные затраты не меньше реальных, то данный план перевозок является оптимальным. Если хотя бы для одного маршрута косвенные затраты меньше реальных, то план перевозок может быть улучшен путем введения в него данного маршрута. Ввод нового маршрута в план перевозок соответствует вводу в список базисных переменных переменной транспортной задачи, соответствующей этому маршруту. Эти рассуждения лежат в основе ряда методов, применяемых для нахождения оптимального плана перевозок. Рассмотрим один из них - метод потенциалов.

Алгоритм решения ТЗ методом потенциалов

1. Построить опорный план по одному из правил.

2. Проверить план на невырожденность. Если полученный план вырожденный, формально заполняют нулями некоторые из свободных клеток так, чтобы общее число занятых клеток было равно $m+n-1$. Нули надо расставлять так, чтобы не образовался замкнутый цикл из занятых клеток.

3. Проверка плана на оптимальность.

3.1. Определение потенциалов поставщиков и потребителей. Для всех занятых клеток рассчитываются потенциалы по формуле

$$u_i + v_j = c_{ij} (i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n})$$

где u_i - потенциалы поставщиков (строк), v_j - потенциалы потребителей (столбцов).

Так как всех занятых клеток должно быть $m+n-1$, т.е. на единицу меньше числа потенциалов (их $m+n$), то для определения чисел u_i, v_j необходимо решить систему из $m+n-1$ уравнений $u_i+v_j=c_{ij}$ с $m+n$ неизвестными. Система неопределенная, и, чтобы найти частные решения, одному из потенциалов придают произвольное числовое значение (обычно полагают $u_1=0$), тогда остальные потенциалы определяются однозначно.

3.2. Для всех свободных клеток рассчитываются оценки по формуле

$$s_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$$

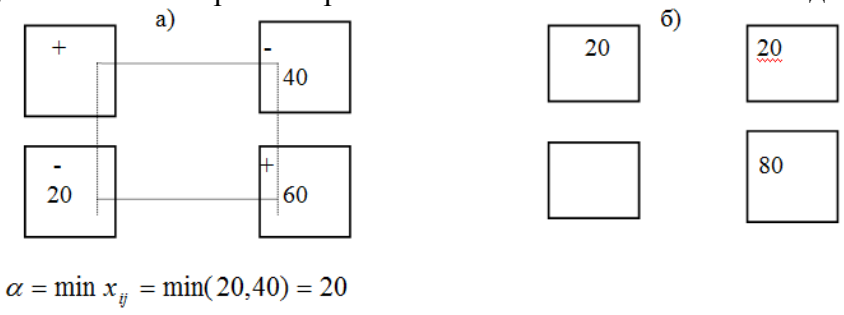
Здесь c_{ij} - реальные тарифы, а $u_i + v_j$ - косвенные тарифы.

Если все $s_{ij} \geq 0$, то полученный план является оптимальным. При этом, если все $s_{ij}>0$, то полученный оптимальный план единственный. В случае, если хотя бы одна оценка $s_{ij}=0$, имеем бесчисленное множество оптимальных планов с одним и тем же значением целевой функции. Если хотя бы для одной свободной клетки $s_{ij} < 0$, то план может быть улучшен. Переход к шагу 4.

4. Среди отрицательных оценок выбирается минимальная. Например, для клеток (i, j) и (k,l) имеем оценки: $s_{ij}=-2$, $s_{kl}=-4$. В этом случае наиболее потенциальной (перспективной) является клетка (k,l). Экономически оценка показывает, на сколько денежных единиц уменьшатся транспортные расходы от загрузки данной клетки единицей груза. Так, от загрузки клетки (i,j) единицей груза транспортные расходы уменьшаются на $\Delta f_i = -2$ денежных единиц, а от загрузки единицей груза клетки (k, l) - на $\Delta f_2 = -4$ денежных единиц. Эффективность плана от загрузки потенциальной клетки грузом в α единиц составит $\Delta f = s_{ij}\alpha$ денежных единиц.

Для наиболее перспективной свободной клетки (клетки с *min* отрицательной оценкой) строится замкнутый цикл. Для этого из выбранной свободной клетки проводится по строке или столбцу прямая линия до любой занятой клетки, затем под углом 90° линия проводится до следующей занятой клетки и так до тех пор пока цепь не замкнется в исходной клетке (цикл включает одну свободную клетку, остальные клетки цикла заняты. В цикле всегда четное число клеток. Каждое звено цепи соединяет две клетки строки (столбца). Для свободной клетки всегда можно построить единственный цикл. Если из занятых клеток образуется цикл, то план перевозок не является опорным. Цикл строится лишь для свободной клетки).

5. В вершинах цепи, чередуя проставляются знаки «+» и «-», начиная с выбранной свободной клетки (в нее помещают знак «+»). В клетках со знаком «-» выбирается минимальная поставка (α), которая перераспределяется по цепи: там, где стоит знак «+» она прибавляется, а где «-» - отнимается. В результате чего баланс цикла не нарушается. Исходная свободная клетка становится занятой, а клетка в которой выбрана минимальная поставка - свободной (рисунок 1 а, б)



$\alpha = \min x_{ij} = \min(20,40) = 20$

Рисунок 1. Нахождения нового базисного решения

Может случится, что найденное наименьшее число (α) одинаково для нескольких клеток цепи, помеченных знаком «-» (рисунок 2а). В этом случае во всех таких клетках (с минимальными стоимостями), кроме одной, нужно оставить нулевые (фиктивные) поставки (рисунок 2б).

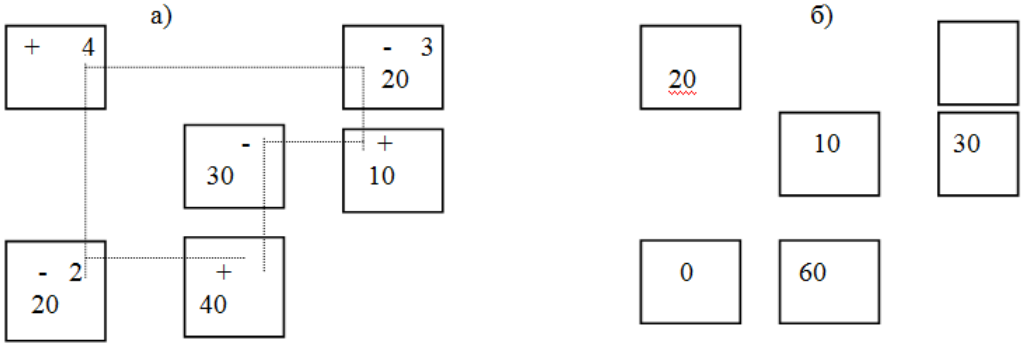


Рисунок 2. Нахождения переменной вводимой в базис

Составляется новый план и переходим к шагу 2.

Пример решения транспортной задачи

На четырех строительных площадках B_1, B_2, B_3, B_4 монтируется в день соответственно 20, 120, 20 60 м^3 сборных плит перекрытий. Производство этих плит налажено на трех заводах A_1, A_2, A_3 в размере соответственно 100,70 и 50 м^3. Известны стоимости перевозки (таблица 2) *1м*^{3} сборных плит из каждого пункта производства в каждый пункт потребления (ден. ед./ м^3).

Требуется так закрепить строительные площадки за заводами, чтобы при полном обеспечении сборными плитами перекрытий затраты на перевозку были минимальными.

Решение. Исходное опорное решение получим по методу *min* элемента (таблица 3). Здесь $\sum_{i=1}^{3} a_i = 220, \sum_{j=1}^{4} b_j = 220$,т.е имеем закрытую модель ТЗ.

Таблица 2

B_j \ A_i	20	120	20	60
100	6	4	2	4
70	1	2	7	2
50	2	4	1	4

Таблица 3

B_j \ A_i	20	120	20	60
100	6	4 100	2	4
70	1 20	2	7	2 50
50	2	4 20	1 20	4 10

Количество заполненных клеток в таблице 3 равно 6: $m+n-1=3+4-1=6$.

Следовательно, полученный план невырожденный.

Для определения потенциалов составляем уравнения:

$u_1+v_2=4$, $u_2+v_1=1$, $u_2+v_4=2$, $u_3+v_2=4$, $u_3+v_3=1$, $u_3+v_4=4$.

Положим $u_1=0$, тогда $v_2=4$, $u_3=0$, $v_3=1$, $v_4=4$, $u_2=-2$, $v_1=3$.

Потенциалы проставлены в таблице 4 (последняя строка и последний столбец). Их можно вычислять и непосредственно в таблице не выписывая систему уравнений. Т.к. если известны по-

тенциал и тариф (стоимость перевозки) занятой клетки, то из соотношения $u_i+v_j=c_{ij}$ легко определить неизвестный потенциал (из суммы вычесть известное слагаемое, получим неизвестное слагаемое. Роль суммы в данном равенстве играет тариф c_{ij})

Определим оценки свободных клеток:

s_{11}=6-(0+3)=3>0, s_{13}=2-(0+1)=1>0, s_{14}=4-(0+4)=0

s_{22}=2-(-2+4)=0, s_{23}=7-(-2+1)=8>0, s_{31}=2-(0+3)= -1<0

Таблица 4

A_i \ B_i	20	120	20	60	u_i
100	6	4 100	2	4	0
70	- 1 20	2	7	+ 2 50	-2
50	2 +	4 20	1 20	-- 4 10	0
v_i	3	4	1	4	

Таблица 5

A_i \ B_i	20	120	20	60	u_i
100	6	4 100	2	4	0
70	- 1 10	+ 2	7	2 60	-1
50	+ 2 10	- 4 20	1 20	4	0
v_i	2	4	1	3	

План неоптимальный, т.к. $s_{31}<0$. Строим для клетки (3;1) цикл непосредственно в таблице 4. В цикл войдут клетки (3;1), (3;4), (2;4), (2;1). Наименьшее количество груза, стоящее в вершинах цикла с отрицательным знаком, $\alpha = \min(10,20) = 10$. В результате смещения α по циклу получим новый план таблица 5. Транспортные расходы

$f = 4\cdot 100 + 1\cdot 10 + 2\cdot 60 + 2\cdot 10 + 4\cdot 20 + 1\cdot 20 = 650$ (а были равны 660).

Будет ли полученный план оптимальным? План невырожденный.

Определим для него новые потенциалы:

$u_1+v_2=4$, $u_2+v_1=1$, $u_2+v_4= 2$, $u_3+v_1=2$, $u_3+v_2=4$, $u_3+v_3=1$. Положим $u_1=0$, тогда $v_2=4$, $u_3=0$, $v_1=2$, $v_3=1$, $u_2= -1$, $v_4=3$. Проставим значения найденных потенциалов в таблицу 5.

Определим оценки свободных клеток:

s_{11}=6-(0+2)=4>0, s_{13}=2-(0+1)=1>0, s_{14}=4-(0+3)=1>0

s_{22}=2-(-1+4)=-1<0, s_{23}=7-(-1+1)=7>0, s_{44}=4-(0+3)=1>0.

План (таблица 5) неоптимальный, т.к. s_{22}<0. Строим для клетки (2;2) цикл непосредственно в таблице 5. В цикл войдут клетки (2;2), (2;1), (3;1), (3;2). Наименьшее количество груза, стоящее в вершинах цикла с отрицательным знаком, $\alpha = \min(10,20) = 10$. В результате смещения α по циклу получим новый план (таблица 6). План невырожденный. Транспортные расходы

f = $4\cdot 100 + 2\cdot 10 + 2\cdot 60 + 2\cdot 20 + 4\cdot 10 + 1\cdot 20 = 640$ (а были равны 650).

Таблица 6

A_i \ B_i	20	120	20	60	u_i
100	6	4 100	2	4	0
70	1	2 10	7	2 60	-2
50	2 20	4 10	1 20	4	0
v_i	2	4	1	4	

Будет ли полученный план оптимальным?

Определим для него новые потенциалы:

$u_1+v_2=4$, $u_2+v_2=2$, $u_2+v_4=2$, $u_3+v_1=2$, $u_3+v_2=4$, $u_3+v_3=1$. Положим $u_1=0$, тогда $v_2=4$, $u_2=-2$, $v_4=4$, $u_3=0$, $v_1= 2$, $v_3=1$. Проставим значения найденных потенциалов в таблицу 6.

Определим оценки свободных клеток:

s_{11}=6-(0+2)=4>0, s_{13}=2-(0+1)=1>0, s_{14}=4-(0+4)=0

s_{21}=1-(-2+2)=1>0, s_{23}=7-(-2+1)=8>0, s_{34}=4-(0+4)=0

Оценки свободных клеток неотрицательны, следовательно, полученный план является оптимальным:

x_{12}=100, x_{22}=10, x_{24}=60, x_{31}=20, x_{32}=10, x_{33}=20

Минимальные транспортные расходы для этого плана *f=640*.

Все оценки свободных клеток равны нулю.

Согласно оптимальному плану, с первого завода A_1 нужно поставить 100м^3 перекрытый на вторую строительную площадку B_2, с завода A_2 - 10м^3 на строительную площадку B_2 и 60м^3 на строительную площадку B_4, с завода A_3 - на 20 м$_3$ на строительную площадку B_1, 10 м^3 на строительную площадку B_2 и 20 м^3 на строительную площадку B_3.

1. *Транспортная задача с избытком запасов*:

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j > 0$$

Для отыскания оптимального плана вводят фиктивный ($n+1$)-й пункт назначения B_{n+1} с потребностью b_{n+1} и полагают стоимости перевозок грузов в B_{n+1} равными нулю. Полученная новая транспортная задача является закрытой. Найдя оптимальный план x_{ij} $(i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n+1})$ этой транспортной задачи и отбрасывая в полученной таблице последний столбец, получим оптимальный план исходной транспортной задачи.

2. *Транспортная задача с избытком заявок*:

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i > 0$$

Эта задача несколько сложнее предыдущей: дело в том, что как ни развози грузы, все потребности удовлетворить все равно не удается. Поэтому постановка задачи нуждается в уточнении.

2.1. Все пункты назначения требуется удовлетворить пропорционально поданным заявкам. В этом случае, подсчитав коэффициент пропорциональности

$$k = \frac{\sum_{i=1}^{m} a_i}{\sum_{j=1}^{n} b_j}$$

и «подправив» заявки: $\beta_j = k \cdot b_j, j = \overline{1,n},$ получим закрытую модель транспортной задачи.

2.2. Если не заботиться о «справедливости» удовлетворения заявок, а по-прежнему интересоваться лишь минимизацией транспортных расходов, то для отыскания оптимального плана вводят фиктивный пункт ($m+1$)-й отправления A_{m+1} с запасом груза a_{m+1} и полагают стоимости перевозок грузов из A_{m+1} равными нулю. Полученная транспортная задача является закрытой. Найдя оптимальный план $x_{ij}(i = \overline{1,m+1}, j = \overline{1,n})$ этой транспортной задачи и отбрасывая в полученной таблице последнюю строку, получим оптимальный план исходной транспортной задачи.

И в случае 1 и в случае 2.2 при преобразовании открытой задачи в закрытую, целевая функция не меняется, так как все слагаемые, соответствующие дополнительным перевозкам, равны нулю.

3. *Транспортная задача с поиском максимума целевой функции*.

Перейдем к целевой функции Z=-F и найдем план $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$, доставляющий ей минимум. Тогда $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ будет оптимальным и для исходной задачи, причем $\max F = -Z(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$.

4. *Транспортная задача с запретными маршрутами.*

Речь идет о задачах, в которых нельзя перевозить груз из некоторых пунктов отправления A_i в некоторые пункты назначения B_j. В этом случае стоимости соответствующих перевозок полагаем равными достаточно большому числу. Тогда при отыскании оптимального плана соответствующие перевозки будут блокированы.

5. *Транспортная задача с обязательными поставками.*

Иногда приходится решать транспортную задачу, в которой дополнительным условием в ограничениях является обязательное обеспечение конкретных перевозок по определенным маршрутам. В этом случае каждую обязательную перевозку $x_{ij}=d_{ij}$ реализуем условно, уменьшая на d_{ij} запасы в A_i и потребности в B_j. Если это не удается сделать, то исходная задача не имеет решения. В противном случае стоимости обязательных поставок полагаем равными достаточно большому числу, решаем полученную задачу и от ее оптимального плана переходим к оптимальному плану исходной задачи.

6. *Транспортная задача с ограничениями снизу.*

Пусть требуется решить транспортную задачу, в которой некоторые из перевозок ограничены снизу $x_{ij} \geq p_{ij}$. Организуем условные перевозки, уменьшив на p_{ij} запасы в A_i и потребности в B_j. Если это сделать не удается, то исходная задача решения не имеет, в противном случае решаем полученную задачу и от ее оптимального плана переходим к оптимальному плану исходной транспортной задачи.

Задача о назначении

В процессе управления производством зачастую возникают задачи назначения исполнителей на различные виды работ, например: подбор кадров и назначение кандидатов на вакантные должности, распределение источников капитальных вложении между различными проектами научно-технического развития, распределение экипажей самолетов между авиалиниями.

Задачу о назначениях можно сформулировать следующим образом. Необходимо выполнить N различных работ. Для их выполнения можно привлечь N рабочих. Каждый рабочий за определенную плату готов выполнить любую работу. Выполнение любой работы следует поручить одному рабочему. Требуется так распределить работы между рабочими, чтобы общие затраты на выполнение всех работ были минимальными.

Задача о назначениях в стандартной форме. При рассмотрении задачи о назначениях в стандартной форме предполагается, что количество рабочих *равно* количеству работ.

Обозначения:

c_{ij} — показатель эффективности назначения i-го рабочего на j-й работе, например издержки выполнения i-м рабочим j-й работы;

x_{ij} — переменная модели ($x_{ij} = 1$, если i-й рабочий используется на j-й работе, и $x_{ij} = 0$ в противном случае).

Модель задачи о назначениях:

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} c_{ij}x_{ij} \to \min, \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1, \quad j = 1, ..., m, \qquad (2а)$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1, \quad i = 1, ..., m, \qquad (2б)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, ..., m; \quad j = 1, ..., m. \qquad (3)$$

Здесь (1) — целевая функция (минимум издержек на выполнение всех работ);

(2) — система ограничений, отражающая следующие условия:

а) каждая работа должна быть выполнена одним рабочим;

б) каждый рабочий может быть привлечен к одной работе;

(3) — условия неотрицательности переменных.

При решении задачи о назначениях исходной информацией является таблица задачи о назначениях $c=\{c_{ij}\}$, элементами которой служат показатели эффективности назначений. Для задачи о назначениях, записанной в стандартной форме, количество строк этой таблицы совпадает с количеством столбцов:

Работа / Рабочий	1	2	...	j	...	m
1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1j}	...	c_{1m}
2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2j}	...	c_{2m}
...	...	...	...	...	...	...
i	c_{i1}	c_{i2}	...	c_{ij}	...	c_{im}
...	...	...	...	...	...	...
m	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mj}	...	c_{mm}

Результатом решения задачи о назначениях (1)—(3) является вектор $x^* = \{ \overset{*}{x_{ij}} \}$, компоненты которого — целые числа.

Оптимальный план задачи о назначениях (1)—(3) можно представить в виде квадратной матрицы назначений, в каждой строке и в каждом столбце которой находится ровно одна единица. Такую матрицу иногда называют матрицей перестановок. Значение целевой функции (1), соответствующее оптимальному плану, называют *эффективностью назначений.*

Задача о назначениях в <u>открытой</u> форме. Задача о назначениях в <u>открытой</u> форме возникает тогда, когда количество рабочих *не равно* количеству работ. В этих случаях задача может быть преобразована в задачу, сформулированную в стандартной форме.

Пусть, например, количество рабочих n превышает количество работ m.

Введем дополнительные фиктивные работы с индексами $j = w + 1,..., n$. <u>Коэффициенты</u> таблицы назначений c_{ij} , $i = 1,..., n; j = m + 1,..., n$, положим равными нулю. В этом случае получаем задачу, сформулированную в стандартной форме. Если в оптимальном плане этой задачи $\overset{*}{x_{ij}} = 1$ при $j = m + 1,..., n$, то исполнитель i назначается на выполнение фиктивной работы, т.е. остается без работы. Заметим, что оптимальное значение целевой функции исходной задачи совпадает с оптимальным значением задачи, приведенной к стандартной форме. Поэтому эффективность назначений в результате такого преобразования не меняется.

Следует особо отметить, что задача о назначениях является частным случаем транспортной задачи, в которой количество пунктов производства совпадает с количеством <u>пунктов</u> <u>потребления</u>, а все <u>величины спроса</u> и <u>величины предложения</u> равны.

Пример 1. *Распределение работ.*

Фирма получила заказы на разработку пяти программных продуктов. Для выполнения этих заказов решено привлечь пятерых наиболее опытных программистов. Каждый из них должен написать одну программу. В следующей таблице приведены оценки времени (в днях), необходимого программистам для выполнения каждой из этих работ:

Программа / Программист	1	2	3	4	5
Галкин	46	59	24	62	67
Палкин	47	56	32	55	70
Малкин	44	52	19	61	60
Чалкин	47	59	17	64	73
Залкинд	43	65	20	60	75

Оценки даны самими программистами, и у <u>фирмы</u> нет основания им не доверять.

Распределите работы между программистами, чтобы общее количество человекодней, затраченное на выполнение всех пяти заказов, было минимальным.

Вопросы:

1. Какое минимальное количество человекодней необходимо для выполнения всех пяти заказов?

2. Какую программу следует поручить Малкину?

3. Какую программу следует поручить Залкинду?

Решение. Таблица задачи о назначениях представлена в условии. Проведя расчеты, получаем следующую матрицу назначений:

Программа / Программист	1	2	3	4	5
Галкин	0	0	0	0	1
Палкин	0	0	0	1	0
Малкин	0	1	0	0	0
Чалкин	0	0	1	0	0
Залкинд	1	0	0	0	0

Учитывая исходную информацию, получаем следующий результат:

Программист	Программа	Количество человекодней
Галкин	5	67
Палкин	4	55
Малкин	2	52
Чалкин	3	17
Залкинд	1	43
Итого		234

Ответы: *1*. 234 человекодня. *2*. Программу 2. *3*. Программу 1.

Нахождение кратчайшего пути.

Алгоритм нахождения кратчайшего пути на сети, содержащей циклы, основан также на рекурсивных вычислениях. Опишем шаги вычислительной процедуры, а затем приведем пример вычислений.

Пусть требуется определить кратчайший маршрут между узлом *1* и любым другим узлом сети j, $j=2,3,\ldots,n$. Алгоритм удобнее представить, записав расстояния d_{ij} между узлами i и j в виде таблицы 1(заметим, что расстояния d_{ij} и d_{ji} различны).

Таблица 1.

1	2		n-1	n	u_i
d_{11}	d_{12}		$d_{1,n-1}$	d_{1n}	u_1
d_{21}	d_{22}		$d_{2,n-1}$	d_{2n}	u_2
					…
d_{n1}	d_{n2}		$d_{n,n-1}$	d_{nn}	u_n
v_1	v_2		v_{n-1}	v_n	

Таким образом, строка i (столбец j) представляет узел i (узел j). Шаги алгоритма можно представить следующим образом.

Шаг1.

Пусть v_j - сумма длин дуг, образующих цепь, ведущую из узла *1* в узел j. Положим $v_1=0$ и $u_i=v_j$, если $i=j$. При условии, что i и j соединены дугой, величина v_j определяется как

$$v_j=min\ \{u_i+d_{ij}\}.$$

Процесс начинается с $i=1$ и $v_1=u_1=0$.

Шаг2.

Положим $i=1$.

(а) Вычислить $v_j- u_i$ для всех j.

(б) Если $d_{ij}>= v_j- u_i$ для всех j, то между узлами i и j не существует более короткого пути. Если $i=n$, перейти к п. (г). Иначе положить $i=i+1$ и перейти к п. (а).

(в) Если $d_{ij}< v_j- u_i$, вычислить новые значения v_j, v_j' используя формулу

$$v_j' = u_i + d_{ij}.$$

Заменить v_j и u_i для $i=j$ на v'. Если $i=n$, перейти к п. (г), в противном случае положить $i=i+1$ и перейти к п. (а).

(г) Если значение v_j изменялось в п. (в), повторить шаг 2, используя измененное значение. В противном случае перейти к шагу 3.

Шаг3.

Полученные значения v_j определяют кратчайшее расстояние между узлами *1* и $j=2,3,\ldots,n$. Для получения соответствующих цепей последняя дуга (i_1,j) в цепи *(i,j)* должна удовлетворять условию

$$u_{i_1} = v_j - d_{i_1 j} \ .$$

После определения i_1 предпоследняя вершина i_2 должна удовлетворять равенству

$$u_{i_2} = v_{i_1} - d_{i_2 j_1} \ .$$

Процесс продолжается пока не будет достигнут узел *1*.

Пример.

Рассмотрим сеть на рисунке 1. Сеть содержит циклы, возникающие из-за

возможности двустороннего движения. Если дуга ориентирована (т.е. движение одностороннее), расстояние в другом направлении полагается равным ∞.

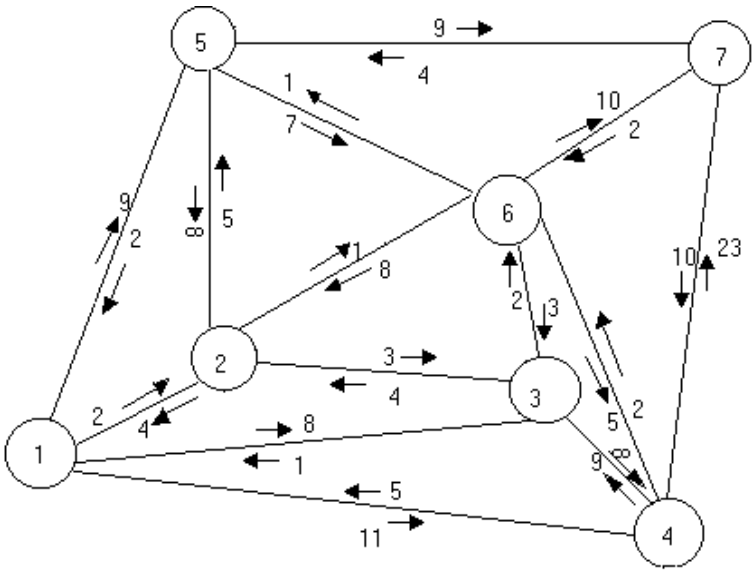


Таблица 2..

J I	1	2	3	4	5	6	7	u_i
1		2	8	11	9			**0**
2	4		3		5	1		**2**
3	1	4		∞		2		**5**
4	5		9			2	23	**11**
5	2	∞				7	9	**7**
6		8	3	5	1		10	**3**
7				10	4	2		**13**
v_j	**0**	**2**	**5**	**11**	**7**	**3**	**13**	

Соответствующие величины d_{ij} вместе с предварительными значениями u_i и v_j приведены в таблице 2.

Исходные величины v_j (и u_i) определяются следующим образом. Пусть

$u_1=v_1=0$. При использовании формулы

$$v_j=\min\{u_i+d_{ij}\}$$

осуществляется последовательное обращение к величинам v_j и u_i по мере того как они становятся доступными.

$v_2=0+2=2,\quad u_2=2,$

$$v_3=\min_{i=1,2}\{u_1+d_{13},u_2+d_{23}\}=\min_{i=1,2}\{0+8,2+3\}=5,\quad u_3=5,$$

$$v_4=\min_{i=1,3}\{u_1+d_{14},u_3+d_{34}\}=\min_{i=1,2}\{0+11,\ 5+\infty\}=11,\quad u_4=11,$$

$$v_5=\min_{i=1,2}\{u_1+d_{15},u_2+d_{25}\}=\min_{i=1,2}\{0+9,\ 2+5\}=7,\quad u_5=7,$$

$$v_6=\min_{i=2,3,4,5}\{u_2+d_{26},u_3+d_{36},u_4+d_{46},u_5+d_{56}\}=$$

$$=\min_{i=2,3,4,5}\{2+1,5+2,11+2,\ 7+7\}=3,\quad u_6=3$$

$$v_7=\min_{i=4,5,6}\{u_4+d_{47},u_5+d_{57},u_6+d_{67}\}=$$

$$=\min_{i=4,5,6}\{11+23,\ 7+9,\ 3+10\}=13,\quad u_7=13$$

При переходе к шагу 2 проводится проверка *условия оптимальности* путем сравнения d_{ij} *и* (v_j-u_i), следующим образом.

$i=1$:

$j=$	1	2	3	4	5	6	7
v_j-u_i	*	2	5	11	7	*	*
d_{ij}	*	2	8	11	9	*	*

Поскольку $(v_j-u_i)<=d_{ij}$ для всех j, величины v_j пересчитывать не следует. Заметим, что для $j=1,6$ и 7 расстояния d_{1j} не определены, поэтому эти величины при сравнении не берутся.

$i=2$:

$j=$	1	2	3	4	5	6	7
v_j-u_2	-2	*	3	*	5	1	*
d_{2j}	4	*	3	*	5	1	*

$i=3$:

$j=$	1	2	3	4	5	6	7
v_j-u_3	-5	-3	*	6	*	-2	*
d_{3j}	1	4	*	∞	*	2	*

$i=4$:

$j=$	1	2	3	4	5	6	7
v_j-u_4	-11	*	-6	*	*	-8	2
d_{4j}	5	*	9	*	*	2	23

$i=5$:

$j=$	1	2	3	4	5	6	7
v_j-u_5	-7	-5	*	*	*	-4	6
d_{5j}	2	∞	*	*	*	7	9

$i=6$:

$j=$	1	2	3	4	5	6	7
v_j-u_6	*	-1	2	8	4	*	10
d_{6j}	*	8	3	5	1	*	10

В процессе реализации алгоритма обнаруживается, что условие оптимальности первый раз нарушается при $i=6$.

При $i=6$ условие оптимальности нарушается для $j=4$ и 5. Величины v_4 и v_5 изменяются следующим образом:

$$v_{4'} = u_6 + d_{64} = 3+5=8 \ (v_4 = u_4 = 8),$$
$$v_{5'} = u_6 + d_{65} = 3+1=4 \ (v_5 = u_5 = 4).$$

В последующих вычислениях, т.е. для $i=7$, используются *измененные* значения v_4 , v_5 и u_4 , u_5.

i=7:

	j=1	2	3	4	5	6	7
vj-u7	*	*	*	-5	-9	-10	*
d7j	*	*	*	10	4	2	*

После этого повторяется шаг 2 с измененными значениями v_j и u_i. В таблице 3 приведены результаты сравнений, проведенных для $i=1,2,\ldots 7$. Из этой таблицы видно, что в новых изменениях уже нет необходимости, и поэтому последние измененные величины v_j дают длину кратчайшего пути от 1 до j.

Таблица 3.

	j=1	2	3	4	5	6	7	u_i
i=1	*	2	5	8	4	*	*	0
	*	2	8	11	9	*	*	
i=2	-2	*	3	*	2	1	*	2
	4	*	3	*	5	1	*	
i=3	-5	-3	*	3	*	-2	*	5
	1	4	*	∞	*	2	*	
i=4	-8	*	-3	*	*	-5	5	8
	5	*	9	*	*	2	23	
i=5	-4	-2	*	*	*	-1	9	4
	2	∞	*	*	*	7	9	
i=6	*	-1	2	5	1	*	10	3
	*	8	3	5	1	*	10	
i=7	*	*	*	5	-9	-10	*	13
	*	*	*	10	4	2	*	
v_j	0	2	5	8	4	3	13	

Покажем, каким образом используются *ui* и *vj* в таблице 3 для определения кратчайших расстояний между узлом 1 и каждым из узлов $j=2,3,\ldots 7$. Проиллюстрируем процедуру на примере нахождения участков кратчайшего пути между узлами 1 и 7.

Известно, что расстояние между узлами 1 и 7 равно $v_7 = 13$. Определение участков пути должно начинаться с узла 7. Требуется найти узел, непосредственно предшествующий узлу 7 (необязательно это узел 6).

Из столбца 7 таблицы 3 видно, что равенство $v_7 = u_i + d_{i7}$ выполняется при *i=5* и *i=6*, т.е. либо узел 5, либо узел 6 соединен с 7 (альтернативные решения). Рассмотрим сначала узел 5. Из столбца 5 видно, что равенство $v_5 = u_i + d_{i5}$ выполняется при *i=6*. Далее из столбца 6 следует, что равенство $v_6 = u_i + d_{i6}$ выполняется при *i=2*. Наконец, как следует из столбца 2, равенство $v_2 = u_i + d_{i2}$ выполняется при *i=1*. Получившиеся участки дают путь $1 \to 2 \to 6 \to 5 \to 7$ с расстоянием $v_7 = 13$.

Аналогичная процедура позволяет получить другой кратчайший путь между узлами 1 и 7, а также все пути между узлами 1 и *j=2,3,4,5,6*.

Дискретные задачи

Задачу линейного программирования, в которой на значения всех или части переменных наложено требование целочисленности, называют задачей целочисленного линейного программирования (ЗЦЛП). В первом случае говорят о задаче полностью целочисленного линейного программирования, а во втором о задаче частично целочисленного линейного программирования. Если коэффициенты ограничений и функции цели ЗЦЛП целочисленны, то говорят о целочисленной ЗЦЛП. Пусть *p* — оптимальный план ЗЛП, полученной из ЗЦЛП отбрасыванием требования целочисленности. Очевидно, что значение максимизируемой функции на любом плане ЗЦЛП не превосходит значения этой функции наплане *p*. Следовательно, если *p* удовлетворяет условия целочисленности, то он оптимальный и для ЗЦЛП. Однако так бывает далеко не всегда. Округление же компонент до ближайшего целого может не только не дать оптимального плана ЗЦЛП, но и вывести за пределы допустимых решений ЗЛП.

Американские ученые Дж.Данциг, Д,Фалкерсон и С.Джонсон предложили в этом случае добавлять к условиям ЗЛП такое линейное неравенство (так называемое правильное отсечение), которому любой план ЗЦЛП удовлетворяет, а *p* не удовлетворяет. После этого решается новая ЗЛП, строится новое отсечение и т.д., пока либо не получится оптимальный план, удовлетворяющий условиям целочисленности, либо не будет выявлена несовместность условий получившейся ЗЛП. Способ построения правильных отсечений, гарантирующий конечность описанной процедуры, был опубликован американским математиком Р.Гомори в 1958 г.

Постановка задачи.

В терминах дискретного программирования формализуются многие важные задачи экономики, управления, планирования, проектирования, военного дела и других областей практической деятельности.

Основными источниками возникновения дискретности и целочисленности в задачах оптимизации являются:

а) *физическая неделимость факторов*. Например, нельзя построить 1,5 домны или закупить 3,8 самолета;

б) *комбинаторные задачи*. Например, задача о бродячем торговце – коммивояжере или задача теории расписаний;

в) некоторые *многоэкстремальные задачи*.

Рассмотрим подробнее первый класс задач, связанных с физической неделимостью факторов.

Задача целочисленного программирования формулируется так же, как и задача линейного программирования, но включается дополнительное требование, состоящее в том, значения переменных, составляющих оптимальное решение, должны быть целыми неотрицательными числами, а именно:

найти такое решение $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, обеспечивающее максимальное или минимальное значение линейной функции

$$\Phi = \sum_{j=1,n} c_j \odot x_j \qquad (1)$$

при ограничениях $\sum_{j=1,n} a_{ij} \odot x_j = b_i,\ i = 1, m$ (2)

$x_j \geq 0,\ j = 1, n$ (3)

$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$ (4)

где D – некоторое множество.

Если множество D является конечным или счетным, то условие (4) – это условие дискретности, и данная задача является задачей дискретного программирования.

Если вводится ограничение «x_j – целые числа», то получим задачу целочисленного программирования, которое является частным случаем дискретного программирования.

Требование дискретности или целочисленности может быть задано либо относительно всех переменных, либо относительно некоторых из них.

Если в решаемой задаче, к примеру в экономической, единица продукции составляет малую часть всего объема производства, то оптимальное решение найти обычным симплексным методом, округляя его до целых единиц, исходя из смысла задачи. В противном случае округление может привести к целочисленному решению, далекому от оптимального. В этих случаях для решения задач дискретного программирования используют специально разработанные методы.

Методы решения задач дискретного программирования по принципу подхода к проблеме делят на 3 группы: 1) методы отсечения или отсекающих плоскостей (метод Гомори); 2) комбинаторные методы (метод ветвей и границ); 3) методы случайного поиска и эвристические методы.

Методы отсечения. Метод Гомори

Сущность методов отсечения состоит в том, что сначала задача решается без условия целочисленности. Если полученный план целочисленный, то задача решена. В противном случае к ограничениям задачи добавляется новое ограничение, обладающее следующими свойствами:

- оно должно быть линейным;
- должно отсекать найденный оптимальный нецелочисленный план;
- не должно отсекать ни одного целочисленного плана.

Дополнительное ограничение, обладающее указанными свойствами, называется **правильным отсечением**.

Далее задача решается с учетом нового ограничения. После этого в случае необходимости добавляется еще одно ограничение и так далее.

Геометрически добавления каждого линейного ограничения соответствует проведению прямой (гиперплоскости), которая отсекает от многоугольника (многогранника) решений некоторую его часть вместе с оптимальной точкой с нецелыми координатами, но не затрагивает ни одной из целых точек этого многогранника.

В результате новый многогранник решений содержит все целые точки, заключавшиеся в первоначальном многограннике решений и, соответственно, полученное при этом многограннике оптимальное решение будет целочисленное.

Один из алгоритмов решения задачи линейного целочисленного программирования, предложенный Гомори, основан на симплексном методе и использует достаточно простой способ построения правильного отсечения.

Пусть задача линейного программирования (1) – (3) имеет конечный оптимум и на последнем шаге ее решения симплексным методом получены следующие уравнения, выражающие базисные переменные $x_1, x_2, ., x_j, .,x_m$ через свободные переменные $x_{m+1}, x_{m+2}, . , x_{m+i}, , x_n$ оптимального решения

$$
\begin{aligned}
&x_1 = b_1 - a_{1,m+1} \odot x_{m+1} - \ldots - a_{1,m+i} \odot x_{m+i} - \ldots - a_{1,n} \odot x_n \\
&x_2 = b_2 - a_{2,m+1} \odot x_{m+1} - \ldots - a_{2,m+i} \odot x_{m+i} - \ldots - a_{2,n} \odot x_n \\
&\ldots\ldots\ldots \\
&x_i = b_i - a_{i,m+1} \odot x_{m+1} - \ldots - a_{i,m+i} \odot x_{m+i} - \ldots - a_{i,n} \odot x_n \qquad (5) \\
&\ldots\ldots\ldots \\
&x_m = b_m - a_{m,m+1} \odot x_{m+1} - \ldots - a_{m,m+i} \odot x_{m+i} - \ldots - a_{m,n} \odot x_n
\end{aligned}
$$

так, что оптимальным решением задачи (1) – (3) является $X^* = (b_1, b_2, , b_i, . . , b_m, 0, 0, . , 0)$, в котором, например, b_i – нецелая компонента. В этом случае можно доказать, что неравенство

$$\{b_i\} - \{a_{i,m+1}\} \odot x_{m+1} - \ldots - \{a_{i,m+i}\} \odot x_{m+i} - \ldots - \{a_{i,n}\} \odot x_n \le 0 \qquad (6)$$

сформированное по i-му уравнению системы (5), обладает всеми свойствами правильного отсечения.

В неравенстве (6) символ { } означает дробную часть числа. Целой частью числа a называется наибольшее число $[a]$, не превосходящее a, а дробной частью числа – число $\{a\}$, равное разности между этим числом и его целой частью, то есть, $\{a\} = a - [a]$.

Для решения задачи целочисленного линейного программирования (1) – (4) методом Гомори используется следующий алгоритм:

1. Симплексным методом решить задачу (1) – (3) без учета условия целочисленности. Если все компоненты оптимального плана целые, то он является оптимальным и для решения задачи целочисленного программирования (1) – (4). Если первая задача (1) – (3) неразрешима (то есть, не имеет конечного экстремума или условия ее противоречивы), то и вторая задача (1) – (4) также неразрешима.

2. Если среди компонент оптимального решения есть нецелые, то выбрать компоненту с наибольшей целой частью и по соответствующему уравнению системы (5) сформировать правильное отсечение (6).

3. Неравенство (6) введением дополнительной неотрицательной переменной преобразовать в равносильное уравнение

$$\{b_i\} - \{a_{i,m+1}\}\circledcirc x_{m+1} - \ldots - \{a_{i,m+i}\}\circledcirc x_{m+i} - \ldots - \{a_{i,n}\}\circledcirc x_n + x_{n+1} = 0 \qquad (7)$$

и включить его в систему ограничений (2).

4. Полученную расширенную задачу решить симплексным методом. Если найденный оптимальный план будет целочисленным, то задача целочисленного программирования (1) – (3) решена. В противном случае вернуться к п. 2 алгоритма.

Если задача разрешима в целых числах, то после конечного числа шагов (итераций) оптимальный целочисленный план будет найден.

Если в процессе решения появится уравнение (выражающее базисную переменную через свободные) с нецелым свободным членом и целыми остальными коэффициентами, то соответствующее уравнение не имеет решения в целых числах. В этом случае и данная задача не имеет целочисленного оптимального решения.

Недостатком метода Гомори является требование целочисленности всех переменных: как основных, выражающих единицы продукции, так и для дополнительных, выражающих величину неиспользованных ресурсов, которые могут быть и дробными.

Пример. В цехе предприятия решено установить дополнительное оборудование, для размещения которого выделено 19 м2 площади. На приобретение оборудования предприятие может израсходовать 16 млн. руб., при этом оно может купить оборудование двух видов. Комплект оборудования I вида стоит 4 млн. руб., а II вида – 1 млн. руб. Приобретение одного комплекта оборудования I вида позволяет увеличить выпуск продукции в смену на 8 ед., а одного комплекта оборудования II вида – на 6 ед. Зная, что для установки одного комплекта оборудования I вида требуется 2 м 2 площади, а оборудования II вида – 5 м2 площади, определить такой набор дополнительного оборудования, который дает возможность максимально увеличить выпуск продукции.

Решение. Составим математическую модель задачи. Предположим, что предприятие приобретет x_1 комплектов I вида и x_2 комплектов оборудования II вида. Тогда переменные x_1 и x_2 должны удовлетворять следующим неравенствам:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 19, \\ 4x_1 + x_2 \le 16. \end{cases}$$

Если предприятие приобретет указанное количество оборудования, то общее увеличение выпуска продукции составит

$$F = 8x_1 + 6x_2 \to max.$$

По своему экономическому содержанию переменные x_1 и x_2 могут принимать лишь целые неотрицательные значения, т.е.

$$x_1, x_2 \ge 0,$$
$$x_1, x_2 - \text{ целые.}$$

Приведем систему ограничений к каноническому виду, прибавив дополнительные переменные x_3, x_4

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 19 \\ 4x_1 + x_2 + x_4 = 16 \\ x_1, x_2 \geq 0, \;\; x_1, x_2 - \text{ целые} \end{cases}$$

Метод Гомори (отсечения) решения задачи целочисленного программирования заключается в следующем. Сначала задачу надо решить без условия целочисленности.

Если решение целочисленное (все требуемые компоненты задачи являются целыми числами), то задача решена. Если решение содержит нецелые компоненты, то в задаче необходимо ввести дополнительные ограничения.

Решим ее симплекс-методом без учета требования целочисленности

Таблица 1

базис	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i	ρ_i
x_3	2	5	1	0	19	19/2
x_4	4	1	0	1	16	4
-F	8	6	0	0	0	
x_2	0	1	2/9	- 1/9	22/9	
x_1	1	0	- 1/18	5/18	61/18	
-F	0	0	- 8/9	-14/9	-376/9	

Все коэффициенты целевой функции при свободных переменных отрицательны, следовательно, найдено оптимальное решение: F_{max}= 376/9 при плане $\left\{\frac{61}{18}, \frac{22}{9}, 0, 0\right\}$.

Среди компонент оптимального решения задачи имеются нецелые числа. Выбираем уравнение, для которого дробная часть свободного члена наибольшая. $\left\{\frac{22}{9}\right\} = \frac{4}{9}$; $\left\{\frac{61}{18}\right\} = \frac{7}{18}$ Выбираем первое уравнение.

В общем виде это уравнение имеет вид:

$$x_p + \sum_{j=m+1}^{n} a_{pj} \cdot x_j = b_p.$$

$$x_2 + \frac{2}{9}x_3 - \frac{1}{9}x_4 = \frac{22}{9}.$$

Согласно этому уравнению составляется следующее неравенство (ограничение, отсечение):

$$[b_p] - \sum_{j=1}^{n} [a_{pj}]x_j \leq 0.$$

$$\frac{4}{9} - \frac{2}{9}x_3 - \frac{8}{9}x_4 \leq 0.$$

Приведем уравнение к канонической форме и свободный член перенесем в правую часть.

$$-\frac{2}{9}x_3 - \frac{8}{9}x_4 + x_5 = -\frac{4}{9}.$$

Это уравнение присоединим к системе ограничений решенной задачи, т.е. составим новую таблицу с дополнительным столбцом для нового неизвестного x_{n+1}, содержащую последний блок таблицы решенной задачи и новую строку, соответствующую построенному уравнению

базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	ρ_i
x_2	0	1	2/9	- 1/9	0	22/9	11
x_1	1	0	- 1/18	5/18	0	61/18	
x_5	0	0	- 2/9	- 8/9	1	- 4/9	2
-F	0	0	- 8/9	-14/9	0	-376/9	
x_2	0	1	1/4	0	- 1/8	5/2	
x_1	1	0	- 1/8	0	5/16	13/4	
x_4	0	0	1/4	1	-9/8	1/2	
-F	0	0	- 1/2	0	-7/4	-41	

Получили новое оптимальное решение: $F_{max} = 41$ при плане $\left\{\frac{13}{4}, \frac{5}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0\right\}$.

Максимальная дробная часть свободного члена в последнем блоке соответствует первой строке, т.е. уравнению

$$x_2 + \frac{1}{4}x_3 - \frac{1}{8}x_5 = \frac{5}{2}.$$

Составим новое отсечение:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4}x_3 - \frac{7}{8}x_5 \leq 0,$$

или уравнение $$-\frac{1}{2}x_3 - \frac{7}{8}x_5 + x_6 = -\frac{1}{2}.$$

Новая рабочая таблица имеет вид:

базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i	ρ_i
x_2	0	1	1/4	0	- 1/8	0	5/2	
x_1	1	0	- 1/8	0	5/16	0	13/4	52/5
x_4	0	0	1/4	1	-9/8	0	1/2	
x_6	0	0	- 1/4	0	- 7/8	1	- 1/2	4/7
-F	0	0	- 1/2	0	-7/4	0	-41	
x_2	0	1	2/7	0	0	- 1/7	18/7	
x_1	1	0	- 3/14	0	0	5/14	43/14	
x_4	0	0	4/7	1	0	-9/7	8/7	
x_5	0	0	2/7	0	1	-8/7	4/7	
-F	0	0	0	0	0	-2	-40	

Новое оптимальное решение: F_{max}= 40 при плане $\left\{\frac{43}{14}, \frac{18}{7}, 0, \frac{8}{7}, \frac{4}{7}, 0\right\}$

Таким образом, делаем еще три отсечения с целью получения целочисленного решения

базис	x_1	x_2	x_3	x_4	x_8	x_9	b_i	ρ_i
x_2	0	1	0	0	2	-1	2	
x_1	1	0	0	0	-1	1	3	
x_3	0	0	1	0	-8	3	3	
x_4	0	0	0	1	2	-3	2	
-F	0	0	0	0	-4	-2	-36	

Получен оптимальный целочисленный план: F_{max} = 36 при плане (3;2). Согласно данному решению предприятию необходимо приобрести 3 комплекта оборудования I вида и 2 комплекта II вида, что даст возможность максимально увеличить выпуск продукции до 36 единиц.

Динамическое программирование

Динамическое программирование — один из разделов оптимального программирования, в котором процесс принятия решения и управления может быть разбит на отдельные этапы (шаги). Например, выпуск продукции предприятием — управляемый процесс. Совокупность решений, принимаемых в начале года (квартала и т.д.) по обеспечению предприятия сырьем, замене оборудования, финансированию и т.д., является управлением. Необходимо организовать выпуск продукции так, чтобы принятые решения на отдельных этапах способствовали получению максимально возможного объема продукции или прибыли.

Динамическое программирование позволяет свести одну сложную задачу со многими переменными ко многим задачам с малым числом переменных. Это значительно сокращает объем вычислений и ускоряет процесс принятия управленческого решения. В отличие от линейного программирования, в котором симплексный метод является универсальным методом решения, в динамическом программировании такого универсального метода не существует.

Одним из основных методов динамического программирования является метод рекуррентных соотношений, который основывается на использовании принципа оптимальности, разработанного американским математиком Р. Беллманом. Принцип состоит в том, что, каковы бы ни были начальное состояние на любом шаге и управление, выбранное на этом шаге, последующие управления должны выбираться оптимальными относительно состояния, к которому придет система в конце данного шага.

Использование данного принципа гарантирует, что управление, выбранное на любом шаге, не локально лучше, а лучше с точки зрения процесса в целом. В некоторых задачах, решаемых методом динамического программирования, процесс управления разбивается на шаги. При распределении на несколько лет ресурсов деятельности предприятия шагом целесообразно считать временной период; при распределении средств между предприятиями — номер очередного предприятия.

В других задачах разбиение на шаги вводится искусственно. Например, непрерывный управляемый процесс можно рассматривать как дискретный, условно разбив его на временные отрезки (шаги). Исходя из условий каждой конкретной задачи, длину шага выбирают таким образом, чтобы на каждом шаге получить простую задачу оптимизации и обеспечить требуемую точность вычислений.

Оптимальная стратегия замены оборудования. Одной из важных проблем является определение оптимальной стратегии в замене старых станков, агрегатов, машин на новые. Старение оборудования включает его физический и моральный износ, в результате чего растут производственные затраты по выпуску продукции на старом оборудовании, увеличиваются затраты на его ремонт и обслуживание, снижаются производительность и ликвидная стоимость. Наступает время, когда старое оборудование выгоднее продать, заменить новым, чем эксплуатировать ценой больших затрат; причем его можно заменить новым оборудованием того же вида или новым, более совершенным.

Оптимальная стратегия замены оборудования состоит в определении оптимальных сроков замены. Критерием оптимальности при этом может служить прибыль от эксплуатации оборудова-

ния, которую следует оптимизировать, или суммарные затраты на эксплуатацию в течение рассматриваемого промежутка времени, подлежащие минимизации.

Введем обозначения: $r(t)$ — стоимость продукции, производимой за один год на единице оборудования возраста t лет; $u(t)$ — ежегодные затраты на обслуживание оборудования возраста t лет; $s(t)$ — остаточная стоимость оборудования возраста t лет; P — покупная цена оборудования.

Рассмотрим период N лет, в пределах которого требуется определить оптимальный цикл замены оборудования. Обозначим через $f_{N(t)}$ максимальный доход, получаемый от оборудования возраста t лет за оставшиеся N лет цикла использования оборудования при условии оптимальной стратегии. Возраст оборудования отсчитывается в направлении течения процесса. Так, $t = 0$ соответствует случаю использования нового оборудования. Временные же стадии процесса нумеруются в обратном направлении по отношению к ходу процесса. Так, $N = 1$ относится к одной временной стадии, остающейся до завершения процесса, а $N = N$ — к началу процесса (рисунок 1). На каждом этапе N-стадийного процесса должно быть принято решение о сохранении или замене оборудования. Выбранный вариант должен обеспечивать получение максимальной прибыли.

Рисунок 1. Пример

Функциональные уравнения, основанные на принципе оптимальности, имеют вид:

$$f_N(t) = \max \begin{cases} r(t) - u(t) + f_{N-1}(t+1) \longrightarrow \text{Сохранение;} \\ s(t) - P + r(0) - f_{N-1}(1) \longrightarrow \text{Замена,} \end{cases} \quad (1)$$

$$f_1(t) = \max \begin{cases} r(t) - u(t) \longrightarrow \text{Сохранение;} \\ s(t) - P + r(0) - u(0) \longrightarrow \text{Замена.} \end{cases} \quad (2)$$

Уравнение (1) описывает N-стадийный процесс, а (2) — одностадийный. Оба уравнения состоят из двух частей: верхняя строка определяет доход, получаемый при сохранении оборудования; нижняя — доход, получаемый при замене оборудования и продолжении процесса работы на новом оборудовании. В уравнении (1) функция $r(t) — u(t)$ есть разность между стоимостью произведенной продукции и эксплуатационными издержками на N-й стадии процесса. Функция $f_{N-1}(t + 1)$ характеризует суммарную прибыль от $(N — 1)$ оставшихся стадий для оборудования, возраст которого в начале осуществления этих стадий составляет $(t + 1)$ лет.

Нижняя строка (1) характеризуется следующим образом: функция $s(t) — P$ представляет чистые издержки по замене оборудования, возраст которого t лет. Функция $r(0)$ выражает доход, получаемый от нового оборудования возраста 0 лет. Предполагается, что переход от работы на оборудовании возраста t лет к работе на новом оборудовании совершается мгновенно, т.е. период замены старого оборудования и переход на работу на новом оборудовании укладываются в одну и ту же стадию. Последняя функция f_{N-1} в (1) представляет собой доход от оставшихся $N — 1$ стадий, до начала осуществления которых возраст оборудования составляет один год.

Аналогичная интерпретация может быть дана уравнению для одностадийного процесса. Здесь нет слагаемого вида $f_0(t+1)$, так как N принимает значение $1, 2,..., N$. Равенство $f_0(t) = 0$ следует из определения функции $f_N(t)$. Уравнения (1) и (2) являются рекуррентными соотношениями, которые позволяют определить величину $f_N(t)$ в зависимости от $f_{N-1}(t + 1)$. Структура этих уравнений показывает, что при переходе от одной стадии процесса к следующей возраст оборудования увеличивается с t до $(t + 1)$ лет, а число оставшихся стадий уменьшается с N до $(N — 1)$. Расчет начинают с использования уравнения (1). Уравнения (1) и (2) позволяют оценить варианты замены и сохранения оборудования, с тем чтобы принять тот из них, который предполагает больший до-

ход. Эти соотношения дают возможность не только выбрать линию поведения при решении вопроса о сохранении или замене оборудования, но и определить прибыль, получаемую при принятии каждого из этих решений.

Пример. Определить оптимальный цикл замены оборудования при следующих исходных данных: P = 10, S(t) = 0, f(t) = r(t) — u(t), представленных в таблице.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(t)$	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	0	0

Решение. Уравнения (1) и (2) запишем в следующем виде:

$$f_N(t) = \max\begin{cases} f(t) + f_{N-1}(t+1), \\ -p + f(0) + f_{N-1}(1), \end{cases} \qquad (3)$$

$$f_1(t) = \max\begin{cases} f(t), \\ -p + f(0). \end{cases}$$

Для N = 1

$$f_1(0) = \max\begin{cases} f(0) \\ -p + f(0) \end{cases} = \max\begin{cases} 10 \\ -10 + 10 \end{cases} = 10,$$

$$f_1(1) = \max\begin{cases} f(1) \\ -p + f(0) \end{cases} = \max\begin{cases} 9 \\ -10 + 10 \end{cases} = 9,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f_1(12) = \max\begin{cases} f(12) \\ -p + f(0) \end{cases} = \max\begin{cases} 0 \\ -10 + 10 \end{cases} = 0.$$

Для N = 2

$$f_2(0) = \max\begin{cases} f(0) + f_1(1) \\ -p + f(0) + f_1(1) \end{cases} = \max\begin{cases} 10 + 9 \\ -10 + 10 + 9 \end{cases} = 19,$$

$$f_2(1) = \max\begin{cases} f(1) + f_1(2) \\ -p + f(0) + f_1(1) \end{cases} = \max\begin{cases} 9 + 8 \\ -10 + 10 + 9 \end{cases} = 17,$$

Вычисления продолжаем до тех пор, пока не будет выполнено условие $f_1(1) > f_2(2)$, т.е. в данный момент оборудование необходимо заменить, так как величина прибыли, получаемая в результате замены оборудования, больше, чем в случае использования старого.

Результаты расчетов помещаем в таблицу, момент замены отмечаем звездочкой, после чего дальнейшие вычисления по строчке прекращаем.

$F_N(t)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	N	$N-1$	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
$f_1(t)$	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	0	0
$f_2(t)$	19	17	15	13	11	9	9*						
$f_3(t)$	27	24	21	18	17	17*							
$f_4(t)$	34	30	26	24	24*								
$f_5(t)$	40	35	32	31	30	30*							
$f_6(t)$	45	41	39	37	36	35	35*						
$f_7(t)$	51	48	45	43	41	41*							
$f_8(t)$	58	54	51	48	48*								
$f_9(t)$	64	60	56	55	54	54*							
$f_{10}(t)$	70	65	63	61	60	60*							
$f_{11}(t)$	75	72	69	67	66	65	65*						
$f_{12}(t)$	82	78	75	73	72	72*							

Можно не решать каждый раз уравнение (3), а вычисления проводить в таблице. Например, вычислим $f_4(t)$:

$$f_4(0) = f_1(0) + f_3(1) = 10 + 24 = 34 > f_3(1) = 24,$$
$$f_4(1) = f_1(1) + f_3(2) = 9 + 21 = 30 > f_3(1),$$
$$f_4(2) = f_1(2) + f_3(3) = 8 + 18 = 26 > f_3(1),$$
$$f_4(3) = f_1(3) + f_3(4) = 7 + 17 = 24 > f_3(1),$$
$$f_4(4) = f_1(4) + f_3(5) = 6 + 17 = 23 < f_3(1).$$

Дальнейшие расчеты для $f_4(t)$ прекращаем, так как $f_4(4) = 23 < f_3(1) = 24$. По результатам вычислений и по линии, разграничивающей области решений сохранения и замены оборудования, находим оптимальный цикл замены оборудования.

Для получения максимальной прибыли от использования оборудования в двенадцатиэтапном процессе оптимальный цикл состоит в замене оборудования через каждые 4 года.

Модели сетевого планирования и управления

С целью повышения эффективности проектирования ИС, т.е. обеспечения качества проекта в нужный срок с наименьшими стоимостными и трудовыми затратами, необходимо разработать систему управления проектом (СУП), которую можно рассматривать как систему управления операциями и получения аналитических и отчетных сводок.

Система управления проектами представляет собой организационно-технологический комплекс методических, технических, программных и информационных средств, направленный на поддержку и повышение эффективности процессов планирования и управления проектом.

Система управления проектами содержит набор функциональных средств, которые помогают менеджеру планировать работы, временные, ресурсные и стоимостные оценки выполнения комплекса работ, а затем, в процессе выполнения, отслеживать ход работ и корректировать план. Функциональные средства, реализующие взаимосвязанные методы, являются **основой для информационных систем**, которые моделируют комплекс работ и потребности в ресурсах. Эти методы используют оценки требуемых объемов работ, и позволяют менеджеру регулировать выполнение работ по времени, стоимости, составу работ, качеству и организационной структуре исполнения.

Основные преимущества использования информационной системы для управления проектами включают:

- централизованное хранение информации по графику работ, ресурсам и стоимостям;
- возможности быстрого анализа влияния изменений в графике, ресурсном обеспечении и финансировании на план проекта;
- возможность распределенной поддержки и обновления данных в сетевом режиме;
- возможности автоматизированной генерации отчетов и графических диаграмм, разработки документации по проекту.

Процесс управления значительно облегчается, если СУП представить в виде модели, отражающей **план разработки**, в которой фиксируется весь ход событий для достижения конечной цели при заданных условиях. Составленная модель должна быть адекватна моделируемой системе. Информационная модель проекта, разработанная на начальной стадии планирования, подвергается в дальнейшем переработке в процессе его реализации. Таким образом, базовые методики планирования используются на протяжении всего жизненного цикла проекта.

Существует несколько способов формализованного представления выполняемой совокупности работ, применяемых для целей планирования и управления ими. Широкое распространение при построении моделей систем управления комплексом операций получили графические методы, как наиболее универсальные и дающие обозримую информацию о ходе работ, к основным из которых относится метод построения **линейного** графика Гантта и метод, основанный на использовании теории графов - метод **сетевого** планирования и управления (СПУ).

Диаграмма Гантта, или циклограмма - горизонтальная линейная диаграмма, на которой

работы проекта представляются протяженными во времени отрезками, характеризующимися датами начала и окончания, задержками и возможно другими временными параметрами (рисунок 1).

Код работы	Начало	Конец	Длительность в ед. времени	Временные периоды в ед. времени
1	1.10	2.10	1	
2	2.10	5.10	3	
3	5.10	9.10	4	
4	6.10	9.10	3	

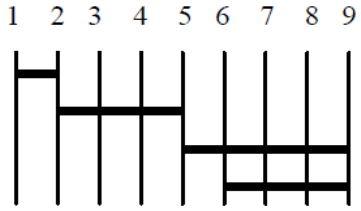


Рисунок 1. Линейный график Гантта

Получаемый график отличается статичностью и громоздкостью, по результатам отображения работ нельзя оперативно получать информацию о ресурсах, нельзя оперативно управлять, поэтому для целей планирования и управления он может быть применим при небольших объемах работ. Существенными недостатками традиционных календарных графиков и циклограмм является:

- неспособность в полной мере отражать взаимосвязи отдельных операций;
- недостаточная гибкость линейной модели;
- трудность ее корректировки при изменившихся условиях;
- ограниченные возможности прогнозирования дальнейшего хода работ являются факторами, снижающими эффективность процесса управления.

Линейные модели, кроме того, не отражают той неопределенности, которая бывает присуща управлению проектами. Однако этот метод может быть использован при оптимизации распределения используемых ресурсов.

Сетевые модели свободны от этих недостатков, легко поддаются обработке на ЭВМ и позволяют более эффективно осуществлять планирование, координацию, контроль и управление процессом создания сложных систем.

Сетевая модель и ее элементы. Поиски более эффективных способов планирования сложных процессов привели к созданию принципиально новых методов сетевого планирования и управления (СПУ).

Система методов СПУ — система методов планирования и управления разработкой крупных народно-хозяйственных комплексов, научными исследованиями, конструкторской и технологической подготовкой производства, новых видов изделий, строительством и реконструкцией, капитальным ремонтом основных фондов путем применения сетевых графиков.

Первые системы, использующие сетевые графики, были применены в США в конце 50-х годов и получили названия CPM (английская аббревиатура, означающая метод критического пути) и PERT (метод оценки и обзора программы). Система CPM была впервые применена при управлении строительными работами, система PERT— при разработке систем "Поларис".

В России работы по сетевому планированию начались в 60-х годах. Тогда методы СПУ нашли применение в строительстве и научных разработках. В дальнейшем сетевые методы стали широко применяться и в других областях народного хозяйства.

СПУ основано на моделировании процесса с помощью сетевого графика и представляет собой совокупность расчетных методов, организационных и контрольных мероприятий по планированию и управлению комплексом работ.

Система СПУ позволяет:

• формировать календарный план реализации некоторого комплекса работ;

• выявлять и мобилизовывать резервы времени, трудовые, материальные и денежные ресурсы;

• осуществлять управление комплексом работ по принципу "ведущего звена" с прогнозированием и предупреждением возможных срывов в ходе работ;

• повышать эффективность управления в целом при четком распределении ответственности между руководителями разных уровней и исполнителями работ.

Диапазон применения СПУ весьма широк: от задач, касающихся деятельности отдельных лиц, до проектов, в которых участвуют сотни организаций и десятки тысяч людей (например, разработка и создание крупного территориально-промышленного комплекса).

Под **комплексом работ** (комплексом операций, или проектом) будем понимать всякую задачу, для выполнения которой необходимо осуществить достаточно большое количество разнообразных работ. Это может быть и строительство некоторого здания, корабля, самолета или любого другого сложного объекта, и разработка проекта этого сооружения, и даже процесс построения планов реализации проекта.

Для того чтобы составить план работ по осуществлению больших и сложных проектов, состоящих из тысяч отдельных исследований и операций, необходимо описать его с помощью некоторой математической модели. Таким средством описания проектов (комплексов) является **сетевая модель**.

Главными элементами сетевой модели являются *события и работы*.

Термин **работа** используется в СПУ в широком смысле. Во-первых, это ***действительная работа*** — протяженный во времени процесс, требующий затрат ресурсов (например, сборка изделия, испытание прибора и т.п.). Каждая действительная работа должна быть конкретной, четко описанной и иметь ответственного исполнителя.

Во-вторых, это ***ожидание*** — протяженный во времени процесс, не требующий затрат труда (например, процесс сушки после покраски, старения металла, твердения бетона и т.п.).

В-третьих, это ***зависимость***, или фиктивная работа — логическая связь между двумя или несколькими работами (событиями), не требующими затрат труда, материальных ресурсов или времени. Она указывает, что возможность одной работы непосредственно зависит от результатов другой. Естественно, что продолжительность фиктивной работы принимается равной нулю.

Событие — это момент завершения какого-либо процесса, отражающий отдельный этап выполнения проекта. Событие может являться частным результатом отдельной работы или суммарным результатом нескольких работ. Событие может свершиться только тогда, когда закончатся все работы, ему предшествующие. Последующие работы могут начаться только тогда, когда событие свершится. Отсюда двойственный характер события: для всех непосредственно предшествующих ему работ оно является **конечным**, а для всех непосредственно следующих за ним — **начальным**. При этом предполагается, что событие не имеет продолжительности и свершается как бы мгновенно. Поэтому каждое событие, включаемое в сетевую модель, должно быть полно, точно и всесторонне определено, его формулировка должна включать в себя результат всех непосредственно предшествующих ему работ.

Среди событий сетевой модели выделяют **исходное** и **завершающее** события. Исходное событие не имеет предшествующих работ и событий, относящихся к представленному в модели комплексу работ. Завершающее событие не имеет последующих работ и событий.

События на сетевом графике (или, как еще говорят, на графе) изображаются кружками (вершинами графа), а работы — стрелками (ориентированными дугами), показывающими связь между работами. Пример фрагмента сетевого графика представлен на рисунке 2.

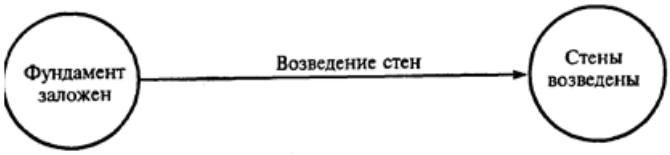


Рисунок 2. Фрагмент сетевого графика.

На рисунке 3а приведен сетевой график задачи моделирования и построения оптимального плана некоторого экономического объекта. Чтобы решить эту задачу, необходимо провести следующие работы: А — сформулировать проблему исследования; Б — построить математическую модель изучаемого объекта; В — собрать информацию; Г — выбрать метод решения задачи; Д —

построить и отладить программу для ЭВМ; Е — рассчитать оптимальный план; Ж — передать результаты расчета заказчику. Цифрами на графике обозначены номера событий, к которым приводит выполнение соответствующих работ.

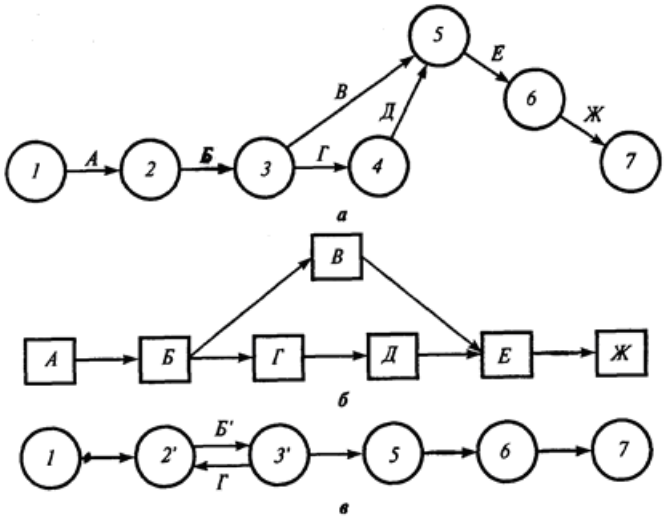


Рисунок 3. Сетевые графики

Из графика, например, следует, что работы В и Г можно начать выполнять независимо одна от другой только после свершения события 3, т.е. когда выполнены работы А и Б; работу Д — после свершения события 4, когда выполнены работы А, Б и Г, а работу Е можно выполнить только после наступления события 5, т.е при выполнении всех предшествующих ему работ А, Б, В, Г и Д.

В сетевой модели, представленной на рисунке. 3а, нет числовых оценок. Такая сеть называется структурной. Однако на практике чаще всего используются сети, в которых заданы оценки продолжительности работ (указываемые в часах, неделях, декадах, месяцах и т.д. над соответствующими стрелками), а также оценки других параметров, например трудоемкости, стоимости и т.п.

В рассмотренных примерах сетевые графики состояли из работ и событий. Однако может быть и иной принцип построения сетей — без событий. В такой сети вершины графа (например, изображенные прямоугольниками) означают определенные работы, а стрелки — зависимости между этими работами, определяющие порядок их выполнения. В качестве примера сетевой график "события — работы" задачи моделирования и построения оптимального плана некоторого экономического объекта, приведенный на рисунке 3а, представлен в виде сети "работы — связи" на рисунке 3б. А сетевой график "события — работы" той же задачи, но с неудачно составленным перечнем работ, представлен на рисунке 3в.

Следует отметить, что сетевой график "работы — связи" в отличие от графика "события — работы" обладает известными преимуществами: не содержит фиктивных работ, имеет более простую технику построения и перестройки, включает только хорошо знакомое исполнителям понятие работы без менее привычного понятия события. Вместе с тем сети без событий оказываются значительно более громоздкими, так как событий обычно значительно меньше, чем работ (показатель сложности сети, равный отношению числа работ к числу событий, как правило, существенно больше единицы). Поэтому эти сети менее эффективны с точки зрения управления комплексом. Этим и объясняется тот факт, что (при отсутствии в целом принципиальных различий между двумя формами представления сети) в настоящее время наибольшее распространение получили сетевые графики "события — работы".

Понятие о пути. Одно из важнейших понятий сетевого графика — понятие пути. **Путь** — любая последовательность работ, в которой конечное событие каждой работы совпадает с начальным событием следующей за ней работы. Среди различных путей сетевого графика наибольший

интерес представляет полный путь L — любой путь, начало которого совпадает с исходным событием сети, а конец — с завершающим.

Наиболее продолжительный полный путь в сетевом графике называется **критическим**. Критическими называются также работы и события, расположенные на этом пути.

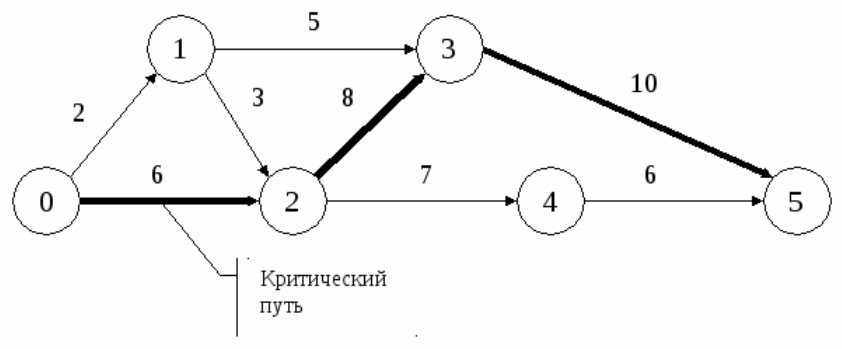


Рисунок 4. Упорядоченный сетевой график

Представленная сетевая модель имеет пять путей:

путь 1, проходящий через события 0-1-3-5, имеет продолжительность 17 дней;

путь 2, проходящий через события 0-1-2-3-5, имеет продолжительность 23 дня;

путь 3, проходящий через события 0-1-2-4-5, имеет продолжительность 18 дней;

путь 4, проходящий через события 0-2-4-5, имеет продолжительность 19 дней;

путь 5, проходящий через события 0-2-3-5, имеет продолжительность 24 дня.

Путь 5 по своей продолжительности превосходит все остальные, следовательно, именно этот путь и является критическим.

Работы, лежащие на критическом пути, являются узкими местами, потому руководитель проекта должен сосредоточить свое внимание именно на этих работах, так как от них зависит выполнение всех работ в установленный срок. Другие работы имеют резерв времени, что дает возможность маневрировать ресурсами или снижать стоимость работ за счет увеличения их продолжительности.

Как показывает практика: чем больше работ охватывает сетевая модель, тем меньше удельный вес работ, лежащих на критическом пути.

Например, в модели, включающей 100 работ, на критическом пути будут находиться 10-12% работ; в модели, включающей 1000 работ, – 7-8% работ; в модели, включающей 5000 работ, – 3-4% работ.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ

Методические указания к выполнению практических занятий по дисциплине предназначены для закрепления теоретических знаний, полученных на лекциях, а также для овладения студентами умений и навыков применять эти знания при самостоятельной работе.

Выполнение студентами практических занятий по дисциплине проводится с целью:

- закрепления полученных теоретических знаний по дисциплине;
- углубления теоретических знаний в соответствии с заданной темой;
- формирования умений решать практические задачи;
- развития самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирования активных умственных действий студентов, связанных с поисками рациональных способов выполнения заданий.

Практическое задание 1. Составление математических моделей решения задач исследования операций.

Цель занятия: Отработать и закрепить умения записывать условие задачи в виде математических формул и отработать и закрепить умения записывать взаимосвязь показателей задачи в виде математической модели.

Методические указания к выполнению заданий практического занятия

Математическая модель любой задачи линейного программирования включает в себя:

- максимум или минимум целевой функции (критерий оптимальности);
- систему ограничений в форме линейных уравнений и неравенств;
- требование неотрицательности переменных.

Таким образом, математическая формулировка и модель общей задачи линейного программирования имеют следующий вид:

найти максимальное (минимальное) значение линейной целевой функции

$$F(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j \to \max(\min) \qquad (1)$$

при условиях-ограничениях:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \le b_i, \quad i = 1,k \qquad (2) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j = b_i, \quad i = k+1,m, \quad k \le m; \qquad (3) \\ x_j \ge 0, \quad j = 1,l; \quad l \le n, \qquad (4) \end{cases}$$

где a_{ij}, b_i, c_j – заданные постоянные величины.

Пример. Фирма выпускает 2 вида мороженного: сливочное и шоколадное. Для изготовления используются 2 исходных продукта: молоко и наполнители, расходы которых на 1 кг мороженного и суточные запасы исходных продуктов даны в таблице.

	Расходы на 1 кг мороженного		Суточные запасы исходных продуктов
	сливочное	шоколадное	
молоко	0.8	0.5	440
наполнители	0.4	0.8	365

Изучение рынка сбыта показало, что суточный спрос на сливочное мороженное превышает спрос на шоколадное мороженное не более чем на 100 кг. Кроме того, установлено, что спрос на шоколадное мороженное не превышает 350 кг в сутки. Отпускная цена 1 кг сливочного мороженного 16 ден.ед., шоколадного - 14 ден.ед. Определить количество мороженого каждого вида, которое должна производить фирма, чтобы доход от реализации продукции был максимальным.

Решение: Составляем математическую модель задачи.

Вводим обозначения (переменные величины):

$\mathbf{x_1}$ – суточный объем выпуска сливочного мороженного, кг;

$\mathbf{x_2}$ - суточный объем выпуска шоколадного мороженного, кг

Целевая функция**:**

$$f = 16x_1 + 14x_2 \to \max$$

при ограничениях:

$0.8x_1 + 0.5x_2 \le 400$ (ограничение по молоку);

$0.4x_1 + 0.8x_2 \le 365$ (ограничение по наполнителям);

$x_1 + x_2 \le 100$ (рыночное ограничение по спросу);

$x_2 \le 350$ (рыночное ограничение по спросу);

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

Задание: построить математическую модель к задаче, пояснить условные обозначения.

1. Фирма производит для автомобилей запасные части типа А и В. Фонд рабочего времени составляет 5000 чел.-ч в неделю. Для производства одной детали типа А требуется 1 чел.-ч, а для производства одной детали типа В - 2 чел.-ч. Производственная мощность позволяет выпускать максимум 2500 деталей типа А и 2000 деталей типа В в неделю. Для производства детали типа А уходит 2 кг полимерного материала и 5 кг листового материала, а для производства одной детали

типа В — 4 кг полимерного материала и 3 кг листового металла. Еженедельные запасы каждого материала - по 10 000 кг. Общее число производимых деталей в течение одной недели должно составлять не менее 1500 штук. Определите, сколько деталей каждого вида следует производить, чтобы обеспечить максимальный доход от продажи за неделю, если доход от продаж одной детали типа А и В составляет соответственно 1,1 руб. и 1,5 руб.

2. Туристская фирма в летний сезон обслуживает в среднем 7500 туристов и располагает флотилией из двух типов судов, характеристики которых представлены в таблице.

Показатели	Судно	
	I	II
Пассажировместимость, чел.	2000	1000
Горючее, т	12 000	7000
Экипаж, чел.	250	100

В месяц выделяется 60 000 т горючего. Потребность в рабочей силе не превышает 700 человек.

Определите количество судов I и II типа, чтобы обеспечить максимальный доход, который составляет от эксплуатации судов I типа 20 млн руб., а II типа - 10 млн руб. в месяц.

3. Фирма производит два безалкогольных широко популярных напитка «Колокольчик» и «Буратино». Для производства 1 л. «Колокольчика» требуется 0,02 ч работы оборудования, а для «Буратино» - 0,04 ч, а расход специального ингредиента на них составляет 0,01 кг и 0,04 кг на 1 л соответственно. Ежедневно в распоряжении фирмы 16 кг специального ингредиента и 24 ч работы оборудования. Доход от продажи 1 л «Колокольчика» составляет 0,25 руб., а «Буратино» - 0,35 руб. Определите ежедневный план производства напитков каждого вида, обеспечивающий максимальный доход от их продажи.

4. Для изготовления двух видов продукции P_1 , P_2 используют три вида сырья S_1, S_2, S_3. Запасы сырья, количество единиц сырья затрачиваемых на изготовление единицы продукции, а также величина прибыли от реализации единицы продукции приведены в таблице

Вид сырья	Запас сырья	Количество единиц сырья, идущих на изготовление единиц продукции	
		P_1	P_2
S_1	20	2	5
S_2	40	8	5
S_3	30	5	6
Прибыль от единицы продукции, ден. ед.		50	40

Требуется оптимальный план выпуска продукции, дающий возможность предприятию получать максимальную прибыль.

5. Собственные средства банка вместе с депозитами составляют 100 млн ден. ед. Не менее 35 млн ден. ед. этих средств должно быть размещено в кредитах, доходность которых составляет 15%. Кредиты являются неликвидными активами банка, так как в случае непредвиденной потребности в наличности обратить их в деньги без существенных потерь невозможно. Другое дело ценные бумаги, особенно государственные. Их можно в любой момент продать, получив некоторую прибыль или во всяком случае без большого убытка. Поэтому существует правило, согласно которому коммерческие банки должны покупать в определенной пропорции ликвидные активы – ценные бумаги, чтобы компенсировать неликвидность кредитов. Пусть в данном случае ценные бумаги должны составлять не менее 30% средств, размещенных в кредитах и ценных бумагах, а их доходность составляет 10%. Требуется сформировать оптимальный пакет активов, максимизирующий прибыль банка.

Контрольные вопросы:

1. Что такое моделирование? Опишите цели моделирования.

2. Что такое модель?
3. Опишите классификацию моделей.
4. Что такое математическое моделирование. На какие типы оно делится.
5. Дайте определение оптимизации.
6. Что такое исследование операции?

Практическое задание 2. Решение задач линейного программирования симплекс-методом.

Цель занятия: Отработать и закрепить умения решать задачи линейного программирования симплекс-методом.

Методические указания к выполнению заданий практического занятия

Симплексный метод применим к решению любой задачи линейного программирования. Из геометрического смысла задачи линейного программирования следует, что для ее решения необходимо вычислить координаты всех вершин многогранника ограничений и значения целевой функции в них.

Решить задачу линейного программирования можно методом перебора. Действительно, перебором всех вершин можно найти такую вершину, где функция f приобретает экстремальное значение, однако при этом возможны две трудности:

1) если число неизвестных n больше числа ограничений m $(n > m)$, система ограничений линейно зависима, то для построения многоугольника решений необходимо выделение всех линейно независимых систем уравнений и их решение;

2) число вершин многогранника резко возрастает с увеличением числа неизвестных n $(n > m)$, и такой метод перебора всех вершин может оказаться слишком трудоемким.

Симплексный метод обеспечивает более рациональное решение задачи, чем метод перебора. Суть его состоит в том, что, отправляясь из некоторой произвольной вершины многогранника ограничений, переходят к вычислению только такой вершины, в которой значение линейной функции будет больше, чем в предыдущей. Остальные варианты не вычисляются. Тогда при конечном сравнительно малом числе шагов может быть найден оптимальный план. Таким образом, производится упорядоченный перебор вершин, при котором происходит постоянное увеличение линейной функции. Поэтому симплексный метод называется также методом последовательного улучшения плана.

Алгоритм симплексного метода включает следующие этапы:

1. Составление первого опорного плана. Система ограничений задачи, решаемой симплексным методом, задана в виде системы неравенств смысла «<», правые части которых $b_i > 0$. Перейдем от системы неравенств к системе уравнений путем введения неотрицательных дополнительных переменных. Векторы-столбцы при этих переменных представляют собой единичные векторы и образуют базис, а соответствующие им переменные называются базисными:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j + x_{n+i} = b_i, \quad i = \overline{1, m},$$

где x_{n+i} – базисные переменные, $i = \overline{1, m}$,
x_j – свободные переменные, $j = \overline{1, n}$.

Решим эту систему относительно базисных переменных:

$$x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j, \quad (i = \overline{1, m}),$$

а функцию цели перепишем в виде уравнения

$$F(\overline{X}) = 0 - (-\sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j).$$

Полагая, что основные переменные $x_1 = x_2 = x_3 = \ldots x_n = 0$, получим первый опорный план $X_1 = (0, 0, \ldots, 0, b_1, b_2, \ldots, b_m); F(X_1) = 0$, который заносим в симплексную таблицу. Она состоит из коэффициентов системы ограничений и свободных членов. Первая строка таблицы называется индексной и заполняется коэффициентами функции цели, взятыми с противоположным знаком.

2. Проверка плана на оптимальность. Если все коэффициенты индексной строки симплексной таблицы при решении задачи на максимум неотрицательны (> 0), то план является оптималь-

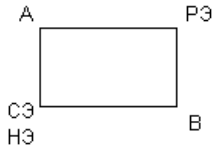
ным. Если найдется хотя бы один коэффициент индексной строки меньше нуля, то план не оптимальный и его можно улучшить. В этом случае переходим к следующему этапу алгоритма.

3. Определение ведущих столбца и строки. Из отрицательных коэффициентов индексной строки выбираем наибольший по абсолютной величине, что и определяет ведущий столбец, который показывает, какая переменная на следующей итерации перейдет из свободных в базисные.

Затем элементы столбца свободных членов симплексной таблицы делим на элементы того же знака ($^{+}$/+; "/-) ведущего столбца. Результаты заносим в отдельный столбец *di,*которые будут всегда положительные. Строка симплексной таблицы, соответствующая минимальному значению d_i,является ведущей. Она определяет переменную x_i, которая на следующей итерации выйдет из базиса и станет свободной.

Элемент симплексной таблицы, находящийся на пересечении ведущих столбца и строки, называют разрешающим и выделяют кружком.

4. Построение нового опорного плана. Переход к новому плану осуществляется в результате пересчета симплексной таблицы методом Жордана - Гаусса. Сначала заменим переменные в базисе, т. е. вместо x_i , в базис войдет переменная x_j, соответствующая ведущему столбцу.



Разделим все элементы ведущей строки предыдущей симплексной таблицы на разрешающий элемент и результаты деления занесем в строку следующей симплексной таблицы, соответствующую введенной в базис переменной x_j. В результате этого на месте разрешающего элемента в следующей симплексной таблице будем иметь 1, а в остальных клетках *j* столбца, включая клетку столбца индексной строки, записываем нули. Остальные новые элементы нового плана находятся по правилу прямоугольника:

$$НЭ = \frac{СЭ \cdot (А \cdot В)}{РЭ}$$

где СТЭ - элемент старого плана, РЭ - разрешающий элемент, А и В - элементы старого плана, образующие прямоугольник с элементами СТЭ и РЭ.

Далее возвращаемся ко второму этапу алгоритма — проверке плана на оптимальность.

При решении задачи линейного программирования на минимум целевой функции признаком оптимальности плана являются отрицательные значения всех коэффициентов индексной строки симплексной таблицы.

Если в ведущем столбце все коэффициенты $a_{ij} \leq 0$, то функция цели *F(X)* не ограничена на множестве допустимых планов, т. е. *F(X)* стремится к бесконечности и задача не имеет решения.

Задание: Решить задачи симплекс методом.

Цех выпускает три вида изделий. Суточный плановый выпуск: 90 ед. изделия I, 70 ед. изделия II и 60 ед. изделия III. Суточные ресурсы: 780 ед. производственного оборудования (станки, машины и т.п.), 850 ед. сырья (металл и т. п.) и 790 ед. электроэнергии. Их расход на одно изделие указан в табл. 12.1. Стоимость изделия I – 8 ден. ед., изделия II – 7 ден. ед., изделия III – 6 ден. ед. Сколько надо производить изделий каждого вида, чтобы стоимость продукции, выпущенной сверх плана, была максимальной?

Таблица 12.1

Ресурсы	Расход ресурсов на изделие		
	I	II	III
Оборудование	2	3	4
Сырье	1	4	5
Электроэнергия	3	4	2

Для грузовых перевозок создается автоколонна. На приобретение автомашин выделено 600 тыс. ден. ед. Можно заказать машины трех марок – А, Б и В, характеризующиеся данными, приведенными в табл. 12.2. Количество машин не должно превышать 30, а общее число водителей в автоколонне должно быть не более 144 человек. Сколько автомашин каждой марки следует заказать, чтобы автоколонна имела максимально возможную производительность (т/км) в расчете на одни сутки? Считать, что каждая машина будет использоваться в течение всех трех смен, а водители будут работать по одной смене в сутки.

Таблица 12.2

Марка автомашины	Стоимость машины, тыс. ден. ед.	Количество водителей, обслуживающих машину за смену	Число рабочих смен в сутки	Производительность машины за смену, т/ км
А	10	1	3	2100
Б	20	2	3	3600
В	23	2	3	3780

Найти оптимальное сочетание посевов трех культур: пшеницы, гречихи и картофеля. Эффективность возделывания названных культур (в расчете на 1 га) характеризуется показателями, значения которых приведены в табл. 12.3. Производственные ресурсы: 6000 га пашни, 5000 чел. - дней труда механизаторов, 9000 чел. - дней ручного труда. Критерий оптимальности – максимум прибыли.

Таблица 12.3

Показатель	Пшеница	Гречиха	Картофель
Урожайность, ц	20	10	100
Затраты труда механизаторов, чел.-дней	0,5	1	5
Затраты ручного труда, чел.-дней	0,5	0,5	20
Прибыль от реализации 1 ц продукции, ден. ед.	4	10	3

Контрольные вопросы

1. Как построить первоначальный опорный план задачи линейного программирования?
2. Перечислите условия оптимальности опорного плана.
3. Как определяется вектор для включения в базис, если первоначальный план неоптимальный?
4. Когда линейная функция не ограничена на многограннике решений?
5. Как определить вектор , подлежащий исключению из базиса? Какой элемент называется разрешающим?
6. Какой метод решения систем линейных уравнений лежит в основе симплексного метода?

Практическое задание 3. Решение транспортных задач линейного программирования

Цель занятия: Формирование навыков решения ТЗ методом потенциалов.

Методические указания к выполнению заданий практического занятия

Транспортная задача по критерию стоимости в общем виде формулируется следующим образом. В m пунктах отправления $A_1, A_2, \ldots, A_m$, которые в дальнейшем будем называть поставщиками, сосредоточено определенное количество единиц некоторого однородного продукта, которое обозначим a_i ($i = 1, 2, \ldots, m$). Данный продукт потребляется в n пунктах $B_1, B_2, \ldots, B_n$, которые будем называть потребителями; объем потребления обозначим b_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Известны расходы на перевозку единицы продукта из пункта Ai в пункт Bj, которые равны c_{ij} и приведены в матрице транспортных расходов $C = (cij)$. Требуется составить такой план прикрепления потребителей к поставщикам, т.е. план перевозок, при котором весь продукт вывозится из пунктов Ai, в пункты Bj в соответствии с потребностью и общая величина транспортных издержек будет минимальной.

Обозначим количество продукта, перевозимого из пункта *Aj* в пункт *Bj*, через x_{ij}. Совокупность всех переменных x_{ij} обозначим, тогда модель задачи будет иметь вид

$$min\, f(\overline{X}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} ,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = \overline{1,n};$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = \overline{1,m};$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j ; x_j \geq 0 .$$

Такая транспортная задача называется закрытой. Наиболее широко применяемым методом решения данной задачи является метод потенциалов, при котором каждому *i*-му поставщику устанавливается потенциал *ui*,(который можно интерпретировать как цену продукта в пункте поставщика), а каждому *j-му* потребителю устанавливается потенциал *vj* (который можно принять условно за цену продукта в пункте потребителя). В простейшем случае цена продукта в пункте потребителя равна его цене в пункте поставщика плюс транспортные расходы, т.е.

$$vj=ui+cij. \qquad (1)$$

Следует отметить, что ранг системы линейных уравнений равен $m+n-1$; таким образом из общего числа *mn* неизвестных базисных неизвестных будет $m+n-1$. Вследствие этого при любом допустимом базисном распределении в матрице перевозок (таблице поставок), представленной в общем виде в таблице, будет занято ровно $m+n-1$ клеток, которые будем называть базисными в отличие от остальных свободных клеток; занятые клетки будем отмечать диагональной чертой.

Алгоритм метода потенциалов для закрытой транспортной задачи.

Этап 1. Составление начального распределения (начального плана перевозок); для реализации этого этапа имеется в свою очередь ряд методов, например, методы северо-западного угла и наименьших стоимостей. В каждом из этих методов при заполнении некоторой клетки, кроме последней, вычеркивается или только строка матрицы перевозок, или только столбец; лишь при заполнении последней клетки вычеркиваются и строка, и столбец. Такой подход будет гарантировать, что базисных клеток будет ровно $m+n-1$.

Этап 2. Построение системы потенциалов на основе равенства (1) и проверка начального плана на оптимальность. Для этого введем показатели *ui* для каждого поставщика и показатели *vj* для каждого потребителя. Потенциалы подбираются таким образом, чтобы для заполненной клетки (*i;j*) выполнялось равенство (1). Совокупность уравнений вида (1), составленных для всех заполненных клеток (всех базисных неизвестных), образует систему $m+n-1$ линейных уравнений с $m+n$ неизвестными *ui* и *vj*. Эта система всегда совместна, причем значение одного из неизвестных можно задавать произвольно (например, $u1= 0$), тогда значения остальных неизвестных находятся из системы однозначно. Чтобы оценить оптимальность распределения, для всех клеток (*i;j*) матрицы перевозок определяются их оценки, которые обозначим через *dij*, по формуле

$$dij=(ui+cij)- vj. \qquad (2)$$

Оценки заполненных клеток равны нулю. Таким образом, условием оптимальности распределения служит условие неотрицательности оценок свободных клеток матрицы перевозок. В случае неоптимальности плана переходят к третьему этапу.

Этап 3. Корректировка плана прикрепления потребителей к поставщикам (реализация так называемых циклов перераспределения), после чего переходят опять ко второму этапу. Совокупность процедур третьего и второго этапов образует одну итерацию; итерации повторяются, пока план перевозок не окажется оптимальным по критерию (2).

Задание. Методом потенциалов найти оптимальные планы следующих транспортных задач (в верхней строке таблиц указаны потребности в грузе пунктов *Bj* ,в левом столбце – запасы груза в пунктах *Ai* , в остальных клетках тарифы *cij*):

1.

B_j / A_i	30	60	45	25
30	4	7	1	3
70	5	9	6	2
60	8	2	9	11

.2.

B_j / A_i	110	120	80	50	70
150	7	2	11	5	9
170	8	4	3	6	1
110	3	5	10	7	8

3.

B_j / A_i	8	5	15	18	12	14	6	10
50	2	1	3	6	5	7	9	8
38	10	11	5	7	4	2	3	1

4.

B_j / A_i	75	125	64	65	60
85	7	1	4	5	2
112	13	4	7	6	3
72	3	8	0	18	12
130	9	5	3	4	7

Контрольные вопросы

1. Что называется транспортной задачей?
2. Что называется тарифом перевозки в транспортной задаче?
3. Какая транспортная задача называется закрытой?
4. Какая транспортная задача называется открытой?
5. В чем состоит процедура закрытия открытой транспортной задачи?
6. Что называется потенциалом в транспортной задаче?
7. В чем состоит схема решения транспортной задачи с помощью метода потенциалов?
8. Как строится первоначальный план перевозок с помощью метода северо-западного угла?
9. Что называется циклом в транспортной таблице?
10. Какие клетки транспортной таблицы называются базисными?
11. Какой план перевозок называется вырожденным?

Практическое занятие 4. Решение дискретных задач линейного программирования общего вида.

Цель занятия: Формирование навыков решения задач целочисленного программирования.

Методические указания к выполнению заданий практического занятия

В ряде практических задач необходимо искать целочисленное решение ввиду дискретности значений переменных. К их числу относятся: задачи оптимизации раскроя, задачи по производству неделимой продукции, оптимальное проектирование оборудования, оптимизация системы сервиса и технического обслуживания и другие.

Под задачей целочисленного (дискретного) программирования понимают задачу, в которой все или некоторые переменные принимают целые значения. Если целевая функция и ограничения представляют собой линейные зависимости, то такую задачу называют целочисленной задачей линейного программирования. Таким образом, общая постановка задачи целочисленного программирования отличается от общей постановки задачи линейного программирования наличием дополнительного ограничения. Этим ограничением является требование целочисленности, в соответствии с которым значения всех переменных или части переменных модели в оптимальном решении являются целыми неотрицательными числами. Если требование целочисленности распространяется на все переменные, то задача называется полностью целочисленной. Если требование целочисленности относится лишь к части переменных, то задачу называют частично целочисленной.

Можно выделить три основные группы методов

Методы отсечения. Применительно к задачам целочисленного линейного программирования их общая идея заключается в построении ЗЛП так, чтобы исходная задача целочисленного программирования сводилась к ее решению.

Для отыскания этой ЗЛП реализуется многоэтапный процесс. Вначале задача решается без условия целочисленности. Если полученное в результате решение будет целочисленным, то исходная задача решена. Если нет, то к ограничениям задачи, решенной на предыдущем этапе, добавляется еще одно линейное ограничение, обладающее следующими двумя свойствами:

1) полученное нецелочисленное решение ему не удовлетворяет;

2) любое допустимое целочисленное решение ему удовлетворяет.

Такое дополнительное ограничение называется *правильным отсечением.* Затем решается полученная ЗЛП с дополнительным ограничением. В случае, если решение и этой задачи не будет целочисленным, добавляется еще одно линейное ограничение, являющееся правильным отсечением. Решается новая задача линейного программирования и т.д., до получения целочисленного решения.

Комбинаторные методы. Поскольку число допустимых решений задачи целочисленного программирования конечно, то в принципе возможен их полный перебор. Все комбинаторные методы используют ту или иную идею сокращения перебора допустимых решений с целью отыскания оптимального решения задачи

Приближенные методы. Методы отсечения и комбинаторные методы позволяют получить точное решение задачи. Их реализация на ЭВМ оказывается достаточно сложной. Кроме того, точные методы разработаны в основном для решения целочисленных задач линейного программирования. При построении приближенных методов учитываются особенности конкретной задачи. Эти методы используют как детерминированные алгоритмы, так и алгоритмы случайного поиска

Исторически первая реализация метода отсечений была предложена американским математиком Р. Гомори в 1958 году, позднее была доказана конечность алгоритма и рассмотрены некоторые его обощения.

Первый алгоритм Гомори заключается в следующем.

Итерация 0. Симплекс-методом решается задача линейного программирования, то есть задача без учета условия целочисленности. Если она неразрешима, задача целочисленного программирования также не имеет решений. Если оптимальный план задачи целочисленный, то он является оптимальным и для исходной задачи. В противном случае, перейти к итерации 1.

Итерация k, k=1,2,. Пусть x^0 – нецелочисленный оптимальный опорный текущей задачи линейного программирования, основные переменные и целевая функция выражены через небазисные переменные.

Выбирается наименьшая по номеру нецелочисленная компонента вектора x^0 или, если гарантирована целочисленность целевой функции, вектора $(\langle c, x^0 \rangle, x^0)$, и строится правильное отсечение.

Задача линейного программирования с добавленным ограничением решается двойственным симплекс-методом,. Если эта задача не имеет решений, то и исходная задача неразрешима. Если оптимальный план расширенной задачи целочисленный, то он является оптимальным планом исходной задачи. В противном случае перейти к итерации *k+1*.

Если в процессе решения появится строка симплекс-таблицы, в которой правый элемент дробный, а остальные элементы целые, то соответствующее уравнение не имеет решения в целых числах, следовательно, не имеет решения и исходная задача.

Так как правильные отсечения нужны только для удаления текущего нецелочисленного оптимального плана и перехода к следующей итерации алгоритма, если дополнительная переменная $x_{n+k} = \sum_{j \in w} \frac{f_j}{D} x_j - \frac{f_0}{D}$ снова на каком-то этапе должна быть введена в базис, то после преобразования симплексной таблицы эту переменную можно больше не учитывать. Такой подход позволяет предотвратить чрезмерное увеличение размера вспомогательных задач в случае, если процесс решения потребует большого количества итераций.

Задание. Найти целочисленное решение следующих задач ЛП (все $xi \geq 0$ и целые).

$$y = x_1 + x_2 \to \sup \quad \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ x_2 \leq 2 \end{cases}$$

$$y = x_1 \to \sup \quad \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 12 \\ 3x_1 - 8x_2 + x_4 = 24 \end{cases}$$

$$y = 3x_1 + x_2 \to \inf \quad \begin{cases} -4x_1 + x_2 \leq 29 \\ 3x_1 - x_2 \leq 15 \\ 5x_1 + 2x_2 \geq 38 \end{cases}$$

$$y = 5x_1 + 7x_2 \to \inf \quad \begin{cases} -3x_1 + 14x_2 \leq 78 \\ 5x_1 - 6x_2 \leq 26 \\ x_1 + 4x_2 \geq 25 \end{cases}$$

$$y = 3x_1 + 2x_2 \to \sup \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 13 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 6 \\ -3x_1 + x_2 + x_5 = 9 \end{cases}$$

$$y = x_1 + 4x_2 \to \sup \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 19/3 \\ x_1 + 3x_2 \leq 4 \end{cases}$$

$$y = x_1 + 4x_2 \to \sup \quad \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 6 \end{cases}$$

$$y = 3x_1 + 4x_2 \to \sup \quad \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 + 4x_2 + x_4 = 10 \end{cases}$$

$$y = 3x_1 + 3x_2 \to \sup \quad \begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 36 \\ x_2 \leq 13 \end{cases}$$

$$y = 3x_1 + 4x_2 \to \sup \quad \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_1 + 4x_2 \leq 10 \end{cases}$$

Контрольные вопросы

1. В чем состоит особенность целочисленной задачи ЛП?
2. В чем состоит сущность метода отсекающих плоскостей (дробного алгоритма Гомори) для решения целочисленной ЗЛП?
3. Какие методы решения задач целочисленного программирования вы знаете?
4. В чем состоит сущность метода Ритца для решения задач ВИ?
5. В чем состоит сущность метода Ритца для решения задач ВИ?

Практическое занятие 5. Решение задач сетевого планирования и управления.

Цель занятия: Формирование навыков решения задач сетевого планирования и управления.

Методические указания к выполнению заданий практического занятия

Модели сетевого планирования и управления (СПУ) используются для планирования работ по осуществлению больших и сложных проектов. Сетевая модель – это план выполнения некоторого комплекса взаимосвязанных работ (операций), заданного в специфической форме сети, графическое изображение которой называется сетевым графиком (графом). Основные элементы сетевой модели. Работа (обозначается стрелкой) – это любые действия, сопровождающиеся затратами ресурсов или времени и приводящие к определенным результатам. Событие (обозначается кружком) – это факт окончания всех входящих в него работ.

Правила построения сетевых графиков.

1. Исходное / завершающее событие лишь одно.
2. Любые два события должны быть соединены только одной работой-стрелкой.
3. Если два события связаны более чем одной работой, вводится фиктивная работа / событие.
4. Не должно быть замкнутых циклов, пересечений и ломаных линий.

После построения необходимо провести упорядочение сетевого графика. Упорядочение – это расположение, при котором для любой работы предшествующее событие расположено левее и имеет номер, меньший по сравнению с завершающим работу событием.

Затем для сетевого графика рассчитываются параметры событий и работ, определяются резервы времени и критический путь, проводится анализ сетевого графика и его оптимизация. После чего он может быть начерчен заново.

Основные параметры сетевых графиков.

Обозначим $t(i, j)$ – продолжительность работы с начальным событием i и конечным событием j.

Ранний срок $t_p(j)$ свершения события j – это самый ранний момент, к которому завершаются все работы, предшествующие этому событию.

$$t_p(j) = \max\{t_p(i) + t(i, j)\}$$

Поздний срок $t_n(i)$ свершения события i – это такой предельный момент, после которого остается ровно столько времени, сколько необходимо для выполнения всех работ, следующих за этим событием.

$$t_n(i) = \min\{t_n(j) - t(i,j)\}$$

Резерв R(i) события *i* показывает, на какой предельно допустимый срок может задержаться свершение события *i* без нарушения срока наступления завершающего события.

$$R(i) = t_n(i) - t_p(i)$$

Полный резерв времени $R_n(i, j)$ работы (i, j) – это максимальное время, на которое можно задержать начало работы или увеличить ее продолжительность, при условии, что весь комплекс работ будет завершен в критический срок.

$$R_n(i,j) = t_n(j) - t_p(i) - t(i,j)$$

Самый продолжительный путь сетевого графика от исходного события к завершающему называется критическим. Критических путей может быть несколько. Все события и работы критического пути также называются критическими. Критические события не имеют резервов. Продолжительность критического пути определяет срок выполнения проекта.

Пример. Проект состоит из восьми работ. Продолжительности работ (в днях) следующие: *t(1,2)=5; t(1,3)=3; t(2,4)=6; t(2,5)=7; t(3,4)=7; t(4,5)=3; t(4,6)=10; t(5,6)=8*. Необходимо построить сетевой график, рассчитать параметры событий и работ, найти критический путь и построить диаграмму Ганта.

Решение. Сначала построим сетевой график. Затем рассчитаем его параметры. Для вычисления $t_p(j)$ перемещаемся от исходного события 1 к завершающему 6.

$t_p(1)=0$.
$t_p(2)=t_p(1)+t(1,2)=0+5=5$.
$t_p(3)=t_p(1)+t(1,3)=0+3=3$.
$t_p(4)=max\{t_p(2)+t(2,4), t_p(3)+t(3,4)\}=max\{5+6, 3+7\}=11$.
$t_p(5)=max\{t_p(2)+t(2,5), t_p(4)+t(4,5)\}=max\{5+7, 11+3\}=14$.
$t_p(6)=max\{t_p(4)+t(4,6), t_p(5)+t(5,6)\}=max\{11+10, 14+8\}=22$.

При вычислении $t_n(i)$ перемещаемся от завершающего события 6 к исходному 1.

$t_n(6)= t_p(6)=22$.
$t_n(5)= t_n(6)–t(5,6)=22–8=14$.
$t_n(4)=min\{t_n(5)–t(4,5), t_n(6)–t(4,6)\}=min\{14–3, 22–10\}=11$.
$t_n(3)= t_n(4)–t(3,4)=11–7=4$.
$t_n(2)=min\{t_n(5)–t(2,5), t_n(4)–t(2,4)\}=min\{14–7, 11–6\}=5$.
$t_n(1)=min\{t_n(2)–t(1,2), t_n(3)–t(1,3)\}=min\{5–5, 4–3\}=0$.

Вычислим резервы времени событий и работ.

R(1)=0, R(2)=5–5=0, R(3)=4–3=1, R(4)=11–11=0,
R(5)=14–14=0, R(6)=22–22=0.
R(1,2)=5–0–5=0, R(1,3)=4–0–3=1, R(2,4)=11–5–6=0,
R(2,5)=14–5–7=2, R(3,4)=11–3–7=1, R(4,5)=14–11–3=0,
R(4,6)=22–11–10=1, R(5,6)=22–14–8=0.

У критических событий резервы равны нулю. Критический путь 1–2–4–5–6. Таким образом, время завершения проекта составит 22 дня.

Сетевой график для данной задачи представлен на рисунке 1.

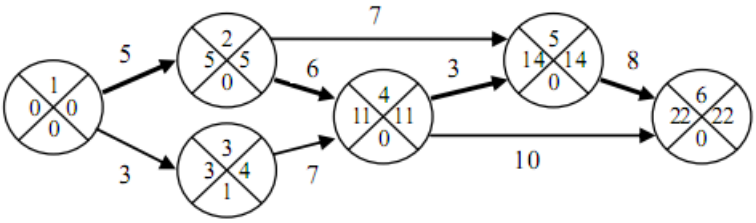


Рисунок 1. Сетевой график.

Для того чтобы наглядно изобразить имеющиеся резервы времени, необходимо построить график (диаграмму) Ганта. На нем каждая работа (*i, j*) изображается горизонтальным отрезком, длина которого в соответствующем масштабе равна времени ее выполнения. График Ганта для рассматриваемого примера приведен на рисунке 2. Жирной линией показан критический путь.

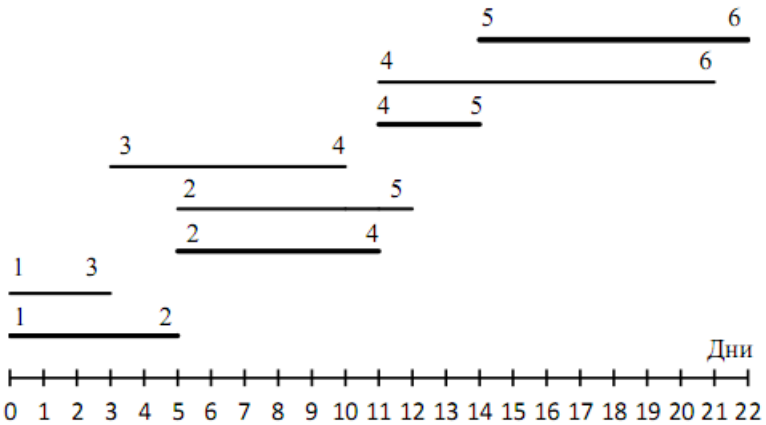


Рисунок 2. Диаграмма Ганта

Задание. Построить сетевой график. Рассчитать параметры событий и работ. Найти критический путь. Построить диаграмму Ганта.

Задача 1. Известны продолжительности работ: *t(1,2)=5; t(1,3)=4; t(2,4)=6; t(2,5)=9; t(3,7)=4; t(4,6)=2; t(5,7)=8; t(6,7)=8.*

Задача 2. Известны продолжительности работ: *t(1,2)=5; t(1,3)=4; t(2,4)=6; t(3,7)=4; t(4,5)=3; t(4,6)=2; t(5,7)=5; t(6,7)=8.*

Задача 3. Известны продолжительности работ: *t(1,2)=5; t(1,3)=4; t(2,4)=6; t(3,5)=10; t(3,7)=8; t(4,6)=2; t(5,7)=2; t(6,7)=4.*

Задача 4. Известны продолжительности работ: *t(1,2)=5; t(1,3)=8; t(2,4)=6; t(2,5)=9; t(3,7)=4; t(4,6)=2; t(5,6)=2; t(6,7)=8.*

Задача 5. Известны продолжительности работ: *t(1,2)=5; t(1,3)=10; t(2,4)=6; t(2,5)=9; t(3,7)=10; t(4,6)=2; t(5,7)=4; t(6,7)=5.*

Задача 5. Известны продолжительности работ: *t(1,2)=2; t(1,3)=4; t(1,4)=5; t(2,5)=3; t(3,7)=10; t(4,6)=1; t(5,7)=4; t(6,7)=2.*

Задача 7. Известны продолжительности работ: *t(1,2)=2; t(1,3)=4; t(1,4)=5; t(2,5)=3; t(3,7)=10; t(4,6)=5; t(5,7)=4; t(6,7)=5.*

Задача 8. Известны продолжительности работ: *t(1,2)=2; t(1,3)=4; t(1,4)=5; t(2,5)=3; t(3,6)=5; t(4,6)=5; t(5,7)=4; t(6,7)=3.*

Задача 9. Известны продолжительности работ: *t(1,2)=2; t(1,3)=4; t(1,4)=5; t(2,3)=8; t(3,5)=7; t(4,6)=1; t(5,7)=4; t(6,7)=2.*

Контрольные вопросы

1. Суть метода сетевого планирования и управления проектами.
2. Основные понятия сетевого метода: работа, событие, сетевой график.
3. Диаграммы Ганта последовательности работ.
4. Виды сетевых графиков: логические («работы – связи») и структурные («события – работы»). Их преимущества и недостатки.
5. Основные требования к построению структурных сетевых графиков.
6. Способы проверки правильности построения сетевого графика.
7. Определение рангов событий. Правильная нумерация событий.
8. Расчет временных характеристик событий: ранние и поздние сроки наступления, резерв времени.
9. Критический путь и его отыскание. Особенности критического пути.

10. Резервы времени работ, их смысл и способы отыскания.
11. Ранние и поздние сроки начала и окончания работ.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К ЛАБОРАТОРНЫМ ЗАНЯТИЯМ

Лабораторная 1. Задачи линейного программирования в MICROSOFT EXCEL

Использование надстройки Excel для решения задач линейного программирования

Поиск решения – это надстройка EXCEL, которая позволяет решать оптимизационные задачи. Если команда Поиск решения или группа Анализ отсутствует, необходимо загрузить надстройку Поиск решения. 5 На вкладке Файл выберите команду Параметры, а затем – категорию Надстройки (рисунок 1.).

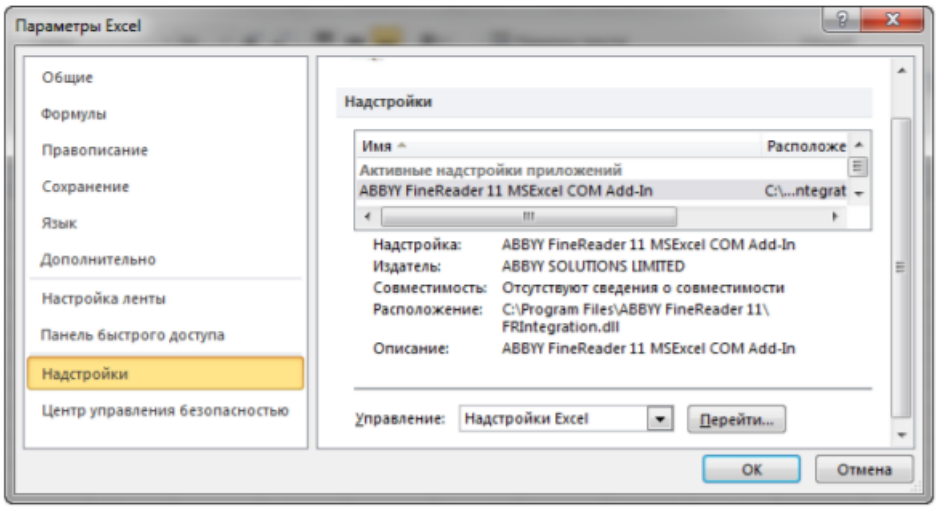


Рисунок 1.

В поле Управление выберите значение Надстройки Excel и нажмите кнопку Перейти. В поле Доступные надстройки установите флажок рядом с пунктом Поиск решения (рисунок 2) и нажмите кнопку ОК.

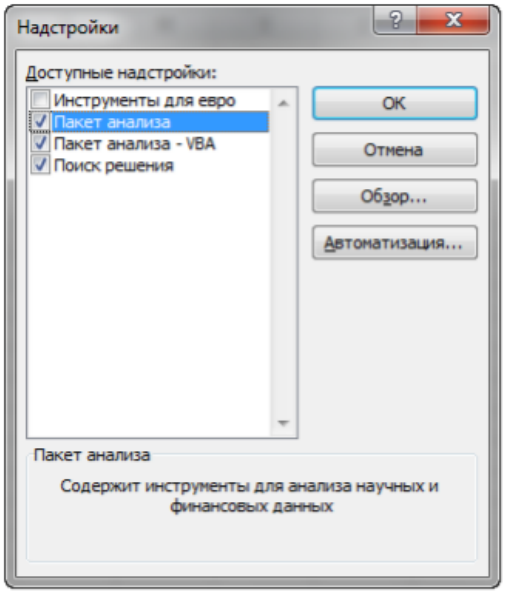


Рисунок 2.

Схема решения задач линейного программирования в MS Excel следующая:

1. Составить математическую модель.
2. Ввести на рабочий лист Excel условия задачи:

а) создать форму на рабочем листе для ввода условий задачи;

б) ввести исходные данные, целевую функцию, ограничения и граничные условия.

3. Указать параметры в диалоговом окне Поиск решения.

4. Проанализировать полученные результаты.

Рассмотрим решение задачи оптимизации на примере.

Пример. Задача определения оптимального ассортимента продукции Предприятие изготавливает два вида продукции – $П_1$ и $П_2$, которая поступает в оптовую продажу. Для производства продукции используются два вида сырья – А и В. Максимально возможные запасы сырья в сутки составляют 9 и 13 ед. соответственно. Расход сырья на единицу продукции вида $П_1$ и $П_2$ – таблице.

Сырье	Расход сырья на 1 ед. продукции		Запас сырья, ед.
	$П_1$	$П_2$	
А	2	3	9
В	3	2	13

Опыт работы показал, что суточный спрос на продукцию $П_1$ никогда не превышает спроса на продукцию $П_2$ более чем на 1 ед. Кроме того, известно, что спрос на продукцию $П_2$ никогда не превышает 2 ед. в сутки. Оптовые цены единицы продукции равны: 3 д. е. – для $П_1$ и 4 д. е. – для $П_2$. Какое количество продукции каждого вида должно производить предприятие, чтобы доход от реализации продукции был максимальным?

Решение. Построим математическую модель для решения поставленной задачи. Предположим, что предприятие изготовит x_1 единиц продукции $П_1$ и x_2 единиц продукции $П_2$. Поскольку производство продукции ограничено имеющимися в распоряжении предприятия сырьем каждого вида и спросом на данную продукцию, а также учитывая, что количество изготовляемых изделий не может быть отрицательным, должны выполняться следующие неравенства:

$$2x_1 + 3x_2 \le 9,$$
$$3x_1 + 2x_2 \le 13,$$
$$x_1 - x_2 \le 1,$$
$$x_2 \le 2,$$
$$x_1 \ge 0,$$
$$x_2 \ge 0.$$

Доход от реализации x_1 единиц продукции $П_1$ и x_2 единиц продукции $П_2$ составит

$$F = 3x_1 + 4x_2.$$

Среди всех неотрицательных решений данной системы линейных неравенств требуется найти такое, при котором функция F принимает максимальное значения F_{max}. Рассматриваемая задача относится к разряду типовых задач оптимизации производственной программы предприятия. В качестве критериев оптимальности в этих задачах могут быть также использованы: прибыль, себестоимость, номенклатура производимой продукции и затраты станочного времени. Создадим на рабочем листе форму для ввода исходных данных (рисунок 3). Заливкой выделены ячейки для ввода функций.

	A	B	C	D	E	F	G
1		Переменные					
2		x1	x2				
3	Значения искомых переменных						
4					Целевая функция		
5	Коэффициенты в уравнении целевой функции	3	4				
6							
7		Ограничения		Левая			
8	Сырье	Расход сырья на 1 ед. продукции		часть		Запас	
9		П1	П2	неравенст	Знак	сырья	
10	А	2	3		<=	9	
11	В	3	2		<=	13	

Рисунок 3.

В ячейку E5 введем формулу для целевой функции (рисунок 4). Используя обозначения соответствующих ячеек в Excel, формулу для расчета целевой функции можно записать как сумму произведений каждой из ячеек, отведенной для значений переменных задачи (B3, C3), на соответствующие ячейки, отведенные для коэффициентов целевой функции (B5, C5).

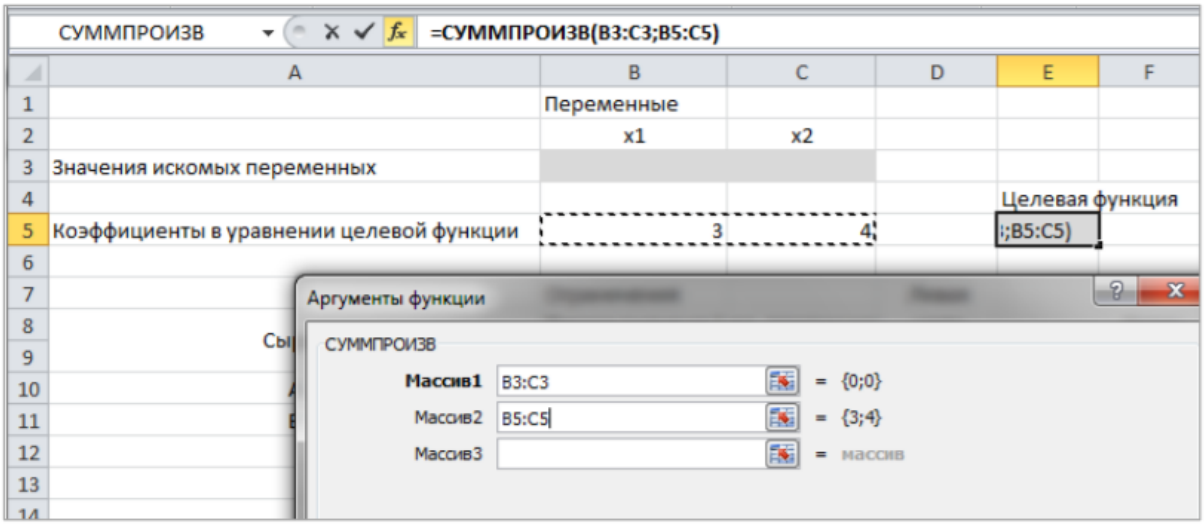


Рисунок 4.

Аналогично в ячейки D10:D11 введены формулы для расчета левой части ограничений (рисунок 5).

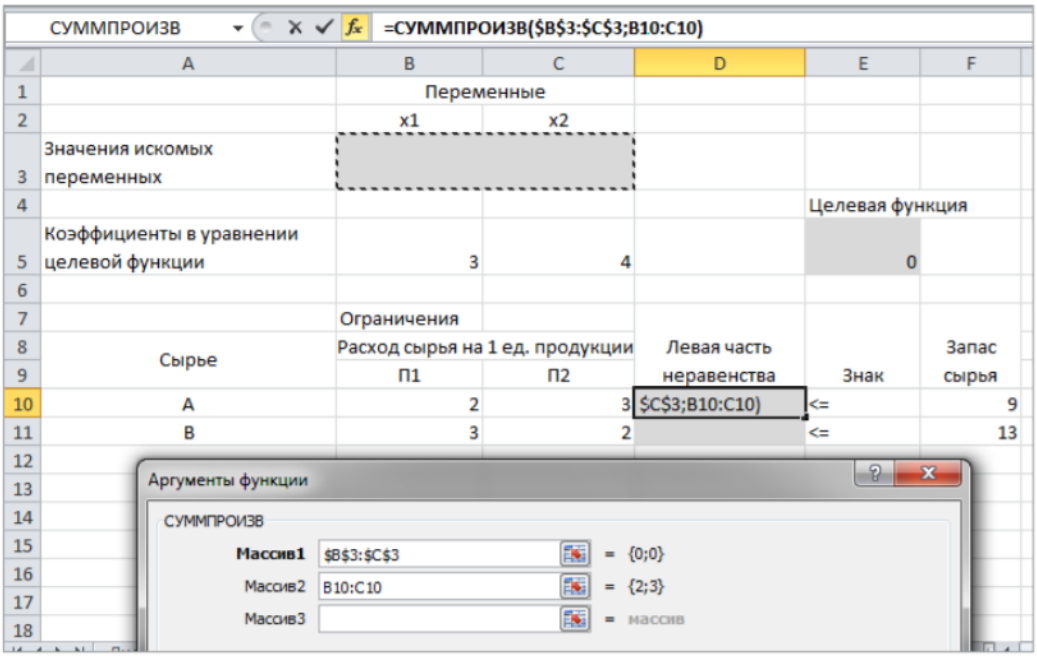


Рисунок 5.

На вкладке Данные в группе Анализ выберем команду Поиск решения. В диалоговом окне Параметры поиска решения установим следующее (рисунок 6):

в поле Оптимизировать целевую функцию выбираем ячейку со значением целевой функции – E5;

выбираем, максимизировать или минимизировать целевую функцию;

в поле Изменяя ячейки переменных выбираем ячейки со значениями искомых переменных B3:C3 (пока в них нули или пусто);

в области В соответствии с ограничениями с помощью кнопки Добавить• размещаем все ограничения нашей задачи (рисунок 7);

в поле Выберите метод решения указываем Поиск решения линейных• задач симплекс-методом; нажимаем кнопку Найти решение.•

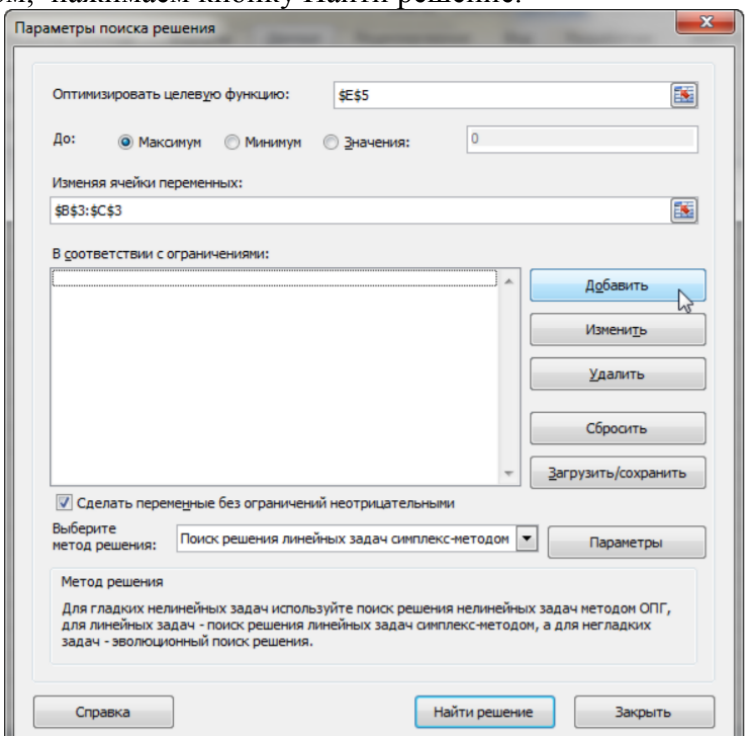


Рисунок 6

Добавляем ограничения для нашей задачи. Для неравенств

$$2x_1 + 3x_2 \le 9,$$

$$3x_1 + 2x_2 \le 13$$

указываем в поле Ссылка на ячейки диапазон D10:D11, выбираем в раскрывающемся списке знак неравенства, в поле Ограничение выделяем диапазон F10:F11 и нажимаем кнопку Добавить (рисунок 7), чтобы принять ограничение и добавить следующее ограничение. Для принятия ограничения и возврата к диалоговому окну Поиск решения нажмите кнопку Ok

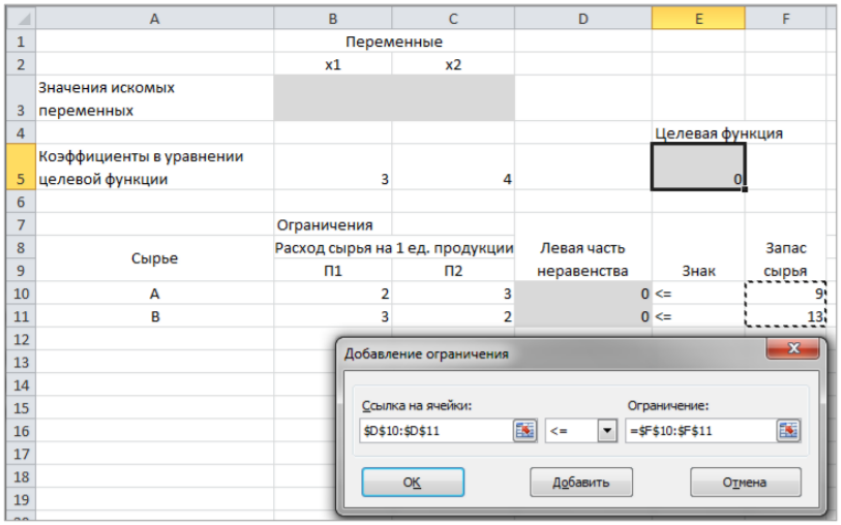
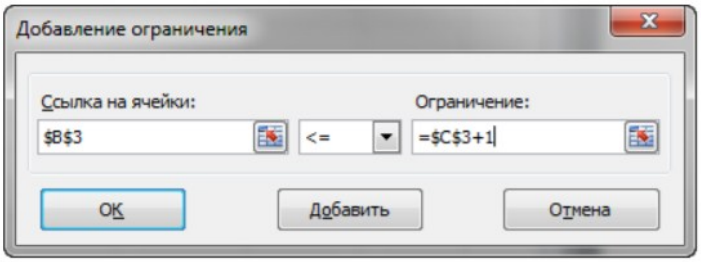


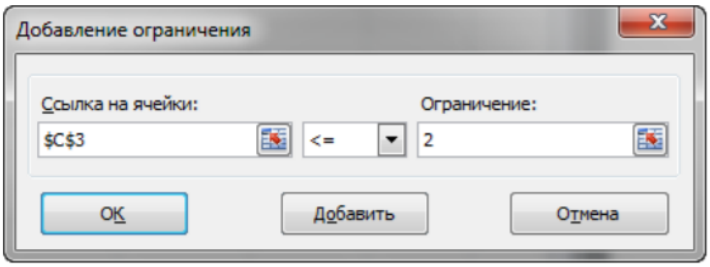
Рисунок 7.

Покажем окна для добавления ограничений (рисунок 8) :

$x_1 - x_2 \le 1$ преобразуем в $x_1 \le x_2 + 1$



$x_2 \leq 2$



$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

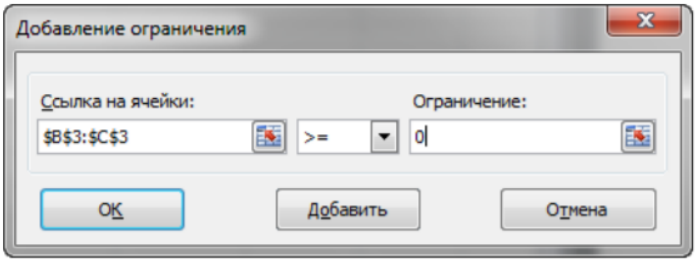


Рисунок 8

После выбора кнопки Найти решение появляется окно Результаты поиска решения (рисунок 9).

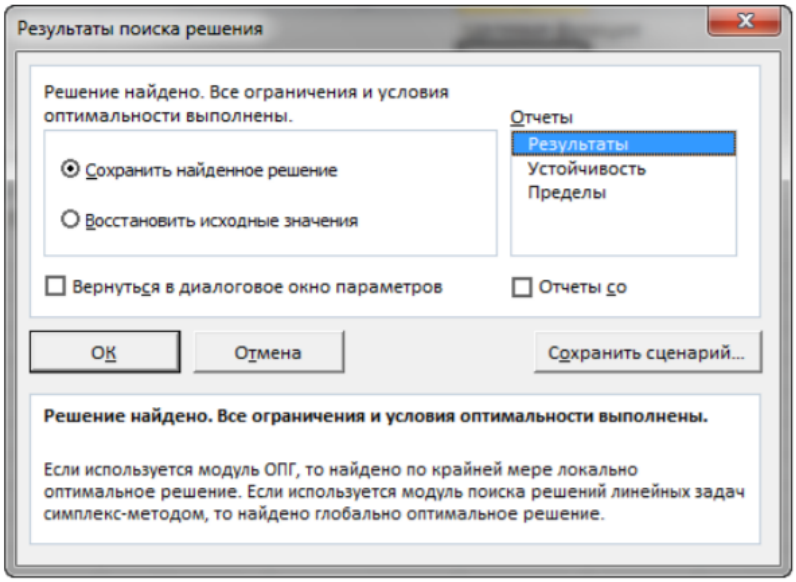


Рисунок 9.

Для сохранения полученного решения необходимо использовать переключатель Сохранить найденное решение в открывшемся окне диалога Результаты поиска решения. После чего рабочий лист примет вид, представленный на рисунок 10.

	A	B	C	D	E	F
1		Переменные				
2		x1	x2			
3	Значения искомых переменных	2,4	1,4			
4					Целевая функция	
5	Коэффициенты в уравнении целевой функции	3	4		12,8	
6						
7		Ограничения				
8	Сырье	Расход сырья на 1 ед. продукции		Левая часть неравенства	Знак	Запас сырья
9		П1	П2			
10	А	2	3	9	<=	9
11	В	3	2	10	<=	13

Рисунок 10.

Сохранить модель поиска решения можно следующим образом:

1) при сохранении книги Excel после поиска решения все значения, введенные в окнах диалога Поиск решения, сохраняются вместе с данными рабочего листа. С каждым рабочим листом в рабочей книге можно сохранить один набор значений параметров Поиска решения;

2) если в пределах одного рабочего листа Excel необходимо рассмотреть несколько моделей оптимизации (например, найти максимум и минимум одной функции или максимальные значения нескольких функций), то удобнее сохранить эти модели, используя кнопку Загрузить/Сохранить окна Параметры поиска решения. Диапазон для сохраняемой модели содержит информацию о целевой ячейке, об изменяемых ячейках, о каждом из ограничений и все значения диалога Параметры. Выбор модели для решения конкретной оптимизационной задачи осуществляется с помощью кнопки Загрузить/сохранить диалогового окна Параметры поиска решения;

3) сохранить модель можно в виде именованных сценариев, для этого необходимо нажать на кнопку Сохранить сценарий диалогового окна Результаты поиска решений (см. рисунок 9). Кроме вставки оптимальных значений в изменяемые ячейки, Поиск решения позволяет представлять результаты в виде трех отчетов (Результаты, 13 Устойчивость и Пределы). Для генерации одного или нескольких отчетов необходимо выделить их названия в окне диалога Результаты поиска решения (рисунок 9).

Отчет по устойчивости (рисунок 11) содержит информацию о том, насколько целевая ячейка чувствительна к изменениям ограничений и переменных. Этот отчет имеет два раздела: один – для изменяемых ячеек, а второй – для ограничений. Правый столбец в каждом разделе содержит информацию о чувствительности. Каждая изменяемая ячейка и ограничения приводятся в отдельной строке. При использовании целочисленных ограничений Excel выводит сообщение Отчеты об устойчивости и Пределы не применимы для задач с целочисленными ограничениями.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Microsoft Excel 14.0 Отчет об устойчивости							
2	Лист: [Книга1]Лист1 (3)							
3	Отчет создан: 08.03.2015 21:36:50							
4								
5								
6	Ячейки переменных							
7				Окончательное	Приведенн.	Целевая функция	Допустимое	Допустимое
8		Ячейка	Имя	Значение	Стоимость	Коэффициент	Увеличение	Уменьшение
9		$B$3	Значения искомых переменных x1	2,4	0	3	1E+30	0,333333333
10		$C$3	Значения искомых переменных x2	1,4	0	4	0,5	7
11								
12	Ограничения							
13				Окончательное	Тень	Ограничение	Допустимое	Допустимое
14		Ячейка	Имя	Значение	Цена	Правая сторона	Увеличение	Уменьшение
15		$B$3	Значения искомых переменных x1	2,4	0,2	0	3	1,5
16		$D$10	А Левая часть неравенства	9	1,4	9	3	7
17		$D$11	В Левая часть неравенства	10	0	13	1E+30	3
18								

Рисунок 11.

Отчет по результатам (рисунок 12) содержит три таблицы: в первой приведены сведения о целевой функции до начала вычисления, во второй – значения искомых переменных, полученные в результате решения задачи, в третьей – результаты оптимального решения для ограничений. Этот отчет также содержит информацию о таких параметрах каждого ограничения, как статус и разница. Статус может принимать три состояния: связанное, несвязанное или невыполненное. Значение разницы – это разность между значением, выводимым в ячейке ограничения при получении решения, и числом, заданным в правой части формулы ограничения. Связанное ограничение – это ограничение, для которого значение разницы равно нулю. Несвязанное ограничение – это ограничение, которое было выполнено с ненулевым значением разницы.

Результат: Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены.
Модуль поиска решения
Модуль: Поиск решения линейных задач симплекс-методом
Время решения: 0,25 секунд.
Число итераций: 3 Число подзадач: 0
Параметры поиска решения
Максимальное время Без пределов, Число итераций Без пределов, Precision 0,000001, Использовать автоматическое масштабирование
Максимальное число подзадач Без пределов, Максимальное число целочисленных решений Без пределов, Целочисленное отклонение 1%, Считать неотрицательными

Ячейка целевой функции (Максимум)

Ячейка	Имя	Исходное значение	Окончательное значение
$E$5	Коэффициенты в уравнении целевой функции Целевая функция	0	12,8

Ячейки переменных

Ячейка	Имя	Исходное значение	Окончательное значение	Целочисленное
$B$3	Значения искомых переменных x1	0	2,4	Продолжить
$C$3	Значения искомых переменных x2	0	1,4	Продолжить

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение ячейки	Формула	Состояние	Допуск
$B$3	Значения искомых переменных x1	2,4	$B$3<=1+$C$3	Привязка	0
$D$10	A Левая часть неравенства	9	$D$10<=$F$10	Привязка	0
$D$11	B Левая часть неравенства	10	$D$11<=$F$11	Без привязки	3
$B$3	Значения искомых переменных x1	2,4	$B$3>=0	Без привязки	2,4
$C$3	Значения искомых переменных x2	1,4	$C$3>=0	Без привязки	1,4
$C$3	Значения искомых переменных x2	1,4	$C$3<=2	Без привязки	0,6

Рисунок 12.

Отчет по пределам (рисунок 13) содержит информацию о том, в каких пределах значения изменяемых ячеек могут быть увеличены или уменьшены без нарушения ограничений задачи. Для каждой изменяемой ячейки этот отчет содержит оптимальное значение, а также наименьшие значения, которые ячейка может принимать без нарушения ограничений.

Microsoft Excel 14.0 Отчет о пределах
Лист: [Книга1]Лист1 (3)
Отчет создан: 08.03.2015 21:36:50

Целевая функция		
Ячейка	Имя	Значение
$E$5	Коэффициент	12,8

Переменная			Нижний	Целевая функция	Верхний	Целевая функция
Ячейка	Имя	Значение	Предел	Результат	Предел	Результат
$B$3	Значения иск	2,4	0	5,6	2,4	12,8
$C$3	Значения иск	1,4	1,4	12,8	1,4	12,8

Рисунок 13.

Полученное решение означает, что объем производства продукции вида $П_1$ должен быть равен 2,4 ед., а продукции $П_2$ – 1,4 ед. продукции. Доход, получаемый в этом случае, составит 12,8 д. е.

Допустим, что к условию задачи добавилось требование целочисленности значений всех переменных. В этом случае описанный выше процесс ввода условия задачи необходимо дополнить следующими шагами.

В окне Поиск решения нажмите кнопку Добавить и в появившемся окне Добавление ограничений введите ограничения следующим образом (рисунок 14):

в поле Ссылка на ячейки введите адреса ячеек переменных задачи B3:C3;

в поле ввода знака ограничения установите целое;

подтвердите ввод ограничения нажатием кнопки OK.

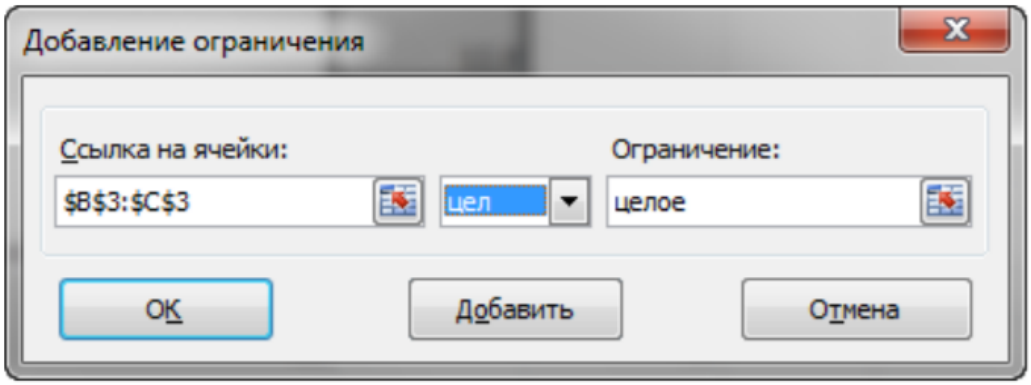


Рисунок 14:

Решение задачи при условии целочисленности ее переменных – рисунок 15.

	A	B	C	D	E	F
1		Переменные				
2		x1	x2			
3	Значения искомых переменных	1	2			
4					Целевая функция	
5	Коэффициенты в уравнении целевой функции	3	4		11	
6						
7		Ограничения				
8	Сырье	сырья на 1 ед. про,				
9		П1	П2	Левая часть неравенства	Знак	Запас сырья
10	A	2	3	8	<=	9
11	B	3	2	7	<=	13

Рисунок 15.

Задание: Построить математическую модель задачи. Представить ее в табличной форме на листе Excel. Найти решение задачи средствами надстройки Поиск решения. Вывести отчеты по результатам и устойчивости.

1. Для производства столов и шкафов мебельная фабрика использует необходимые ресурсы. Нормы затрат ресурсов на одно изделие данного вида, прибыль от реализации одного изделия и общее количество имеющихся ресурсов каждого вида

Ресурсы	Нормы затрат ресурсов на одно изделие		Общее количество ресурсов
	Стол	Шкаф	
Древесина, м^3:			
1-го вида	0,2	0,1	40
2-го вида	0,1	0,3	60
Трудоемкость, чел.ч	1,2	1,5	371,4
Прибыль от реализации одного изделия, р.	6	8	

Определить, сколько столов и шкафов следует изготавливать фабрике, чтобы прибыль от их реализации была максимальной.

2. Для производства двух видов изделий А и В используется токарное, фрезерное и шлифовальное оборудование. Нормы затрат времени для каждого из типов оборудования на одно изделие данного вида, общий фонд рабочего времени каждого из типов оборудования, а также прибыль от реализации одного изделия

Тип оборудования	Затраты времени, стан.-ч, на обработку одного изделия		Общий фонд полезного рабочего времени оборудования, ч
	А	В	
Фрезерное	10	8	168
Токарное	5	10	180
Шлифовальное	6	12	144
Прибыль от реализации одного изделия, р.	14	18	

Найти план выпуска изделий А и В, обеспечивающий максимальную прибыль от их реализации.

3. Для изготовления трех видов изделий А, В и С используется токарное, фрезерное, сварочное и шлифовальное оборудование. Затраты времени на обработку одного изделия для каждого из типов оборудования, общий фонд рабочего времени каждого из типов используемого оборудования, прибыль от реализации одного изделия данного вида

Тип оборудования	Затраты времени, стан.-ч, на обработку одного изделия вида			Общий фонд рабочего времени оборудования, ч
	А	В	С	
Фрезерное	2	4	5	120
Токарное	1	8	6	280
Сварочное	7	4	5	240
Шлифовальное	4	6	7	360
Прибыль, р.	10	14	12	

Требуется определить, сколько изделий и какого вида следует изготовить предприятию, чтобы прибыль от их реализации была максимальной.

4 Для поддержания нормальной жизнедеятельности человеку ежедневно необходимо потреблять не менее 118 г белков, 56 г жиров, 500 г углеводов, 8 г минеральных солей. Количество питательных веществ, содержащихся в 1 кг каждого вида потребляемых продуктов, а также цена 1 кг каждого из этих продуктов

Питательные вещества	Содержание, г, питательных веществ в 1 кг продуктов						
	Мясо	Рыба	Молоко	Масло	Сыр	Крупа	Картофель
Белки	180	190	30	10	260	130	21
Жиры	20	3	40	865	310	30	2
Углеводы	–	–	50	6	20	650	200
Минеральные соли	9	10	7	12	60	20	10
Цена 1 кг продуктов, р.	1,8	1,0	0,28	3,4	2,9	0,5	0,1

Составить дневной рацион, содержащий не менее минимальной суточной нормы потребности человека в необходимых питательных веществах при минимальной общей стоимости потребляемых продуктов.

5 Кондитерская фабрика для производства трех видов карамели А, В, и С использует три вида основного сырья: сахарный песок, патоку и фруктовое пюре. Нормы расхода сырья каждого вида на производство 1 т карамели данного вида, общее количество сырья каждого вида, прибыль от реализации 1 т карамели

Вид сырья	Нормы расхода сырья, т, на 1 т карамели			Общее количество сырья, т
	A	B	C	
Сахарный песок	0,8	0,5	0,6	800
Патока	0,4	0,4	0,3	600
Фруктовое пюре	–	0,1	0,1	120
Прибыль от реализации 1 т продукции, р.	108	112	126	

Найти план производства карамели, обеспечивающий максимальную прибыль от ее реализации.

6. Торговое предприятие планирует организовать продажу четырех видов товара, используя при этом только два вида ресурсов: рабочее время продавцов в количестве 840 ч и площадь торгового зала 180 м 2 . При этом известны плановые нормативы затрат этих ресурсов в расчете на единицу товаров и прибыль от их продажи

Показатели	Товар				Общее количество ресурсов
	A	B	C	D	
Расход рабочего времени на единицу товара, ч	0,6	0,8	0,6	0,4	840
Использование площади торгового зала на единицу товара, м^2	0,1	0,2	0,4	0,1	180
Прибыль от продажи единицы товара, р.	5	8	7	9	

Требуется определить оптимальную структуру товарооборота, обеспечивающую торговому предприятию максимальную прибыль.

Лабораторная работа 2. Решение транспортной задачи.

Транспортная задача – это задача о минимизации транспортных расходов, связанных с обеспечением пунктов потребления определенным количеством однородной продукции, производимой в нескольких пунктах производства. В общем виде задача может быть сформулирована следующим образом.

Однородный продукт, сосредоточенный в пунктах производства, необходимо распределить между пунктами потребления. Стоимость перевозки единицы продукции известна для всех маршрутов. Необходимо составить такой план перевозок, при котором запросы всех пунктов потребления были бы удовлетворены за счет имеющихся продуктов в пунктах производства и общие транспортные расходы по доставке продуктов были бы минимальными.

Примем следующие обозначения: i – номер пункта производства, j –номер пункта потребления, a_i – количество продукта, имеющееся в *i-ом* пункте производства, b_j – количество продукта, необходимое для *j-го* пункта потребления, c_{ij} – стоимость перевозки единицы продукта из *i-го* пункта производства в *j-й* пункт потребления, x_{ij} – количество груза, планируемого к перевозке из *i-го* пункта производства в *j-й* пункт потребления, $i=1,2,\ldots,m$; $j=1,2,\ldots,n$. Математическая модель транспортной задачи будет выглядеть следующим образом:

$$C = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i, \quad i = 1, \ldots, m,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge b_j, \quad j = 1, \ldots, n,$$

$$x_{ij} \ge 0, \qquad i = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, n.$$

Условия задачи удобно записывать в виде таблицы, которая называется матрицей планирования:

Рассмотрим решение транспортной задачи в табличном процессоре MS Excel. Так как транспортная задача является частным случаем задачи линейного программирования, то эту задачу можно решать так, как описано выше. Однако благодаря свойствам задачи, ее можно записать в более компактной форме.

Рассмотрим транспортную задачу, матрица планирования которой имеет вид:

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	14	25	18	19	23	33
A_2	2	17	16	24	2	25
A_3	29	3	7	15	22	25
A_4	5	20	17	23	10	17
	33	11	11	11	34	b_j / a_i

Для решения транспортной задачи введем данные, как показано на рисунке 1.

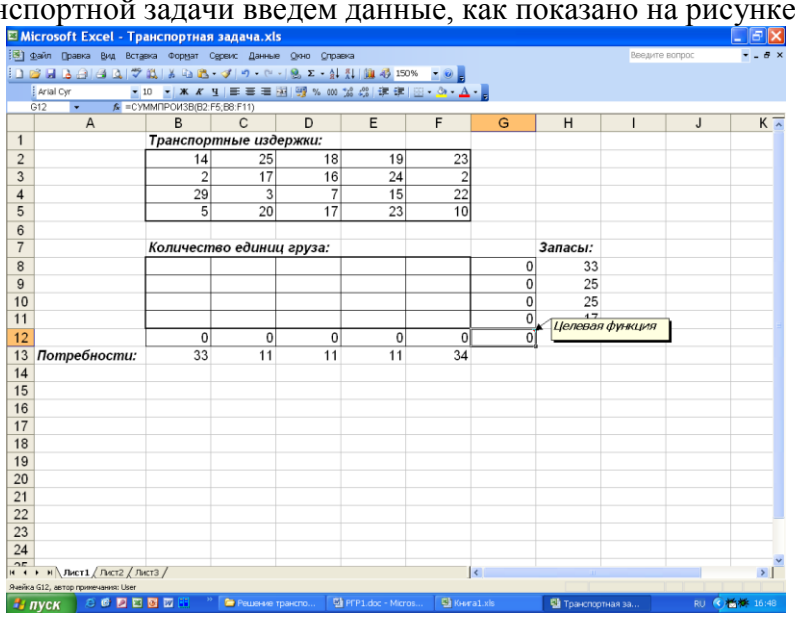


Рисунок1. Исходные данные транспортной задачи.

В ячейки B2 : F5 введем стоимость перевозок. Ячейки B8 : F11 отведены под значения объемов перевозок, пока неизвестные. В ячейки H8 : H11 введены объемы производства, а в ячейки B13 : F13 - потребности (спрос) в продукции в пунктах потребления.

В ячейку G12 вводится целевая функция

= СУММПРОИЗВ (B2 : F5; B8 : F11) .

В ячейки B12 : F12 вводятся формулы

= СУММ (B8 : B11),

= СУММ (C8 : C11),

= СУММ (D8 : D11),

= СУММ (E8 : E11),

= СУММ (F8 : F11),

определяющие объем продукции, ввозимой в пункты потребления. В ячейки G8 : G11 введены формулы

= СУММ (B8 : F8),

= СУММ (B9 : F9),

= СУММ (B10 : F10),

= СУММ (B11 : F11),

характеризующие объем продукции, вывозимой из пунктов производства.

Далее выбираем команду **Сервис, Поиск решения** и заполняем открывшееся диалоговое окно **Поиск решения**, как показано на рисунке 2.

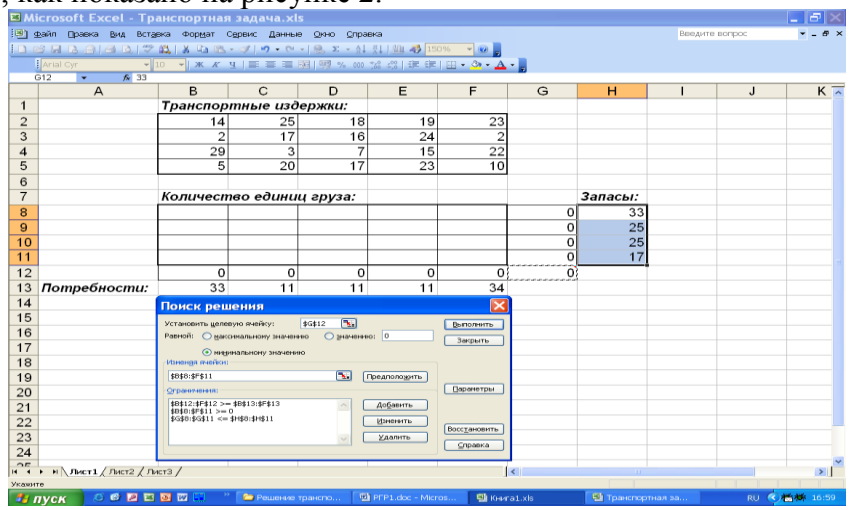


Рисунок 2. Диалоговое окно **Поиск решения** для транспортной задачи.

В диалоговом окне **Параметры поиска решения** установить флажок **Линейная модель** (рисунок 3).

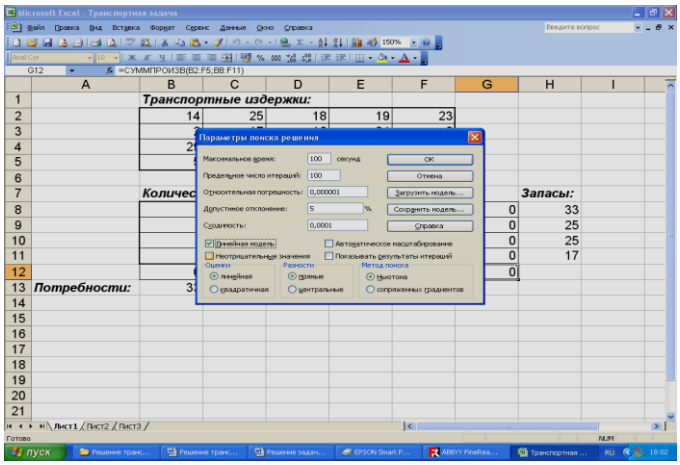
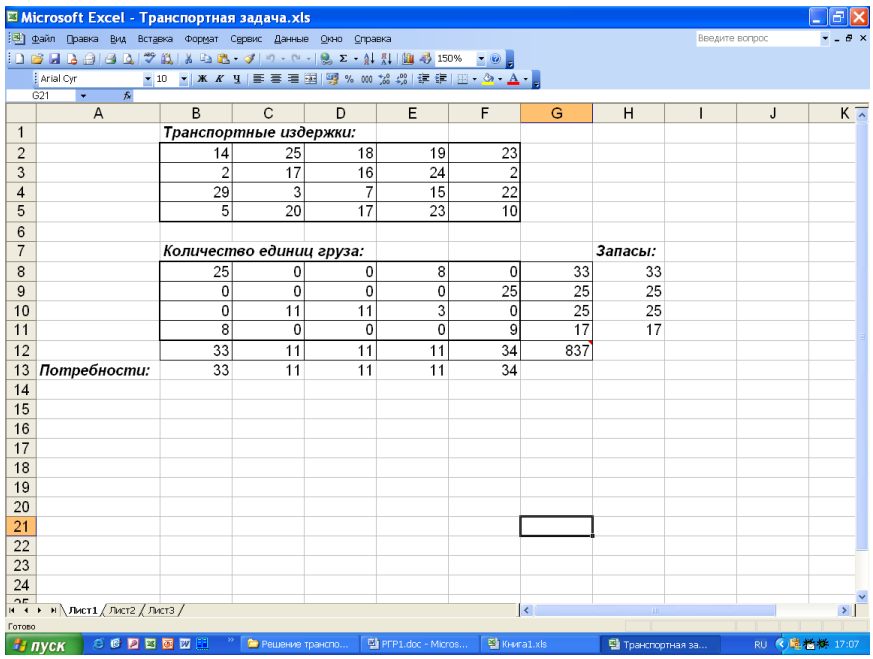


Рис.3. Диалоговое окно **Параметры поиска решений**.

После нажатия кнопки **Выполнить** получаем оптимальный план поставок продукции и соответствующие ему транспортные расходы (рисунок 4).



Microsoft Excel - Транспортная задача.xls

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		*Транспортные издержки:*						
2		14	25	18	19	23		
3		2	17	16	24	2		
4		29	3	7	15	22		
5		5	20	17	23	10		
6								
7		*Количество единиц груза:*						*Запасы:*
8		25	0	0	8	0	33	33
9		0	0	0	0	25	25	25
10		0	11	11	3	0	25	25
11		8	0	0	0	9	17	17
12		33	11	11	11	34	837	
13	*Потребности:*	33	11	11	11	34		

Рис.4. Оптимальное решение транспортной задачи.

Лабораторная работа 3. Задача о назначениях. Некоторая компания имеет четыре заказа в разных точках города A_1, A_2, A_3, A_4, которые необходимо доставить различным потребителям B_1, B_2, B_3, B_4. В каждой точке по одному заказу. В таблице содержится информация о стоимости доставки заказа из пункта A_i (i=1,2,3,4) в пункт B_j (j=1,2,3,4). Как следует распределить заказы по потребителям, чтобы общая сумма затрат была минимальной?

	1	2	3	4
1		0		
2	5		4	
3	3	4	6	1
4		5	3	9

Такого рода задачи возникают повседневно в огромном количестве, но в реальности число потребителей гораздо больше количества, приведенного в условии задачи, да и дополнительных условий (заказов) тоже больше. Наглядно решить подобную задачу помогают средства Microsoft Office, в частности Microsoft Excel.

Первоначально рассмотрим **математическую модель задачи.**

Во-первых, ведем переменные x_{ij}, принимающие два значения:

x_{ij}=0, если из пункта A_i (i=1,2,3,4) заказ не доставляется в пункт B_j (j=1,2,3,4).

x_{ij}=1, если из пункта A_i (i=1,2,3,4) заказ доставляется в пункт B_j (j=1,2,3,4).

Во-вторых, наложим ограничения на переменные задачи. Очевидно, что все переменные задачи неотрицательные и целые числа: $x_{ij} > 0$ и x_{ij} - целые. Кроме того, так как каждый заказ может быть доставлен только одному потребителю и все заказы должны быть вывезены.

В-третьих, выведем целевую функцию. Необходимо доставить заказы так, чтобы общая сумма затрат была минимальной.

Окончательная математическая модель задачи записывается следующим образом:

найти min $Z = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} x_{ij}c_{ij}$;

при ограничениях:

$x_{ij} \geq 0$ и x_{ij} - целые числа, i=1,2,3,4; j=1,2,3,4;

$\sum_{i=1}^{4} x_{ij} = 1$, j=1,2,3,4;

$\sum_{j=1}^{4} x_{ij} = 1$, i=1,2,3,4.

Рассмотрим **решение задачи в процедуре MS EXCEL «Поиск решения».**

Первоначально введем данные задачи (рисунок 1).

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2			B1	B2	B3	B4	
3		A1	2	10	9	7	
4		A2	15	4	14	8	
5		A3	13	14	16	11	
6		A4	4	15	13	19	
7							
8							
9							
10							
11							
12			B1	B2	B3	B4	
13		A1	0	0	0	0	=СУММ(C13:F13)
14		A2	0	0	0	0	=СУММ(C14:F14)
15		A3	0	0	0	0	=СУММ(C15:F15)
16		A4	0	0	0	0	=СУММ(C16:F16)
17			=СУММ(C13:C16)	=СУММ(D13:D16)	=СУММ(E13:E16)	=СУММ(F13:F16)	
18							
19							
20			Z	=СУММПРОИЗВ(C3:F6;C13:F16)			
21							

Рисунок 1.

Здесь в ячейках C3 : F6 введены стоимости доставки заказа из пункта A_i (i=1,2,3,4) в пункт B_j (j=1,2,3,4). Ячейки C13 : F16 являются изменяемыми ячейками для нашей процедуры. В ячейках C17 : F17 находятся суммы значений соответствующих столбцов изменяемых ячеек. В ячейках G13:G16 находятся суммы значений соответствующих строк изменяемых ячеек. Целевая функция заносится в ячейку D20 и вычисляется по формуле «=СУММПРОИЗВ(C3:F6;C13:F16)».

Заполним окно процедуры «Поиск решения»:

целевая функция : D20;

значение целевой функции : min;

изменяемые ячейки : C13 : F16;

ограничения задачи :

C17 : F17=1 и G13:G16 = 1(все заказы должны быть доставлены);

C13 : F16 $\geq$ 0 (изменяемые ячейки должны иметь положительные значения).

В окне «Параметры» установим «Линейная модель», что соответствует решению задачи симплекс-методом. Результаты заполнения окна показаны на рисунке 2:

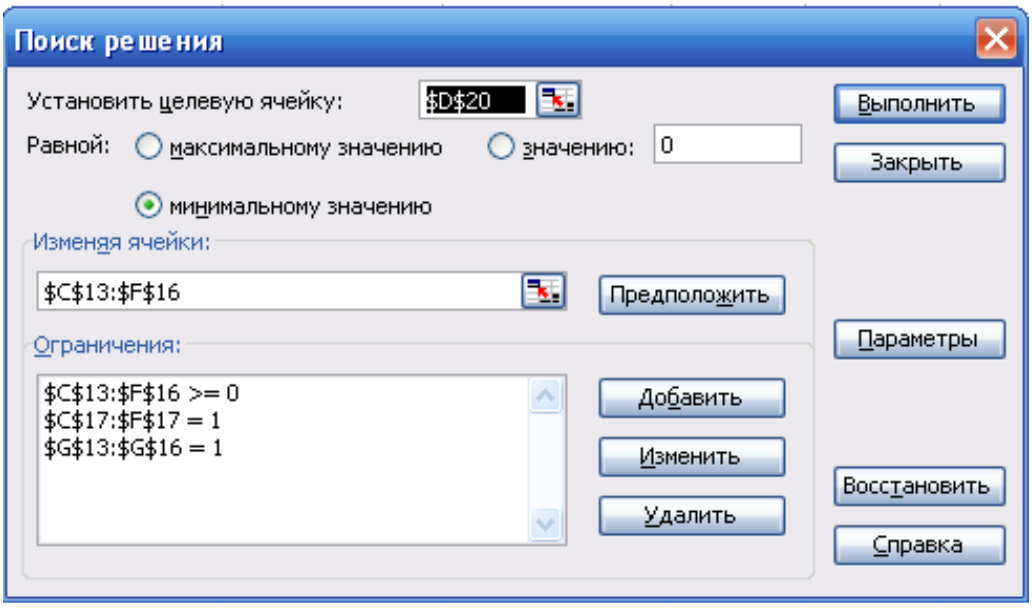


Рисунок 2.

Выполнив процедуру «Поиск решения» получим в первоначальной таблице следующие результаты (рисунок 3):

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2			B1	B2	B3	B4	
3		A1	2	10	9	7	
4		A2	15	4	14	8	
5		A3	13	14	16	11	
6		A4	4	15	13	19	
7							
8							
9							
10							
11							
12			B1	B2	B3	B4	
13		A1	0	0	1	0	1
14		A2	0	1	0	0	1
15		A3	0	0	0	1	1
16		A4	1	0	0	0	1
17			1	1	1	1	
18							
19							
20			Z	28			

Рисунок 3.

Таким образом, решение задачи может быть сформулировано следующим образом: из пункта A_1 заказ необходимо доставить поставщику B_3, из пункта A_2 – поставщику B_2, из пункта A_3 – поставщику B_4, из пункта A_4 – поставщику B_1. Затраты на перевозку при этом составят Z=28.

Лабораторная работа 4. Задача выбора в кратчайшего пути

Пусть задана некоторая сеть (рисунок 1), каждой ориентированной дуге которой соответствует определенное расстояние. Необходимо найти кратчайший путь из *i-го* узла сети в ее заданный *j-й* узел. К этой задаче, известной в исследовании операций как задача выбора кратчайшего пути, сводятся такие практически важные задачи, как задача о замене оборудования, задача о календарном планировании комплекса работ и т.д.

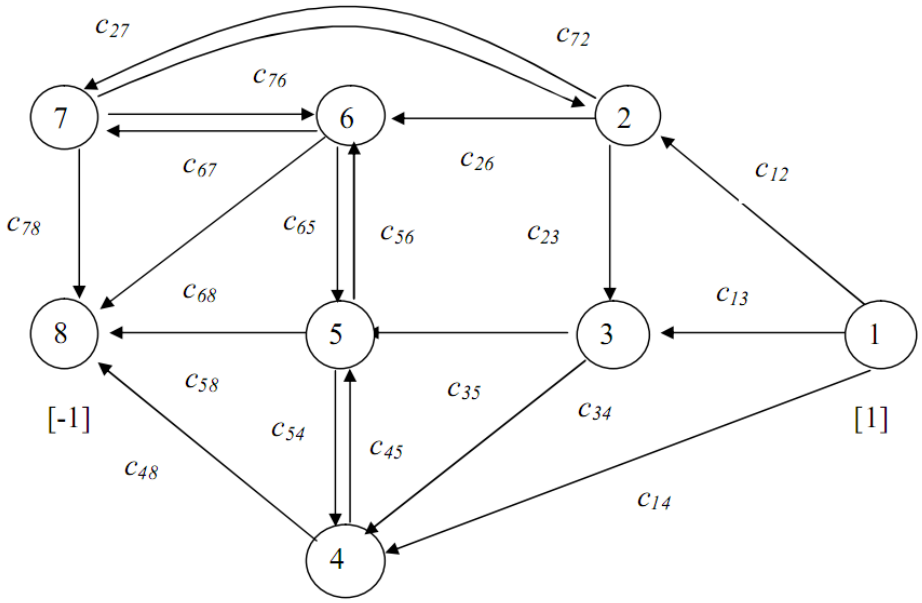


Рисунок 1.

Как правило, в сети выделяют один узел, который является конечным (пункт или станция назначения, сток). Задача заключается в отыскании кратчайшего пути в этот конечный узел (на рисунке 1 конечным является узел с номером 8) из некоторого другого узла сети (например, из первого узла сети на рисунке 1). Величина c_{ij} определяет расстояние от *i-го* узла сети до ее *j-го* узла.

Величина c_{ij} может измеряться в единицах, отличных от единиц длины. Так, например, c_{ij} может представлять собой стоимость проезда от *i-го* до *j-го* узла сети. Тогда задача заключается в отыскании пути минимальной стоимости. Величина c_{ij} может также определять время переезда от *i-го* до *j-го* узла сети. При этом необходимо найти путь с минимальной продолжительностью переезда.

Существуют сети, содержащие циклы, каждый из которых представляет собой замкнутый путь (путь, исходящий из некоторого узла сети и возвращающийся в него же). Так, в сети представленной на рисунке 1, много циклов, один из них содержит узлы с номерами 2, 3, 5, 6 и 7. Как правило, в задачах исследования операций значения c_{ij} положительны и общая длина цикла является положительной. Следовательно, решение задачи выбора кратчайшего пути не может содержать циклов.

Предположим, что для сети, представленной на рисунке 1, необходимо найти кратчайший путь от узла с номером 1 (источник) до узла с номером 8 (сток). Установим связь этой задачи с классической транспортной задачей.

Пример. Рассмотрим транспортную задачу с промежуточными пунктами, сеть которой представлена на рисунке 1. При этом предположим, что: а) в узле с номером 1 имеется избыточная единица товара; б) в узле с номером 8 имеется недостаток единицы товара; в) узлы с номерами 2-7 являются промежуточными пунктами с нулевыми чистыми запасами (потребность в дополнительных поставках товара равна нулю). Необходимо разработать план перевозок товара между узлами сети (складами), который при минимальных транспортных затратах позволит на каждом складе поддерживать нулевой чистый запас товара.

Считаем, что каждой ориентированной дуге сети соответствует переменное модели x_{ij}, представляющее собой количество товара, которое должно быть отправлено с *i-го* склада на *j-й*. Для каждого *k-го* промежуточного пункта вводим переменное x_{kk} с соответствующим ему коэффи-

циентом $c_{kk} = 0$ в целевой функции. Если множество пар индексов (i, j), соответствующих ориентированным дугам сети, представленной на рисунке 1, обозначить через J, то рассматриваемую задачу можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} \sum\limits_{(i,j)\in J} c_{ij} x_{ij} \to \min ; \\ \sum\limits_{(i,j)\in J} x_{kj} - \sum\limits_{(i,j)\in J} x_{ik} = T_k \\ T_1 = 1, T_8 = -1, T_k = 0, k = 2,\ldots,7, \\ x_{ij} \geq 0, (i, j) \in J. \end{cases}$$

Задача выбора кратчайшего пути задана сетью, изображенной на рисунке 1. Найдите кратчайший путь от узла с номером 1 до узла с номером 8, если c12=1 км, c13=4 км, c14=6 км, c23=3 км, c26=5 км, c27=1 км, c34=3 км, c35=5 км, c45=1 км, c48=4 км, c54=1 км, c56=1 км, c58=2 км, c65=1 км, c67=3 км, c68=4 км, c72=1 км, c76=3 км, c78=7 км.

На рисунке 2 представлены Таблица кратчайших расстояний и План перевозок товара по кратчайшему пути, сформированные на рабочем листе Excel. Здесь в Таблице кратчайших расстояний видим, что если между отдельными складами отсутствует возможность перевозки товара, то в соответствующие ячейки таблицы (выделенные темным фоном) заносится любое большое число (в данном случае 100).

В целевую ячейку, в данном случае C24, необходимо занести формулу:
=СУММПРОИЗВ(C4:I10;C16:I22).

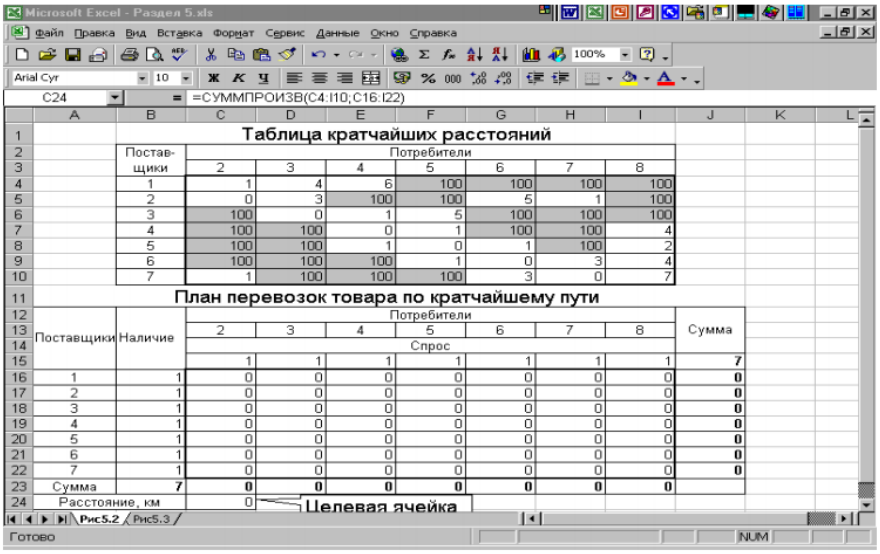


Рисунок 2.

Используя меню СервисПоиск решения, открываем диалоговое окно Поиск решения (см. рисунок 3), в котором устанавливаем целевую ячейку равной минимальному значению, определяем диапазон изменяемых ячеек и ограничения и запускаем процедуру вычисления, щелкнув по кнопке Выполнить.

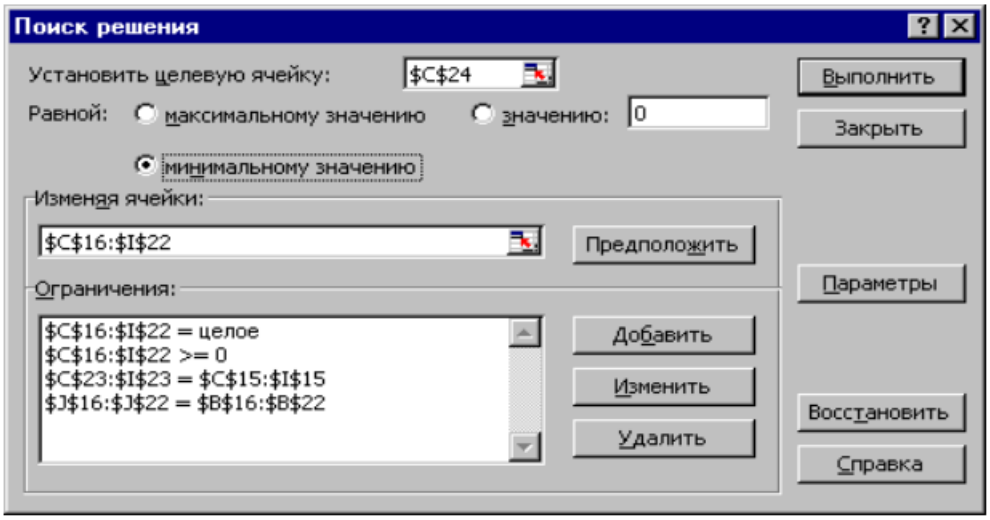


Рисунок 3.

Результат решения данной задачи представлен на рисунке 4.

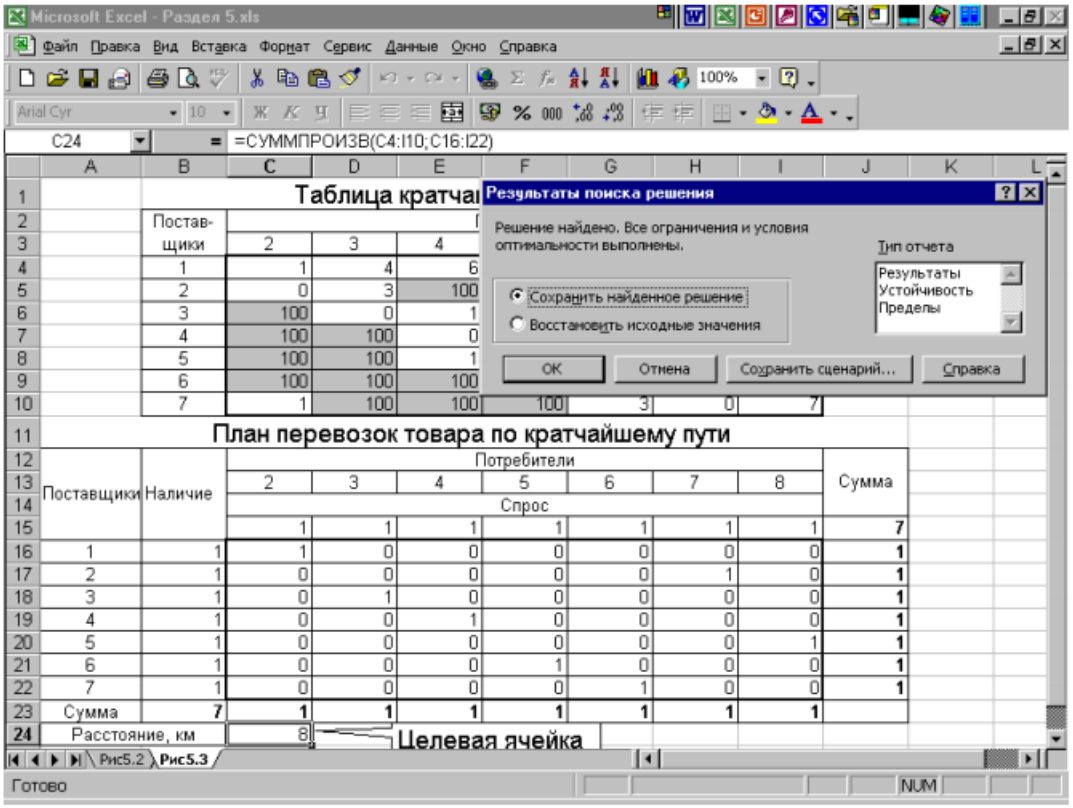


Рисунок 4.

Здесь мы видим, что кратчайший путь перевозки товара следующий:

$1 \to 2 \to 7 \to 6 \to 5 \to 8$. Расстояние перевозки при этом составит 8 км. Аналогично данную задачу можно решить и на максимум, т.е. найти самый длинный путь доставки товара.

Задачи для самостоятельного решения

Решите задачу, используя данные о расстояниях между узлами транспортной сети, представленные в таблице.

Варианты задач для самостоятельного решения

c(ij)	Расстояние между смежными узлами транспортной сети c(ij), км по вариантам									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
c(12)	1	20	18	6	17	1	3	6	14	12
c(13)	5	6	9	9	14	19	17	6	1	14
c(14)	16	8	12	7	9	15	10	18	6	10
c(23)	2	12	4	9	1	15	13	1	10	19
c(26)	1	9	17	20	9	18	11	11	8	2
c(27)	16	3	16	17	11	12	3	10	18	14
c(34)	15	3	20	10	7	18	20	7	9	16
c(35)	17	2	11	20	8	12	20	2	13	11
c(45)	17	12	9	11	11	2	12	6	11	3
c(48)	17	3	4	4	6	12	10	18	10	4
c(54)	17	1	8	3	19	4	7	15	2	18
c(56)	10	8	10	6	5	9	20	7	20	12
c(58)	5	11	3	19	4	8	16	2	2	20
c(65)	1	19	7	6	19	10	16	6	8	11
c(67)	6	16	2	10	8	20	20	6	1	15
c(68)	14	17	11	2	11	5	13	17	14	16
c(72)	10	11	15	4	3	20	7	4	4	19
c(76)	7	1	7	9	12	20	14	14	5	17
c(78)	1	18	13	9	4	7	1	9	14	13

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ СТУДЕНТОВ

Самостоятельная работа является неотъемлемой частью учебного процесса. Она запланирована и структурирована таким образом, чтобы студент при подготовке к занятиям наиболее эффективно осваивал теоретический материал и получал системные знания по курсу.

Руководство самостоятельной работой студентов со стороны преподавателя заключается в оказании помощи при планировании работы по изучению курса, в разъяснении вопросов, возникающих у студентов при изучении отдельных тем курса, при подготовке к различным формам контроля, запланированным программой дисциплины.

При выполнении индивидуального домашнего задания (ИДЗ) следует обратить внимание на следующие моменты: вариант задания для каждого студента определяется его номером в списке группы; задание выполняется в отдельной тетради с подробным описанием хода решения и ссылками на соответствующий теоретический материал; проверка самостоятельности выполнения ИДЗ осуществляется преподавателем при собеседовании со студентом (защита ИДЗ).

Тематика лекционных и практических занятий охватывает все разделы учебной дисциплины и ориентирована на выполнение ее целей и задач в соответствии с требованиями к результатам освоения дисциплины.

На лекционных занятиях рекомендуется внимательно слушать преподавателя, конспектировать материал лекции, принимать участие в интерактивных формах, используемых преподавателем на лекции, задавать вопросы и активно отвечать на поставленные вопросы. При подготовке к лекции необходимо проработать содержание предыдущих лекций, подготовить вопросы. После лекции также следует прочитать свой конспект, ознакомиться с вариантами изложения данной темы в учебниках и учебных пособиях, и если возникают вопросы, то можно с ними обратиться к преподавателю.

Цель практических занятий - осмысление студентами теоретического материала, изложенного на лекциях, формирование умения использовать его при решении практических задач в

изучаемой области, развитие навыков самостоятельной работы, умения работать с учебной литературой.

Подготовка к практическому занятию включает выполнение заданий преподавателя по теме предыдущего занятия, а также подготовку к занятию по новой теме – самостоятельное изучение материалов лекционного курса, источников обязательной и дополнительной литературы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Таха Хэмди А. Введение в исследование операций, 7-е изд. / пер. с англ. М.: Издательский дом «Вильямс», 2007. 912 с.

2. Вентцель Е.С. Исследование операций: задачи, принципы, методология. – М.: Наука, 1980. 208 с.

3. Соловьев В. И. Методы оптимальных решений: Учебное пособие. М.: Финансовый университет, 2012. 364 с.

4. Пантелеев А.В., Летова Т.А. Методы оптимизации в примерах и задачах. Учебное пособие, 2-е издание - М.: Высш. шк. , 2005 - 544 с.

5. Грызина Н.Ю., Мастяева И.Н., Семенихина О.Н. Математические методы исследования операций в экономике: Учебно-методический комплекс. – М.: Изд. центр ЕАОИ, 2009. –196 с.

6. Палий И.А. Введение в линейное программирование: Учебное пособие. – Омск: Изд-во СибАДИ, 2007. 200 с.

7. Г.Я. Горбовцов, Н.Ю. Грызина, И.Н. Мастяева, О.Н. Семенихина. Исследование операций в экономике: Учебное пособие / Московский государственный университет экономики, статистики и информатики. М.: МЭСИ, 2006. – 118 с.

8. Мастяева И.Н., Горбовцов Г.Я., Семенихина О.Н., Турундаевский В.Б. Математические методы исследования операций./ Учебное пособие. Московский международный институт эконометрики, информатики, финансов и права. - М.: , 2003. с. 137.

9. Аксѐнов, Е.П. Методы оптимальных решений: учебное пособие / М-во с.х. РФ; федеральное гос. бюджетное образов. учреждение высшего образов. «Пермская гос. с.-х. акад. им. акад. Д.Н. Прянишникова». – Пермь : ИПЦ «Прокрость», 2016. – 90 с.

10. Гераськин М.И. Линейное программирование: учеб. пособие / М.И. Гераськин, Л.С. Клентак; под общ. ред. Л.С. Клентак. – Самара: Изд-во СГАУ, 2014. – 104 с.

11. Сеславин А.И. Исследование операций и методы оптимизации [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Сеславин А.И., Сеславина Е.А.— Электрон. текстовые данные.— М.: Учебно-методический центр по образованию на железнодорожном транспорте, 2015.— 200 с.— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/45261.— ЭБС «IPRbooks», по паролю

12. Стронгин Р.Г. Исследование операций. Модели экономического поведения [Электронный ресурс]/ Стронгин Р.Г.— Электрон. текстовые данные.— М.: Интернет-Университет Информационных Технологий (ИНТУИТ), 2016.— 245 с.— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/52203.— ЭБС «IPRbooks»

13. Лемешко Б.Ю. Теория игр и исследование операций [Электронный ресурс]: конспект лекций/ Лемешко Б.Ю.— Электрон. текстовые данные.— Новосибирск: Новосибирский государственный технический университет, 2013.— 167 с.— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/45446.— ЭБС «IPRbooks», по паролю

14. Исследование операций в экономике [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Г.Я. Горбовцов [и др.].— Электрон. текстовые данные.— М.: Евразийский открытый институт, Московский государственный университет экономики, статистики и информатики, 2006.— 118 с.— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/10690.— ЭБС «IPRbooks»

15.Гарслян А.Е., Милевский А.С., Кочнева Л.Ф. Задачи по исследованию операций. Часть 1. Линейное программирование и транспортная задача. Сборник задач. – М.: МИИТ, 2011. – 138 с.

16. Палий И.А. Введение в линейное программирование6 учебное пособие. – Омск: изд-во СибАДИ, 2007. - 200с.

17. Болотникова О.В. Линейное программирование: симплекс-метод и двойственность : Учебное пособие / О.В. Болотникова, Д.В. Тарасов, Р.В. тарасов. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2015. – 84 с.

18. Исследование операций : метод. указания к самостоят. работе / АмГУ, ФМиИ ; **сост**.: И. М. Акилова, С. Г. **Самохвалова**. - Благовещенск : Изд-во Амур. гос. ун-та, 2017. - 46 с. - Б. ц. http://irbis.amursu.ru/DigitalLibrary/AmurSU_Edition/7672.pdf

СОДЕРЖАНИЕ

КРАТКОЕ ИЗЛОЖЕНИЕ ЛЕКЦИОННОГО МАТЕРИАЛА 3
МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ 42
МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К ЛАБОРАТОРНЫМ ЗАНЯТИЯМ 55
МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ СТУДЕНТОВ 74
ЛИТЕРАТУРА 75