

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
(ФГБОУ ВО «АмГУ»)

Факультет математики и информатики
Кафедра математического анализа и моделирования
Направление подготовки – 01.03.02 Прикладная математика и информатика
Направленность (профиль) образовательной программы «Прикладная математика и информатика»

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ
И.о. зав. кафедрой
_____ Н.Н. Максимова
« _____ » _____ 2023 г.

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

на тему: Математическое моделирование нестационарных тепловых процессов

Исполнитель
студент группы 952об

(подпись, дата)

С.С. Халеев

Руководитель
доцент, канд. тех. наук

(подпись, дата)

Т.В. Труфанова

Нормоконтроль
старший преподаватель

(подпись, дата)

А.Н. Дудин

Благовещенск 2023

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
(ФГБОУ ВО «АмГУ»)

Факультет математики и информатики
Кафедра математического анализа и моделирования

УТВЕРЖДАЮ
И.о. зав. кафедрой
_____ Н.Н. Максимова
« _____ » _____ 2023 г.

З А Д А Н И Е

К бакалаврской работе студента Халеева Сергея Сергеевича

1. Тема бакалаврской работы: Математическое моделирование нестационарных тепловых процессов

(утверждена приказом от 20.04.2023 № 951-уч)

2. Срок сдачи студентом законченной работы: 24.06.2023 г.

3. Исходные данные к бакалаврской работе: формулировка темы ВКР, литературные источники, среда разработки ППП Matlab.

4. Содержание бакалаврской работы (перечень подлежащих разработке вопросов): математические модели тепловых процессов; численные методы решения уравнений параболического типа; реализация математического моделирования процесса теплопроводности в ППП Matlab.

5. Перечень материалов приложения: листинг компьютерных программ; сертификат и диплом участия в XXXII научной конференции АмГУ «День науки».

6. Консультанты по бакалаврской работе: нормоконтроль – Дудин А.Н., старший преподаватель.

7. Дата выдачи задания: 03.05.2023 г.

Руководитель бакалаврской работы: Труфанова Татьяна Вениаминовна, доцент, канд. тех. наук

Задание принял к исполнению (03.05.2023): _____ Халеев С.С.

РЕФЕРАТ

Бакалаврская работа содержит 73 с., 16 рисунков, 8 приложений, 20 источников.

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ, МЕТОД ФУРЬЕ, МЕТОД КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ, РАЗНОСТНАЯ СХЕМА, СХЕМА РАСЩЕПЛЕНИЯ, MATLAB, МОДЕЛЬ, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ.

Бакалаврская работа посвящена математическому моделированию нестационарных тепловых процессов.

В данной работе рассмотрены теоретические основы тепловых процессов, проведено их математическое моделирование.

Представлено конечное аналитическое решение задач по нестационарной теплопроводности в однородном стержне, однородной прямоугольной пластине и однородном цилиндре, представлена реализация математической модели распределения тепла в каждом из случаев.

Для каждой из задач были найдены графики аналитического решения. Реализация математических моделей основана на применении численного метода конечных разностей. Моделирование производилось в ППП Matlab. Представлены результаты вычислительных экспериментов при варьировании параметров модели.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	7
1 Математические модели тепловых процессов	9
1.1 Постановка задачи моделирования нестационарной теплопроводности	9
1.2 Виды краевых задач	12
1.3 Примеры приложений	15
1.4 Основные свойства функции Бесселя	17
2 Аналитические методы решения уравнений параболического типа	21
2.1 Аналитический метод решения краевой задачи в однородном стержне	21
2.1.1 Концептуальная постановка задачи	21
2.1.2 Математическая постановка задачи	21
2.1.3 Аналитическое решение задачи	21
2.2 Аналитический метод решения краевой задачи в прямоугольной пластине	26
2.2.1 Концептуальная постановка задачи	26
2.2.2 Математическая постановка задачи	26
2.2.3 Аналитическое решение задачи	27
2.3 Аналитический метод решения краевой задачи в однородном цилиндре	32
2.3.1 Концептуальная постановка задачи	32
2.3.2 Математическая постановка задачи	32
2.3.3 Аналитическое решение задачи	32
3 Численные методы и обзор программных продуктов для решения поставленных задач	38
3.1 Обзор пакета прикладных программ MATLAB	41

3.2	Краткая характеристика возможностей ППП MATLAB	41
3.3	Метод конечных разностей	42
3.3.1	Явная разностная схема	43
3.3.2	Неявная разностная схема	44
3.3.3	Схема Кранка-Николсон	42
3.3.4	Схема расщепления	46
4	Реализация математического моделирования процесса теплопроводности	48
4.1	Реализация неявной разностной схемы для решения задачи	48
4.1.1	Вычислительные эксперименты и анализ результатов	49
4.2	Реализация схемы расщепления для решения задачи	51
4.2.1	Вычислительные эксперименты и анализ результатов	53
4.3	Реализация явной разностной схемы для решения задачи	55
4.3.1	Вычислительные эксперименты и анализ результатов	56
	Заключение	60
	Библиографический список	61
Приложение А	Листинг программы построения графика аналитического решения задачи в однородном стержне	64
Приложение Б	Листинг программы моделирования нестационарного процесса теплопроводности в однородном стержне	65
Приложение В	Листинг программы построения графика аналитического решения задачи в прямоугольной пластине	66
Приложение Г	Листинг программы моделирования нестационарного процесса теплопроводности в прямоугольной пластине	67
Приложение Д	Листинг программы построения графика аналитического решения задачи в однородном цилиндре	70
Приложение Е	Листинг программы моделирования нестационарного	71

	процесса теплопроводности в однородном цилиндре	
Приложение Ж	Сертификат участия в XXXII научной конференции АмГУ «День науки»	72
Приложение З	Диплом III степени за доклад на XXXII научной конференции АмГУ «День науки»	73

ВВЕДЕНИЕ

Теплопроводность – необратимый процесс переноса теплоты от более нагретых частей тела к менее нагретым путем хаотического движения частиц (молекул) тела. Данное свойство происходит во всех телах с неоднородным распределением температуры. Иными словами, теплопроводность – способность проводить тепло от одного объекта к другому.

Теплопроводность делится на два типа: стационарная и нестационарная. Стационарная теплопроводность – вид переноса теплоты, при котором температура и тепловой поток не изменяются с течением времени и направления. Нестационарными называются процессы, в которых температура тела изменяется не только в пространстве, но и во времени.

Закон Фурье для поверхностной плотности теплового потока определяется следующим образом. Количество переданной теплоты пропорционально падению температуры, времени и площади изотермической поверхности.

Явление теплопроводности можно наблюдать повсюду: оно является частью многих технологических операций, имеет место в компонентах электронных устройств, в нагревательном или охлаждаемом оборудовании и т.д. Знание хода этих процессов необходимо для обеспечения оптимального теплоснабжения или рассеивания тепла, чтобы предотвратить повреждения материалов, снижение энергоемкости и т.п. Однако нагрев и охлаждение зависят от многих факторов, таких как размеры и свойства материала стенок, а также интенсивность теплообмена между поверхностью стенки и окружающей средой [1-5].

Данная работа посвящена математическому моделированию нестационарных тепловых процессов.

В первой главе бакалаврской работы представлены теоретические основы диффузионных и тепловых процессов, рассмотрены виды краевых задач, основные свойства функции Бесселя, а также примеры приложений уравнений в частных производных параболического типа.

Во второй главе представлены аналитические методы решения уравнений в частных производных параболического типа.

В третьей главе дипломной работы рассмотрен и изучен программный продукт для решения поставленной задачи, а также представлен численный метод конечных разностей для решения уравнений математической физики.

В четвертой главе выполнены практические исследования при помощи варьирования определенных параметров. Каждая задача рассмотрена и решена с помощью метода конечных разностей. В конечном итоге получены графики численного решения уравнений при заданных начальных и граничных условиях.

Цель работы заключается в изучении математических моделей тепловых процессов, отыскании аналитических и численных решений уравнений параболического типа.

Для достижения поставленной цели необходимо выполнить следующие задачи:

- найти аналитические решения краевых задач для уравнений параболического типа в однородном стержне, прямоугольной пластине, однородном цилиндре;

- решить одномерные и двумерные уравнения параболического типа методом конечных разностей в ППП Matlab;

- представить графическую визуализацию найденных аналитических и численных решений уравнений теплопроводности для каждого из случаев в ППП Matlab;

- провести численные эксперименты при помощи варьирования параметров и сделать выводы.

1 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ

1.1 Постановка задачи моделирования нестационарной теплопроводности

Изучение различных природных явлений можно провести с помощью решения дифференциальных уравнений. Для этого существуют методы, которые используются на практике для преобразования уравнений с частными производными к дифференциальным. Однако изначально надо определить, из каких параметров состоит то или иное природное явление. Так как дифференциальные уравнения имеют бесконечное число решений, и чтобы выделить необходимый процесс, требуется задать дополнительные условия. Рассматривая нестационарный процесс теплопереноса, необходимо учитывать начальные условия, которые описывают состояние объекта в нулевой момент времени. Также нужно обозначить границы рассматриваемой области для того, чтобы решить уравнение. Для этого существуют граничные условия [6].

Исходя из вышесказанного, получается, что математическая модель нестационарного явления включает в себя дифференциальное уравнение, описывающее тот или иной процесс, а также граничные и начальные условия, необходимые для нахождения единственного решения поставленной задачи.

Общий вид дифференциального уравнения с частными производными второго порядка с двумя независимыми переменными выглядит следующим образом:

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0. \quad (1.1)$$

Уравнение (1.1) называется линейным, если оно относительно первой степени искомой функции, всех ее производных, а также не содержит их производных [7]:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu = F(x, y).$$

(1.2)

Если коэффициенты A, B, C, a, b не являются зависимыми от x, y , то уравнение (1.2) называют линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами.

Предположим, что $D = B^2 - 4AC$ – дискриминант уравнения (1.2) Тогда, если:

$D = 0$ – уравнение (1.2) является параболическим;

$D > 0$ – уравнение (1.2) является гиперболическим;

$D < 0$ – уравнение (1.2) является эллиптическим.

Так как диффузионный процесс, а именно явление теплопроводности, является главной темой данной работы, рассмотрим подробнее уравнения параболического типа.

К диффузионным процессам переноса относятся такие процессы, где происходит микроскопическое движение частиц (молекул), а не макроскопическое движение среды. В данном случае возникают потоки энергии или массы. К таким процессам относится диффузия, где данный случай сопровождается переносом массы. А также относится теплопроводность, которая обуславливает перенос энергии и тепла [8].

Конкретно нестационарную теплопроводность можно наблюдать при нагреве или охлаждении твердых тел различной формы, обтекаемых потоками жидкостей и газов. Если, допустим, начать замораживать пласт масла, то температура уменьшается сначала на поверхности, а затем в центре тела. Процесс продолжается до того момента, пока температуры не выровняются и не станут равными температуре окружающей среды – t_∞ [7].

В основе практики по задачам нестационарной теплопроводности значимую роль играют две группы процессов: а) тело стремится получить тепловое равновесие; б) температура тела испытывает повторяющиеся изменения.

К первой группе относятся процессы нагрева или охлаждения тел, которые помещены в среду с изначально данным тепловым состоянием. К примеру, это может быть нагрев металлических основ и заготовок в печи, охлаждение закаливаемой детали и т.п.

Ко второй группе относятся процессы в периодически действующих подогревателях, например, тепловой процесс регенераторов, насадка которых то нагревается дымовыми газами, то охлаждается воздухом.

На рисунке 1 представлен характер кривых, образованных при нагревании однородного твердого объекта, находящегося в среде с постоянной температурой $t_{ж}$ [7]:

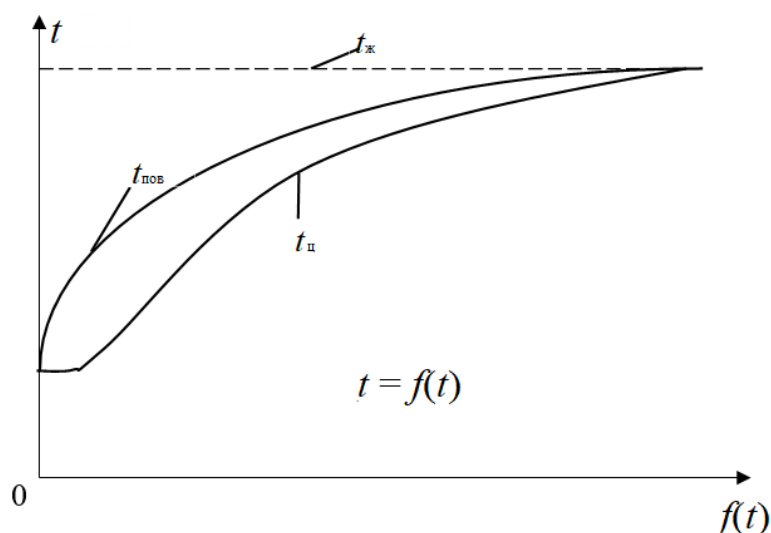


Рисунок 1 – Характер изменения температуры тела во времени

По мере нагревания температура в каждой точке медленно приближается к температуре греющей среды. Быстрее изменяется температура точек, лежащих вблизи поверхности тела. С увеличением времени нагрева эта разность будет становиться меньше и теоретически через довольно длинный промежуток времени она будет равняться нулю [7].

При нестационарном режиме перераспределение теплоты происходит в одно время с изменением температуры отдельных элементов тела. Изменение

температурного поля твердого тела при нестационарной теплопроводности описывается дифференциальным уравнением теплопроводности.

Если рассматривать разные размерности среды, в которой выполняется процесс, то выделяют одномерное, двумерное и трехмерное диффузионные уравнения.

Одномерное уравнение используется для исследования переноса тепла в однородном стержне. Двумерное уравнение предназначена для выявления теплопроводности в прямоугольной пластине. Трехмерное уравнение описывает распространение тепла в пространстве [8].

Также уравнения теплопроводности подразделяются на однородные и неоднородные.

Одномерное уравнение записывается в следующем виде:

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (1.3)$$

где u_t – скорость изменения температуры во времени, u_{xx} – вогнутость температурного профиля.

Данное уравнение является однородным, так как изменение тепла происходит независимо от действия каких-либо сил.

Существует также неоднородное уравнение, которое выглядит следующим образом:

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t). \quad (1.4)$$

Данное уравнение подразумевает, что внутри стержня есть тепловой источник.

1.2 Виды краевых задач

Уравнение теплопроводности – это дифференциальное уравнение первого порядка по времени t и второго порядка по пространственным координатам x, y ,

z. Для того, чтобы решить данное уравнение, понадобятся начальные и граничные условия.

Начальное условие подразумевает распределение температуры в начальный момент времени внутри тела. Записывается условие следующим образом:

$$T(x, y, z, 0) = f_0(x, y, z),$$

(1.5)

где $f_0(x, y, z)$ – заданная функция.

Граничные условия нужны для того, чтобы определить закон взаимодействия между окружающей средой и поверхностью тела. Они могут быть заданы различными способами в зависимости от физической постановки задачи [13].

Граничное условие 1-го рода. Данное условие применяется в указании распределения температуры по поверхности тела. Происходит это в любой момент времени [9]:

$$\begin{aligned} u|_{x=0} &= f_1(t), \\ u|_{x=l} &= f_2(t), \end{aligned}$$

(1.6)

где $f_1(t)$, $f_2(t)$ – заданные функции.

Граничное условие 2-го рода. Данное условие применяется в указании плотности потока тепла для каждой точки поверхности тела. Происходит это в любой момент времени:

$$\begin{aligned} u_x|_{x=0} &= f_1(t), \\ u_x|_{x=l} &= f_2(t), \end{aligned} \tag{1.7}$$

где $f_1(t)$, $f_2(t)$ – заданные функции.

Граничное условие 3-го рода. Данное условие применяется в указании условия обмена тепла между окружающей средой и поверхностью твердого тела:

$$\begin{aligned} (-u_x + hu)|_{x=0} &= f_1(t), \\ (u_x + hu)|_{x=l} &= f_2(t), \end{aligned} \quad (1.8)$$

Для диффузионного уравнения (1.3) при начальном условии $u(x,0) = \varphi(x)$, и в случае граничных условий первого рода (1.6), задача называется первой начально-краевой задачей [9].

Однородная первая краевая задача выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq l, \quad t > 0, \quad (1.9)$$

$u(x,0) = f(x)$ – температура в начальный момент времени t ;

$U(0,t) = g(t)$ – температура на левой границе;

$U(l,t) = h(t)$ – температура на правой границе.

Неоднородная первая краевая задача выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t).$$

В отличие от однородной краевой задачи (1.9) с граничными условиями первого рода, уравнение имеет неоднородность $f(x,t)$.

Если заменить граничные условия первого рода на условия второго рода (условия Неймана) или третьего рода, то соответствующая задача будет называться второй или третьей начально-краевой задачей. Если различные участки границы имеют разные типы граничных условий, то такие начально-краевые задачи называются смешанными [9].

Однородная вторая краевая задача выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq l, \quad t > 0, \quad (1.10)$$

$U(x,0) = f(x)$ – температура в начальный момент времени t ;

$U_x(0,t) = g(t)$ – плотность потока тепла на левой границе;

$U_x(l,t) = h(t)$ – плотность потока тепла на правой границе;

Неоднородная вторая краевая задача имеет вид:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + f(x,t).$$

(1.11)

В однородной задаче Коши не задаются граничные условия, а только начальное условие, что делает ее особенной по сравнению с задачами, имеющими граничные условия [9]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad -\infty < x < \infty.$$

(1.12)

В однородной задаче Коши телом может являться бесконечный стержень.

$u(x,0) = \varphi(x)$ – условие, задающее температуру в начальный момент времени t ;

Неоднородная задача Коши выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad t > 0, \quad -\infty < x < \infty;$$

(1.13)

$u(x,0) = \varphi(x)$ – температура в начальный момент времени t .

1.3 Примеры приложений

Уравнения параболического типа широко применяются для моделирования различных физических и математических процессов. Ниже приведены некоторые примеры приложений, в которых возникают параболические задачи:

Теплопроводность. Уравнение теплопроводности, основанное на уравнении параболического типа, используется для моделирования распространения тепла в твердых телах или жидкостях. Примеры включают анализ теплопро-

водности в материалах, расчет тепловых потоков в инженерных системах, моделирование тепловых процессов в геологических формациях и т. д.

Диффузия. Уравнение диффузии, также основанное на уравнении параболического типа, применяется для моделирования распространения различных веществ, например, диффузии газов, жидкостей или других веществ в материалах или средах. Это может быть полезно для исследования диффузии примесей в растворах, распределения вещества в биологических тканях, моделирования диффузионных процессов в химических реакциях и многое другое.

Финансовые моделирования. В некоторых финансовых моделях, таких как модели оценки опционов, используются параболические уравнения для моделирования стоимости активов или других финансовых инструментов со временем. Это позволяет анализировать и прогнозировать изменение цен, волатильность и других факторов в финансовых рынках.

Реакционная диффузия. В ряде физических и химических систем возникают процессы, включающие диффузию и реакции, такие как рост кристаллов, химические реакции в жидких средах и другие. Моделирование таких процессов может включать параболические уравнения с учетом диффузии и реакции в системе.

Однако остановимся на явлении теплопроводности и рассмотрим математические постановки для каждого вида.

Перенос тепла в стержне. Уравнение теплопроводности выглядит следующим образом [13]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (1.14)$$

где $u(x, t)$ – температура в точке x и момент времени t , a^2 – коэффициент теплопроводности.

Начальное условие: $u(x, 0) = \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ – начальное распределение температуры в стержне.

Граничные условия первого рода: $u(0,t) = g_1(x)$ и $u(l,t) = g_2(x)$, где $g_1(x)$ и $g_2(x)$ – заданные функции температуры на концах стержня.

Теплопроводность в пластине. Уравнение теплопроводности имеет следующий вид [13]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad 0 < x < p, \quad 0 < y < s, \quad t > 0, \quad (1.15)$$

где $u(x, y, t)$ – температура в точке (x, y) и момент времени t , a^2 – коэффициент температуропроводности.

Начальное условие: $u(x, y, 0) = \varphi(x, y)$, где $\varphi(x, y)$ – начальное распределение температуры в пластине.

Граничные условия первого рода: $u(x, 0, t) = g_1(x, t)$, $u(x, s, t) = g_2(x, t)$, $u(0, y, t) = g_3(y, t)$ и $u(p, y, t) = g_4(y, t)$, где $g_1(x, t)$, $g_2(x, t)$, $g_3(y, t)$, $g_4(y, t)$ – заданные функции температуры на границе пластины.

Теплопроводность в трехмерном пространстве. Уравнение теплопроводности имеет следующий вид [13]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad 0 < x < p, \quad 0 < y < s, \quad 0 < z < h, \quad t > 0, \quad (1.16)$$

где $u(x, y, z, t)$ – температура в точке (x, y, z) и момент времени t , a^2 – коэффициент температуропроводности.

Начальное условие: $u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z)$, где $\varphi(x, y, z)$ – начальное распределение температуры в области.

Граничные условия первого рода: $u(x, y, 0, t) = g_1(x, y, t)$, $u(x, y, h, t) = g_2(x, y, t)$, $u(x, 0, z, t) = g_3(x, z, t)$, $u(x, s, z, t) = g_4(x, z, t)$, $u(0, y, z, t) = g_5(y, z, t)$, $u(p, y, z, t) = g_6(y, z, t)$, где $g_1(x, y, t)$, $g_2(x, y, t)$,

$g_3(x, z, t)$, $g_4(x, z, t)$, $g_5(y, z, t)$, $g_6(y, z, t)$ – заданные функции температуры на границе области.

1.4 Основные свойства функции Бесселя

Когда решается прикладная задача методом разделения переменных для уравнений с переменными коэффициентами в цилиндрических и полярных координатах, дальнейшие действия приводят к тому, что требуется прибегнуть к специальным функциям. В таком случае часто применяются цилиндрические функции и уравнения Бесселя [10].

В основном функции Бесселя применяются при решении задач в таких случаях как: теплопроводность, распространение волн, гидродинамика, упругие колебания, статические потенциалы, а также задачи радиофизики, атомной и ядерной физики.

Большой интерес к функциям Бесселя обусловлен тем, что решение краевых задач математической физики, включающих оператор Лапласа в цилиндрических координатах, традиционно приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению, предназначенному для нахождения этих функций:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} + (x^2 - v^2)u = 0. \quad (1.17)$$

Уравнение (1.17) представляет собой уравнение Бесселя v -го порядка.

Любое ненулевое решение уравнения Бесселя обычно называется цилиндрической функцией [11].

Функция $J_v = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+v+1)\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+v}$ является решением уравнения

Бесселя при всех значениях параметра $v \in (-\infty; +\infty)$ и известна как функция Бесселя 1-го рода порядка v .

Если ν является не целочисленным, то функции $J_\nu(x)$ и $Y_\nu(x) = J_{-\nu}(x)$ значатся двумя линейно независимыми решениями уравнения. Если $\nu = 0$, то данные решения совпадают между собой.

Если $\nu = n$ является целым положительным числом, то $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$. Можно сделать вывод, что функции $J_{-n}(x)$ и $J_n(x)$ линейно зависимы. Для данного уравнения (1.17) исходя из заданных условий, необходимо найти еще одно линейно независимое от $J_\nu(x)$ решение, чтобы получить общее решение. Для этого введем новую функцию $Y_\nu(x)$, которая равняется

$$Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu\pi} \quad [10].$$

Предполагается, что $Y_\nu(x)$ является решением уравнения (1.17) и может быть представлено как комбинация двух частных решений $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$ этого уравнения. Такое решение известно как функция Бесселя второго рода порядка ν .

Согласно определению функции $J_n(x)$ имеем:

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{n+2k}}{2^{n+2k} k!(n+k)!}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.18)$$

Для решения классических уравнений Бесселя существуют рекуррентные отношения следующих видов :

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x), \quad (1.19)$$

$$J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) = 2J'_n(x), \quad (1.20)$$

$$xJ'_n(x) = -xJ_{n+1}(x) + nJ_n(x). \quad (1.21)$$

На практике при решении задач с применением функций Бесселя довольно-таки часто встречаются следующие две формулы [11]:

$$J_0'(x) = -J_1(x);$$

(1.22)

$$J_0''(x) = \frac{1}{2}[J_2(x) - J_0(x)].$$

(1.23)

Надежность отношений выше опирается на тождества (1.19), (1.20), (1.21), которые приводят к следующим выражениям:

$$J_n'(\alpha x) = J_{n-1}(\alpha x) - \frac{n}{\alpha x} J_n(\alpha x);$$

(1.24)

$$J_n'(\alpha x) = \frac{n}{\alpha x} J_n(\alpha x) - J_{n+1}(\alpha x).$$

(1.25)

Рассмотрим также разложение произвольной функции в ряды Фурье-Бесселя. Пусть произвольная функция $f(x)$ представлена в виде суммы ряда:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n J_\nu\left(\frac{\mu_n x}{l}\right), \quad \nu > -1.$$

(1.26)

где μ_1, μ_2, \dots – положительные корни уравнения $J_\nu(x) = 0$.

Для того, чтобы определить коэффициенты a_n , перемножим обе части разложения (1.26) на $x \cdot J_\nu\left(\frac{\mu_j x}{l}\right)$, а также проинтегрируем по x на заданном отрезке $[0, l]$. Таким образом, учитывая (1.27)

$$\int_0^l x J_\nu\left(\frac{\mu_i x}{l}\right) J_\nu\left(\frac{\mu_j x}{l}\right) dx = \begin{cases} 0, & j \neq i \\ \frac{l^2}{2} \cdot J_\nu'^2(\mu_i) = \frac{l^2}{2} J_{\nu+1}^2(\mu_i), & j = i \end{cases},$$

(1.27)

найдем коэффициент a_i :

$$a_i = \frac{2}{l^2 J_{\nu+1}^2(\mu_i)} \int_0^l x f(x) J_{\nu}\left(\frac{\mu_i x}{l}\right) dx.$$

(1.28)

Разложение (1.26), в котором коэффициенты a_i определяются по формуле (1.28), является разложением функции $f(x)$ в ряд Фурье – Бесселя.

Величина $\|J_{\nu}(\alpha x)\| = \left(\int_0^1 x J_{\nu}^2(\alpha x) dx \right)^{\frac{1}{2}}$ называется нормой функции Бесселя

$J_{\nu}(\alpha x)$.

2 АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

2.1 Аналитический метод решения краевой задачи в однородном стержне

2.1.1 Концептуальная постановка задачи

Дан тонкий однородный стержень с теплоизолированной боковой поверхностью длиной l , начальная температура которого равна $u(x, 0) = Ax/l$ для $0 < x < l$. На конце стержня $x = 0$ температура поддерживается равной нулю, а температура конца стержня $x = l$ изменяется по закону $u(l, t) = Ae^{-t}$, $A = \text{const}$. Найти нестационарное распределение температуры в стержне.

2.1.2 Математическая постановка задачи

Требуется решить уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T;$$

(2.1)

с заданными начальным и граничными условиями:

$$u(x, 0) = \frac{Ax}{l}, \quad 0 < x < l \quad \text{– начальное условие;}$$

$$\begin{cases} u(0, t) = 0 \\ u(l, t) = Ae^{-t} \end{cases} \quad \text{– граничные условия.}$$

2.1.3 Аналитическое решение задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l.$$

Решение будем находить в следующем виде:

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t),$$

(2.2)

где $v(x, t)$ – новая искомая функция.

Для нахождения решения однородного уравнения произведем замену, подходящую к заданным граничным условиям:

$$w = \mu_n + \frac{x}{l}(\mu_2 - \mu_1) = \frac{x}{l} A e^{-t}.$$

(2.3)

$$u(x, t) = v(x, t) + \frac{x}{l} A e^{-t}.$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{x}{l} A e^{-t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Перенесем $-\frac{x}{l} A e^{-t}$ в правую часть уравнения:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{x}{l} A e^{-t}.$$

(2.4)

Запишем начальные условия для $v(x, t)$:

$$v(x, 0) = u(x, 0) - \frac{x}{l} A = \frac{Ax}{l} - \frac{Ax}{l} = 0.$$

Запишем граничные условия для $v(x, t)$:

$$v(x, 0) = u(x, 0) - 0 = 0.$$

$$v(l, t) = u(l, t) - \frac{x}{l} A e^{-t} = A e^{-t} - A e^{-t} = 0.$$

Для функции $v(x, t)$ получим следующую задачу:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{x}{l} A e^{-t}.$$

$$\begin{cases} v(0, t) = v(l, t) = 0 \\ v(x, 0) = 0 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ v(0, t) = v(l, t) = 0 \end{cases}.$$

Решение ищем в виде:

$$v(x, t) = X(x)T(t) \neq 0,$$

$$T'(t)X(x) = a^2 X''(x)T(t).$$

Разделим выражение на $a^2 X(x)T(t)$:

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda.$$

Получим задачу Штурма-Лиувилля:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = X(l) = 0.$$

$$T'(t) + a^2 \lambda T(t) = 0.$$

При решении задачи Штурма-Лиувилля находим:

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda} x + C_2 \sin \sqrt{\lambda} x.$$

$$0 = C_1, \quad 0 = C_2 \sin \sqrt{\lambda} l.$$

$$C_2 \neq 0; \quad \sin \sqrt{\lambda} l = 0; \quad \sqrt{\lambda} l = \pi n;$$

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2;$$

$$X_n(x) = \sin \frac{\pi n}{l} x.$$

(2.5)

Решение неоднородного уравнения ищем в виде:

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x.$$

(2.6)

Разложим функцию x в ряд Фурье по системе функций (2.5):

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} d_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x.$$

(2.7)

Для нахождения коэффициентов d_n проинтегрируем по x на отрезке $[0; l]$:

$$d_n = \frac{2}{l} \int_0^l x \sin \frac{\pi n}{l} x dx = \left| \begin{array}{l} u = x; du = dx \\ dv = \sin \frac{\pi n}{l} x dx; v = -\frac{l}{\pi n} \cos \frac{\pi n}{l} x \end{array} \right| =$$

$$= \frac{2}{l} \left[\frac{x l}{\pi n} \cos \frac{\pi n}{l} x \int_0^l -\frac{l}{\pi n} \iint \cos \frac{\pi n}{l} x d\varphi \right] = \frac{2}{l} \left(-\frac{l^2}{\pi n} (-1)^n \right) = \frac{2l}{\pi n} (-1)^n$$

Подставляя уравнения (2.6) и (2.7) в уравнение (2.4), получаем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n'(t) \sin \frac{\pi n}{l} x = a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(-T_n(t) \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 \sin \frac{\pi n}{l} x \right) + \frac{Ae^{-t}}{l} \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin \frac{\pi n}{l} x.$$

(2.8)

Упростим выражение:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[T_n'(t) + a^2 \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 T_n(t) \right] \sin \frac{\pi n}{l} x = -\frac{Ae^{-t}}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2l}{\pi n} (-1)^n \sin \frac{\pi n}{l} x;$$

$$\left[T_n'(t) + \left(\frac{a\pi n}{l} \right)^2 T_n(t) \right] = \frac{2Ae^{-t}}{\pi n} (-1)^n.$$

(2.9)

Представим $\frac{2Ae^{-t}}{\pi n} (-1)^n$ в виде $D_n e^{-t}$, а $\left(\frac{a\pi n}{l} \right)^2$ в виде b^2 .

$$T_n'(t) + b^2 T_n(t) = D_n e^{-t};$$

$$T_n(t) = d_n(t) e^{-t}$$

$$\int \frac{dT_n}{T_n} + b^2 \int dt = 0 + \alpha_n.$$

$$\ln |T_n(t)| + b^2 t = \alpha_n; T_n(t) = \alpha_n e^{-b^2 t}.$$

Решаем методом Лагранжа:

$$T_n'(t) = d_n'(t) e^{-b^2 t} - b^2 d_n(t) e^{-b^2 t}.$$

$$d_n'(t) e^{-b^2 t} - b^2 d_n(t) e^{-b^2 t} + b^2 d_n(t) e^{-b^2 t} = D_n e^{-t};$$

$$d_n'(t) e^{-b^2 t} = D_n e^{-t};$$

$$dd_n(t) = D_n e^{b^2 t - t} dt.$$

$$d_n(t) = D_n \int e^{(b^2-1)t} dt + \tilde{d}_n;$$

$$d_n(t) = D_n \frac{e^{(b^2-1)t}}{b^2-1} + \tilde{d}_n.$$

Когда коэффициент d_n найден, найдем T_{ney} :

$$T_{ney} = \left(\frac{D_n e^{(b^2-1)t}}{b^2-1} + \tilde{d}_n \right) e^{-b^2 t} = \frac{D_n e^{-t}}{b^2-1} + \tilde{d}_n e^{-b^2 t} = -\frac{2A(-1)^n e^{-t}}{\pi n (b^2-1)} + \tilde{d}_n e^{-b^2 t}.$$

(2.10)

Подставляя полученное выражение (2.10) в решение неоднородного уравнения (2.6), получим:

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{2A(-1)^n e^{-t}}{\pi n (b^2-1)} + \tilde{d}_n e^{-b^2 t} \right] \sin \frac{\pi n}{l} x.$$

(2.11)

Найдем \tilde{d}_n из начальных условий:

$$0 = -\frac{2A(-1)^n e^{-t}}{\pi n (b^2-1)} + \tilde{d}_n e^{-b^2 t} \Big|_{t=0} = \frac{2A(-1)^n}{\pi n (b^2-1)};$$

или

$$\tilde{d}_n = \frac{2A(-1)^n}{\pi n \left[\left(\frac{a\pi n}{l} \right)^2 - 1 \right]}.$$

(2.12)

Полученный \tilde{d}_n подставим в уравнение (2.11):

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{2A(-1)^n e^{-t}}{\pi n(b^2 - 1)} + \frac{2A(-1)^n e^{-b^2 t}}{\pi n \left[\left(\frac{a\pi n}{l} \right)^2 - 1 \right]} \right] \sin \frac{\pi n}{l} x;$$

(2.13)

Упростим выражение (2.13):

$$v(x,t) = \frac{2Al^2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \left[e^{-\left(\frac{a\pi}{l}\right)^2 a^2 t} - e^{-t} \right]}{n(\pi^2 n^2 a^2 - l^2)} \sin \frac{\pi n}{l} x.$$

(2.14)

Подставим полученное выражение (2.14) в $u(x,t) = v(x,t) + \frac{x}{l} Ae^{-t}$:

$$u(x,t) = \frac{2Al^2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \left[e^{-\left(\frac{a\pi}{l}\right)^2 a^2 t} - e^{-t} \right]}{n(\pi^2 n^2 a^2 - l^2)} \sin \frac{\pi n}{l} x + \frac{x}{l} Ae^{-t}.$$

Таким образом, было найдено аналитическое решение данной задачи.

При значениях длины стержня l , равной 10, времени T , равного 10, постоянной A , равной 10 и нормированного коэффициента температуропроводности a , равного 1, график аналитического решения будет выглядеть следующим образом:

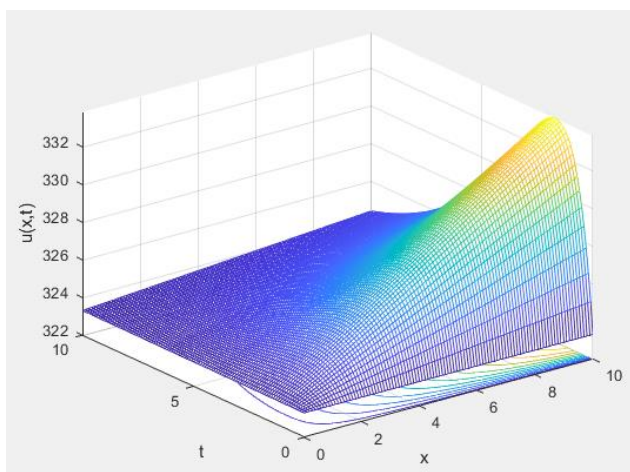


Рисунок 2 – График аналитического решения задачи (2.1)

2.2 Аналитический метод решения краевой задачи в прямоугольной пластине

2.2.1 Концептуальная постановка задачи

Рассмотрим эволюцию температурного поля в однородной прямоугольной пластине со сторонами p и s , если в момент времени $t = 0$ задано начальное распределение температуры, и на пластине действует источник тепла. Требуется определить распределение температуры при $t > 0$, если на границах $x = 0$ и $y = s$ температура поддерживается равной нулю, а при $y = 0$ и при $x = p$ границы теплоизолированы.

2.2.2 Математическая постановка задачи

Требуется решить уравнение:

$$u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + A \sin \frac{3\pi x}{2p} \cos \frac{\pi y}{2s}, \quad 0 < x < p, \quad 0 < y < s, \quad t > 0,$$

(2.15)

удовлетворяющее граничным условиям:

$$u(0, y, t) = u_x(p, y, t) = 0, \quad 0 < y < s, \quad t > 0;$$

$$u_y(x, 0, t) = u(x, s, t) = 0, \quad 0 < x < p, \quad t > 0,$$

и начальным условием:

$$u(x, y, 0) = B \sin \frac{\pi x}{2p} \cos \frac{3\pi y}{2s}, \quad 0 < y < s, \quad 0 < x < p.$$

2.2.3 Аналитическое решение задачи

Решение будем искать в виде:

$$u(x, y, t) = w + \omega,$$

(2.16)

где w и ω являются решениями следующих задач:

$$\text{а) } w_t = a^2 (w_{xx} + w_{yy}), \quad 0 < x < p, \quad 0 < y < s, \quad t > 0;$$

(2.17)

$$w|_{x=0} = w_x|_{x=p} = 0;$$

$$w_y|_{y=0} = w|_{y=s} = 0;$$

$$w|_{t=0} = B \sin \frac{\pi x}{2p} \cos \frac{3\pi y}{2s}.$$

$$\text{б) } \omega_t = a^2 (\omega_{xx} + \omega_{yy}) + A \sin \frac{3\pi x}{2p} \cos \frac{\pi y}{2s}, \quad 0 < x < p, \quad 0 < y < s, \quad t > 0; \quad (2.18)$$

$$\omega|_{x=0} = \omega_x|_{x=p} = 0;$$

$$\omega_y|_{y=0} = \omega|_{y=s} = 0;$$

$$\omega|_{t=0} = 0.$$

Задачу (2.17) решаем с помощью метода разделения переменных. Полагая, что $w(x, y, t) = T(t)V(x, y) \neq 0$ получаем следующее уравнение:

$$T'V = a^2 (V_{xx} + V_{yy})T(t). \quad (2.19)$$

Разделим уравнение (2.19) на a^2TV . Получим:

$$\frac{T'}{a^2T} = \frac{V_{xx} + V_{yy}}{V} = -\lambda.$$

Получаем систему из обыкновенного дифференциального уравнения для функции $T(t)$ и уравнения в частных производных:

$$\begin{cases} T' + \lambda a^2 T = 0 \\ V_{xx} + V_{yy} + \lambda V = 0 \end{cases}.$$

Решая ОДУ из системы, получаем:

$$T(t) = e^{-a^2 \lambda t}.$$

Подставляя $V(x, y) = X(x)Y(y)$ в уравнение в частных производных, получим следующее выражение:

$$X''Y + Y''X + \lambda XY = 0. \quad (2.20)$$

Полученное выражение разделим на XY :

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} - \lambda = -\mu.$$

Получим задачу Штурма-Лиувилля для X :

$$X'' + \mu X = 0; \quad k^2 + \mu = 0; \quad k_{1,2} = \pm \sqrt{\mu}.$$

При решении задачи Штурма-Лиувилля для X находим собственное значение μ и собственную функцию:

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{\mu} x + C_2 \sin \sqrt{\mu} x;$$

$$X' = -C_1 \sqrt{\mu} \sin \sqrt{\mu} x + C_2 \sqrt{\mu} \cos \sqrt{\mu} x.$$

$$0 = C_1; \quad 0 = C_2 \sqrt{\mu} \cos \sqrt{\mu} p.$$

$$\cos \sqrt{\mu} p = 0; \quad \sqrt{\mu} p = \frac{\pi}{2} + \pi n;$$

$$\mu_n = \left[\frac{\pi (1 + 2n)}{2p} \right]^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

(2.21)

$$X_n(x) = \sin \frac{\pi}{2p} (1 + 2n)x.$$

(2.22)

Выведем задачу Штурма-Лиувилля для Y :

$$-\frac{Y''}{Y} = \lambda - \mu; \quad \frac{Y''}{Y} = \mu - \lambda = -\nu.$$

$$Y'' + vY = 0; k^2 + v = 0; k_{1,2} = \pm\sqrt{v}.$$

При решении задачи Штурма-Лиувилля для Y находим собственное значение v и собственную функцию:

$$Y(y) = C_1 \cos\sqrt{v}y + C_2 \sin\sqrt{v}y;$$

$$Y' = -C_1\sqrt{v} \sin\sqrt{v}y + C_2\sqrt{v} \cos\sqrt{v}y.$$

$$0 = C_2; 0 = C_1 \cos\sqrt{v}s.$$

$$\cos\sqrt{v}s = 0; \sqrt{v}s = \frac{\pi}{2} + \pi m;$$

$$v_m = \left[\frac{\pi(1+2m)}{2s} \right]^2. \quad m = 1, 2, \dots$$

(2.23)

$$Y_m(y) = \cos \frac{\pi}{2s}(1+2m)y.$$

(2.24)

После нахождения собственных функций $X(x)$ и $Y(y)$, $V(x, y)$ будет выглядеть следующим образом:

$$V(x, y) = \sin \frac{\pi}{2p}(1+2n)x \cdot \cos \frac{\pi}{2s}(1+2m)y$$

(2.25)

Запишем $\lambda_{n,m}$ как $\lambda_{n,m} = \mu_n + v_m$. Тогда выражение (2.25) принимает следующий вид:

$$\lambda_{n,m} = \left[\frac{\pi(1+2n)}{2p} \right]^2 + \left[\frac{\pi(1+2m)}{2s} \right]^2.$$

Таким образом, решение задачи (2.16) будет выглядеть следующим образом:

$$w(x, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2p}(1+2n)x \cdot \cos \frac{\pi}{2s}(1+2m)y \cdot C_{n,m} \cdot e^{-a^2\lambda_{n,m}t}.$$

Используя начальное условие, получаем:

$$B \sin \frac{\pi x}{2p} \cos \frac{3\pi y}{2s} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2p} (1+2n)x \cdot \cos \frac{\pi}{2s} (1+2m)y \cdot e^{-a^2 \lambda_{n,m} t}.$$

При $n = 0, m = 1$, $C_{0,1}$ будет равно B .

Получаем конечное решение задачи (2.17):

$$W = B \sin \frac{\pi x}{2p} \cos \frac{3\pi y}{2s} \cdot e^{-\left[\left(\frac{\pi}{2p}\right)^2 + \left(\frac{3\pi}{2s}\right)^2\right] a^2 t}.$$

(2.26)

Упростим уравнение (2.26):

$$W = B \cdot e^{-\frac{a^2 \pi^2 \left(\frac{1}{p^2} + \frac{9}{s^2}\right) t}{4}} \sin \frac{\pi x}{2p} \cos \frac{3\pi y}{2s}$$

(2.27)

Решение задачи (2.18) ищем в виде:

$$\omega = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} T_{n,m}(t) \cdot \sin \frac{\pi}{2p} (1+2n)x \cdot \cos \frac{\pi}{2s} (1+2m)y.$$

(2.28)

Подставляя (2.28) в уравнение (2.18), получаем:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0, m=1}^{\infty} T'_{n,m} \cdot \sin \frac{\pi}{2p} (1+2n)x \cdot \cos \frac{\pi}{2s} (1+2m)y = \\ & = -a^2 \sum_{n=0, m=1}^{\infty} \left[\left(\frac{\pi}{2p} (1+2n) \right)^2 + \left(\frac{\pi}{2s} (1+2m) \right)^2 \right] T_{n,m} \cdot \sin \frac{3\pi x}{2p} \cos \frac{\pi y}{2s} + \\ & + A \sin \frac{3\pi x}{2p} \cos \frac{\pi y}{2s}. \end{aligned}$$

(2.29)

При $n = 1, m = 0$ решение уравнения имеет следующий вид:

$$T'_{1,0} + a^2 \left[\left(\frac{3\pi x}{2p} \right)^2 + \left(\frac{\pi y}{2s} \right)^2 \right] T = A.$$

Представим $\left(\frac{3\pi x}{2p}\right)^2 + \left(\frac{\pi y}{2s}\right)$ в виде b^2 .

$$\int \frac{dT}{T} = -b^2 \int dt + C_{1,0}.$$

$$T(t) = C_{1,0} e^{-b^2 t}; T(t) = C(t) e^{-b^2 t}; T'(t) = C'(t) e^{-b^2 t} - b^2 C(t) e^{-b^2 t}.$$

$$C'(t) e^{-b^2 t} - b^2 C(t) e^{-b^2 t} + b^2 C(t) e^{-b^2 t} = 1.$$

После сокращения слагаемых, получаем:

$$C'(t) = e^{-b^2 t}; C(t) = \int e^{-b^2 t} dt = \frac{1}{b^2} e^{b^2 t} + \tilde{C}.$$

$$T_{0,0}(t) = \left(\frac{A e^{b^2 t}}{b^2} + \tilde{C} \right) e^{-b^2 t}.$$

(2.30)

Подставляя полученное выражение (2.30) в решение неоднородного уравнения, получаем:

$$\omega(x, y, t) = \left(\frac{A e^{b^2 t}}{b^2} + \tilde{C} \right) e^{-b^2 t} \cdot \sin \frac{3\pi x}{2p} \cos \frac{\pi y}{2s},$$

где $t = 0$, $C_{1,0} = -\frac{A}{b^2}$ из начального условия.

Подставляя полученные решения в $u(x, y, t) = w + \omega$, получим конечный ответ:

$$u(x, y, t) = B \cdot e^{-\frac{a^2 \pi^2}{4} \left(\frac{1}{p^2} + \frac{9}{s^2} \right) t} \sin \frac{\pi x}{2p} \cos \frac{3\pi y}{2s} + \frac{4A}{a^2 \pi^2 \left(\frac{9}{p^2} + \frac{1}{s^2} \right)} \cdot \left(1 - e^{-\frac{a^2 \pi^2}{4} \left(\frac{9}{p^2} + \frac{1}{s^2} \right) t} \right) \sin \frac{3\pi x}{2p} \cos \frac{\pi y}{2s}.$$

Таким образом, было найдено аналитическое решение задачи (2.15).

В момент времени $t = 1$ с., график аналитического решения будет выглядеть следующим образом:

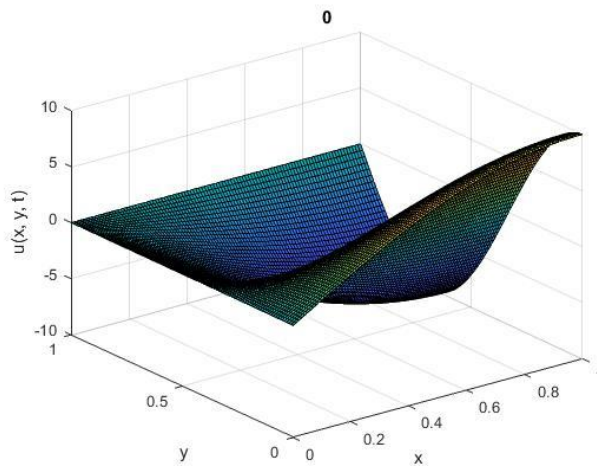


Рисунок 3 – график аналитического решения задачи (2.15)

2.3 Аналитический метод решения краевой задачи в однородном цилиндре

2.3.1 Концептуальная постановка задачи

В бесконечно однородном цилиндре радиуса R с момента температуры $t = 0$ выделяется тепло, плотность Q которой является постоянной. Требуется определить распределение температуры в однородном цилиндре при $t > 0$, считая температуру $t = 0$ равной нулю, поверхность цилиндра поддерживается при температуре T .

2.3.2 Математическая постановка задачи

Необходимо найти решение уравнения:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{a^2}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right) + \frac{Q}{c\rho}, \quad 0 \leq r < R, \quad t > 0, \quad |u(0, t)| < \infty,$$

(2.31)

удовлетворяющее дополнительным условиям:

$$u(R, t) = T \text{ – граничное условие.}$$

$$u(r, 0) = 0 \text{ – начальное условие.}$$

Требуется найти распределение температуры в однородном цилиндре.

2.3.3 Аналитическое решение задачи

Для начала обнулیم граничные условия для дальнейшего решения задачи. Если решение будет истраться в виде $u(r,t) = v(r,t) + T$, то задача придет к нахождение функции $v(r,t)$ в исходном уравнении. Таким образом, граничное и начальное условия примут следующий вид:

$$u(R,t) = v(r,t) + T = T, \text{ следовательно } - v(R,t) = 0.$$

$$u(r,0) = v(r,0) + T = 0, \text{ следовательно } - v(r,0) = -T.$$

Решение будем находить в следующем виде:

$$v(r,t) = v^*(r,t) + \bar{v}(r,t),$$

где $v^*(r,t)$ – это решение неоднородного уравнения с нулевыми начальным и граничным условиями, $\bar{v}(r,t)$ – решение однородного уравнения с заданными начальным и граничным условиями.

Первым шагом будет являться нахождение $\bar{v}(r,t)$. Решим уравнение:

$$\bar{v}(r,t) = \frac{a^2}{r} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial r^2} \right),$$

(2.32)

граничное и начальное условия которого являются

$$\begin{cases} \bar{v}(R,t) = 0 \\ \bar{v}(r,0) = -T \end{cases}.$$

Решение ищем в виде:

$$\bar{v}(x,t) = T(t)W(r).$$

Граничное условие принимает вид:

$$W(r) = 0.$$

Начальное условие принимает вид:

$$T(0) = -T.$$

(2.33)

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} T'(t) + \lambda^2 a^2 T(t) = 0 \\ rW''(r) + W'(r) + \lambda^2 rW(r) = 0 \end{cases}.$$

Решая первое уравнение, получаем:

$$T(t) = e^{-a^2 \lambda^2 t}.$$

Разделив второе уравнение на r , получим уравнение Бесселя нулевого порядка:

$$(2.34) \quad W_n(r) = J_0(\lambda_n r).$$

Согласно граничному условию $W(R) = 0$ найдем λ_n :

$$W(R) = J_0(\lambda_n R) = 0.$$

Из этого следует то, что $\lambda_n R = \mu_n$ – положительные корни Бесселя

$J_0(\lambda_n R) = 0$. Выведем λ_n из формулы выше: $\lambda_n = \frac{\mu_n}{R}$. Подставляя в уравнение

(2.34), получаем:

$$W_n(r) = J_0\left(\frac{\mu_n}{R} r\right).$$

Таким образом, получаем:

$$\begin{cases} T(t) = e^{-a^2 \lambda^2 t} \\ W_n(r) = J_0\left(\frac{\mu_n}{R} r\right) \end{cases}.$$

Решение уравнения (2.32) запишем в виде суперпозиций двух решений $W_n(r)$ и $T_n(t)$:

$$\bar{v}(r, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{a\mu_n}{R}\right)^2 t} J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right).$$

Следующим этапом является нахождение коэффициентов A_n . Для того, чтобы их найти, воспользуемся начальным условием (2.33):

$$\bar{v}(r,0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{a\mu_n}{R}\right)^2 t} J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) = A_n J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) = -T.$$

Разложим $-T$ в ряд Фурье-Бесселя, в котором коэффициенты разложения находятся по следующей формуле:

$$a_i = \frac{2}{l^2 J_{\nu+1}^2(\mu_i)} \int_0^l x f(x) J_{\nu}\left(\frac{\mu_i x}{l}\right) dx.$$

$$-T = \sum_{n=0}^{\infty} a_n J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right),$$

где

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{R^2 J_1^2(\mu_n)} \int_0^R r (-T) J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) dr = -\frac{2T}{R^2 J_1^2(\mu_n)} \int_0^R r J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) dr = \\ &= \left| \frac{\mu_n r}{R}, \quad r = \frac{R}{\mu_n} t, \quad dr = \frac{R}{\mu_n} dt \right| = -\frac{2T}{R^2 J_1^2(\mu_n)} \frac{R^2}{\mu_n^2} \int_0^{\mu_n} t J_0(t) dt = \dots \end{aligned}$$

для дальнейшего решения воспользуемся следующей формулой:

$$\begin{aligned} \int_0^x r J_0(r) dr &= x J_1(x). \\ \dots &= -\frac{2T}{R^2 J_1^2(\mu_n)} t J_1(t) \Big|_0^{\mu_n} = -\frac{2T}{\mu_n^2 J_1^2(\mu_n)} \frac{\mu_n r}{R} J_1\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) \Big|_0^R = \\ &= \frac{2T}{\mu_n^2 J_1^2(\mu_n) R} R J_1(\mu_n) = -\frac{2T}{\mu_n^2 J_1^2(\mu_n)}. \end{aligned}$$

Таким образом, получается:

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right),$$

где $a_n = -\frac{2T}{\mu_n^2 J_1^2(\mu_n)}$;

из этого можно найти то, что $A_n = -\frac{2T}{\mu_n^2 J_1^2(\mu_n)}$.

Решение однородного уравнения с заданными граничным и начальным условиями будет выглядеть следующим образом:

$$\bar{v}(r, t) = -2T \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_n J_1(\mu_n)} e^{-\left(\frac{a\mu_n}{R}\right)^2 t} J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right),$$

где μ_n – положительные корни уравнения Бесселя $J_0(\mu_n) = 0$.

Вторым шагом найдем $v^*(r, t)$. Решим уравнение

$$v^*(r, t) = \frac{a^2}{r} \left(\frac{\partial v^*}{\partial r} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial r^2} \right) + \frac{Q}{c\rho}$$

(2.35)

граничное и начальное условия которого являются

$$\begin{cases} v^*(R, t) = 0 \\ v^*(r, 0) = 0 \end{cases}.$$

(2.36)

Решение будем находить в следующем виде:

$$v^*(r, t) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n(t) J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right).$$

(2.37)

Тогда граничное и начальное условия принимают вид:

$$\begin{cases} J_0(\mu_n) = 0 \\ V_n(0) = 0 \end{cases}.$$

Подставляя в уравнение (2.37), получаем:

$$\sum_{n=0}^{\infty} V'_n(t) J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) = \frac{a^2}{r} \left(\sum_{n=0}^{\infty} V'_n(t) J'_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) + r \sum_{n=0}^{\infty} V''_n(t) J'_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) \right) + \frac{Q}{c\rho}.$$

(2.38)

Согласно следующим частным случаям, преобразуем правую часть равенства:

$$\begin{cases} J'_0(x) = -J_1(x) \\ J''_0(x) = \frac{1}{2}[J_2(x) - J_0(x)] \end{cases};$$

$$\begin{aligned} v(r,t) &= -\frac{2QR^2}{k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^3 J_1(\mu_n)} e^{-\left(\frac{a\mu_n}{R}\right)^2 t} J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) - \\ &- 2T \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^3 J_1(\mu_n)} e^{-\left(\frac{a\mu_n}{R}\right)^2 t} J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) = \\ &= -2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(k\mu_n^2 T + QR^2)}{k\mu_n^3 J_1(\mu_n)} e^{-\left(\frac{a\mu_n}{R}\right)^2 t} J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) = \dots \end{aligned}$$

Из формулы $J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x)$ выразим $J_2(x) = \frac{2}{x} J_1(x) - J_0(x)$ и

применим для преобразования.

$$\begin{aligned} \dots &= -a^2 \sum_{n=0}^{\infty} V_n(t) \left(\frac{-J_1\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) \frac{\mu_n}{R} + \left(\frac{\mu_n}{R}\right)^2 \frac{R J_1\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)}{\mu_n} - \frac{1}{2} J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) \left(\frac{\mu_n}{R}\right)^2 - \right. \\ &\left. - \frac{1}{2} J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) \left(\frac{\mu_n}{R}\right)^2 \right) = \\ &= -\frac{a^2}{R^2} \sum_{n=0}^{\infty} V_n(t) \mu_n^2 J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right). \end{aligned}$$

После всех проделанных преобразований уравнение (2.38) принимает следующий вид:

$$\sum_{n=0}^{\infty} V'_n(t) J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) = -\frac{a^2}{R^2} \sum_{n=0}^{\infty} V_n(t) \mu_n^2 J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) + \frac{Q}{c\rho}.$$

(2.39)

Далее разложим $\frac{Q}{c\rho}$ в ряд по функциям Бесселя благодаря разложению

Фурье-Бесселя:

$$\frac{Q}{c\rho} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right).$$

a_n найдем следующим образом:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{R^2 J_1^2(\mu_n)} \int_0^R r \frac{Q}{c\rho} J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) dr = \frac{2Q}{c\rho R^2 J_1^2(\mu_n)} \int_0^R r J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) dr = \\ &= \left| \frac{\mu_n r}{R} = t, \quad r = \frac{R}{\mu_n} t, \quad dr = \frac{R}{\mu_n} dt \right| = \frac{2Q}{c\rho R^2 J_1^2(\mu_n)} \frac{R^2}{\mu_n^2} t \int_0^{\mu_n} r J_0(t) dt = \dots \end{aligned}$$

для дальнейшего решения воспользуемся следующей формулой:

$$\begin{aligned} \int_0^x r J_0(r) dr &= x J_1(x). \\ \dots &= \frac{2Q}{c\rho \mu_n J_1^2(\mu_n) R} R J_1(\mu_n) = \frac{2Q}{c\rho \mu_n J_1^2(\mu_n)}. \end{aligned}$$

Получаем, что:

$$\frac{Q}{c\rho} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2Q}{c\rho \mu_n J_1^2(\mu_n)} J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right).$$

Уравнение (2.38) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} V'_n(t) J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) &= -\frac{a^2}{R^2} \sum_{n=0}^{\infty} V_n(t) \mu_n^2 J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) + \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2Q}{c\rho \mu_n J_1^2(\mu_n)} J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right). \end{aligned} \tag{2.40}$$

Из проделанного можно записать обыкновенное неоднородное дифференциальное уравнение, после решения которого выходит окончательный ответ. Оно выглядит следующим образом:

$$V'_n(t) = -\frac{a^2 \mu_n^2}{R^2} V_n(t) + \frac{2Q}{c\rho \mu_n J_1(\mu_n)}. \tag{2.41}$$

Решение однородного уравнения будет выглядеть таким образом:

$$V_n'(t) = -\frac{a^2 \mu_n^2}{R^2} V_n(t); \quad V_n(t) = e^{-\left(\frac{a \mu_n}{R}\right)^2 t}.$$

Решение неоднородного уравнения будет находиться в виде $\tilde{V}_n(t) = A$.

Подставляя в уравнение (2.41), находим A :

$$0 = -\frac{a^2 \mu_n^2}{R^2} A + \frac{2Q}{c r \mu_n J_1(\mu_n)}; \quad A = \frac{2QR^2}{c r a^2 \mu_n^3 J_1(\mu_n)}.$$

Решение изначального неоднородного дифференциального уравнения (2.41) будет выглядеть следующим образом:

$$V_n(t) = e^{-\left(\frac{a \mu_n}{R}\right)^2 t} + \frac{2QR^2}{c r a^2 \mu_n^3 J_1(\mu_n)}.$$

(2.42)

Решение уравнения (2.40) будет иметь вид:

$$V_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\left(\frac{a \mu_n}{R}\right)^2 t} + \frac{2QR^2}{c r a^2 \mu_n^3 J_1(\mu_n)}.$$

(2.43)

Выражение (2.43) подставим в предполагаемое решение

$v^*(r, t) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n(t) J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)$. Таким образом, получаем:

$$v^*(r, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n e^{-\left(\frac{a \mu_n}{R}\right)^2 t} + \frac{2QR^2}{c r a^2 \mu_n^3 J_1(\mu_n)} \right) J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right).$$

Чтобы найти A_n , воспользуемся начальным условием (2.36):

$$\begin{aligned}
v^*(r,t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n e^{-\left(\frac{a\mu_n}{R}\right)^2 t} + \frac{2QR^2}{c\rho a^2 \mu_n^3 J_1(\mu_n)} \right) J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n + \frac{2QR^2}{c\rho a^2 \mu_n^3 J_1(\mu_n)} \right) J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) = 0; \\
A_n &= -\frac{2QR^2}{c\rho a^2 \mu_n^3 J_1(\mu_n)}.
\end{aligned}$$

Решение уравнения (2.36) будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned}
v^*(r,t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2QR^2}{c\rho a^2 \mu_n^3 J_1(\mu_n)} e^{-\left(\frac{a\mu_n}{R}\right)^2 t} + \frac{2QR^2}{c\rho a^2 \mu_n^3 J_1(\mu_n)} \right) J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{2QR^2}{c\rho a^2 \mu_n^3 J_1(\mu_n)} e^{-\left(\frac{a\mu_n}{R}\right)^2 t} J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right).
\end{aligned}$$

Решение $v(r,t)$ в виде суммы двух решений принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}
v(r,t) = v^*(r,t) + \bar{v}(r,t) &= -\frac{2QR^2}{c\rho a^2} \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1}{\mu_n^3 J_1(\mu_n)} e^{-\left(\frac{a\mu_n}{R}\right)^2 t} J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) - \\
&- 2T \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_n J_1(\mu_n)} e^{-\left(\frac{a\mu_n}{R}\right)^2 t} J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right).
\end{aligned}$$

(2.44)

Известно, что коэффициент теплопроводности k обозначен формулой $k = a^2 c\rho$. Подставляя данное выражение в решение (2.44) получим следующее преобразование:

$$\begin{aligned}
v(r,t) &= -\frac{2QR^2}{c\rho a^2} \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1}{\mu_n^3 J_1(\mu_n)} e^{-\left(\frac{a\mu_n}{R}\right)^2 t} J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) - \\
&- 2T \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_n J_1(\mu_n)} e^{-\left(\frac{a\mu_n}{R}\right)^2 t} J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) = \\
&= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(k\mu_n^2 T + QR^2)}{k\mu_n^3 J_1(\mu_n)} e^{-\left(\frac{a\mu_n}{R}\right)^2 t} J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right).
\end{aligned}$$

Конечный ответ будет выглядеть следующим образом:

$$u(r,t) = T - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(k\mu_n^2 T + QR^2)}{k\mu_n^3 J_1(\mu_n)} e^{-\left(\frac{a\mu_n}{R}\right)^2 t} J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right),$$

где μ_n – положительные корни уравнения Бесселя $J_0(\mu_n) = 0$.

Таким образом, было найдено аналитическое решение данной задачи.

При значениях радиуса цилиндра R , равного 10, температуры на поверхности T , равной 10, постоянной плотности тепла Q , равной 1, удельной теплоемкости c , равной 1, плотности ρ , равной 2, нормированного коэффициента a^2 , равного, график решения будет выглядеть следующим образом:

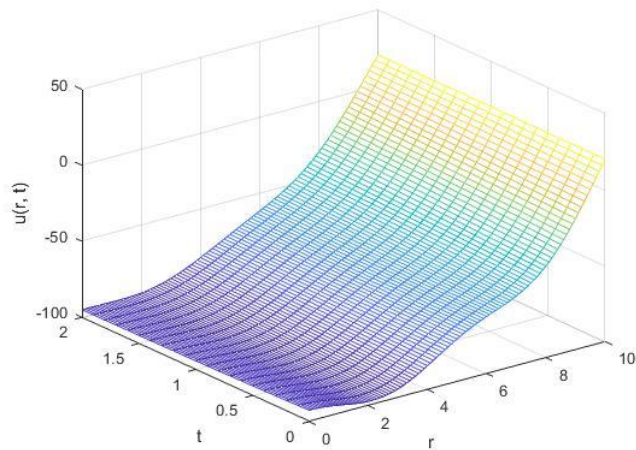


Рисунок 4 – График аналитического решения задачи (2.31)

3 ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И ОБЗОР ПРОГРАММНЫХ ПРОДУКТОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПОСТАВЛЕННЫХ ЗАДАЧ

3.1 Обзор пакета прикладных программ MATLAB

MATLAB – пакет прикладных программ для решения задач технических вычислений. Пакет используют большинство работников научных и инженерных сфер. MATLAB поддерживается на большинстве современных операционных систем.

Язык MATLAB является высокоуровневым интерпретируемым языком программирования, в который входят основанные на матрицах структуры данных, большой спектр функций, интегрированную среду разработки, объектно-ориентированные возможности и интерфейсы к программам, написанным на других языках программирования [16].

3.2 Краткая характеристика возможностей ППП MATLAB

Из-за того, что MATLAB ориентирован на матричные вычисления с имитацией параллельных вычислений программы, а также упрощенными средствами создания циклов, данный ППП является очень эффективным в решении многих задач. Последние версии системы поддерживают 64-разрядные микропроцессоры и многоядерные микропроцессоры, что обеспечивает высочайшие показатели по скорости вычислений и скорости математического имитационного моделирования [16].

В MATLAB очень хорошо разработаны средства работы с многомерными массивами, большими и разреженными матрицами, а также многими типами данных. Система прошла долгий путь развития от узко специализированного матричного программного модуля, который разрабатывался и использовался только на больших ЭВМ, до универсальной интегрированной СКМ, ориентированной на массовые персональные компьютеры класса IBM PC, AT и Macintosh, рабочие станции UNIX и даже суперкомпьютеры. MATLAB имеет

мощные средства диалога, графики и комплексной визуализации вычислений [17].

MATLAB также расширяется при помощи большого количества пакетов прикладных программ, которые называются расширения. Самым известным пакетом можно выделить Simulink, который обеспечивает блочное имитационное моделирование различных систем и устройств.

Однако даже без пакетов расширений MATLAB является мощной операционной средой для выполнения огромного числа математических и научно-технических расчетов и вычислений и создания пользователями своих пакетов расширения и библиотек процедур и функций. Новые версии системы имеют встроенный компилятор, позволяющие создавать исполняемые файлы [18].

3.3 Метод конечных разностей

Для того, чтобы показать графически решение нестационарных тепловых процессов, понадобится MATLAB. С помощью его встроенных функций и возможностей можно реализовать численный метод, который будет выдавать нужный результат для достижения поставленной цели.

Конкретно для математического моделирования нестационарных тепловых процессов был выбран метод конечных разностей, который можно реализовать в выше описанном программном продукте. Данный метод отчетливо позволяет вывести нужную математическую модель, а также проверить несколько случаев при изменении входных данных [14].

Метод конечных разностей позволяет заменить начальную задачу ее дискретным аналогом (разностной схемой). В дальнейшем применяются специальные алгоритмы для решения дискретной задачи.

Уравнение теплопроводности переделывается на сетке разностной схемой или уравнением в конечных разностях. Если граничные условия также заменены разностными схемами, то получается система алгебраических уравнений в конечных разностях с числом неизвестных (температур), которые равны числу узлов сетки (уравнений).

3.3.1 Явная разностная схема

Рассмотрим случай двух независимых переменных:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T;$$

(3.1)

$u(x, 0) = f(x)$ – начальное условие;

$u(0, t) = \varphi(t)$ – граничное условие.

Расчетная область разбивается на прямоугольную равномерную по осям x и t сетку с узлами x_i и t_j . Уравнения узлов будут выглядеть следующим обра-

зом: $x_i = ih$, $0 \leq i \leq N$ и $t_j = j\tau$, $0 \leq j \leq M$, где $h = \frac{l}{N}$ – шаг сетки по координате

x , а $\tau = \frac{T}{M}$ – шаг сетки по времени t .

Далее исходное уравнение заменяется конечно-разностным:

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\tau} = a^2 \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}.$$

(3.2)

Выведем $u_{i,j+1}$ из общего уравнения:

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} + \frac{a^2 \tau}{h^2} (u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}).$$

(3.3)

Разбирая формулу (3.2) можно понять, что если известны значения функции $u(x, t)$ в точках j -го слоя с помощью этой формулы можно вычислить значения $u(x, t)$ в точках дальше идущего $(j+1)$ -го слоя. Если в вычислении участвуют четыре соседних узла, реализуется так называемая явная схема, представленная на рисунке 5 [15].

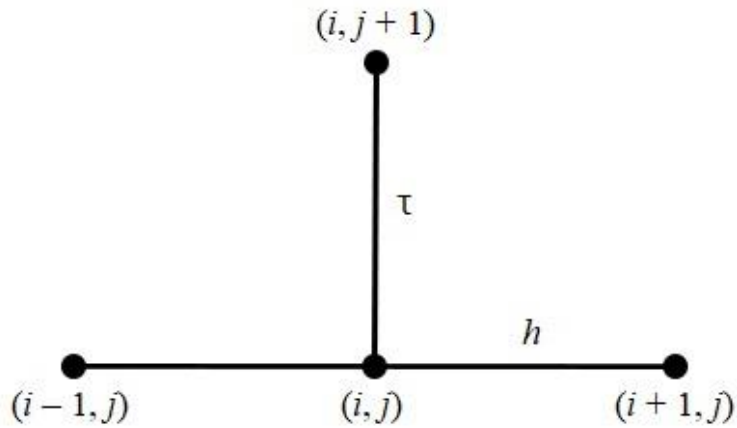


Рисунок 5 – Явная разностная схема

Данная явная схема является абсолютно устойчивой, так как имеет точность порядка $O(\tau) + O(h^2)$. Она аппроксимирует уравнение (3.2) со вторым порядком по координате и с первым порядком по времени.

3.3.2 Неявная разностная схема

Существует также неявная разностная схема, смысл которой заключается в том, что неизвестными узлами сетки являются те, которые находятся в точках идущего $(j+1)$ -го слоя. Шаблон данной схемы представлен на рисунке 6. Для выбранного случая двух независимых переменных, конечно-разностное уравнение будет выглядеть следующим образом [15]:

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\tau} = a^2 \frac{u_{i-1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1}}{h^2}.$$

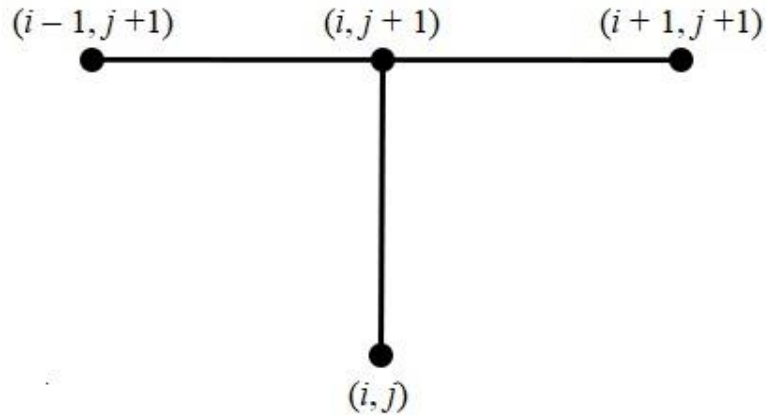


Рисунок 6 – Неявная разностная схема

Неявная разностная схема является абсолютно устойчивой, так как имеет точность порядка $O(\tau) + O(h^2)$. Она аналогично явной схеме аппроксимирует уравнение (2.1) со вторым порядком по координате и с первым порядком по времени.

3.3.3 Схема Кранка-Николсон

Доработали неявную схему Кранк и Николсон. Их схема основана на численных приближениях для решения конечно-разностного уравнения (3.2). Между рядами сетки вводятся дополнительные узлы $\left(x, t + \frac{\tau}{2}\right)$. Данный вид схемы представлен на рисунке 7. Уравнение для случая двух независимых переменных будет выглядеть следующий образом [14]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T;$$

(3.4)

Данное уравнение (3.4) заменяется конечно-разностным следующего вида:

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\tau} = a^2 \frac{(u_{i-1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1}) + (u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j})}{2h^2}.$$

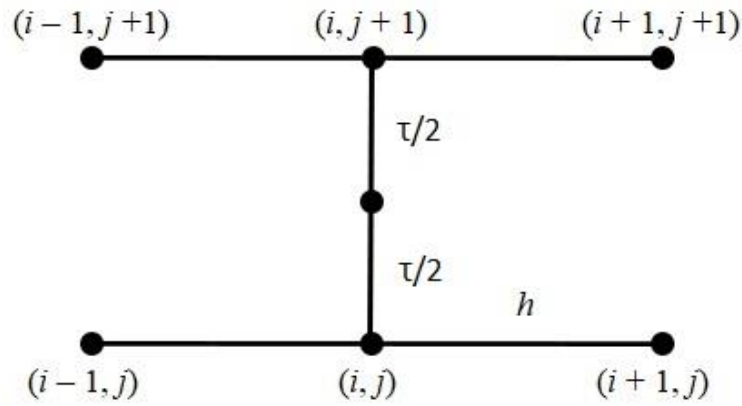


Рисунок 7 – Схема Кранка-Николсон

Схема является абсолютно устойчивой, однако в отличие от явной и неявной схем, она аппроксимирует уравнение (3.1) со вторым порядком и по координате, и по времени: $O(\tau^2) + O(h^2)$.

3.3.4 Схема расщепления

Все рассмотренные ранее схемы полезны в том случае, когда рассматривается случай двух переменных. В отличие от уравнений относительно координаты x и времени t , данном случае добавляется еще координата y . Для случая с тремя переменными существуют другие схемы численного решения уравнений. Одной из таких является схема расщепления [19].

Рассмотрим случай трех независимых переменных:

$$(3.5) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad 0 < x < p, \quad 0 < y < s, \quad 0 < t < T;$$

$u(x, y, 0) = f(x, y)$ – начальное условие;

$u(0, y, t) = u(x, 0, t) = \varphi(t)$ – граничные условия.

Расчетная область разбивается на пространственную равномерную по осям x, y, t сетку с узлами x_i, y_j и t_k . Уравнения узлов будут выглядеть следующим образом: $x_i = ih_i, 0 \leq i \leq N_x, y_j = jh_j, 0 \leq j \leq N_y, t_j = k\tau, 0 \leq k \leq M$, где

$h_x = \frac{p}{N_x}$ – шаг сетки по координате x , $h_y = \frac{s}{N_y}$ – шаг сетки по координате y , а

$\tau = \frac{T}{M}$ – шаг сетки по времени t .

Далее исходное уравнение рассматривается два раза относительно выбранной координаты. Интервал шага τ разбивается пополам между узлами сетки $u(i, j, k)$ и $u(i, j, k + 1)$. Промежуточная точка обозначается как $u\left(i, j, k + \frac{1}{2}\right)$.

На первом полушаге записывается неявная разностная схема, которая учитывает производную второго порядка по координате x :

$$\frac{u_{i,j,k+1/2} - u_{i,j,k}}{\tau} = a^2 \frac{u_{i+1,j,k+1/2} - 2u_{i,j,k+1/2} + u_{i-1,j,k+1/2}}{h_x^2}.$$

На втором полушаге аналогично первому записывается неявная разностная схема, однако учитывается уже производная второго порядка по координате y :

$$\frac{u_{i,j,k+1} - u_{i,j,k+1/2}}{\tau} = a^2 \frac{u_{i,j+1,k+1} - 2u_{i,j,k+1} + u_{i,j-1,k+1}}{h_y^2}.$$

Шаблон схемы расщепления представлен на рисунке 8.

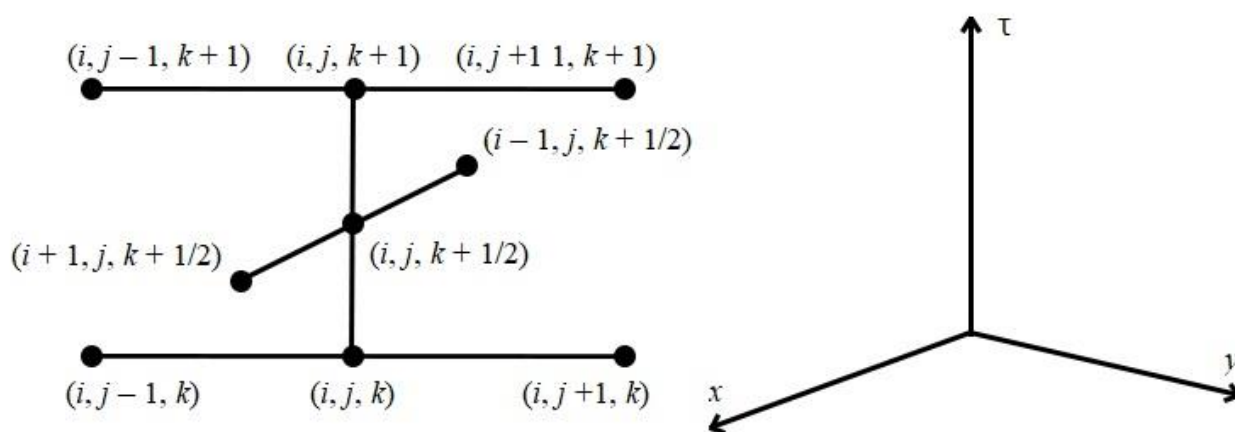


Рисунок 8 – Схема расщепления

Схема является абсолютно устойчивой, так как имеет такой же порядок аппроксимации $O(\tau^2) + O(h_x^2) + O(h_y^2)$, как и неявная разностная схема.

4 РЕАЛИЗАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

4.1 Реализация неявной разностной схемы для решения задачи

Решая численно краевую задачу в однородном стержне (2.1), воспользуемся методом конечных разностей, а именно неявной разностной схемой [20].

Разобьем расчетную область на прямоугольную равномерную по осям x и t сетку с узлами x_i и t_j . Уравнения узлов будут выглядеть следующим образом:

$x_i = ih$, $0 \leq i \leq N$ и $t_j = j\tau$, $0 \leq j \leq M$, где $h = \frac{l}{N}$ – шаг сетки по координате x , а

$\tau = \frac{T}{M}$ – шаг сетки по времени t .

Воспользуемся для аппроксимации производных приближениями следующего вида:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\tau};$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i-1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1}}{h^2}.$$

Получаем конечно-разностное уравнение, которое аппроксимирует соответствующее дифференциальное уравнение второго порядка относительно шагов h и τ :

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\tau} = a^2 \frac{u_{i-1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1}}{h^2}.$$

Зададим входные параметры для данной задачи:

l – длина стержня;

T – общее время процесса;

A – постоянная;

a^2 – нормированный коэффициент теплопроводности;

h – шаг по координате;

τ – шаг по времени;

N – число разбиений по координате;

M – число разбиений по времени.

4.1.1 Вычислительные эксперименты и анализ результатов

Проведем ряд вычислительных экспериментов при варьировании параметров модели, относительно нормированного коэффициента теплопроводности a , принимающего значения, указанных ниже в экспериментах. Целью исследований является рассмотрение изменения температуры в однородном стержне на заданном отрезке времени t с заданной координатой x .

Вычислительный эксперимент №1. Проведем первое исследование при варьировании параметров: длина стержня l равна 10, общее время процесса T равно 10, постоянная A равна 10, нормированный коэффициент a^2 равен 1. Тогда выполним реализацию математической модели по заданным параметрам. Результат вычислительного эксперимента приведен на рисунке 9.

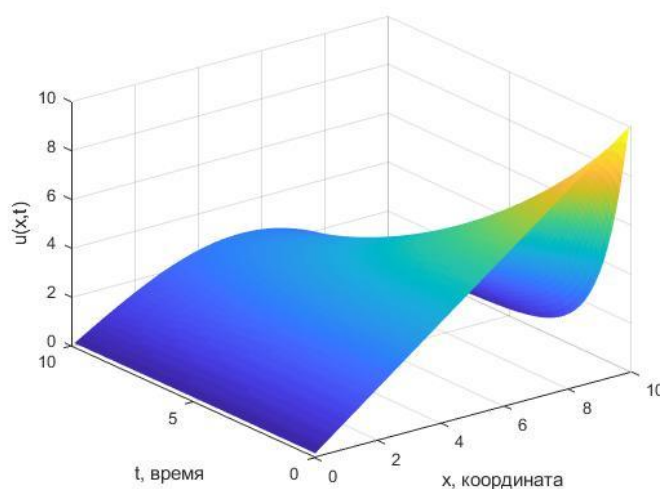


Рисунок 9 – Результаты моделирования вычислительного эксперимента №1

Вычислительный эксперимент №2. Проведем второе исследование при варьировании параметров: длина стержня l равна 10, общее время процесса T равно 10, постоянная A равна 10, нормированный коэффициент a^2 равен 4. Тогда выполним реализацию математической модели по заданным параметрам. Результат вычислительного эксперимента приведен на рисунке 10.

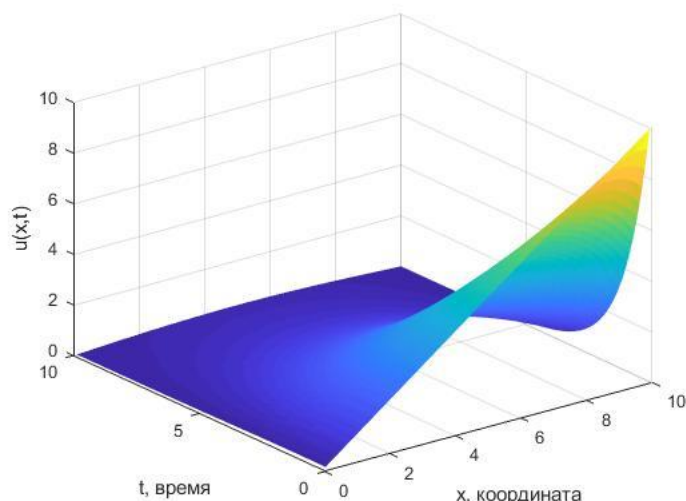


Рисунок 10 – Результаты моделирования вычислительного эксперимента №2

Вычислительный эксперимент №2. Проведем третье исследование при варьировании параметров: длина стержня l равна 10, общее время процесса T равно 10, постоянная A равна 10, нормированный коэффициент a^2 равен 16. Тогда выполним реализацию математической модели по заданным параметрам. Результат вычислительного эксперимента приведен на рисунке 11.

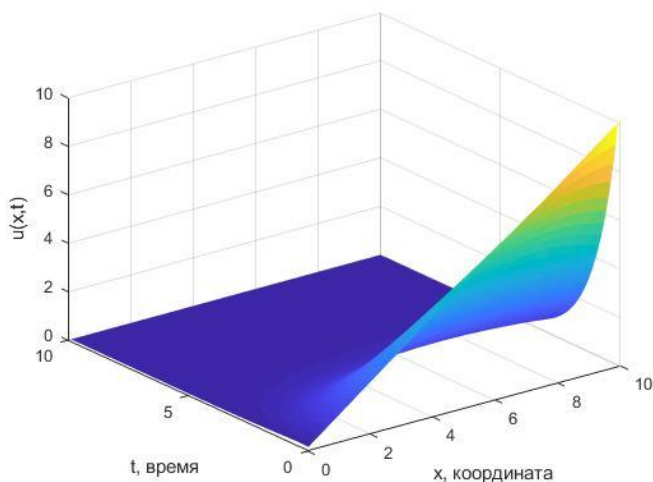


Рисунок 11 – Результаты моделирования вычислительного эксперимента №3

Вычислительный эксперимент №4. Проведем третье исследование при варьировании параметров: длина стержня l равна 10, общее время процесса T равно 10, постоянная A равна 10, нормированный коэффициент a^2 равен 25. То-

гда выполним реализацию математической модели по заданным параметрам. Результат вычислительного эксперимента приведен на рисунке 12.

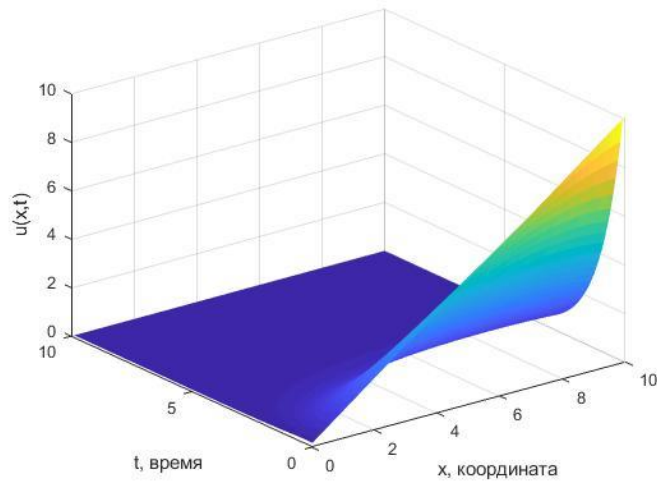


Рисунок 12 – Результаты моделирования вычислительного эксперимента №4

При исследовании полученных графиков можно сделать вывод о том, что данная модель удовлетворяет граничным условиям $u(0,t)=0$ и $u(l,t)=Ae^{-t}$. Исходя из модели теплопроводности, следует, что на конце стержня, где $x=0$, температура равна нулю. На другом конце стержня, где $x=l$, температура убывает по экспоненте.

Из проделанных вычислительных экспериментов при варьировании параметра a^2 следует то, что данная модель адекватно описывает распределение тепла в однородном стержне.

4.2 Реализация схемы расщепления для решения задачи

При решении численным методом задачи в однородном прямоугольнике (2.15), воспользуемся методом конечных разностей. Так как дифференциальное уравнение описывает распределение тепла в пространстве, воспользуемся схемой расщепления.

Расчетная область разбивается на пространственную равномерную по осям x, y, t сетку с узлами x_i, y_j и t_k . Уравнения узлов будут выглядеть следующим образом: $x_i = ih_x, 0 \leq i \leq N_x, y_j = jh_y, 0 \leq j \leq N_y, t_k = kh_t, 0 \leq k \leq M$, где

$h_x = \frac{p}{N_x}$ – шаг сетки по координате x , $h_y = \frac{s}{N_y}$ – шаг сетки по координате y , а

$\tau = \frac{T}{M}$ – шаг сетки по времени t .

Далее исходное уравнение рассматривается два раза относительно выбранной координаты. Интервал шага τ разбивается пополам между узлами сетки $u(i, j, k)$ и $u(i, j, k + 1)$. Промежуточная точка обозначается как $u\left(i, j, k + \frac{1}{2}\right)$.

Первым шагом запишем уравнение неявной разностной схемы, которое учитывает производную второго порядка по координате x :

$$\frac{u_{i,j,k+1/2} - u_{i,j,k}}{\tau} = a^2 \frac{u_{i+1,j,k+1/2} - 2u_{i,j,k+1/2} + u_{i-1,j,k+1/2}}{h_x^2} + \frac{1}{2} A \sin \frac{3\pi x_i}{2p} \cos \frac{\pi y_j}{2s}.$$

На втором полушаге аналогично первому записывается уравнение неявной разностной схемы, однако учитывается уже производная второго порядка по координате y :

$$\frac{u_{i,j,k+1} - u_{i,j,k+1/2}}{\tau} = a^2 \frac{u_{i,j+1,k+1} - 2u_{i,j,k+1} + u_{i,j-1,k+1}}{h_y^2} + \frac{1}{2} A \sin \frac{3\pi x_i}{2p} \cos \frac{\pi y_j}{2s}.$$

Зададим входные параметры для данной задачи:

p – длина стороны прямоугольника по x ;

s – длина стороны прямоугольника по y ;

T – общее время процесса;

t – момент времени;

A – постоянная;

B – постоянная;

a^2 – нормированный коэффициент температуропроводности;

h – шаг по координате;

τ – шаг по времени;

N_x – число разбиений по координате x ;

N_y – число разбиений по координате y ;

M – число разбиений по времени.

4.2.1 Вычислительные эксперименты и анализ результатов

Проведем ряд вычислительных экспериментов при варьировании параметров модели, относительно времени T , которое принимает заданные значения. Целью исследований является рассмотрение изменения температуры в однородном стержне в заданные моменты времени t с заданными координатами x и y .

Вычислительный эксперимент №1. Проведем первое исследование при варьировании параметров: длина стороны прямоугольника по x – 1, длина стороны прямоугольника по y – 1, момент времени t равен 1, общее время процесса T равно 2, постоянная A равна 10 К, постоянная B равна 10, нормированный коэффициент a^2 равен 1. Тогда выполним реализацию математической модели по заданным параметрам. Результат вычислительного эксперимента приведен на рисунке 13.

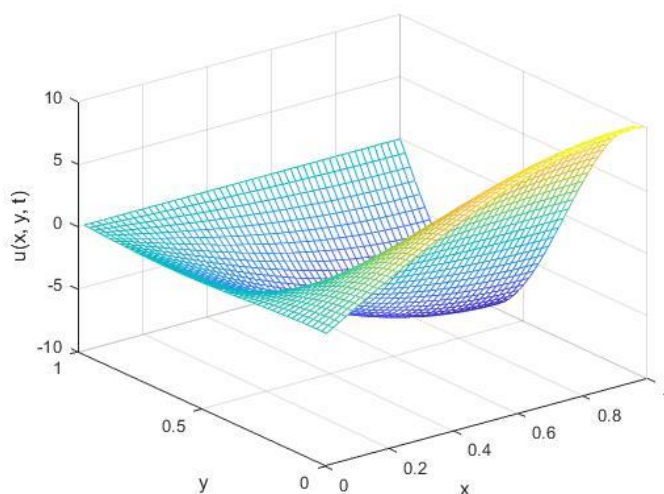


Рисунок 13 – Результаты моделирования вычислительного эксперимента №1

Вычислительный эксперимент №2. Проведем первое исследование при варьировании параметров: длина стороны прямоугольника по x – 1, длина стороны прямоугольника по y – 1, момент времени t равен 2, общее время процесса T равно 2, постоянная A равна 10, постоянная B равна 10, нормированный коэффициент a^2 равен 1. Тогда выполним реализацию математической модели по

заданным параметрам. Результат вычислительного эксперимента приведен на рисунке 14.

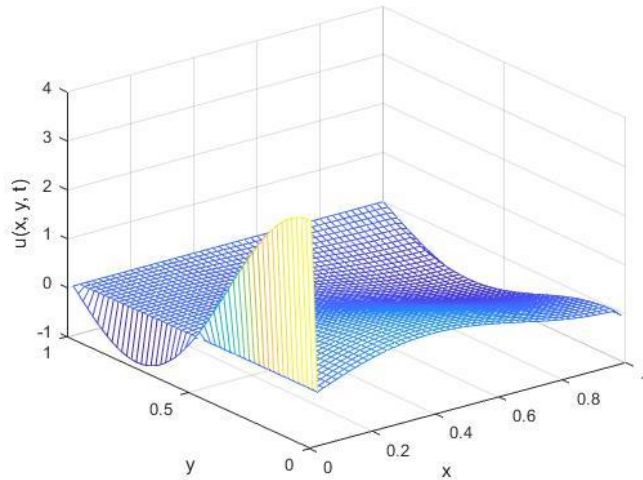


Рисунок 14 – Результаты моделирования вычислительного эксперимента №2

Вычислительный эксперимент №2. Проведем первое исследование при варьировании параметров: длина стороны прямоугольника по x – 1, длина стороны прямоугольника по y – 1, момент времени t равен 3, общее время процесса T равно 2, постоянная A равна 10, постоянная B равна 10, нормированный коэффициент a^2 равен 1. Тогда выполним реализацию математической модели по заданным параметрам. Результат вычислительного эксперимента приведен на рисунке 15.

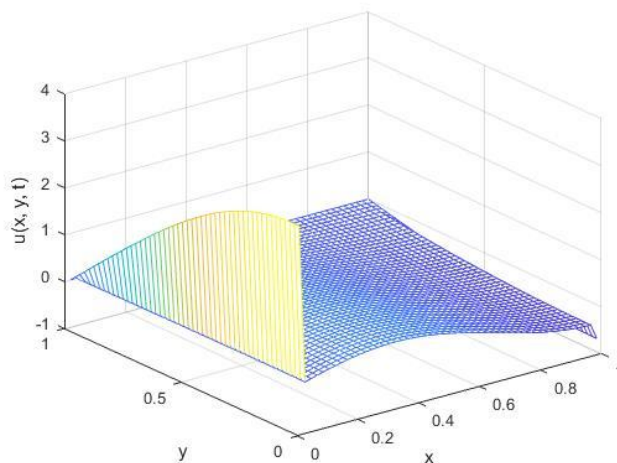


Рисунок 15 – Результаты моделирования вычислительного эксперимента №3

При исследовании полученных графиков можно сделать вывод о том, что данная модель удовлетворяет граничным условиям $u(0, y, t) = u_x(p, y, t) = 0$ и $u_y(x, 0, t) = u(x, s, t) = 0$. На границах температура прямоугольника равна нулю.

Из проделанных вычислительных экспериментов при варьировании параметра t следует то, что данная модель адекватно описывает распределение тепла в однородном прямоугольнике.

4.3 Реализация явной разностной схемы для решения задачи

Решая численно краевую задачу в однородном цилиндре (2.31), воспользуемся методом конечных разностей, а именно явной разностной схемой.

Расчетная область разбивается на прямоугольную равномерную по осям x и t сетку с узлами x_i и t_j . Уравнения узлов будут выглядеть следующим образом:

$x_i = ih$, $0 \leq i \leq N$ и $t_j = j\tau$, $0 \leq j \leq M$, где $h = \frac{R}{N}$ – шаг сетки по координате

x , а $\tau = \frac{t}{M}$ – шаг сетки по времени t .

Воспользуемся для аппроксимации производных приближениями следующего вида:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\tau};$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2}.$$

Получаем конечно-разностное уравнение, которое аппроксимирует соответствующее дифференциальное уравнение второго порядка относительно шагов h и τ :

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\tau} = \frac{a^2}{x} \left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} + \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2} \right) + \frac{Q}{c\rho}.$$

Зададим входные параметры для данной задачи:

R – радиус цилиндра;

T – температура на поверхности;

Q – постоянная плотность тепла;

c – удельная теплоемкость;

ρ – плотность;

a^2 – нормированный коэффициент температуропроводности;

N – число разбиений по координате;

M – число разбиений по времени;

h – шаг по координате;

τ – шаг по времени;

4.3.1 Вычислительные эксперименты и анализ результатов

Проведем ряд вычислительных экспериментов при варьировании параметров модели, относительно постоянной плотности тепла Q , принимающей значения, указанных ниже в экспериментах. Целью исследований является рассмотрение изменения температуры в однородном цилиндре на заданном отрезке времени t с заданной координатой x .

Вычислительный эксперимент №1. Проведем первое исследование при варьировании параметров: радиус цилиндра R равна 10, температура на поверхности T равно 10, постоянная плотность Q равна 1, удельная теплоемкость c равна 1, плотность ρ равна 2, нормированный коэффициент a^2 равен 1. Тогда выполним реализацию математической модели по заданным параметрам. Результат вычислительного эксперимента приведен на рисунке 16.

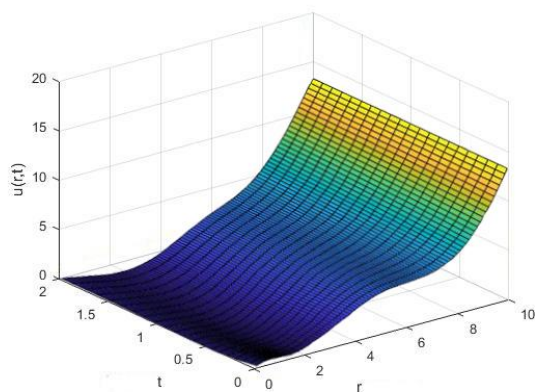


Рисунок 16 – Результаты моделирования вычислительного эксперимента №1

Вычислительный эксперимент №2. Проведем первое исследование при варьировании параметров: радиус цилиндра R равна 10, температура на поверхности T равно 10, постоянная плотность Q равна 3, удельная теплоемкость c равна 1, плотность ρ равна 2, нормированный коэффициент a^2 равен 1. Тогда выполним реализацию математической модели по заданным параметрам. Результат вычислительного эксперимента приведен на рисунке 17.

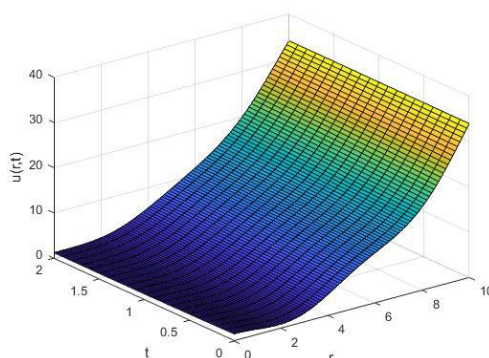


Рисунок 17 – Результаты моделирования вычислительного эксперимента №2

Вычислительный эксперимент №3. Проведем первое исследование при варьировании параметров: радиус цилиндра R равна 10, температура на поверхности T равно 10, постоянная плотность Q равна 5, удельная теплоемкость c равна 1, плотность ρ равна 2, нормированный коэффициент a^2 равен 1. Тогда выполним реализацию математической модели по заданным параметрам. Результат вычислительного эксперимента приведен на рисунке 15.

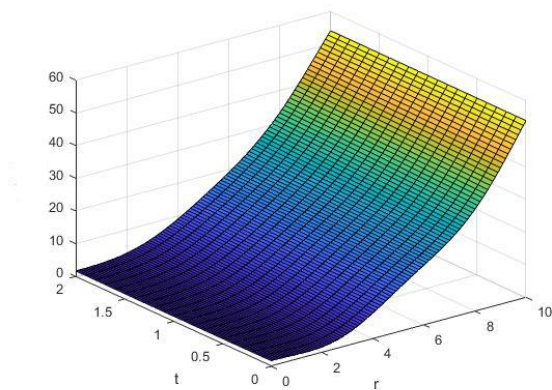


Рисунок 15 – Результаты моделирования вычислительного эксперимента №3

Вычислительный эксперимент №4. Проведем первое исследование при варьировании параметров: радиус цилиндра R равна 10, температура на поверхности T равна 10, постоянная плотность Q равна 10, удельная теплоемкость c равна 1, плотность ρ равна 2, нормированный коэффициент a^2 равен 1. Тогда выполним реализацию математической модели по заданным параметрам. Результат вычислительного эксперимента приведен на рисунке 16.

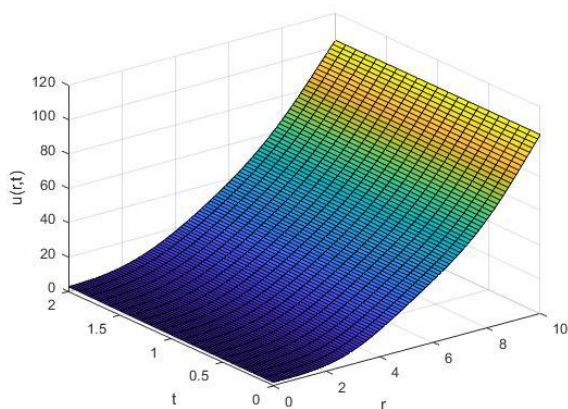


Рисунок 16 – Результаты моделирования вычислительного эксперимента №4

При исследовании полученных графиков можно сделать вывод о том, что данная модель удовлетворяет граничному условию $u(R, t) = T$.

Из проделанных вычислительных экспериментов при варьировании параметра t следует то, что данная модель адекватно описывает распределение тепла в однородном цилиндре.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной бакалаврской работе изучены различные модели процессов теплопроводности. Рассмотрены несколько видов уравнений, описывающих тепловые явления в природе.

Были представлены основные методы решения уравнений параболического типа на основе переноса тепла в однородном стержне, прямоугольной пластине, а также в однородном цилиндре. Данные задачи решены аналитическим и численным методами.

Аналитическое решение представлено с помощью метода разделения переменных. Численное решение построено методом конечных разностей. При помощи ППП Matlab найдены графики решения искомых функций. Проведен анализ результатов при помощи вычислительных экспериментов, в каждом из которых варьируется определенный параметр. В конечном итоге получено графическое решение каждой начально-краевой задачи.

Работа, связанная с нестационарной теплопроводностью, прошла апробацию на XXXII научной конференции «День науки» – АмГУ. Доклад занял III место. Сертификат участия и диплом III степени представлены в приложениях Г и Д.

Также по теме работы была опубликована следующая статья [20]:

Халеев С. С. Математическое моделирование процессов теплопроводности / С. С. Халеев, Т. В. Труфанова / Вестник Амурского государственного университета. 2023. – Вып. 101 : Сер. Естеств. и экон. науки. – С. 46-49.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1 Вороненко Б. А. Аналитическое описание процесса нестационарной теплопроводности / Б. А. Вороненко, А. Г. Крысин, В. В. Пеленко, О. А. Цуранов – Санкт-Петербург : Санкт-петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, 2014. – 49 с.

2 Байков В. А. Уравнения математической физики. / В. А. Байков, А. В. Жибер – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003 – 252 с.

3 Шабаров А. Б. Теория тепломассопереноса в нефтегазовых и строительных технологиях : учебное пособие для вузов / А. Б. Шабаров – Москва : Издательство Юрайт, 2019. – 332 с.

4 Грызлов В. С. Структурный подход в оценке теплопроводности легкого бетона : учебное пособие / В. С. Грызлов. – 2-е изд. – Москва, Вологда : Инфра-Инженерия, 2020. – 156 с.

5 Фомин А. В. Нестационарная теплопроводность в многослойной стене при аномальных зимних погодных условиях / А. В. Фомин, О. В. Мкртычев – Новороссийск : Новороссийский филиал Белгородского государственного технологического университета им. В.Г. Шухова, 2021. – С. 48-51.

6 Горбачев М. В. Тепломассообмен. Теплопроводность : учебное пособие / М. В. Горбачев. – Новосибирск : Новосибирский государственный технический университет, 2020. – 76 с.

7 Щербинин, А. Г. Теплопередача / А.Г. Щербинин, В.В. Черняев – Пермь : Пермский национальный исследовательский политехнический университет, 2012. – 42 с.

8 Фарлоу С. Уравнения в частных производных для ученых и инженеров / С. Фарлоу – М.: Мир, 1985. – 384 с.

9 Бабич В. М. Линейные уравнения математической физики. / В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. и др. – М.: Наука, 1964. – 368 с.

10 Зубов В. И. Функции Бесселя: Учебно-методическое пособие / В. И. Зубов. – М.: МФТИ, 2007. — 51 с.

11 Труфанова Т. В. Методы решения уравнений математической физики. Учебное пособие / Т. В. Труфанова, А. Г. Масловская, Е. М. Веселова – Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2015. – 196 с.

12 Юдаев Б. Н. Техническая термодинамика. Теплопередача : Учеб. для неэнергетич. спец. вузов / Б. Н. Юдаев – Высш. шк., 1988. – 479 с.

13 Мартинсон Л. К. Дифференциальные уравнения математической физики. / Л. К. Мартинсон, Ю. И. Малов – М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002 – 368 с.

14 Дегтярев А. А. Метод конечных разностей : учебное пособие / А. А. Дегтярев – Самара : Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королева (национальный исследовательский университет), 2011. – 83 с.

15 Масловская А. Г. Численные методы: использование инструментальных средств и реализация алгоритмов на базе ППП Matlab. Учебное пособие / А. Г. Масловская, А. В. Павельчук – Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2020. – 214 с.

16 Семенова Т. И. Введение в математический пакет Matlab : учебно-методическое пособие / Т. И. Семенова – Москва : Московский технический университет связи и информатики, 2016. – 88 с.

17 Дьяконов В. П. MATLAB. Полный самоучитель / В. П. Дьяконов – М.: ДМК Пресс, 2012. – 768 с.

18 Дьяконов В. П. MATLAB. Анализ, идентификация и моделирование систем : специальный справочник / В. П. Дьяконов, В. В. Круглов – Санкт-Петербург : ПИТЕР, 2002. – 448 с.

19 Кольцова, Э. М. Численные методы решения уравнений математической физики и химии : учебное пособие для вузов / Э. М. Кольцова,

А. С. Скичко, А. В. Женса – 2-е изд., испр. и доп. – Москва : Издательство Юрайт, 2023. — 220 с.

20 Халеев С. С. Математическое моделирование процессов теплопроводности / С. С. Халеев, Т. В. Труфанова / Вестник Амурского государственного университета. 2023. – Вып. 101 : Сер. Естеств. и экон. науки. – С. 46-49.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Листинг программы построения графика аналитического решения задачи в од- нородном стержне

```
function none = Untitled2()
clc;
clear;
l = 10;
T = 10
X = [0:0.1:l];
T = [0:0.1:T];
A = 5;

[xx, tt] = meshgrid (x, t);
z = (2 * A * l^2)/pi + summ(xx, tt, l)+(xx / l) * A * exp(-tt);
meshc(xx,tt,z)
xlabel ("x");
ylabel ("t");
zlabel ("u(x,t)");

grid on
end

function ret = summ(x, t, l)
    a = 1;
    ret = 0;
    for n = 1:200
        aa = ((-1)^n * (exp(a^2 * t * (-(a * pi) / l))) - exp(-t));
        bb = (n * (pi^2 * n^2 * a^2 - l^2));
        ret = (aa / bb) * sin((pi * n) / l) * x + ret;
    end
end
```

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Листинг программы моделирования нестационарного процесса теплопроводности в однородном стержне

```
a = 1;
A = 5;
l = 5;
T = 10;

N = 100;
M = 100;

h = l / N;
tau = T / M;

lambda = a * tau / h^2;

x = (1:N) * h;
t = (1:M) * tau;
[X, T] = meshgrid(x, t);

u = zeros(N, M);
for i=1:N
    u(i, 1) = A * x(i) / l;
end

matr = diag((1+2*lambda) * ones(1, N));
matr = matr + diag(-lambda * ones(1, N-1), 1);
matr = matr + diag(-lambda * ones(1, N-1), -1);
matr = matr^-1;

for j=1:M-1
    b = u(:, j);
    b(N) = b(N) + lambda * A * exp(-t(j));
    u(:, j+1) = matr * b;
end

surf(X, T, u, 'EdgeColor', 'none')
xlabel('x, координата')
ylabel('t, время')
zlabel('u')
```

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Листинг программы построения графика аналитического решения задачи в
прямоугольной пластине

```
a      = 1;
A      = 10;
B      = 10;
p      = 1;
s      = 1;
T_max  = 2;
T_array = [0 0.5 1];

[X, Y] = meshgrid(0:0.01:p, 0:0.01:s);

for i=1:length(T_array)
    t = T_array(i) * T_max;
    u = B * exp(-a^2 * pi^2 / 4 * (1 / p^2 + 9 / s^2) * t) .* sin(pi * X / 2 /
p) .* cos(3 * pi * Y / 2 / s);
    u = u + 4 * A / (a^2 * pi^2 * (9 / p^2 + 1 / s^2)) .* (1 - exp(-a^2 * pi^2 /
4 * (9 / p^2 + 1 / s^2) * t)) .* sin(3 * pi * X / 2 / p) .* cos(pi * Y / 2 / s);
    figure(i)
    surf(X, Y, u)
    title(num2str(t))
end
```

ПРИЛОЖЕНИЕ Г

Листинг программы моделирования нестационарного процесса теплопроводности в прямоугольной пластине

```
global A B p s

a      = 1;
A      = 10;
B      = 10;
p      = 1;
s      = 1;
T_max  = 2;
T_array = [0 0.5 1];

Nx = 50;
Ny = 50;
M = 50;

h_x = p / Nx;
h_y = s / Ny;
tau = T_max / M;

lambda_x = a^2 * tau / h_x^2;
lambda_y = a^2 * tau / h_y^2;

x = (1:Nx) * h_x;
y = (1:Ny) * h_y;
t = (1:M) * tau;
[X, Y] = meshgrid(x, y);

u = zeros(Nx, Ny, M);

for i=1:Nx
    for j=1:Ny
        u(i, j, 1) = f_0(x(i), y(j));
    end
end
u_tmp = u;

A_x = diag((1+2*lambda_x) * ones(1, Nx));
A_x = A_x + diag(-lambda_x * ones(1, Nx-1), 1);
A_x = A_x + diag(-lambda_x * ones(1, Nx-1), -1);
A_x(1, 1) = 1; A_x(1, 2) = 0;
A_x(Nx, Nx-1) = 1; A_x(Nx, Nx) = -1;
A_x = A_x^-1;

A_y = diag((1+2*lambda_y) * ones(1, Ny));
A_y = A_y + diag(-lambda_y * ones(1, Ny-1), 1);
A_y = A_y + diag(-lambda_y * ones(1, Ny-1), -1);
A_y(1, 1) = 1; A_y(1, 2) = -1;
A_y(Ny, Ny-1) = 0; A_y(Ny, Ny) = 1;
A_y = A_y^-1;
```

```

for k=1:M-1
    for j=1:Ny
        b_x = zeros(Nx, 1);
        for i=2:Nx-1
            if j == 1
                b_x(i) = (1 - lambda_y) * u(i, j, k) + lambda_y * u(i, j+1, k) +
tau * f(x(i), y(j));
            elseif j == Ny
                b_x(i) = lambda_y * u(i, j-1, k) + (1 - 2 * lambda_y) * u(i, j,
k) + tau * f(x(i), y(j));
            else
                b_x(i) = lambda_y * u(i, j-1, k) + (1 - 2 * lambda_y) * u(i, j,
k) + lambda_y * u(i, j+1, k) + tau * f(x(i), y(j));
            end
        end
        u_tmp(:, j, k) = A_x * b_x;
    end

    for i=1:Nx
        b_y = zeros(Ny, 1);
        for j=2:Ny-1
            if i == 1
                b_y(j) = (1 - 2 * lambda_x) * u_tmp(i, j, k) + lambda_x *
u_tmp(i+1, j, k) + tau * f(x(i), y(j));
            elseif i == Nx
                b_y(j) = lambda_x * u_tmp(i-1, j, k) + (1 - lambda_x) * u_tmp(i,
j, k) + tau * f(x(i), y(j));
            else
                b_y(j) = lambda_x * u_tmp(i-1, j, k) + (1 - 2 * lambda_x) *
u_tmp(i, j, k) + lambda_x * u_tmp(i+1, j, k) + tau * f(x(i), y(j));
            end
        end
        u(i, :, k+1) = A_y * b_y;
    end
end

num_plots = length(T_array);

% for i=1:num_plots
%     subplot(1, num_plots, i)
%     mesh(X, Y, u(:, :, floor(T_array(i) * T_max + 1)))')
%     xlabel('x');
%     ylabel('y');
%     zlabel('u(x, y, t)');
% end

figure(1)
mesh(X, Y, u(:, :, floor(T_array(1) * T_max + 1)))')
xlabel('x');
ylabel('y');
zlabel('u(x, y, t)');

figure(2)
mesh(X, Y, u(:, :, floor(T_array(2) * T_max + 1)))')
xlabel('x');
ylabel('y');
zlabel('u(x, y, t)');

figure(3)

```

```

mesh(X, Y, u(:, :, floor(T_array(3) * T_max + 1)))
xlabel('x');
ylabel('y');
zlabel('u(x, y, t)');

function z = f_0(x, y)
    global B p s
    z = B * sin(pi * x / 2 / p) .* cos(3 * pi * y / 2 / s);
end

function z = f(x, y)
    global A p s
    z = A * sin(3 * pi * x / 2 / p) .* cos(pi * y / 2 / s);
end

```


ПРИЛОЖЕНИЕ Д

Листинг программы построения графика аналитического решения задачи в од- нородном цилиндре

```
mu = [2.404826 5.520078 8.653728 11.791534];

T = 20;
a = 0.5;
c = 1;
p = 2;
k = a^2 * c * p;
Q = 10;
R = 10;
T_max = 2;

[r, t] = meshgrid(0:0.1:R, 0:0.1:T_max);

u = T;

for n=1:length(mu)
    u = u - 2 * (k * mu(n)^2 * T + Q * R^2) / (k * mu(n)^3 * besselj(1, mu(n)))
    .* exp(-(a * mu(n) / R)^2 * t) .* besselj(0, mu(n) * r / R);
end

surf(r, t, u)
xlabel('r');
ylabel('t');
zlabel('u(r, t)');
```

ПРИЛОЖЕНИЕ Е

Листинг программы моделирования нестационарного процесса теплопроводности в однородном цилиндре

```
R = 10;
N = 50;
M = 50;
time = 20;
h = R / N;
tau = time / M;
T = 20;
a = 0.5;
c = 1;
p = 2;

r = 0:h:(N - 1) * h;
t = 0:tau:(M - 1) * tau;
[X, t_max] = meshgrid(r, t);

u = zeros(N, M);

for i = 1:N
    u(i, 1) = 0;
end

for j = 2:M
    u(N, j) = T;
end

for j = 2:M
    for i = 2:N - 1
        Q = 2;
        u(i, j) = (tau * a^2) / (i*h) * ((u(i + 1, j - 1) - u(i, j - 1)) + (u(i
+ 1, j - 1) - 2 * u(i, j - 1) + u(i - 1, j - 1)) / h) + (tau * Q) / (c * p) +
u(i, j - 1);
        end
        u(1, j) = u(2, j);
    end

mesh(r, t, u')
xlabel('r, радиус')
ylabel('t, время')
zlabel('u(r,t)')
```

ПРИЛОЖЕНИЕ Ж

Сертификат участия в XXXII научной конференции АмГУ «День науки»



ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Диплом III степени за доклад на XXXII научной конференции АмГУ «День науки»

