

**Министерство науки и высшего образования Российской Федерации**  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
**АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**  
**(ФГБОУ ВО «АмГУ»)**

Факультет математики и информатики  
Кафедра математического анализа и моделирования  
Направление подготовки – 01.03.02 Прикладная математика и информатика  
Направленность (профиль) образовательной программы «Прикладная математика и информатика»

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ  
И.о. зав. кафедрой  
\_\_\_\_\_ Н.Н. Максимова  
« \_\_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2023 г.

**БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА**

на тему: Дробно-дифференциальная популяционная модель с нелокальной квадратичной нелинейностью

Исполнитель  
студент группы 952об

\_\_\_\_\_  
(подпись, дата)

Д.Е. Миньковский

Руководитель  
канд. физ.-мат. наук

\_\_\_\_\_  
(подпись, дата)

Л.И. Мороз

Нормоконтроль  
старший преподаватель

\_\_\_\_\_  
(подпись, дата)

А.Н. Дудин

Благовещенск 2023

Министерство науки высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
**АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**  
(ФГБОУ ВО «АмГУ»)

Факультет математики и информатики  
Кафедра математического анализа и моделирования

УТВЕРЖДАЮ  
И.о. зав. кафедрой  
\_\_\_\_\_ Н.Н. Максимова  
« \_\_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2023 г.

**З А Д А Н И Е**

К бакалаврской работе студента Миньковского Данила Евгеньевича

1. Тема бакалаврской работы: Дробно-дифференциальная популяционная модель с нелокальной квадратичной нелинейностью (утверждена приказом от 20.04.2023 № 951-уч)
2. Срок сдачи студентом законченной работы: 24.06.2023 г.
3. Исходные данные к бакалаврской работе: формулировка темы ВКР, литературные источники, отчет по преддипломной практике.
4. Содержание бакалаврской работы (перечень подлежащих разработке вопросов): модели популяционной динамики: основные теоретические концепции; базовые сведения об использовании дробно-дифференциального исчисления для решения уравнений субдиффузионной природы; математическое и программное обеспечение для реализации дробно-дифференциальной популяционной модели с нелокальной квадратичной нелинейностью.
5. Перечень материалов приложения: справочные материалы, листинги компьютерных программ.
6. Консультанты по бакалаврской работе: нормоконтроль – Дудин А.Н., старший преподаватель
7. Дата выдачи задания: 03.05.2023 г.  
Руководитель бакалаврской работы: Мороз Любовь Игоревна, канд. физ.-мат. наук  
Задание принял к исполнению (03.05.2023): \_\_\_\_\_ Миньковский Д.Е.

## РЕФЕРАТ

Бакалаврская работа содержит 56 с., 13 рисунков, 1 таблицу, 36 источников.

МОДЕЛЬ ПОПУЛЯЦИОННОЙ ДИНАМИКИ, НЕЛОКАЛЬНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ, ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ФИШЕРА – КОЛМОГорова – ПЕТРОВСКОГО – ПИСКУНОВ, ФОРМУЛА ГРЮНВАЛЬДА – ЛЕТНИКОВА, НЕЯВНАЯ СХЕМА, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

В бакалаврской работе представлена реализация одномерной дробно-дифференциальной модели популяционной динамики с нелокальным взаимодействием. Математическая постановка задачи сформулирована в виде начально-граничной задачи для уравнения аномальной диффузии с нелокальным квадратично-нелинейным взаимодействием.

На основе модифицированной неявной конечно-разностной схемы получен разностный аналог рассматриваемой задачи. Разработана прикладная программа, осуществляющая численное моделирование процесса аномальной диффузии. Проведена программная реализация модели популяционной динамики. Представлены результаты вычислительных экспериментов при варьировании параметров в дробно-дифференциальной модели Фишера – КПП и дробно-дифференциальной модели Фишера – КПП с нелокальным квадратично-нелинейным взаимодействием.

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение	6
1 Модели популяционной динамики: основные теоретические концепции	8
1.1 Модель Мальтуса	8
1.2 Модели логистического роста	10
1.3 Модель Лотки – Вольтерры	12
1.4 Модель Фишера – Колмогорова – Петровского – Пискунова	14
1.4.1 Классическая модель Фишера – КПП	15
1.4.2 Дробно-дифференциальная модель Фишера – КПП	16
1.4.3 Дробно-дифференциальная модель Фишера – КПП с квадратичной нелинейностью	18
2 Дробно-дифференциальное исчисление	20
2.1 Базовые положения теории дробно-дифференциальных уравнений	20
2.2 Некоторые определения дробной производной	21
2.3 Ключевые аспекты применения метода конечных разностей для решения дробно-дифференциального уравнения диффузии	26
3 Математическая постановка задачи и вычислительная схема	32
3.1 Математическая постановка задачи	32
3.2 Вычислительная схема реализации дробно-дифференциальной модели Фишера – КПП	33
3.3 Вычислительная схема реализации дробно-дифференциальной модели Фишера – КПП с нелокальной квадратичной нелинейностью	35
4 Результаты вычислительных экспериментов	36
4.1 Программная реализация дробно-дифференциальной модели Фишера – КПП в ППП Matlab	36
4.2 Программная реализация дробно-дифференциальной модели Фишера – КПП с нелокальной квадратичной нелинейностью	39
Заключение	44
Библиографический список	45

Приложение А Некоторые справочные сведения о дробных производных	49
Приложение Б Листинг программы «Дробно-дифференциальная популяционная модель»	51
Приложение В Листинг программы «Дробно-дифференциальная популяционная модель с нелокальной квадратичной нелинейностью»	54

## ВВЕДЕНИЕ

Продукционные процессы в живых организмах проявляются различным образом на разных уровнях развития, но всегда включают такие этапы, как рождение, рост, взаимодействие с окружающей средой и другими организмами, а также смерть. Именно это является основой для применения математических моделей при описании роста и эволюции биологических видов. Возможность использования одних и тех же математических соотношений для описания популяций различной природы объясняется тем, что рост и отбор организмов в процессе эволюции происходят по единому принципу. С помощью математического моделирования можно формализовать знания об объекте и дать количественный прогноз его эффективности и хода. В качестве одной из базовых моделей, описывающих популяционную динамику, часто используют модель Фишера – Колмогорова – Петровского – Пискунова (Фишера – КПП). В этой модели учтены следующие свойства: воспроизводство популяции (автокатализ), конкурентные потери и диффузию, определяющую пространственное распределение популяции. Тем не менее, классическая модель Фишера – КПП обладает рядом недостатков. Такие факторы и свойства, как эредитарность (эффекты памяти), видовая или иного рода разнородность по составу, таксис (двигательные реакции в ответ на одностороннее воздействие), влияние продуктов метаболизма на рост популяций остаются математически неописанными в модели [1]. Часть этих процессов можно учесть путем замены квадратичного слагаемого интегральным, другую часть с помощью дифференциальных операторов нецелых порядков. К сожалению, поиск аналитического решения для дробно-дифференциальных уравнений может вызывать серьезные затруднения. Поэтому во многих практических ситуациях оправданным является применение приближенных методов, в частности метода конечных разностей. Введенные в математические модели дифференциальные операторы нецелого порядка позволяют учесть наследственные свойства и фрактальность геометрического строения реальных объектов. Процессы в

подобных системах могут сопровождаться значительными градиентными изменениями анализируемых характеристик или очень длительным временем ожидания эффектов последствия. Как правило, для формализации эффектов памяти используют дробную производную по времени, а для описания течения процессов в объектах со сложной структурой и многофазным составом – производную дробного порядка по координате [2].

Целью работы является разработка вычислительного алгоритма для решения начально-граничной задачи дробного по времени и пространству уравнения Фишера – КПП с нелокальным взаимодействием.

Для достижения поставленной цели были сформулированы следующие задачи:

- 1) проведение литературного обзора динамических моделей популяционной динамики;
- 2) построение вычислительной схемы для решения начально-краевой задачи для дробно-дифференциального уравнения в частных производных;
- 3) разработка прикладной программы, предназначенной для моделирования популяционной динамики;
- 4) проведение вычислительных экспериментов для набора модельных параметров.

Первая глава бакалаврской работы посвящена базовым моделям популяционной динамики. Во второй главе описаны базовые положения дробно-дифференциального исчисления и основные конечно-разностные схемы для решения уравнения аномальной диффузии. В третьей главе приведена математическая постановка задачи и построена вычислительная схема. Четвертая глава представлена через реализацию модифицированной модели Фишера – КПП.

# 1 МОДЕЛИ ПОПУЛЯЦИОННОЙ ДИНАМИКИ: ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ КОНЦЕПЦИИ

Моделирование дает возможность исследовать различные сценарии взаимодействия и функционирования популяций, оценить воздействие окружающей среды на пространственно-временную динамику биологических сообществ, прогнозировать восприимчивость естественных систем на внешние воздействия. Наличие биологического объекта обуславливается как закономерными внутренними процессами, такими как репродукция, рост, питание, смертность и другие, так и случайными внешними явлениями, которые оказывают непосредственное влияние на протекание процессов жизнедеятельности. Математическая модель описывает изменение одной или нескольких характеристик изучаемой биологической системы во времени и пространстве. В общем случае, ее выход представляется в виде зависимости  $u = u(x, t)$ , где  $u$  – вектор отслеживаемых характеристик (которой также может являться плотность популяции),  $x$  – вектор пространственных координат,  $t$  – время. Значения вычисляемых характеристик могут быть разными. Плотность популяции отдельных изолированных организмов может принимать только неотрицательные значения. Задачи математического описания динамики взаимодействующих популяций имеют продолжительную историю. Томас Мальтус в своей работе первым сформулировал одно из основополагающих предположений, которое лежит в фундаменте всех моделей роста: скорость роста плотности популяции пропорциональна её плотности.

## 1.1 Модель Мальтуса

Модель роста популяции Мальтуса – это теория, которую разработал английский экономист Томас Мальтус в 1798 году, в своем знаменитом труде «Опыт закона о народонаселении» [3] Мальтус выдвинул гипотезу, согласно которой неконтролируемый рост популяций всегда превосходит по скорости рост средств существования, что приведет к неизбежному исчерпанию ресурсов и катастрофе. Он считал, что рост населения происходит геометрически, а рост



производительности – арифметически. Поэтому, если население будет продолжать расти, то ресурсы не смогут удовлетворить все потребности людей, что приведет к бедности, голоду и болезням.

Однако, с тех пор как Мальтус сформулировал свою теорию, многие экономисты и демографы высказали свои сомнения в ее точности [4]. Некоторые утверждают, что рост населения и производительности могут быть более сложными и динамичными, чем простые математические модели.

В теории популяции уравнением Мальтуса называют уравнение

$$\frac{dN}{dt} = \varepsilon N, \quad (1.1)$$

где  $\varepsilon = const$ , причем  $\varepsilon = b - m$ ;  $b$  и  $m$  – коэффициенты рождаемости и смертности соответственно. Показатель  $\varepsilon = \frac{dN}{Ndt}$  называют естественной скоростью роста популяции (мальтусовским коэффициентом прироста).

Решением уравнения (1) является следующая функция

$$N(t) = N_0 e^{\varepsilon t},$$

где  $N_0 = N(0)$  (1.2)

При  $\varepsilon > 0$  она определяет экспоненциальное увеличение численности популяции, а если  $\varepsilon < 0$ , то численность стремится к 0 при  $t \rightarrow +\infty$ . В случае, когда  $\varepsilon = 0$ , численность популяции сохраняется на начальном уровне сколь угодно долго. Очевидно, для уравнения (1.1) значение параметра  $\varepsilon = 0$  является бифуркационным [5]. При  $\varepsilon \neq 0$  уравнение (1.1) имеет одно положение равновесия  $N^* = 0$ , неустойчивое при  $\varepsilon > 0$  и асимптотически устойчивое при  $\varepsilon < 0$ . Если  $\varepsilon = 0$  уравнение (1.1) имеет бесконечно много положений равновесия вида  $N^* = N_0 \geq 0$ , каждое из которых устойчиво, но не асимптотически [6].

Модель Мальтуса не учитывает факторы, препятствующие росту популяции, например, ограниченность ресурсов или размер территории обитания [7].

Кроме того, следует отметить, что модель роста популяции Мальтуса была разработана в контексте своего времени, когда население росло очень быстро, а ресурсы были ограничены. В то время, когда Мальтус жил, многие страны

Европы столкнулись с проблемой перенаселения, бедности и голода. Поэтому его теория была важной для понимания проблем, с которыми сталкивалось общество того времени.

Однако, с течением времени, ситуация изменилась, и многие страны смогли достичь стабильного уровня роста населения и производительности. Некоторые страны даже столкнулись с проблемой обратного хода демографической кривой, когда рождаемость снижается, а смертность растет. Поэтому, хотя модель Мальтуса продолжает быть важной для понимания проблем перенаселения и экологической устойчивости, ее применимость в современном мире может быть ограничена.

## **1.2 Модели логистического роста**

Модели логистического роста широко используются в биологии для описания динамики роста популяций живых организмов. Они помогают понимать, как популяции растут и как они могут быть управляемыми, чтобы обеспечить устойчивость и благополучие экосистем [8].

Одним из примеров применения моделей логистического роста в биологии является изучение популяций животных. Рост популяции животных может быть ограничен ресурсами, такими как пища, вода и место для жизни. Когда популяция животных достигает определенного уровня, она может столкнуться с конкуренцией за ресурсы, что приводит к замедлению роста. Модели логистического роста могут помочь ученым понимать, какие факторы ограничивают рост популяций животных, и какие меры могут быть приняты для обеспечения устойчивости и благополучия экосистем [9].

Модели логистического роста также могут быть применены для изучения роста популяций растений. Рост популяции растений может быть ограничен доступом к свету, воде и питательным веществам. Когда популяция растений достигает определенного уровня, она может столкнуться с конкуренцией за ресурсы, что приводит к замедлению роста. Модели логистического роста могут помочь ученым понимать, какие факторы ограничивают рост популяций расте-

ний, и какие меры могут быть приняты для обеспечения устойчивости и благополучия экосистем [8].

Кроме того, модели логистического роста могут быть применены для изучения динамики распространения болезней в популяциях живых организмов. Рост популяции болезнетворных организмов может быть ограничен доступом к хозяину, а также конкуренцией с другими болезнетворными организмами. Модели логистического роста могут помочь ученым понимать, как распространяются болезни в популяциях живых организмов, и какие меры могут быть приняты для контроля и управления распространением болезней.

В целом, модели логистического роста являются важным инструментом для понимания динамики роста популяций живых организмов и управления экосистемами. Они помогают нам понимать, как популяции растут и как они могут быть управляемыми, чтобы обеспечить устойчивость и благополучие экосистем.

Экспоненциальный процесс роста не может продолжаться достаточно долго, так как увеличение плотности популяции приводит к возрастанию сопротивления внешней среды и снижению скорости роста [10].

Таким образом, для популяции, обитающей в среде с ограниченными ресурсами, экспоненциальный закон роста неприменим. Пусть  $K$  – та предельная численность, которой может достигнуть популяция в условиях ограниченности ресурса ( $K$  – «емкость среды»). При  $t \rightarrow +\infty$  имеет место  $N(t) \rightarrow K$ . Первая модель, учитывающая этот факт, была предложена в 1825 году Б. Гомпертцем:

$$\frac{dN}{dt} = \varepsilon N \left(1 - \frac{\ln N}{\ln K}\right) \quad (1.3)$$

Здесь  $\varepsilon$  – скорость роста популяции без учета лимитирующих факторов.

При любых исходных численностях, отличных от нуля, система стабилизируется на уровне равновесия. Положение равновесия  $N = K$  является аттрактором.

Это явление, известное как "насыщение", было описано в "логистической" модели Ферхюльста в 1838 году, которая проста, наглядна и довольно

точно отражает динамику многих популяций в природе. Согласно этой модели, численность популяции начинает расти экспоненциально, но с ростом численности популяции происходит замедление роста из-за ограничения ресурсов. В конечном итоге, популяция достигает уровня устойчивости, который называется емкостью среды. Эта модель была применена Ферхюльстом к теории роста народонаселения и затем была применена к различным биологическим системам Пирлом, поэтому ее часто называют моделью Ферхюльста – Пирла.

Для того, чтобы учесть силы, сдерживающие рост популяции в реальных условиях, Ферхюльст предложил модифицировать уравнение динамики плотности (1.3) следующим образом:

$$\frac{dN}{dt} = (\varepsilon - \alpha N)N, \quad (1.4)$$

где  $\varepsilon$  – по-прежнему означает скорость роста популяции без учета лимитирующих факторов, а  $\alpha$  – некоторый параметр, учитывающий влияние их действия. Причем предполагается, что  $\varepsilon$ ,  $\alpha$  являются положительными константами.

### 1.3 Модель Лотки – Вольтерры

Первые работы, описывающие взаимодействие нескольких популяций, принадлежат А. Лотка и В. Вольтерра. Модель динамики численности двух популяций, взаимодействующих по принципу «хищник-жертва», была предложена в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений [11]:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (\alpha - \beta y)x, \\ \frac{dy}{dt} &= (-\gamma + \delta x)y, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где  $x$  – количество жертв,  $y$  – количество хищников,  $t$  – время,  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  – коэффициенты, отражающие взаимодействия между видами.

Из этих уравнений можно вывести условия существования равновесных состояний и их типы. Например, если долгосрочно рассматривать модель, то может существовать два равновесных состояния: одно, когда популяция одного вида уничтожает популяцию второго вида, и другое, когда популяции обоих

видов могут существовать в равновесии. Однако, часто в экосистемах встречаются колебания численностей, что можно увидеть в смоделированной зависимости численности обоих видов от времени.

Модель предполагает, что популяция жертв растет без ограничений в отсутствие хищников, а с появлением хищников их численность уменьшается из-за их охоты на жертв. В свою очередь, увеличение количества жертв приводит к увеличению численности хищников, так как они имеют больше возможностей для охоты.

Однако, модель все еще используется в настоящее время для изучения основных принципов взаимодействия видов в экосистемах. Также стоит отметить, что модель Лотки – Вольтерры может быть расширена на случай более чем двух видов популяций и учета многих факторов. В таком случае система уравнений становится достаточно сложной и требует численных методов для решения.

Несмотря на свои ограничения, модель Лотки-Вольтерры имеет значительное значение в экологии и биологии. Она помогает понять, как взаимодействуют различные виды популяций в экосистемах, а также какую роль играют взаимодействия в функционировании и эволюции экосистем.

Помимо этого, модель Лотки – Вольтерры может иметь прикладное значение в различных областях, например, в области биотехнологии, где она может быть использована для описания взаимодействия двух бактериальных культур, или в экономике, где модель может быть применена для анализа рынков и конкуренции.

Изучение таких систем приводит к задаче об устойчивости решений системы дифференциальных уравнений. Адекватность использования аппарата дифференциальных уравнений при анализе динамики сообществ популяций обоснована в работах одного из отечественных основоположников математической биологии А.А. Ляпунова. Большая часть работ относится к исследованиям моделей на основе систем обыкновенных дифференциальных уравнений (точечные модели), в которых не учитывается пространственная неоднородность и

происходит мгновенное перемешивание особей на рассматриваемом ареале. Такой подход оправдан, если радиус индивидуальной активности особи (скорость распространения) достаточно велик по отношению к размеру исследуемого ареала. При нарушении этого условия в популяционных моделях необходимо учитывать пространственную неоднородность популяций – миграционные слагаемые. Предположение о случайности перемещения по пространству, интенсивность которого определяется концентрацией взаимодействующих особей и их подвижностью, позволяет обосновать использование в качестве инструмента моделирования уравнения диффузии. Стремление к росту и размножению, естественным образом, ведет к расширению зоны обитания (экспансии) живых организмов. Именно такое представление миграционного потока принято в пространственных моделях взаимодействия видов. Модель пространственно-временной эволюции биологического вида в рамках теории, предложенной Р. Фишером, была исследована А.Н. Колмогоровым, И.Г. Петровским и Н.С. Пискуновым.

#### **1.4 Модель Фишера – Колмогорова – Петровского – Пискунова**

Одной из первых фундаментальных работ Р. А. Фишера была статья «The Wave of Advance of Advantageous Genes», выпущенная в 1937 году, в которой автор рассматривал модель распространения генов с преимущественными свойствами в популяции. Затем А. Н. Колмогоров и С. В. Петровский опубликовали работу «Экспоненциально возрастающие решения дифференциальных уравнений» в 1958 году, где они изучили свойства уравнения Фишера – КПП и получили аналитические решения для некоторых его частных случаев. В последующие годы было проведено множество исследований, посвященных различным аспектам модели Фишера – КПП. Например, О. Аруонсон и Л. Макфедден изучали динамику формирования переднего края волн распространения популяции в 1990 году, а М. Брамс и Д. Гринспан рассматривали модель Фишера – КПП для изучения эволюции и дифференциации клеточных популяций в 1990 году. Также было проведено множество работ, посвященных численным методам решения уравнения Фишера – КПП и его приложениям в различных обла-

стях науки. Например, М. Бартон и Д. Гринспан использовали модель Фишера – КПП для изучения эффектов мутаций в геноме в 1993 году, а Х. Д. Финкель и Л. Эдельштейн – Кешет проводили численное моделирование распространения бактерий с учетом конкуренции за ресурсы в 2007 году.

После 2007 года было проведено множество исследований по уточнению свойств модели ФКПП и ее применению в различных областях. Например, в некоторых работах исследовалось поведение решений уравнения ФКПП при наличии случайных возмущений или неоднородностей. В других исследованиях анализировалось влияние параметров модели на характеристики распространения фронтов. Также были разработаны новые методы численного решения уравнения ФКПП, которые позволяют получать более точные результаты и справляться с более сложными задачами. Например, использование сеточно-характеристического метода для решения уравнения ФКПП с неоднородными коэффициентами.

#### 1.4.1 Классическая модель Фишера – КПП

В модели Фишера – Колмогорова – Петровского – Пискунова динамика зависящей от времени  $t$  и пространственной координаты  $x$  кинетической переменной  $u(x,t)$  (биомасса или число организмов данного вида в единице объема, в одномерном случае – на единицу длины) описывается эволюционным уравнением, в котором учитываются пространственная диффузия с постоянным коэффициентом диффузии  $D$ , процесс производства организмов с постоянным темпом роста (мальтузианским параметром)  $a$  и квадратичными по плотности потерями с коэффициентом  $b$ , обусловленными конкуренцией за ресурс. При сделанных предположениях уравнение модели Фишера – КПП имеет вид:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + au(x,t) - bu^2(x,t). \quad (1.6)$$

Модель Фишера – КПП является одной из наиболее изученных моделей в теории математической биологии. Она особенно хорошо подходит для описания распространения популяций, которые могут увеличиваться экспоненциально в отсутствие каких-либо препятствий. Модель Фишера – КПП имеет воз-

возможность быстро адаптироваться к изменяющимся условиям среды и генетическому составу популяции. Это связано с ее способностью описывать экспоненциальный рост и быстрое распространение. Другие модели могут быть намного более сложными и требуют значительных знаний математики, что может создавать трудности для их использования и интерпретации результатов. Модель Фишера – КПП более проста и понятна, а так же может быть использована для описания различных типов популяций, от бактерий до животных, что делает ее универсальной и полезной в различных научных и практических областях. Модель Фишера – КПП часто используется для прогнозирования будущих изменений в популяции и эффективности мер по защите или увеличению численности популяций.

Модель Фишера – КПП, хоть и описывает основные биологические закономерности, влияющие на динамику популяции, не учитывает некоторые факторы, такие как эффекты памяти, неоднородность популяций по составу, направленное передвижение под действием внешних факторов, воздействие продуктов метаболизма на рост популяций. Поэтому данная модель не обеспечивает полного объяснения формирования популяционных агрегаций. Однако, можно модифицировать модель Фишера – КПП, включив в нее дополнительные слагаемые, отвечающие за указанные выше факторы популяционной динамики или изменив порядки дробных производных. Такие исследования были проведены с целью более точного описания популяционной динамики.

#### **1.4.2 Дробно-дифференциальная модель Фишера – КПП**

В последнее время дробно-дифференциальные уравнения привлекли большое внимание из-за того факта, что отклик системы дробного порядка в конечном итоге сходится к отклику системы целого порядка. В некоторых случаях свойства среды, в которой происходит эволюция системы, а также коллективные эффекты могут изменить классическую диффузию, приводя к увеличению или уменьшению подвижности особей в популяции, возникновению асимметрии. Эти явления называют аномальной диффузией и моделируют уравнениями с дробными производными.



Важнейшим преимуществом использования дифференциальных уравнений дробного порядка в математическом моделировании является их нелокальность. Хорошо известно, что дифференциальный оператор целочисленного порядка является локальным оператором, тогда как дифференциальный оператор дробного порядка нелокален в том смысле, что следующее состояние системы зависит не только от ее текущего состояния, но и от всех ее предшествующих состояний. Таким образом, дробно-дифференциальные уравнения позволяют лучше описывать свойства памяти биологических систем, чем обычная производная целочисленного порядка.

$$\frac{\partial^\beta u(x,t)}{\partial t^\beta} = D \frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial x^\alpha} + au(x,t) - bu^2(x,t) \quad (1.7)$$

Дробно-дифференциальная модель Фишера – КПП имеет множество приложений в различных областях, таких как экология, биология, физика и т.д. [13]. Она позволяет учитывать множество факторов, влияющих на распространение популяций, таких как конкуренция, диффузия, рождаемость и смертность. Это позволяет более точно описывать процессы, происходящие в природе, и предсказывать их развитие в будущем.

Например, дробно-дифференциальная модель Фишера – КПП может быть использована для изучения распространения эпидемий [14]. Она позволяет учесть влияние распространения болезни на здоровых людей и меры, принимаемые для ее предотвращения, учитывает как скорость распространения инфекции между зараженными и здоровыми людьми, так и действие мер по ее предотвращению. Кроме того, дробно-дифференциальная модель Фишера – КПП может быть использована для изучения распространения видов в экосистемах [15]. Она позволяет описать конкуренцию между видами, их рождаемость и смертность, а также влияние окружающей среды на их развитие за счет использования дробной производной по координате.

Одним из приложений модели Фишера – КПП с производными нецелого порядка является исследование динамики распространения инфекционных заболеваний, таких как туберкулез. Авторы использовали дробно-диффузионную

модель, основанную на модели Фишера – КПП с производными нецелого порядка, для моделирования динамики распространения туберкулеза у диких животных. Используя данные о популяции диких животных и о распространении заболевания, авторы исследовали различные сценарии и предсказывали динамику распространения заболевания в будущем [16].

Другим примером применения дробно-диффузионной модели Фишера-КПП является исследование распространения загрязнения в водных экосистемах. Авторы использовали дробно-диффузионную модель Фишера-КПП для исследования замкнутых систем из полимерных отходов, предотвращающих сток загрязнения в грунт и подземные воды [17].

Дробно-дифференциальная модель Фишера – КПП является мощным инструментом для изучения различных процессов, происходящих в природе. Она позволяет учитывать множество факторов, влияющих на распространение популяций, и предсказывать их развитие в будущем.

### **1.4.3 Дробно-дифференциальная модель Фишера – КПП с квадратичной нелинейностью**

Еще одной модификацией уравнения Фишера – КПП является уравнение Фишера – КПП с квадратичной нелинейностью.

В классическом уравнении локальные квадратичные потери  $bu^2(x, t)$  заменяются интегральным выражением

$$u(x, t) \int b_\gamma(x, y) u(y, t) dy \tag{1.8}$$

учитывающим нелокальные эффекты взаимодействия в системе посредством функции влияния  $b_\gamma(x, y)$ . Параметр  $\gamma$  характеризует эффективную область взаимодействия между частицами так, что при  $\gamma \rightarrow 0$  справедливо  $b_\gamma(x, y) \rightarrow b\delta(x - y)$ , а выражение (1.8) переходит в  $bu^2(x, t)$ .

Будем рассматривать распределение  $u(x, t)$  на отрезке  $x \in [-L, L]$ . Тогда одномерное уравнение Фишера – КПП с квадратичными нелокальными потерями (1.8) и нормальной диффузией запишется в виде:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + au(x,t) - u(x,t) \int_{-L}^L b_\gamma(x,y)u(y,t)dy \quad (1.9)$$

Заменяя  $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$  на  $\frac{\partial^\beta u(x,t)}{\partial t^\beta}$  и  $D \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$  на  $D \frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial x^\alpha}$ , где  $\alpha, \beta$  – поряд-

ки дробной производной и подставляя в уравнение (1.9), получим:

$$\frac{\partial^\beta u(x,t)}{\partial t^\beta} = D \frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial x^\alpha} + au(x,t) - u(x,t) \int_{-L}^L b_\gamma(x,y)u(y,t)dy.$$

(1.10)

Модель динамики популяций с целыми производными, описывающую эволюцию бактериальных колоний фишеровского типа, но в которой конкурентное взаимодействие между особями является нелокальным рассмотрено в работе [18]. Показано возникновение пространственных структур с особенностями. Эти особенности зависят от характера конкурентного взаимодействия, а также от его диапазона, особенно от наличия или отсутствия хвостов и центральной кривизны функции влияния взаимодействия.

Нелокальные обобщения классического уравнения Фишера – КПП также использовались при изучении динамики клеточных популяций, в частности, при моделировании рака [19].

Уравнение Фишера – КПП с аномальной диффузией и с интегральным слагаемым, учитывающим нелокальные взаимодействия приведено в работе [20].

## 2 ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Дробно-дифференциальное исчисление – это область математики, которая изучает дифференцирование и интегрирование функций, содержащих дробные порядки операторов дифференцирования. В отличие от обычного дифференциального исчисления, где производные функций определяются только для целых дифференциалов, дробно-дифференциальное исчисление позволяет определять производные и интегралы для функций, содержащих дробные порядки дифференцирования.

Исторически считается, что первой попыткой обсуждения идеи существования дифференциальных операторов нецелого порядка относится к переписке Лейбница в 1695 году. С тех пор дробно-дифференциальное исчисление нашло множество применений в различных областях науки, включая физику, инженерию, экономику и финансы.

Применение дробно-дифференциального исчисления позволяет более точно моделировать реальные процессы и явления, так как многие из них могут быть описаны функциями, содержащими дробные степени. Кроме того, дробно-дифференциальное исчисление расширяет возможности для оптимизации и определения экстремумов функций, а также для решения задач, связанных с кривизной и радиусом кривизны кривых.

### **2.1 Базовые положения теории дробно-дифференциальных уравнений**

Теория дробно-дифференциальных уравнений (ДДУ) является развивающейся областью математики, занимающейся исследованием уравнений, содержащих дробные производные. Она имеет множество приложений в различных областях, таких как физика, биология, экономика и инженерия.

Основным понятием в теории ДДУ является дробная производная. Обычная производная определяется как отношение изменения функции к изменению ее аргумента. Дробная производная определяется как произведение обычной производной на фактор, содержащий дробь со знаменателем, являющимся некоторой степенью дифференциального оператора [21].

Дробная производная является обобщением понятия производной целого числа на произвольную дробную степень. Она определяется как производная порядка дроби, которая может быть записана в виде более простых дробей или рациональных чисел.

Дробная производная может использоваться для аппроксимации производных функций на основе дискретных значений. Она может быть полезна при анализе сложных функций, таких как фракталы или функции, заданные на регулярной решетке.

Дробные дифференциальные уравнения описываются в виде уравнений, содержащих дробные производные. Одной из основных задач в теории ДДУ является нахождение решений дробных дифференциальных уравнений. Эта задача становится особенно сложной из-за необычных свойств дробных производных, таких как несовместимость с обычными методами интегрирования.

Другой важной задачей в теории ДДУ является анализ устойчивости решений. В отличие от обычных дифференциальных уравнений, где стабильность решений определяется только начальными условиями, устойчивость решений дробных дифференциальных уравнений зависит также от порядка дробной производной и коэффициентов дробного дифференциального оператора.

Наконец, теория ДДУ имеет приложения в различных областях, включая моделирование процессов, связанных с диффузией, транспортом жидкостей, активной фильтрации в пористых средах, моделирование сетей замедленного действия и других процессов в физике, биологии и инженерном деле.

Так как зачастую сложно найти аналитическое решение дробно-дифференциальных уравнений на первое место выходят численные методы, в частности метод конечных разностей.

## **2.2 Некоторые определения дробной производной**

Дробное исчисление является обобщением операций интегрирования и дифференцирования на операторы нецелого порядка. Пусть  $a$  и  $t$  – границы операций, порядок  $\alpha \in R$ , тогда непрерывный интегро-дифференциальный оператор может быть определен как [22]:

$${}_a D_t^\alpha = \begin{cases} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}, & \alpha > 0, \\ 1, & \alpha = 0, \\ \int_a^t (d\xi)^\alpha, & \alpha < 0. \end{cases}$$

Некоторые свойства, действительные для производных целого порядка, выполняются и для дробных – например, свойство линейности [22]:

$$D_t^\alpha (p(t) + q(t)) = D_t^\alpha (p(t)) + D_t^\alpha (q(t)),$$

$$D_t^\alpha (cp(t)) = cD_t^\alpha (p(t)), \quad c = \text{const}.$$

На основе правила Лейбница (производной от произведения двух функций) выводится правило дифференцирования произведения функций нецелого порядка [4]:

$$D_t^\alpha (p(t)q(t)) = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\alpha}{j} D_t^{\alpha-j} (p(t)) D_t^j (q(t)).$$

Правило композиции дифференциальных операций для функции  $p(t)$   $D_t^\alpha D_t^\beta (p(t)) = D_t^{\alpha+\beta} (p(t))$  в общем случае не выполняется. Более подробно элементарные свойства нецелых производных представлены в трудах [5, 7]. Следует заметить, что поведение дробной производной напрямую зависит от вида выбранного определения. Свойства дробных производных представлены в Приложении А.

Дробная производная в отличие от целой не имеет однозначного определения. На практике чаще всего используют дробные производные Римана – Лиувилля, Грюнвальда – Летникова Капуто. Другие определения связаны с именами таких известных ученых как Г. Вейль, Ж. Фурье, О. Коши, Н. Абель, А. Маршо, К. Нишимото и др. Дробное дифференцирование, как правило, определяют как операцию, обратную дробному интегрированию.

Определение 1. Для функции  $f(t)$ , заданной на отрезке  $[a, b]$ , каждая из формул

$${}^{RL}D_{a^+}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left( \frac{d}{dt} \right)^n \int_a^t \frac{f(\xi) d\xi}{(t-\xi)^{\alpha-n+1}}, \quad (2.1)$$

$${}^{RL}D_{b^-}^\alpha f(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \left( \frac{d}{dt} \right)^n \int_t^b \frac{f(\xi) d\xi}{(t-\xi)^{\alpha-n+1}}, \quad (2.2)$$

где  $n = [\alpha] + 1$ ,  $\alpha > 0$ ,  $[\alpha]$  – целая часть  $\alpha$ ,  $0 \leq \{\alpha\} < 1$  – дробная часть числа  $\alpha$ ,  $\Gamma(n)$  – гамма-функция Эйлера, называется дробной производной Римана – Лиувилля порядка  $\alpha$  – соответственно левосторонней и правосторонней.

Функция  $f(t)$  называется абсолютно непрерывной на отрезке  $\Omega$ , если по любому  $\varepsilon > 0$  можно найти такое  $\delta > 0$ , что для любой конечной системы попарно непересекающихся отрезков  $[a_k, b_k] \subset \Omega$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ , такой, что  $\sum_{k=1}^m (b_k - a_k) < \delta$ , справедливо неравенство  $\sum_{k=1}^m |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$ . Класс таких функций обозначается  $AC(\Omega)$ .

Через  $AC^n(\Omega)$ , где  $n = 1, 2, \dots$  и  $\Omega$  – отрезок, обозначим класс функций  $f(t)$ , непрерывно дифференцируемых на  $\Omega$  до порядка  $n-1$ , причем  $f^{(n-1)}(t) \in AC(\Omega)$ .

Если  $0 < \alpha < 1$  и  $f(t) \in AC([a, b])$ , то функция имеет почти всюду производные  ${}^{RL}D_{a^+}^\alpha f(t)$  и  ${}^{RL}D_{b^-}^\alpha f(t)$ .

Для того чтобы производные (2.1) и (2.2) с порядком  $\alpha \geq 1$  существовали, достаточно, чтобы  $\int_a^t \frac{f(\xi) d\xi}{(t-\xi)^{\{\alpha\}}}$  принадлежал к классу  $AC^{[\alpha]}([a, b])$ , т.е. достаточным условием является выполнение  $f(t) \in AC^{[\alpha]}([a, b])$ .

Определение 2. Для функции  $f(t)$ , заданной на отрезке  $[a, b]$ , каждая из формул

$${}^C D_{a^+}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\xi) d\xi}{(t-\xi)^{\alpha-n+1}}, \quad (2.3)$$

$${}^c D_t^\alpha f(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^b \frac{f^{(n)}(\xi) d\xi}{(\xi-t)^{\alpha-n+1}}, \quad (2.4)$$

где  $n = [\alpha] + 1$ ,  $\alpha > 0$ ,  $[\alpha]$  – целая часть  $\alpha$ ,  $0 \leq \{\alpha\} < 1$  – дробная часть числа  $\alpha$ , называется левосторонней и правосторонней дробной производной Капуто.

Если  $f(t) \in AC^{[\alpha]+1}([a, b])$ , то производные Капуто (2.3), (2.4) непрерывны на  $[a, b]$ .

Дробную производную Капуто вернее называть производной Герасимова – Капуто, так как именно А.Н. Герасимов ввел идентичную производную при рассмотрении дифференциальных уравнений с частными дробными производными [9].

Приведем простейший пример вычисления дробной производной от степенной функции (который будет использован далее для верификации моделей на тестовых задачах). Если  $f(t) = t^k$ , то производная дробного порядка может

быть вычислена по формуле: 
$$\frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha} = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\alpha+1)} t^{k-\alpha}.$$

Определение Грюнвальда – Летникова было введено, чтобы придать дробной производной смысл предела отношения бесконечно малых величин по аналогии с классическим анализом.

Определение 3. Дробной производной Грюнвальда – Летникова произвольного нецелого порядка  $\alpha > 0$  от функции  $f(t)$ , заданной на отрезке  $[a, b]$ , называется выражение [8, 17]

$${}^{GL} D_t^\alpha f(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\tau^\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(\alpha+1)}{k! \Gamma(\alpha-k+1)} f(t-k\tau), \quad (2.5)$$

где  $\tau$  – бесконечно малое приращение независимой переменной.

Значения  $\tau > 0$  соответствуют левосторонним производным,  $\tau < 0$  – правосторонним.

В этом случае интуитивно понятной и прозрачной является аналогия с построением конечно-разностных формул численного дифференцирования для «обычной», целочисленной производной [5, 11]:



$$\frac{df(t)}{dt} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t - \tau)}{\tau}, \quad \frac{df^2(t)}{dt^2} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{f(t) - 2f(t - \tau) + f(t - 2\tau)}{(\tau)^2},$$

...

$$\frac{df^n(t)}{dt^n} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f(t - k\tau), \quad \text{где } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} - \text{биномиальные коэф-}$$

фициенты. Заменяя в последнем порядок (целой)  $n$  производной на порядок  $\alpha$  (дробной производной), а факториальные функции – на Гамма-функцию, получим определение

$${}^{GL}D_t^\alpha f(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau^\alpha} \sum_{k=0}^{\left[\frac{t-a}{\tau}\right]} (-1)^k \frac{\Gamma(\alpha+1)}{k! \Gamma(\alpha-k+1)} f(t - k\tau) \quad (2.5')$$

в случае дробной производной Грюнвальда – Летникова с конечным пределом (ряд в формуле (2.5) ограничен  $m+1$  слагаемыми, где  $m = \left[\frac{t-a}{\tau}\right]$ ), порядок точности будет соответствовать  $O(\tau)$ .

В силу эквивалентности обозначений Римана – Лиувилля и Грюнвальда – Летникова все свойства, действительные для дробной производной Римана – Лиувилля, справедливы и для Грюнвальда – Летникова.

Ключевым различием дробных производных от целых является нелокальность, т.е. результат дифференцирования зависит от значений функции во всех точках некоторого отрезка или числовой прямой, а не от значений функции в малой окрестности точки.

В случае дробной производной Капуто на функцию  $f(t)$  накладываются дополнительные ограничения, связанные с существованием входящего в формулы (2.3), (2.4) интеграла. Однако значительным преимуществом формулы Капуто является более естественное для практических приложений решение проблемы начальных условий для дробно-дифференциальных уравнений. Также необходимо подчеркнуть, что, несмотря на сходство формул Римана – Лиувилля и Капуто, считать их равносильными нельзя, потому что свойства дробных производных существенно отличаются от их целочисленных аналогов. Так,

дробная производная от константы по формуле Римана – Лиувилля в отличие от производной Капуто в общем случае не равна нулю. Стоит также отметить преимущества дробной производной Римана – Лиувилля: для этого определения подынтегральная функция не должна быть непрерывной в нуле и дифференцируемой. Плюсом дробной производной Капуто является то, что она позволяет включать традиционные начальные и граничные условия в формулировку дифференциальной задачи. Тем не менее, определения Римана – Лиувилля и Капуто взаимосвязаны следующим образом:

$${}^C D_t^\alpha f(t) = {}^{RL} D_t^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k - \alpha + 1)} (t - a)^{k-\alpha},$$

$${}^C D_t^\alpha f(t) = {}^{RL} D_t^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(b)}{\Gamma(k - \alpha + 1)} (b - t)^{k-\alpha}.$$

Кроме того, существуют частные случаи, когда определения совпадают полностью – например, для функции  $f(t)$ , определенной на всей оси  $t \in (-\infty, \infty)$  и имеющей  $[\alpha] + 1$  непрерывных производных, стремящихся к нулю при  $t \rightarrow \pm\infty$ , выполняется равенство:

$${}^{RL} D_t^\alpha f(t) = {}^C D_t^\alpha f(t) = {}^{GL} D_t^\alpha f(t).$$

Для правосторонних производных подобное равенство также справедливо.

На сегодняшний день известны и другие подходы к определению дробной производной, а также модификации и обобщения формул (2.1) – (2.5). В дальнейшем использованы только левостороннее определение Римана – Лиувилля и его конечно-разностный аналог формула Грюнвальда – Летникова.

### **2.3 Ключевые аспекты применения метода конечных разностей для решения дробно-дифференциального уравнения диффузии**

Метод конечных разностей – это вычислительный метод для решения дифференциальных уравнений, который использует дискретизацию во времени и пространстве, представляя их в виде сетки с узлами. Явная разностная схема является одним из методов конечных разностей, которые могут быть применены

ны для решения уравнений в частных производных, включая уравнения с дробными производными [23].

Одной из задач дробного исчисления является уравнение аномальной диффузии:

$$\frac{\partial^\beta c(x,t)}{\partial t^\beta} = d(x) \frac{\partial^\alpha c(x,t)}{\partial x^\alpha} + q(x,t) \quad (2.6)$$

где  $c(x,t)$  – функция концентрации вещества,  $q(x,t)$  – функция источника,  $d(x)$  – коэффициент диффузии [24], порядки дробных производных по времени и координате  $0 < \beta \leq 1$ ,  $1 < \alpha \leq 2$ .

Варьируя порядки дробных производных, можно получить уравнения, описывающие процессы:

- субдиффузии (замедленное блуждание), если  $2\beta < \alpha$ ;
- классической диффузии, если  $2\beta = \alpha$ ;
- супердиффузии (ускоренное блуждание), если  $2\beta > \alpha$ .

Построение точных решений для уравнений вида (2.6) не всегда возможно, так как в условиях конкретной физической задачи замкнутая математическая постановка предполагает задание начальных и граничных условий для нестационарного уравнения аномальной диффузии, что затрудняет использование аналитических методов. Поэтому во многих практических ситуациях оправданным является применение приближенных методов, основанных на аппроксимациях производных дробного порядка.

В широком смысле, производные нецелого порядка представляют собой определенное сочетание операций дифференцирования и интегрирования и позволяют описать пространственно-временные нелокальные процессы переноса.

Теория численных методов решения дробно-дифференциальных задач привлекает внимание многих современных авторов, тем не менее, она далека от полного завершения. Особое место в числе приложений аппарата дробного дифференцирования занимает задача численного решения уравнений диффузионного типа. Так, в работах [24 – 29] представлено численное решение уравне-

ния аномальной диффузии с дробной производной по времени; решение уравнения диффузии с дробной производной по координате предложено авторами работ [26, 31]. В работах [26, 31] показаны примеры решения уравнения дробной диффузии, в котором присутствуют нецелые производные по времени и по пространственной переменной. Различными авторами приближенные решения задач различных классов строились на основе определений Римана – Лиувилля, Капуто, Грюнвальда – Летникова, Ритца [22, 29, 31, 26]. Порядок аппроксимации дробной производной в большинстве представленных в литературе работ – менее второго. Более точные приближения получены при решении уравнений адвекции-диффузии [31] и субдиффузии [32] с дробной производной по времени, а также при конструировании алгоритма приближенного решения диффузионно-волнового уравнения нецелого порядка [32].

Для решения уравнения аномальной диффузии остановимся на численном методе, а именно методе конечных разностей. Метод конечных разностей (МКР) подходит для решения задач с граничными условиями как в одномерных, так и в многомерных случаях. Он может быть использован для решения математических моделей процессов с распределенными параметрами, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных. В этом случае модель зависит как от времени, так и от пространственных координат.

Метод конечных разностей основывается на идее преобразования задачи с граничными условиями в более простую систему линейных или нелинейных алгебраических уравнений. Способ получения этой системы зависит от типа исходной задачи.

Введем в рассмотрение пространственно-временную сетку  $\Omega_h^{\tau} = \{x_i = ih, i = \overline{0, K}, t^n = n\tau, n = \overline{0, N}\}$ , покрывающей расчетную область, где  $h$  – шаг по координате,  $\tau$  – шаг по времени.

Так как дробные производные по времени и координате задаются как производные Римана – Лиувилля, для численной аппроксимации нецелых производных в уравнении (2.6) воспользуемся формулой Грюнвальда – Летникова следующего вида:

$$\frac{\partial^\beta c(x_i, t_n)}{\partial t^\beta} \approx \frac{1}{\tau^\beta} \sum_{l=0}^n g_{\beta,l} u_i^{n-l} \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial^\alpha c(x_i, t_n)}{\partial x^\alpha} \approx \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{i+1} g_{\alpha,k} u_{i-k+1}^{n+1}, \quad (2.8)$$

где  $g_{\beta,n} = \frac{\Gamma(n-\beta)}{\Gamma(-\beta)\Gamma(n+1)}$ ,  $g_{\alpha,m} = \frac{\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(k+1)}$  – нормированные веса Грюнвальда – Летникова.

Подставляя формулы (2.7) и (2.8) в уравнение (2.6) можно получить различные вычислительные схемы.

Для решения уравнения аномальной диффузии в случае субдиффузионного режима чаще всего используют модифицированные явную, неявную или Кранк – Николсон схемы.

Остановимся подробнее на первых двух.

Явная схема для решения уравнения (2.6), основанная на аппроксимациях дробных производных (2.7) и (2.8), имеет вид [26]:

$$\frac{1}{\tau^\beta} \sum_{l=0}^{n+1} g_{\beta,l} u_i^{n-l+1} = \frac{d_i}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{i+1} g_{\alpha,k} u_{i-k+1}^n + q_i^{n+1} \quad (2.9)$$

Явная схема решения уравнения (2.6), рисунок 1, основанная на аппроксимациях дробных производных (2.7) и (2.8), условно устойчива при

$$\frac{\tau^\beta d_{max}}{h^\alpha} \leq \frac{\beta}{\alpha}.$$

Условная устойчивость доказана в работах [34, 25].

Порядок явной схемы на основе формул Грюнвальда – Летникова не превышает единицы как по времени, так и по координате.

Неявная схема для решения уравнения (2.6), основанная на аппроксимациях дробных производных (2.7) и (2.8), имеет вид:

$$\frac{1}{\tau^\beta} \sum_{l=0}^{n+1} g_{\beta,l} u_i^{n-l+1} = \frac{d_i}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{i+1} g_{\alpha,k} u_{i-k+1}^{n+1} + q_i^{n+1} \quad (2.10)$$

Данная схема, несмотря на необходимость решения системы линейных алгебраических уравнений, является абсолютно устойчивой [37, 25].

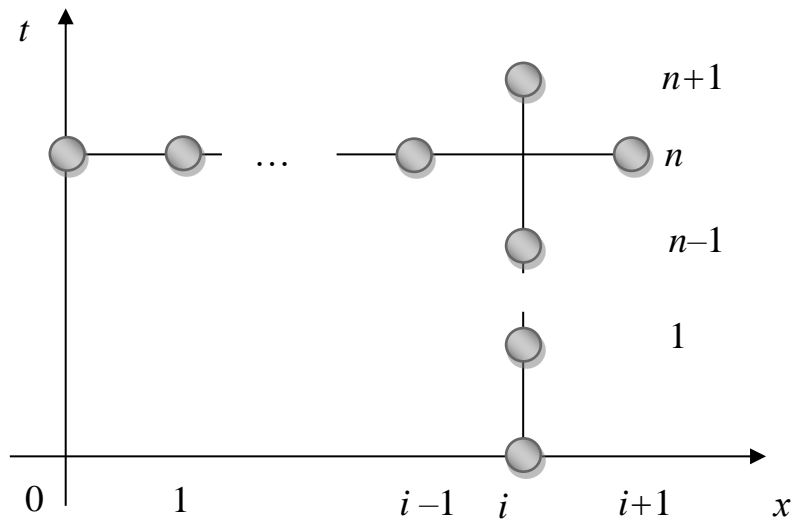


Рисунок 2.1 – Шаблон модифицированной явной конечно-разностной схемы

Неявная конечно-разностная схема, рисунок 2, аппроксимирует дифференциальную задачу (2.6) с порядком точности  $O(h + \tau)$ .

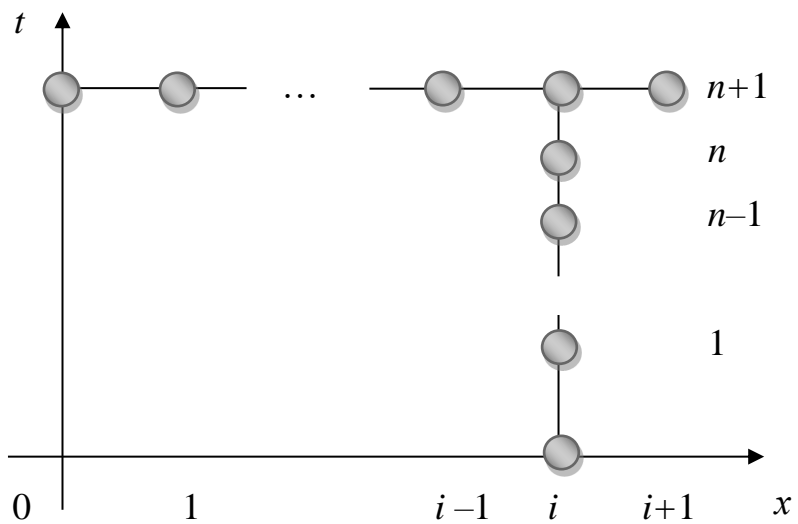


Рисунок 2.2 – Шаблон модифицированной неявной конечно-разностной схемы

Таким образом, учитывая абсолютную устойчивость модифицированной неявной схемы, решение дробно-дифференциального уравнения Фишера – КПП и его модификации будем строить на основе последней схемы.

### 3 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ СХЕМА

#### 3.1 Математическая постановка задачи

Выбранная базовая модель для пространственно-распределенной популяции соответствует классическому подходу в динамике популяций [6-8] и основана на модели, которая была предложена независимо Р. Фишером [11] и А. Н. Колмогоровым, Н. Г. Петровским и Н. С. Пискуновым [12]. В данной модели учитывается одномерное пространственное распределение, которое может быть реализовано в экспериментальных условиях с помощью узкой и длинной трубки, где происходят процессы переноса, при любом поперечном сечении происходит полное внутреннее перемешивание [9]. Динамика микробной популяции описывается эволюционным уравнением Фишера – Колмогорова – Петровского – Пискунова, зависящим от времени  $t$  и пространственной координаты  $x$ , где кинетическая переменная  $u(x, t)$  представляет собой биомассу или число организмов в единице объема.

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + au(x, t) - bu^2(x, t) \quad (3.1)$$

В этом уравнении учитываются пространственная диффузия с коэффициентом диффузии  $D$ , процесс производства бактерий с непрерывным темпом роста (мальтузианский параметр)  $a$  и квадратичные потери плотности с коэффициентом  $b$ , вызванные конкуренцией за ресурсы.

Однако эта модель не учитывает некоторые факторы, такие как мутация, таксис, влияние продуктов метаболизма на рост или неоднородность окружающей среды, которые оказывают влияние на образование популяционных агрегатов. Поэтому, модель Фишера – Колмогорова – Петровского – Пискунова модифицируется путем включения дополнительных слагаемых, отражающих эти факторы. Рассмотрим обобщенную модель популяционной динамики Фишера – Колмогорова – Петровского – Пискунова, которая включает нелокальное квадратично-нелинейное взаимодействие:



$$\frac{\partial^\beta u(x,t)}{\partial t^\beta} = D \frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial x^\alpha} + au(x,t) - \gamma u(x,t) \int_{-L}^L b(x,\xi,t)u(\xi,t)d\xi, \quad (3.2)$$

$$-L < x < L, \quad 0 < t < t_{ob},$$

$$u|_{t=0} = f(x), \quad -L \leq x \leq L, \quad (3.3)$$

$$u|_{x=0} = \varphi(t), \quad 0 \leq t \leq t_{ob}, \quad (3.4)$$

$$u|_{x=L} = \psi(t), \quad 0 \leq t \leq t_{ob}, \quad (3.5)$$

где  $u(x, t)$  – плотность популяции,  $t$  – временная переменная,  $x$  – пространственные координаты,  $D$  – коэффициент диффузии,  $a(x, t)$  – коэффициент прироста бактерий,  $b(x, \xi, t)$  – коэффициент конкурентных потерь,  $\gamma$  – параметр нелинейности. Будем считать величины, входящие в уравнение (3.2) безразмерными.

Начальное условие  $u|_{t=0}$  выберем в виде локальной функции с центром в начале координат, например форме гауссового распределения. В качестве граничных условий возьмем однородные граничные условия первого рода. Подобного рода задача в случае целых производных была рассмотрена на случай неограниченной слева и справа области в работе [1]. Это интерпретировалось как нахождение бактерий в узкой и длинной трубке. Вдоль трубки осуществлялся перенос особей микробной популяции, а в любом поперечном сечении – перемешивание.

Область применения модели Фишера – Колмогорова – Петровского – Пискунова можно распространить на случай пространственно-неоднородных условий воспроизводства и потерь популяции, спровоцированных внешними факторами, а также позволит учитывать эффекты памяти.

### 3.2 Вычислительная схема реализации дробно-дифференциальной модели Фишера – КПП

В одномерном случае модель Фишера – КПП будет описываться начально-граничной задачей для уравнения параболического типа следующего типа:

$$\frac{\partial^\beta u(x,t)}{\partial t^\beta} = D \frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial x^\alpha} + au(x,t) - bu^2(x,t), \quad 0 < x < L, \quad 0 < t < t_{ob}, \quad (3.6)$$

$$u|_{t=0} = f(x), 0 \leq x \leq L, \quad (3.7)$$

$$u|_{x=0} = \varphi(t), 0 \leq t \leq t_{ob}, \quad (3.8)$$

$$u|_{x=L} = \psi(t), 0 \leq t \leq t_{ob}, \quad (3.9)$$

где  $u(x, t)$  – плотность популяции,  $t$  – временная переменная,  $x$  – пространственные координаты,  $D$  – коэффициент диффузии,  $a(x, t)$  – коэффициент прироста бактерий,  $b(x, t)$  – коэффициент конкурентных потерь.

На основе прямоугольной пространственно-временной сетке  $\Omega_h^\tau = \{x_i = ih, i = \overline{0, K}, t^n = n\tau, n = \overline{0, N}\}$ , покрывающей расчетную область, где  $h$  – шаг по координате,  $\tau$  – шаг по времени, построим модифицированную неявную схему для решения задачи (3.6) – (3.9).

Будем использовать следующие конечно-разностные операторы:

$$\frac{\partial^\beta u(x, t)}{\partial t^\beta} \approx \frac{1}{\tau^\beta} \sum_{l=0}^{n+1} g_{\beta, l} u_i^{n-l} \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial x^\alpha} \approx \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{i+1} g_{\alpha, k} u_{i-k+1}^{n+1} \quad (3.11)$$

Неявная схема для решения уравнения (3.6), основанная на аппроксимациях дробных производных (3.10) и (3.11), имеет вид:

$$\frac{1}{\tau^\beta} \sum_{l=0}^{n+1} g_{\beta, l} u_i^{n-l+1} = \frac{D}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{i+1} g_{\alpha, k} u_{i-k+1}^{n+1} + a_i^{n+1} u_i^{n+1} + b_i^{n+1} u_i^n u_i^{n+1} \quad (3.12)$$

Для нелинейного слагаемого  $u^2$  использовано следующее приближение

$$(u_i^{n+1})^2 \approx u_i^n u_i^{n+1}.$$

В уравнении (3.12) умножим обе части на  $\tau^\beta$  и вынесем все слагаемые, содержащие  $u^{n+1}$ , в левую часть:

$$\begin{aligned} & -\frac{\tau^\beta D}{h^\alpha} \sum_{k=3}^{i+1} g_{\alpha, k} u_{i-k+1}^{n+1} - \frac{\tau^\beta D}{h^\alpha} g_{\alpha, 2} u_{i-1}^{n+1} + \left( g_{\beta, 0} - \tau^\beta (a_i^{n+1} + b_i^{n+1} u_i^n) - \frac{\tau^\beta D}{h^\alpha} g_{\alpha, 1} u_{i-1}^{n+1} \right) u_i^{n+1} - \\ & -\frac{\tau^\beta D}{h^\alpha} g_{\alpha, 0} u_{i+1}^{n+1} = -\sum_{l=1}^{n+1} g_{\beta, l} u_i^{n-l+1}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Полученную систему линейных алгебраических уравнений решаем методом Гаусса.

### 3.3 Вычислительная схема реализации дробно-дифференциальной модели Фишера – КПП с нелокальной квадратичной нелинейностью

Модифицируем схему (3.13) для решения задачи (3.2) – (3.5) с учетом интегрального слагаемого. Для этого по формуле правых прямоугольников аппроксимируем интеграл в уравнении (3.2):

$$\int_{-L}^L b(x, \xi, t) u(\xi, t) d\xi \approx \sum_{p=0}^{i+1} b_{ip}^{n+1} u_i^{n+1} h = B_i^{n+1}.$$

Таким образом, получим:

$$-\frac{\tau^\beta D}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{i+1} g_{\alpha,k} u_{i-k+1}^{n+1} + (1 + \tau^\beta \gamma B_i^{n+1}) u_i^{n+1} = \tau^\beta a_i^n u_i^n - \sum_{l=1}^{n+1} g_{\beta,l} u_i^{n-l+1}. \quad (3.14)$$

Также учтем в вычислительной схеме начальное и граничные условия:

$$u_i^0 = f_i, \quad \text{для } i = \overline{0, K}, \quad u_0^n = \varphi^n, \quad u_K^n = \psi^n, \quad \text{для } n = \overline{0, N}.$$

## 4 РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Для реализации алгоритма был выбран пакет прикладных программ Matlab. Matlab – язык программирования и набор узкоспециализированных приложений, предназначенный для технических вычислений и компьютерного моделирования. Он отличается высоким качеством и предоставляет удобные средства для разработки алгоритмов, включая высокоуровневые с использованием объектно-ориентированного программирования. В составе Matlab имеется широкий спектр функций для построения графиков и визуального анализа данных, а также специальные функции для работы с уравнениями в конечных разностях и фильтрами. Кроме того, Matlab обладает отладчиком и профайлером, а также функциями для работы с целыми типами данных, что упрощает создание алгоритмов для микроконтроллеров и других приложений [35].

### 4.1 Программная реализация дробно-дифференциальной модели Фишера – КПП в ППП Matlab

Результат реализации алгоритма продемонстрируем на начально-граничной задаче при следующих значениях параметров:  $0 \leq t \leq 1$ ,  $0 \leq x \leq 1$ ,

$$D = 1, \quad f(x) = \frac{1}{(1 + e^x)^2}, \quad \varphi(t) = \frac{1}{(1 + e^{-5t})^2}, \quad \psi(t) = \frac{1}{(1 + e^{1-5t})^2}, \quad a = 6, \quad b = 6. \text{ Про-}$$

странственно-временное распределение функции  $u(x, t)$  при  $h = 0.01$ ,  $\tau = 0.01$  представлено на рисунке 4.1 как для аналитического так и для численного решений. Все вычисления проведены в относительных единицах. Аналитическое

решение (3.1) – (3.4) в таком случае примет вид  $u = \frac{1}{(1 + e^{x-5t})^2}$  [36].

Максимальные по модулю ошибки, получаемые для различных значений шагов сетки при решении задачи (3.1) – (3.4) представлены в таблице 4.1.

Поведение функции  $u(x, t)$  при различных порядках дробных производных продемонстрированы на рисунках 4.2 и 4.3.

В Приложении Б представлен листинг программы.

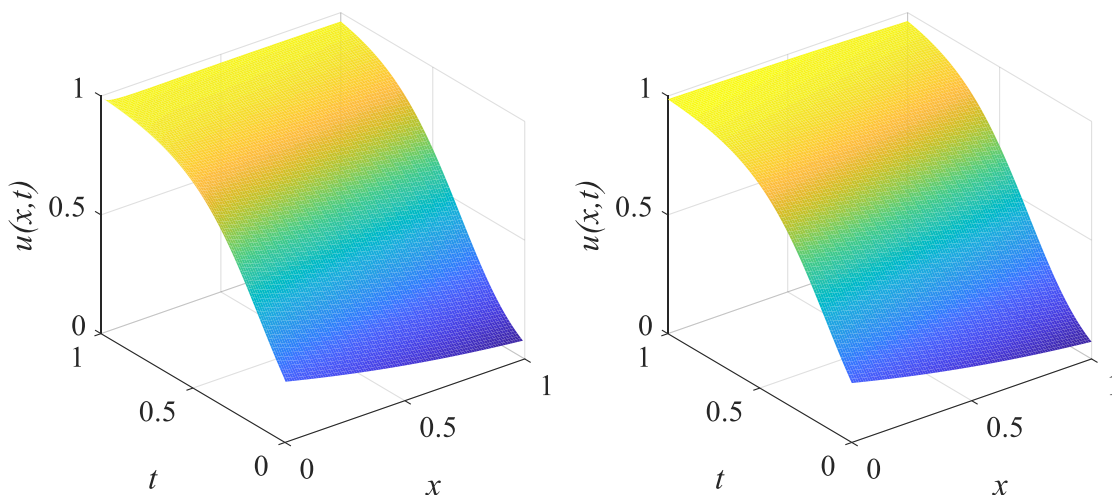


Рисунок 4.1 – Пространственно-временное распределение искомой функции  $u(x, t)$  и  $u_{an}(x, t)$  при  $h=\tau=0.05$

Из таблицы 4.1 видно, что уменьшение в два раза сеточных параметров приводит к уменьшению максимальной ошибки примерно в два раза (наблюдается почти линейное уменьшение).

Таблица 4.1 – Максимальная по модулю ошибка для задачи (3.1) – (3.4).

№	$h = \tau$	Максимальная по модулю ошибка
1	0,2	0,3061
2	0,1	0,1701
3	0,05	0,0940
4	0,025	0,0532
5	0,0125	0,0333
6	0,00625	0,0268

Рассмотрим изменение плотности популяции в зависимости от порядков дробных производных.

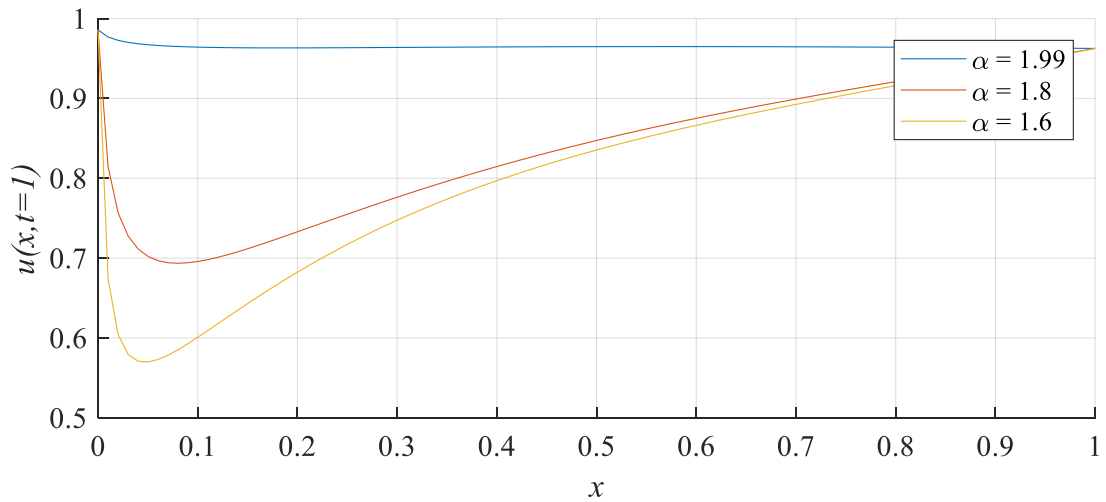


Рисунок 4.2 – Значение искомой функции  $u(x, t = 1)$  при варьировании порядка дробной производной по координате  $\alpha=1.99$ ,  $\alpha=1.8$ ,  $\alpha=1.6$  и фиксированном  $\beta = 0.99$

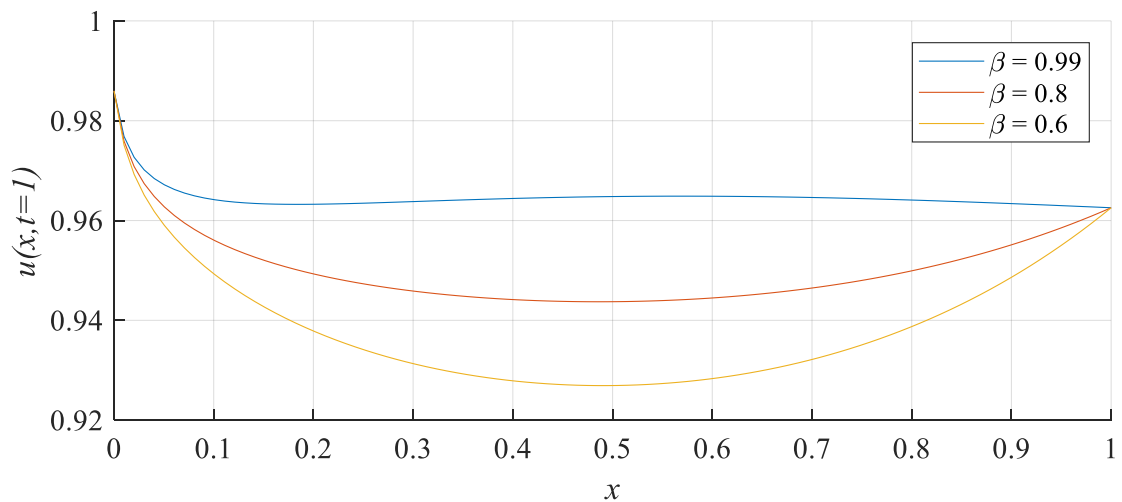


Рисунок 4.3 – Значение искомой функции  $u(x, t = 1)$  при варьировании порядка дробной производной по времени для  $\beta = 0.99$ ,  $\beta = 0.8$ ,  $\beta = 0.6$  и фиксированном  $\alpha = 1.99$

Исходя из приведенного выше результата, мы можем сказать, что предложенная нами схема обеспечивает почти точные значения, относящиеся к точному решению. Также при понижении порядка дробной производной, значение функции уменьшается.

## 4.2 Программная реализация дробно-дифференциальной модели Фишера – КПП с нелокальной квадратичной нелинейностью

Результат реализации алгоритма продемонстрируем на начально-граничной задаче при следующих значениях параметров:  $0 \leq t \leq 50$ ,  $-5 \leq x \leq 5$ ,

$$D = 0.001, \gamma = 1, f(x) = e^{\frac{-x^2}{0.447^2}}, \varphi(t) = 0, \psi(t) = 0, a = 1, b = e^{\frac{-(x-\xi)^2}{1.44^2}} \quad [1].$$

На рисунке 4.4 показано начальное распределение  $u(x, t=0) = f(x) = e^{\frac{-x^2}{0.447^2}}$ , при  $h = 0.01$ ,  $\tau = 0.01$ . В Приложении В представлен листинг программы.

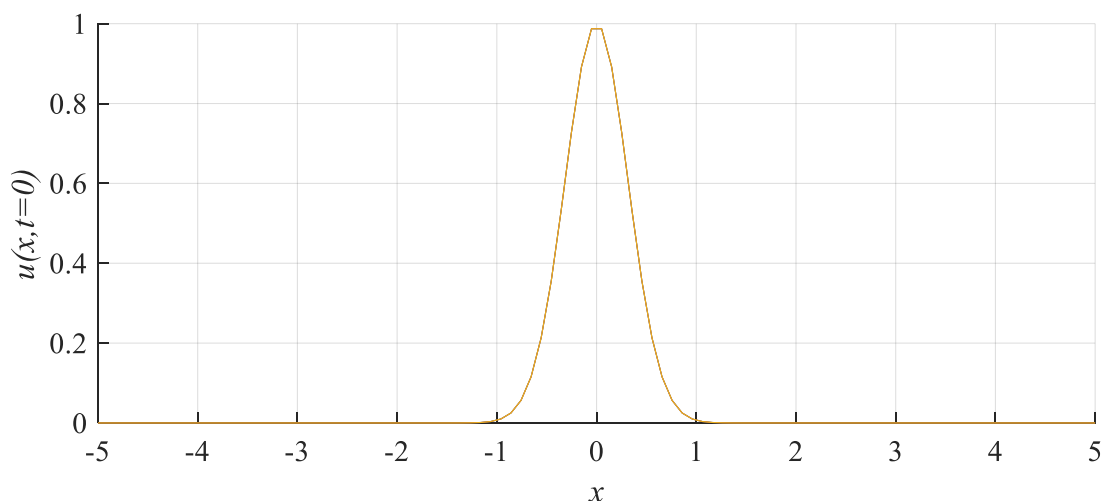


Рисунок 4.4 – Значение функции  $u(x, t)$  в начальный момент времени  $t=0$

На рисунках 4.5 и 4.6 представлены значения функции  $u(x, t)$  в момент времени  $t = 8.5$  при варьировании значений дробных производных. Состояния, образующиеся на данной стадии, отличаются от начального незначительно. Учёт нелокальности по времени приводит к смещению максимума распределения концентрации в область меньших значений координаты. Такого рода процессы характерны для замедленного блуждания.

Влияния нелокальности по времени и нелокальности по координате на распределение концентрации качественно отличаются. Нелокальность по времени влияет на распределение концентрации в начальное время, а

нелокальность по пространству влияет на асимптотическое поведение распределения концентрации при больших временах.

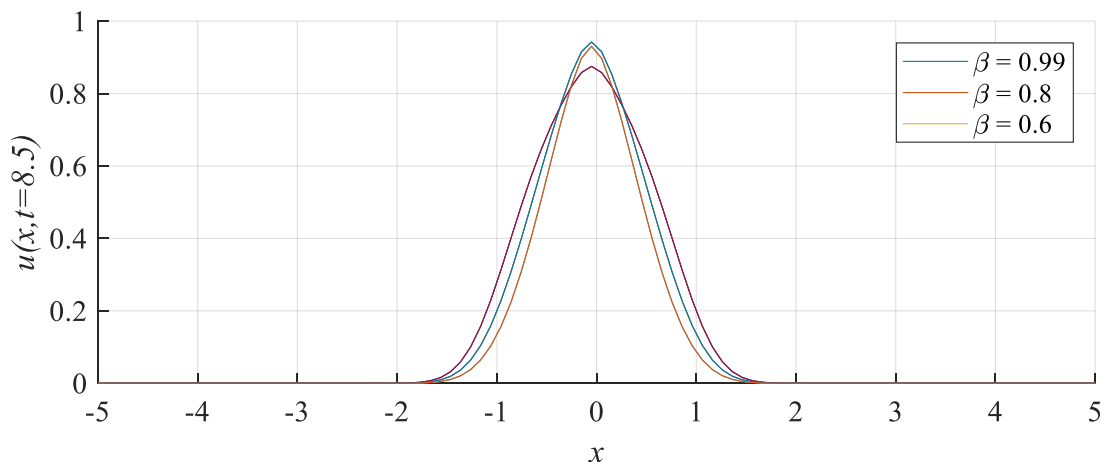


Рисунок 4.5 – Значение искомой функции  $u(x, t=8.5)$  при варьировании порядка дробной производной по времени для  $\beta = 0.99$ ,  $\beta = 0.8$ ,  $\beta = 0.6$  и фиксированном  $\alpha = 1.99$

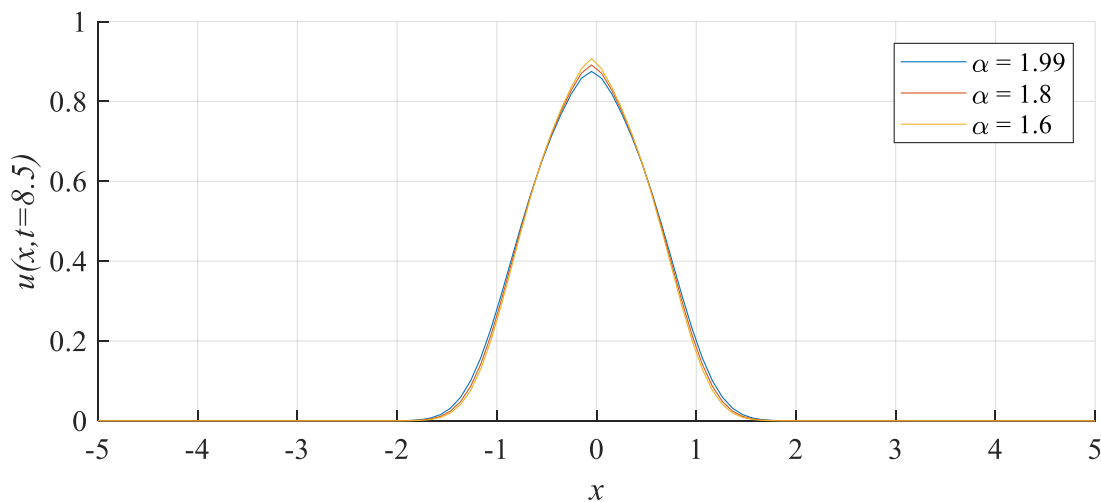


Рисунок 4.6 – Значение искомой функции  $u(x, t=8.5)$  при варьировании порядка дробной производной по координате  $\alpha=1.99$ ,  $\alpha=1.8$ ,  $\alpha=1.6$  и фиксированном  $\beta = 0.99$

На рисунках 4.7 и 4.8 показаны значения функции  $u(x, t)$  в момент времени  $t = 25$  при варьировании значений дробных производных. На данном временном этапе центральный максимум распределения разделяется на два локальных максимума, которые движутся в разные стороны.



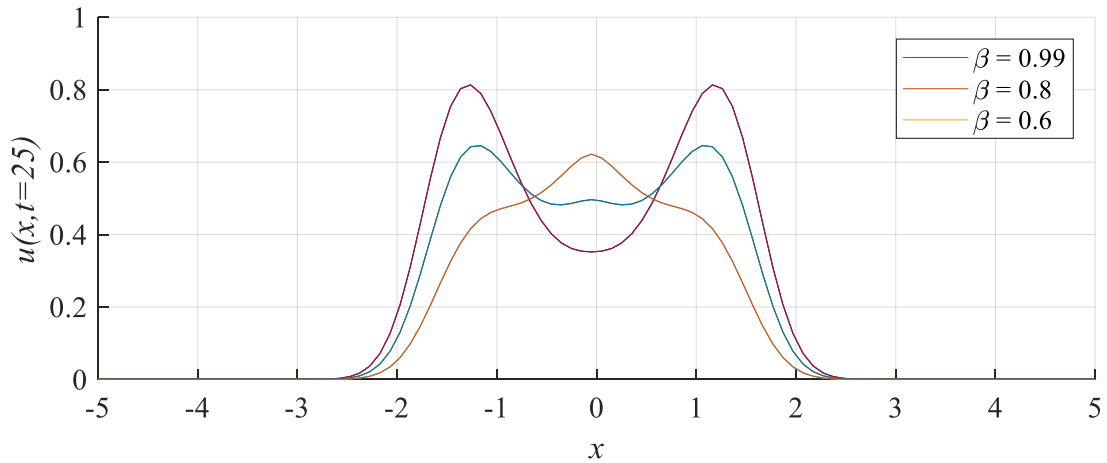


Рисунок 4.7 – Значение искомой функции  $u(x, t=25)$  при варьировании порядка дробной производной по времени для  $\beta = 0.99$ ,  $\beta = 0.8$ ,  $\beta = 0.6$  и фиксированном  $\alpha = 1.99$

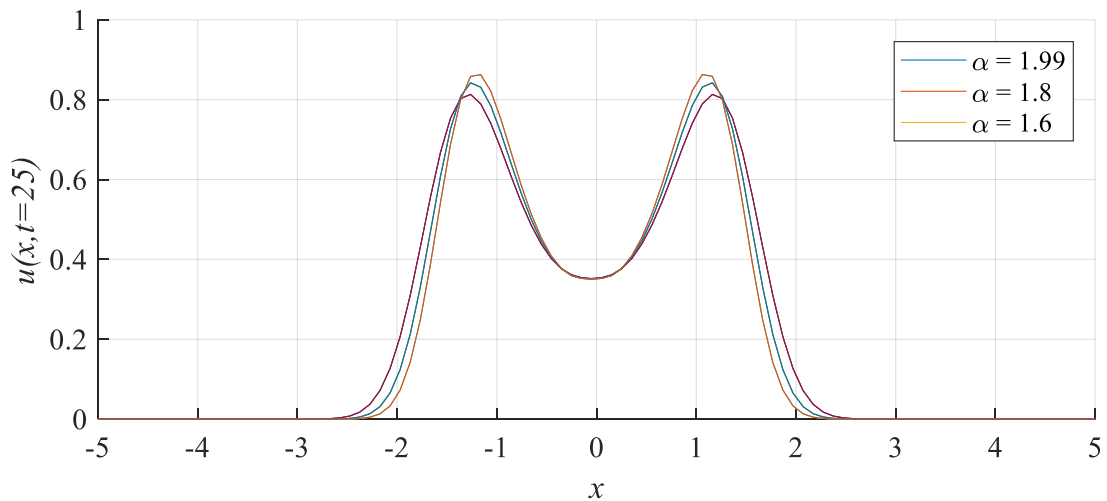


Рисунок 4.8 – Значение искомой функции  $u(x, t=25)$  при варьировании порядка дробной производной по координате  $\alpha = 1.99$ ,  $\alpha = 1.8$ ,  $\alpha = 1.6$  и фиксированном  $\beta = 0.99$

На рисунках 4.9 и 4.10 продемонстрированы значения функции  $u(x, t)$  в момент времени  $t = 50$  при варьировании значений дробных производных

Отметим, что в центре распределения возникает локальный максимум, который разделяется на два локальных максимума меньшей величины, чем на предыдущей стадии.

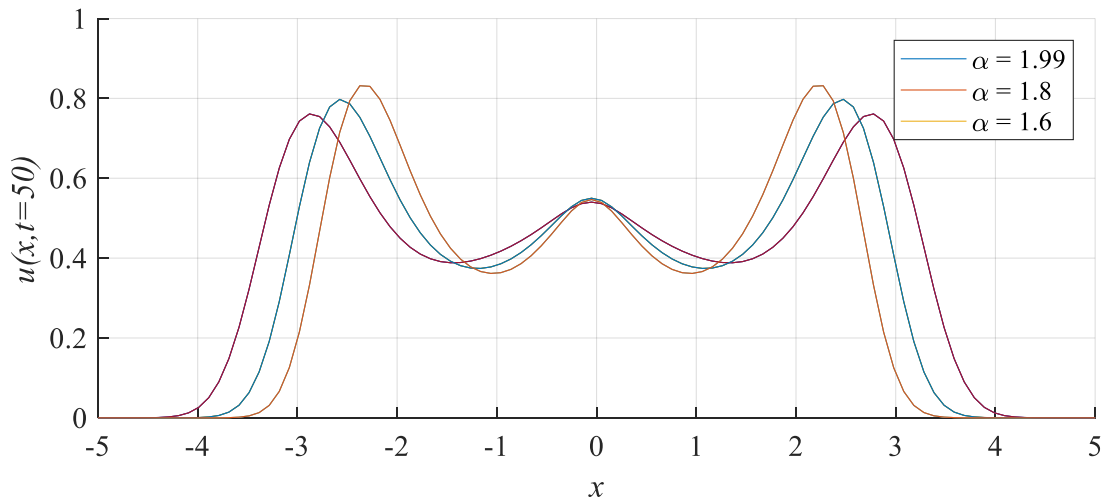


Рисунок 4.9 – Значение искомой функции  $u(x, t=50)$  при варьировании порядка дробной производной по координате  $\alpha=1.99$ ,  $\alpha=1.8$ ,  $\alpha=1.6$  и фиксированном  $\beta = 0.99$

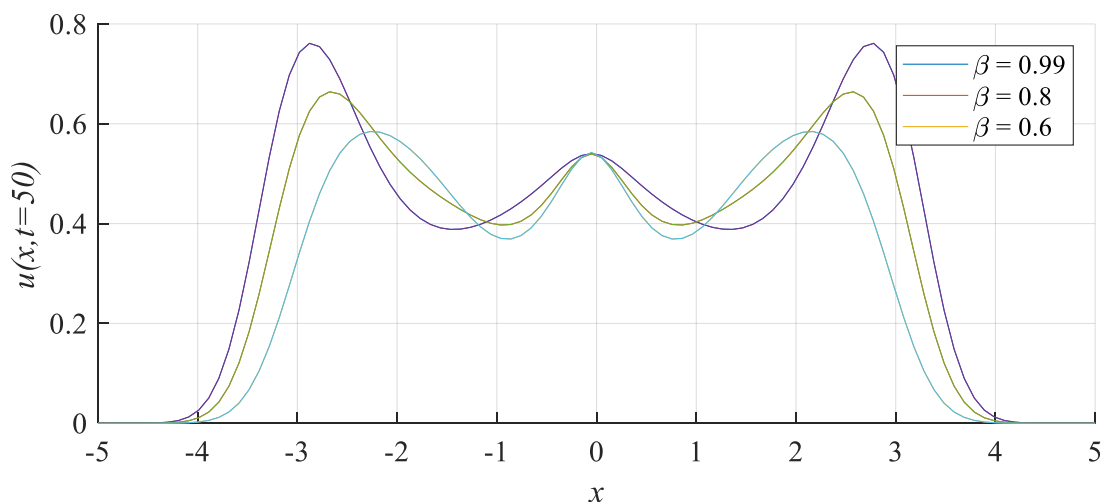


Рисунок 4.10 – Значение искомой функции  $u(x, t=50)$  при варьировании порядка дробной производной по времени для  $\beta = 0.99$ ,  $\beta = 0.8$ ,  $\beta = 0.6$  и фиксированном  $\alpha = 1.99$

Полученные результаты в предельных режимах согласуются с результатами, полученными в работе [1]. С течением времени функция плотности популяции меняется. Сначала происходит последовательное возникновение локальных максимумов в центре распределения. Далее происходит разделение на два симметричных локальных максимума. Эти закономерности и особенности связаны с пространственной неоднородностью

лимитирующих рост факторов (конкуренцией за субстраты, продуктами метаболизма), с взаимодействием различных видов или групп клеток в процессе роста.

Интегро-дифференциальный характер дробных производных операторов позволяет описать пространственно-временные нелокальные процессы переноса, в которых поток в данной точке зависит не только от поведения функции в окрестности рассматриваемой точки, но и от принимаемых ею значений на всем исследуемом интервале значений, т.е. зависит глобально от пространственного распределения частиц и от предыстории транспортного процесса.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В выпускной квалификационной работе построена вычислительная схема и проведена программная реализация дробно-дифференциальной модели популяционной динамики с нелокальным квадратичным последствием.

Проведен литературный обзор динамических моделей популяционной динамики. На основе численной аппроксимации производных дробного порядка по формуле Грюнвальда – Летникова построена вычислительная схема решения начально-граничной задачи для дробно-дифференциального уравнения Фишера – КПП к с нелокальной квадратичностью. Проведена формализация алгоритма и разработана прикладная программа, предназначенная для имитационного моделирования популяционной динамики.

На основе тест-задачи верифицированы полученные результаты.

Проведены вычислительные эксперименты при варьировании значений порядков дробных производных и проанализированы результаты моделирования популяционной динамики для набора модельных параметров.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

- 1 Численное моделирование одномерной популяционной динамики с нелокальным взаимодействием. / А. В. Борисов [и др.]. – Томский политехнический университет, 2009. – С. 24-28.
- 2 Кубышкин, В. А. Дробное интегро-дифференциальное исчисление и его приложения в теории управления. / В. А. Кубышкин, С. С. Постнов. – Москва: ИПУ РАН, 2014. – 153 с.
- 3 Мальтус, Т. Опыт закона о народонаселении. / Т. Мальтус. – М.: Наше завтра, 2022. – 320 с.
- 4 Jevons, W. S. The Theory of Political Economy. / W. S. Jevons. – London: Macmillan and co, 1879. – 315 с.
- 5 Бочаров, С.Н. Основные свойства моделей монотонного роста популяции. / С. Н. Бочаров. – Москва: Изд-во "Наука", 1985. – 121 с.
- 6 Григорьев, А. В. Математические модели роста популяции. / А. В. Григорьев, Е. В. Шарабрин. – Москва: Изд-во "Ленанд", 2008. – 235 с.
- 7 Хофкинг, Э. "Дилемма роста: стоят ли за Мальтусом и Харди". / Э. Хофкинг. – Из-во "Магистр", Москва, 2001. – 224 с.
- 8 Тилман, Д. Пространственная экология: роль пространства в динамике популяций и межвидовых взаимодействиях. / Д. Тилман, П. Карейва. – М.: Феникс, 1997. – 404 с.
- 9 Roos, A. M. Perspectives in modeling and analysis of ecological systems, Ecological Complexity. / A. M. Roos. – 2017. – 30 с.
- 10 Roijackers, D. J. M. Logistic models in ecology: a guide to statistical methods", Journal of Applied Ecology. / D. J. M. Roijackers. – 2017. – 1449-1458 с.
- 11 Lotka, A. Elements of physical biology. / A. Lotka – Baltimore. – 1925. – 400 с.
- 12 Сох, L. Спектральный анализ для дифференциальных уравнений типа Фишера – Колмогорова – Петровского – Пискунова. / L. Сох, Y. Guo. – 2012. – 388 с.

13 Миллер, К. С. Введение в дробный анализ и дробные дифференциальные уравнения. / К. С. Миллер, Б. Росс. – М.: Мир, 1993. – 288 с.

14 Viguerie. A Diffusion–reaction compartmental models formulated in a continuum mechanics framework: application to COVID-19, mathematical analysis, and numerical study. / A. Viguerie [и др.] – Computational Mechanics, 2020. – С. 1132-1152.

15 Chunxi, F. A Fisher-KPP Model with a Nonlocal Weighted Free Boundary: Analysis of How Habitat Boundaries Expand, Balance or Shrink. / F. Chunxi [и др.] – Bull Math Biol, 2022. – С. 27-34.

16 Delahay, R. J. Modeling the Transmission Dynamics of Bovine Tuberculosis in Wildlife using Fractional Calculus. / R. J. Delahay [и др.] – Plos one, 2015. – 15 с.

17 Ren, S. Modeling fractional flow of heavy metals in polymer waste-covered soils. / S. Ren [и др.] – Environmental Science and Pollution Research, 2019. – 14 с.

18 Fuentes, M. A. Nonlocal interaction effects on pattern formation in population dynamics. / M. A. Fuentes, M. N. Kuperman, V. M. Kenkre. – New Mexico, 2003. – 4 с.

19 Shapovalov, A.V. Some aspects of nonlinearity and self-organization in bi-systems on examples of localized excitations in the DNA molecule and generalized Fisher–KPP model. / A. V. Shapovalov, V. V. Obukhov. – Symmetry, 2018. – 26 с.

20 Прозоров, А. А. Асимптотики одномерного нелокального уравнения Фишера – Колмогорова – Петровского – Пискунова с аномальной диффузией. / А. А. Прозоров, А. Ю. Трифонов, А. В. Шаповалов. – Известия высших учебных заведений, 2015. – С. 106-114.

21 Самко, С. Г. Интегралы и производные дробного порядка, и некоторые их приложения. / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.

22 Петухов, А. А. Алгоритмы численного решения дробно- дифференциальных уравнений. / А. А. Петухов, Д. Л. Ревизников. – Москва, 2009. – 231 с.

23 Дегтярев, А. А. Метод конечных разностей: учебное пособие. / А. А. Дегтярев – Самара: Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С. П. Королева. – (национальный исследовательский университет), 2011. – 83 с.

24 Mahdy, A. Crank-Nicolson finite difference method for solving time-fractional diffusion equation. / A. Mahdy, N. Sweilam, M. Khader. – Journal of Fractional Calculus and Applications, 2012. – С. 1-9.

25 Корчагина, А. Н. Численное моделирование диффузионных процессов в фрактальных средах. / А. Н. Корчагина, Л. А. Мержиевский. – Ученые записки Забайкальского государственного университета, 2013. – С. 53-59.

26 Podlubny, I. Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications Fractional differential equations. / I. Podlubny. – USA: Academic Press Inc., 1999. – 340 с.

27 Xiaoting, L. A scale-dependent finite difference approximation for time fractional differential equation. / L. Xiaoting [и др.]. – Computational Mechanics, 2019. – С. 429-442.

28 Ali, U. Crank-Nicolson finite difference method for two-dimensional fractional sub-diffusion equation. / U. Ali, F. A. Abdullah, A. I. Ismail. – Journal of Interpolation and Approximation in Scientific Computing, 2017. – С. 18-29.

29 Sontakke, B. R. Approximate scheme for time fractional diffusion equation and its applications. / B.R. Sontakke, A.S. Shelke. – Global J. of Pure and Applied Mathematics, 2017. – С. 4333–4345.

30 Szekeres, B. J. A finite difference method for fractional diffusion equations with Neumann boundary conditions. / B. J. Szekeres, F. Izsák. – Open Mathematics, 2015. – С. 553-561.

31 Dimitrov, Y. Three-point compact approximation for the Caputo fractional derivative. / Y. Dimitrov. – Communications on Applied Mathematics and Computation, 2017. – С. 413-442.

32 Li, C. High-order approximation to Caputo derivative and Caputo-type advection-diffusion equations. / C. Li, R. Wu, H. Ding. – Communications in Applied and Industrial Mathematics, 2015. – С. 1-33.

33 Ding, H. A high-order numerical algorithm for two-dimensional time-space tempered fractional diffusion-wave equation. / H. Ding. – Applied Numerical Mathematics, 2019. – С. 30-46.

34 Meerschaert, M. M. Finite difference approximations for fractional advection–dispersion flow equations / M. M. Meerschaert, C. Tadjeran // Journal of Computational and Applied Mathematics, 2004. – V. 172. – No. 1. – P. 65 – 77.

35 Дьяконов, В. П. MATLAB полный самоучитель. / В. П. Дьяконов. – Москва, 2012. – 770 с.

36 Chandraker, V. A Numerical treatment of Fisher Equation / V. Chandraker, A. Awasthi, S. Jayaraj. – 2015. – С. 1256-1262.



## ПРИЛОЖЕНИЕ А

Некоторые справочные сведения о дробных производных

### Гамма-функция Эйлера.

Функция Эйлера является обобщением понятия факториала на нецелые числа [Васильев].

$$\Gamma(x) = \begin{cases} \int_0^{\infty} \exp(-t)t^{x-1} dt, & (\operatorname{Re}(x) > 0), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n^{x-1}}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1)}, & (x - \text{любой}). \end{cases}$$

В случае целого  $n$  смысл функции Эйлера совпадает с факториалом:

$$\Gamma(n+1) = n!.$$

На рисунке А.1 представлен график гамма-функции  $\Gamma(x)$ .

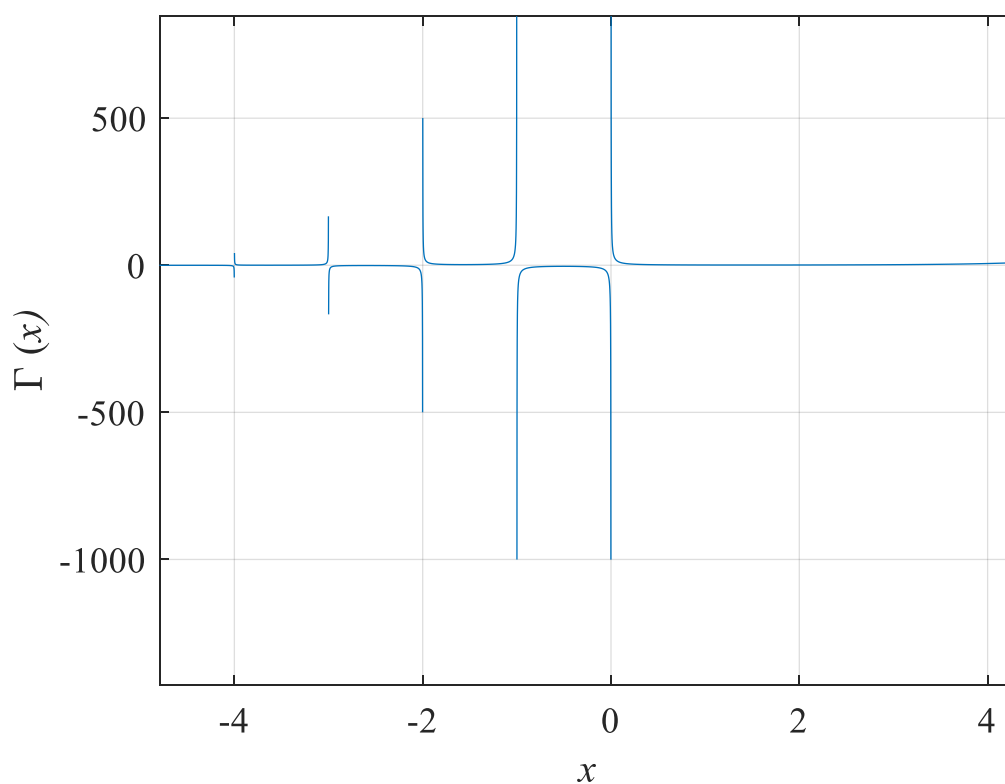


Рисунок А.1 – Гамма-функция действительного аргумента  $\Gamma(x)$

**Дробные производные некоторых элементарных функций и их свойства**

$$1. \frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\alpha+1)} t^{k-\alpha};$$

$$2. \frac{d^\alpha y(t)}{dt^\alpha} = k^\alpha e^{kt};$$

$$3. \frac{d^\alpha \ln t}{dt^\alpha} = t^{-\alpha} (\ln t + \psi(1) - \psi(1-\alpha)) \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}, \text{ где } \psi(\cdot) \text{-функция связанна с}$$

Гамма-функцией соотношением  $\psi(x) = \frac{1}{\Gamma(x)} \frac{d\Gamma(x)}{dx}$ .

$$4. \frac{d^\alpha \sin(\omega t + \varphi)}{dt^\beta} = \omega^\alpha \sin(\omega t + \varphi + \alpha\pi/2).$$

Свойства дробных производных:

$$1. D_t^\alpha (p(t) + q(t)) = D_t^\alpha (p(t)) + D_t^\alpha (q(t)),$$

$$2. D_t^\alpha (cp(t)) = cD_t^\alpha (p(t)), \quad c = const,$$

$$3. D_t^\alpha (p(t)q(t)) = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\alpha}{j} D_t^{\alpha-j} (p(t)) D_t^j (q(t))$$

$$4. D_t^\alpha D_t^\beta (p(t)) = D_t^{\alpha+\beta} (p(t)) \text{— в общем случае не выполняется.}$$

## ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Листинг программы «Дробно-дифференциальная популяционная модель»

```
clear all
global L

beta = 0.99;
alpha = 1.99;
D    = 1;
L    = 1;
T_max = 1;

x_shape = 5;
t_shape = 5;

h = L / x_shape;
tau = T_max / t_shape;

x = (1:x_shape) * h;
t = (1:t_shape) * tau;

u = zeros(x_shape, t_shape);
for i=1:x_shape
    u(i, 1) = f(x(i));
end
for n=1:t_shape-1

    A = zeros(x_shape, x_shape);
    b = zeros(x_shape, 1);
```

```
A(1, 1) = 1; b(1) = phi_1(t(n));
```

```
for i=2:x_shape-1
```

```
    A(i, i) = 1 - tau^beta * b_func(x(i), t(n)) * u(i, n);
```

```
    for k=0:i
```

```
        A(i, i-k+1) = A(i, i-k+1) - tau^beta * D * g(alpha, k) / h^alpha;
```

```
    end
```

```
    b(i) = tau^beta * a_func(x(i), t(n)) * u(i, n);
```

```
    for l=1:n
```

```
        b(i) = b(i) - g(beta, l) * u(i, n-l+1);
```

```
    end
```

```
end
```

```
A(x_shape, x_shape) = 1; b(x_shape) = phi_2(t(n));
```

```
u(:, n+1) = A^-1 * b;
```

```
end
```

```
subplot(1, 2, 1)
```

```
surf(x, t, u, 'EdgeColor', 'none')
```

```
xlabel('x')
```

```
ylabel('t')
```

```
subplot(1, 2, 2)
```

```
for i=1:x_shape
```

```
    for j=1:t_shape
```

```
        Z(i,j) = (1 + exp(x(i) - 5 * t(j))).^(-2);
```

```
    end
```

```
end
```

```
NEV=abs(Z-u);
```

```
NevMax=max(max(NEV))
```

```
function z=a_func(x, t)
```

```
    z = 6;
```

```
end
```

```
function z=b_func(x, t)
```

```
    z = -6;
```

```
end
```

```
function z=f(x)
```

```
    z = 1 / (1 + exp(x)).^2;
```

```
end
```

```
function z=g(a, b)
```

```
    z = gamma(b - a) / gamma(-a) / gamma(b + 1);
```

```
end
```

```
function z=phi_1(t)
```

```
    z = 1 / (1 + exp(-5*t)).^2;
```

```
end
```

```
function z=phi_2(t)
```

```
    z = 1 / (1 + exp(1 - 5*t)).^2;
```

```
end
```

## ПРИЛОЖЕНИЕ В

Листинг программы «Дробно-дифференциальная популяционная модель с нелокальной квадратичной нелинейностью»

```
clear all
global L sigma

beta = 0.9999;
alpha = 1.9999;
D    = 0.001;
L    = 5;
T_max = 50;
kappa = 1;
sigma = 1.44;

x_shape = 100;
t_shape = 100;

x = linspace(-L, L, x_shape);
t = linspace(0, T_max, t_shape);
ksi = linspace(-L, L, x_shape);

h = x(2) - x(1);
tau = t(2) - t(1);

u = zeros(x_shape, t_shape);
for i=1:x_shape
    u(i, 1) = f(x(i));
end
```

```
for n=1:t_shape-1
```

```
    A = zeros(x_shape, x_shape);
```

```
    b = zeros(x_shape, 1);
```

```
    A(1, 1) = 1;
```

```
    A(1, 2) = -1;
```

```
    for i=2:x_shape-1
```

```
        A(i, i) = 1 + tau^beta * kappa * trapz(ksi, b_func(x(i), t(n), ksi) .* u(:, n));
```

```
        for k=0:i
```

```
            A(i, i-k+1) = A(i, i-k+1) - tau^beta * D * g(alpha, k) / h^alpha;
```

```
        end
```

```
    end
```

```
    for i=2:x_shape/2
```

```
        b(i) = tau^beta * a_func(x(i), t(n)) * u(i, n);
```

```
        for l=1:n
```

```
            b(i) = b(i) - g(beta, l) * u(i, n-l+1);
```

```
        end
```

```
        b(x_shape-i) = tau^beta * a_func(x(i), t(n)) * u(i, n);
```

```
        for l=1:n
```

```
            b(x_shape-i) = b(x_shape-i) - g(beta, l) * u(i, n-l+1);
```

```
        end
```

```
    end
```

```
    A(x_shape, x_shape) = 1;
```

```
    u(:, n+1) = A^-1 * b;
```

```
end
```

```
surf(x, t, u, 'EdgeColor', 'none')
xlabel('x')
ylabel('t')
```

```
figure
u0=u(:,1);
u1=u(:,t_shape/4);
u2=u(:,t_shape/2);
u3=u(:,t_shape);
plot(x,u0,x,u1,x,u2,x,u3)
grid on
legend('u0','u1','u2','u3')
```

```
function z=a_func(x, t)
    z = 1;
end
```

```
function z=b_func(x, t, ksi)
    global sigma
    z = exp(-(x - ksi).^2 / sigma);
end
```

```
function z=f(x)
    z = 1 * exp(-x.^2 / 0.447^2);
end
```

```
function z=g(a, b)
    z = gamma(b - a) / gamma(-a) / gamma(b + 1);
end
```