

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
(ФГБОУ ВО «АмГУ»)

Факультет математики и информатики
Кафедра математического анализа и моделирования
Направление подготовки 01.04.02 Прикладная математика и информатика
Направленность (профиль) образовательной программы Математическое
и программное обеспечение вычислительных систем

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ
И.о. зав. кафедрой
_____ Н.Н. Максимова
« _____ » _____ 2019 г.

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

на тему: Вариационные методы решения краевых задач

Исполнитель
студент группы 7520м

(подпись, дата)

Н.П. Шкарлет

Руководитель
доцент, канд. физ.-мат. наук

(подпись, дата)

Н.Н. Максимова

Руководитель научного
содержания программы
магистратуры

(подпись, дата)

А.Г. Масловская

Нормоконтроль
старший преподаватель

(подпись, дата)

Л.И. Мороз

Рецензент
канд. физ.-мат. наук

(подпись, дата)

А.В. Павельчук

Благовещенск 2019

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
(ФГБОУ ВО «АмГУ»)

Факультет математики и информатики
Кафедра математического анализа и моделирования

УТВЕРЖДАЮ
И.о. зав. кафедрой
_____ Н.Н. Максимова
« _____ » _____ 2019 г.

З А Д А Н И Е

К магистерской диссертации студента Шкарлет Николая Петровича.

1. Тема магистерской диссертации: Вариационные методы решения краевых задач. (утверждена приказом от 20.05.2019 № 1100-уч)
 2. Срок сдачи студентом законченной работы: 18.06.2019 г.
 3. Исходные данные к магистерской диссертации: отчет по преддипломной практике, средства автоматизации вычисления – ППП Matlab, COMSOL Multiphysics, учебная и научная литература.
 4. Содержание магистерской диссертации (перечень подлежащих разработке вопросов): постановка задачи в различных формулировках, исследование задачи методом Эйлера, методом Рунге, методом частичного интегрирования, разработка и расчет математической модели в ППП Matlab и COMSOL Multiphysics.
 5. Перечень материалов приложения: листинг вычислительных программ: реализация метода Эйлера, реализация метода Рунге, реализация метода частичного интегрирования.
 6. Консультанты по магистерской диссертации: рецензент – Павельчук А.В., канд. физ.- мат. наук, старший научный сотрудник лаборатории математического моделирования сложных физических систем ФГБОУ ВО "АмГУ"; нормоконтроль – Мороз Л.И., старший преподаватель.
 7. Дата выдачи задания: 19.02.2019 г.
- Руководитель магистерской диссертации: Максимова Надежда Николаевна, доцент, канд. физ.-мат. наук, доцент.
- Задание принял к исполнению (19.02.2019): _____ Шкарлет Н.П.

РЕФЕРАТ

Магистерская диссертация содержит 74 с., 31 рисунок, 4 таблицы, 3 приложения, 28 источников.

ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ, МЕТОД РИТЦА, МЕТОД ЭЙЛЕРА, МЕТОД ЧАСТИЧНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ, КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ, УРАВНЕНИЕ БЕССЕЛЯ, ДВУХМЕРНАЯ СТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Актуальность применения вариационных методов как современного инструмента моделирования и численного решения задач оптимизации можно объяснить их универсальностью и возможностью применения для решения задач различных областей: механика, физика, логистика, экономика и другие.

Целью магистерской диссертации является применение вариационных методов для решения краевых задач.

Получены следующие результаты:

- получено численное решение уравнения Бесселя в вариационной постановке методом Эйлера;
- получено численное решение уравнения Бесселя в вариационной постановке методом Ритца;
- получено численное решение двухмерной стационарной задачи распределения тепла методом частичного интегрирования;
- получено решение двухмерной стационарной задачи распределения тепла средствами математических пакетов.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	6
1 Анализ предметной области	10
1.1 Постановка вариационной задачи	10
1.2 Численные методы решения вариационных задач	17
1.2.1 Описание метода Эйлера и пример реализации	17
1.2.2 Описание метода Рунге и пример реализации	22
1.3 Дифференциальное уравнение Бесселя	28
1.4 Сведение краевой задачи для уравнения Бесселя к вариационной задаче	30
2 Решение краевой задачи для уравнения Бесселя вариационными методами	33
2.1 Постановка задачи	33
2.2 Сведение линейной краевой задачи к вариационной задаче	33
2.3 Реализация метода Эйлера	36
2.4 Реализация метода Рунге	39
3 Исследование двухмерной стационарной задачи распределения тепла	44
3.1 Вариационная и краевая постановки	44
3.2 Аналитическое решение задачи методом Фурье	45
3.3 Решение задачи методом частичного интегрирования	47
3.4 Решение задачи в пакете PDEtool	53
3.5 Решение задачи в пакете COMSOL Multiphysics	56
4 Использование результатов магистерской диссертации в педагогической деятельности	60
4.1 Задание для индивидуальной работы №1	60
4.2 Задание для индивидуальной работы №2	61
Заключение	63

Библиографический список	65
Приложение А Реализация метода Эйлера для уравнения Бесселя	68
Приложение Б Реализация метода Рунге для уравнения Бесселя	70
Приложение В Листинг вычислительной программы для двумерной стационарной задачи распределения тепла	72

ВВЕДЕНИЕ

Вариационные принципы сыграли важную роль в развитии различных областей естествознания. Наиболее ясно это видно на примере механики, как классической, так и квантовой, а также термодинамики. Широко известно, что задачи механики частиц столь же хорошо можно выразить в вариационной форме, как и с помощью уравнений движения Ньютона. Хотя нетрудно заметить соответствие между этими двумя способами описания, ясное понимание поведения сложных физических систем нередко легче достигается с помощью энергетического подхода (метод Гамильтона), чем при использовании ньютоновских уравнений движения. К этому преимуществу вариационных методов следует добавить, что они весьма удобны для построения приближенного решения задачи. Кроме того, вариационные принципы не зависят от выбора системы координат. Все эти преимущества побуждают исследователей использовать при изучении механики частиц оба способа описания, дополняющих друг друга [1].

Вариационное описание некоторого физического процесса предполагает, что некоторый интеграл принимает стационарное (обычно максимальное или минимальное) значение при подходящем выборе неизвестной функции, входящей в подынтегральное выражение. В инженерных исследованиях часто возникает задача определения оптимального режима или оптимальных условий, и тогда совершенно естественно математически формулировать эту задачу именно в вариационной форме [2-5].

Вариационная формулировка большинства физических задач удобна при нахождении приближенных решений. Сущность многих из вариационных методов состоит в формулировке рассматриваемой задачи математической физики в вариационной форме как задачи об отыскании функции, реализующей минимум (или, в общем случае, экстремум) некоторого функционала, и в последующем нахождении приближений к этой функции. Из последних работ,

в которых рассматриваются вариационные методы для решения физических задач, следует отметить статьи [6-8].

Актуальность применения вариационных методов как современного инструмента моделирования и численного решения задач оптимизации можно объяснить их универсальностью и возможностью применения для решения задач различных областей: механика, физика, логистика, экономика и другие.

Научная новизна работы состоит в применении вариационных численных методов для решения уравнения Бесселя и задач теплопроводности.

Объектом исследования являются вариационные методы решения линейных краевых задач.

Предметом исследования являются численное решение поставленных задач методом Эйлера, Рунге и частичного интегрирования.

Метод Эйлера является простейшим, одношаговым численным методом первого порядка точности. Основу метода Эйлера для вариационной задачи составляет, то, что значение функционала рассматривается не на произвольных, допустимых в вариационной задаче кривых, а лишь на ломанных, составленных из заданного числа n прямолинейных звеньев с заданными абсциссами вершин.

Метод Рунге является прямым приближенным численным методом. Основная суть метода содержится в том, что при поиске экстремума функционала под рассмотрение попадает не все допустимое пространство функции, а лишь разнообразные линейные комбинации допустимых функций.

Метод частичного интегрирования так же известный под названием: приведение к дифференциальному уравнению. Суть метода заключается в подборе из класса функций, реализующих стационарное значение некоторого интеграла, удовлетворяющих уравнение Эйлера-Лагранжа. Функции имеют априори предложенную структуру. Данный метод в некоторых случаях проще и приводит к более точной аппроксимации, чем метод Рунге.

Целью магистерской диссертации является применение вариационных методов для решения краевых задач.

Задачи магистерской диссертации:

- исследование уравнения Бесселя с применением вариационного метода Эйлера;
- исследование уравнения Бесселя с применением вариационного метода Ритца;
- исследование двумерной стационарной задачи распределения тепла с применением метода частичного интегрирования;
- проведение вычислительных экспериментов.

Результаты работы докладывались и обсуждались на XXVIII научной конференции «День науки» в АмГУ (2019 г.), на XX региональной научно-практической конференции «Молодежь XXI века: шаг в будущее» (2019 г.), на II всероссийской национальной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Молодежь и наука: Актуальные проблемы фундаментальных и прикладных исследований» (2019 г.), на научно-методических семинарах кафедры математического анализа и моделирования ФГБОУ ВО «Амурский государственный университет» (2018-2019 гг.).

По теме магистерской диссертации опубликовано три работы [25-27] в различных изданиях: «Вестник Амурского государственного университета», материалы XX региональной научно-практической конференции «Молодёжь XXI века: шаг в будущее», материалы II всероссийской национальной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Молодежь и наука: Актуальные проблемы фундаментальных и прикладных исследований».

Результаты магистерской диссертации могут быть использованы в образовательном процессе при изучении дисциплин «Методы оптимизации» и «Численные методы» (направление подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика), «Вариационные методы» (специальность 24.05.01 Проектирование, разработка и эксплуатация ракет и ракетно-космических комплексов) в рамках проведения практических (или лабораторных) занятий. Магистерская диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, библиографического списка и трех приложений.

Структура работы: в первом пункте первой главы рассматривается

постановка задачи вариационного исчисления, приводится классификация вариационных задач, рассмотрены классические приемы задач вариационного исчисления. Во втором пункте первой главы рассмотрены два вида вариационных методов и приведены примеры их реализации. Третий и четвертый пункт первой главы посвящен уравнению Бесселя. Вторая глава освещает исследование задачи методами Эйлера и Ритца, результаты численных расчетов. Третья глава посвящена исследованию двухмерной стационарной задачи распределения тепла методом частичного интегрирования. В четвертой главе представлены индивидуальные задания и варианты к ним, предлагаемые для самостоятельной работы студентов. В приложениях приведены листинги вычислительных программ.

1 АНАЛИЗ ПРЕДМЕТНОЙ ОБЛАСТИ

1.1 Постановка вариационной задачи

Простейшим примером задачи вариационного исчисления называют задачу отыскивания экстремума интегрального функционала [1, 9-11]

$$I(y(x)) = \int_a^b L(x, y(x), y'(x)) dx.$$

Переменная $I(y(x))$ называется функционалом. Данная переменная зависит от функции $y(x)$. В свою очередь $y(x)$ соответствует число, если каждой кривой из заданного класса функций M соответствует вполне определенное значение I .

Приведем примеры классических задач вариационного исчисления.

Пример 1.

Задача о кратчайшем расстоянии между двумя точками на плоскости. Требуется найти среди всех гладких кривых, соединяющих точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$, найти кривую с наименьшей длиной в соответствии с рисунком 1.1.

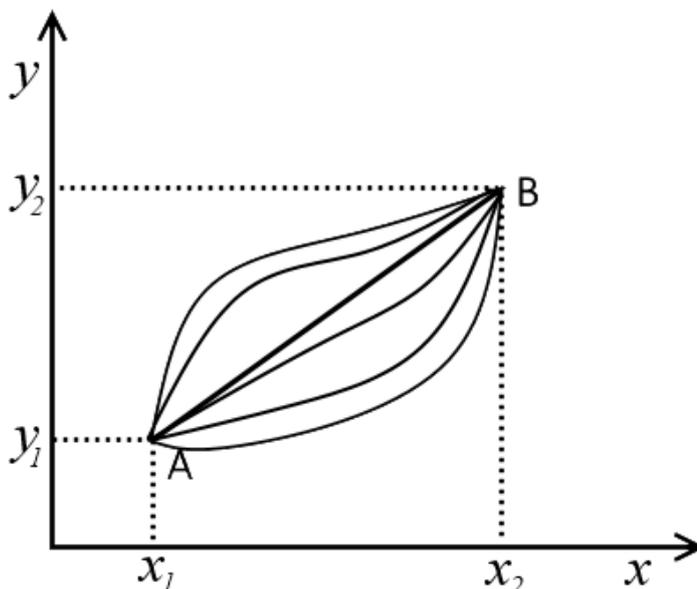


Рисунок 1.1 – Кривые, соединяющие 2 точки

Для того, чтобы найти кривую наименьшей длины, составим интеграл

$$I(y(x)) = \int_{x_1}^{x_2} (1 + y_x^2(x))^{\frac{1}{2}} dx ,$$

удовлетворяющий граничным условиям $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$.

Применяя к интегралу уравнение Эйлера-Лагранжа, получим

$$\frac{dL}{dy} = \frac{d}{dx} (1 + y_x^2)^{\frac{1}{2}} = 0 \text{ и } \frac{dL}{dy_x} = \frac{d}{dy_x} (1 + y_x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{y_x}{(1 + y_x^2)^{\frac{1}{2}}} .$$

Следовательно, уравнение Эйлера-Лагранжа примет вид

$$\frac{d}{dx} \left(y_x (1 + y_x^2)^{-\frac{1}{2}} \right) = 0 ,$$

в конечном итоге получаем $\frac{y_x}{(1 + y_x^2)^{\frac{1}{2}}} = const$.

Из полученного соотношения, следует, что гладкой кривой является прямая линия, проходящая через точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$.

Пример 2.

Задача Дидоны – исторически первая задача вариационного исчисления. Связана с древней легендой об основании города Карфагена. Дидона – сестра царя финикийского города Тира – переселилась на южное побережье Средиземного моря, где попросила у местного племени участок земли, который можно охватить шкурой быка. Местные жители предоставили шкуру, которую Дидона разрезала на узкие ремни и связала их. Получившимся канатом охватила территорию у побережья. Возникает вопрос о том, как охватить максимальную площадь канатом данной длины.

Решением является полуокружность. Обычно решается применением изопериметрического неравенства к кривой по которой идёт канат и его отражением от линии берега.

Задачу также можно свести к нахождению экстремума функционала

$$I(y(x)) = \int_a^b y(x) dx,$$

удовлетворяющий граничным условиям $y(a) = 0$, $y(b) = 0$ и при

фиксированной длине $l = \int_a^b (1 + y_x^2(x))^{\frac{1}{2}} dx$.

Пример 3.

Задача о брахистохроне. Среди всех кривых, соединяющих две данные точки плоскости, найти ту, двигаясь по которой под действием силы тяжести, материальная точка попадёт из начальной точки в конечную за кратчайшее время.

Кривая, вдоль которой точка скорее всего скатывается из начальной точки в конечную называется брахистохроной, представленная на рисунке 1.2.

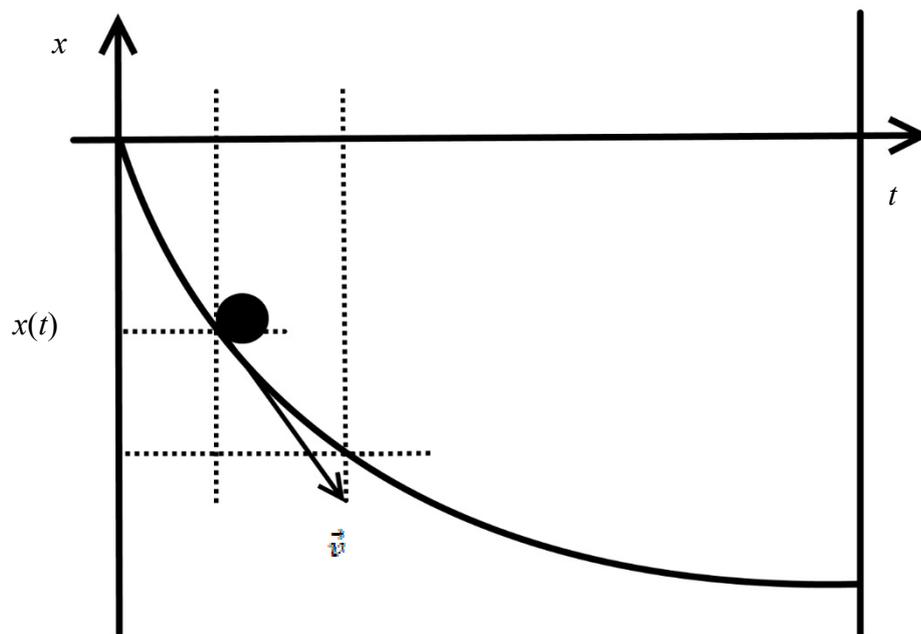


Рисунок 1.2 – График брахистохроны

Запишем закон сохранения энергии для материальной точки:

$$\frac{mv^2}{2} = mgy,$$

где m – масса тела; g – ускорение свободного падения; y – ордината; v – скорость движения тела.

Получаем:

$$v = \sqrt{2gy}.$$

Отсюда получаем проекции скорости на ось x :

$$v_x = \frac{v}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{\sqrt{2gy}}{\sqrt{1+y'^2}}.$$

Так как время на спуск равняется $\int_a^b \frac{1}{v_x} dx$, то задача сводится к

минимизации значения интеграла

$$\frac{1}{\sqrt{2g}} \int_a^b \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}} dx.$$

Пример 4.

Задача о геодезических линиях. Дана поверхность $\varphi(x, y, z) = 0$ и две точки $A(x_0, y_0, z_0)$, $B(x_1, y_1, z_1)$ на данной поверхности. Требуется определить линию наименьшей длины, соединяющую эти точки и проходящую по этой поверхности.

Линия, т.е. уравнение кривой в пространстве, есть функция трех координат. И ее длину следует минимизировать. Из курса математического анализа длина участка кривой вычисляется по формуле:

$$L = \int_a^b dl = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+y'^2+z'^2} dx.$$

И требуется минимизировать этот функционал при условии, что $\varphi(x, y, z) = 0$. Получили задачу на условный экстремум функционала:

$$L^* = \int_{x_1}^{x_2} \left[\sqrt{1+y'^2+z'^2} + \lambda(x)\varphi(x, y, z) \right] dx.$$

Решив задачу, получим функции $y = y(x)$, $z = z(x)$, т.е. искомую кривую.

В таблице 1 рассматриваются классические задачи вариационного исчисления.

Таблица 1 – Классификация вариационных задач

Вид задачи	Постановка задачи
Вариационные задачи поиска безусловного экстремума	
<i>Задачи с неподвижными границами</i>	
Функционалы, зависящие от одной функции	$I(x(t)) = \int_{t_0}^T L(t, x(t), x'(t)) dt \rightarrow \underset{x(t) \in M}{extr}$ <p>Граничные условия: $x(t_0) = x_0, x(T) = x_T$</p>
Функционалы, зависящие от нескольких функций	$I(x_1(t), \dots, x_n(t)) = \int_{t_0}^T L(t, x(t), \dots, x_n(t), x'_1(t), \dots, x'_n(t)) dt \rightarrow \underset{x(t) \in M}{extr}$ <p>Граничные условия: $x_i(t_0) = x_{i0}, x_i(T) = x_{iT}, i = \overline{1, n}$</p>
Функционалы, зависящие от производных высшего порядка одной функции	$I(x(t)) = \int_{t_0}^T L(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(m)}(t)) dt \rightarrow \underset{x(t) \in M}{extr}$ <p>Граничные условия: $x(t_0) = x_0, x^{(1)}(t_0) = x_0^{(1)}, x(T) = x_T, x^{(1)}(T) = x_T^{(1)}, i = \overline{1, m-1}$</p>
Функционалы, зависящие от производных высшего порядка нескольких функций	$I(x(t)) = \int_{t_0}^T L(t, x_1(t), x'_1(t), \dots, x_1^{(m)}(t), \dots, x_n(t), x'_n(t), \dots, x_n^{(m)}(t)) dt \rightarrow \underset{x(t) \in M}{extr}$ <p>Граничные условия: $x_i(t_0) = x_{i0}, x_i^{(k)}(t_0) = x_{i0}^{(k)}, x_i(T) = x_{iT}, x_i^{(k)}(T) = x_{iT}^{(k)}, i = \overline{1, n}, k = \overline{1, m-1}$</p>
<i>Задачи с подвижными границами</i>	
Функционал, зависящий от одной функции. (Случай гладких экстремалей)	$I(x(t)) = \int_{t_0}^T L(t, x(t), x'(t)) dt \rightarrow \underset{x(t) \in M}{extr}$ <p>Граничные условия: $\psi(t_0, x_0) = 0, \varphi(T, x_T) = 0$, где $\psi(t_0, x_0), \varphi(T, x_T)$ – заданные непрерывные дифференцируемые функции</p>
Функционал, зависящий от одной функции. (Случай негладких экстремалей)	$I(x(t)) = \int_{t_0}^T L(t, x(t), x'(t)) dt \rightarrow \underset{x(t) \in M}{extr}$ <p>Граничные условия: $x(t_0) = x_0, x(T) = x_T$</p>

Продолжение таблицы 1

<p>Функционалы, зависящие от нескольких функций</p>	$I(x_1(t), \dots, x_n(t)) = \int_{t_0}^T L(t, x_1(t), \dots, x_n(t), x_1'(t), \dots, x_n'(t)) dt$ <p>$\rightarrow \underset{x(t) \in M}{extr}$</p> <p>Граничные условия: $\psi_j(t_0, x_{10}, \dots, x_{n0}) = 0$, $j = \overline{1, m}, m \leq n + 1$ $\varphi_j(T, x_{1T}, \dots, x_{nT}) = 0, j = \overline{1, p}, p \leq n + 1$.</p> <p>где $\psi_j(t, x_1, \dots, x_n), \varphi_j(T, x_1, \dots, x_n)$ – заданные непрерывные дифференцируемые функции $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$ – вектор-функция.</p>
<p>Функционалы, зависящие от одной функции</p>	$I(x(t)) = \int_{t_0}^T L(t, x(t), x'(t)) dt + G(T, x(T)) \rightarrow \underset{x(t) \in M}{extr}$ <p>Граничные условия: $\varphi(T, x_T) = 0$ $x(t_0) = x_0, x_0$ задано, $x_T = x(T)$ $\varphi(t, x)$ – заданная непрерывная дифференцируемая функция, $G(t, x)$ – непрерывная дифференцируемая функция по всем переменным.</p>
<p>Функционалы, зависящие от нескольких функций</p>	$I(x_1(t), \dots, x_n(t)) = \int_{t_0}^T L(t, x_1(t), \dots, x_n(t), x_1'(t), \dots, x_n'(t)) dt +$ $+ G(T, x_1(T), \dots, x_n(T)) \rightarrow \underset{x(t) \in M}{extr}$ <p>Граничные условия: $x(t_0) = x_0 = (x_{10}, \dots, x_{n0})^T$, $x_{i0}, i = \overline{1, n}$ $\varphi_j(T, x_{1T}, \dots, x_{nT}) = 0, j = \overline{1, p}, p \leq n + 1$ $x_{iT} = x(T); \varphi_j(t, x_1, \dots, x_n) = 0, j = \overline{1, p}$ – заданные непрерывные дифференцируемые функции.</p>

Продолжение таблицы 1

Вариационные задачи поиска условного экстремума	
Задача с конечными связями	$I(x_1(t), \dots, x_n(t)) = \int_{t_0}^T L(t, x_1(t), \dots, x_n(t), x_1'(t), \dots, x_n'(t)) dt \rightarrow$ $\rightarrow \underset{x(t) \in M}{extr}$ <p>Граничные условия: $x_i(t_0) = x_{i0}, x_i(T) = x_{iT},$ $i = \overline{1, n}$</p> <p>Функция $x_i(t)$ на всех $t \in [t_0, T]$ удовлетворяет конечным связям: $\varphi_j(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) = 0, j = \overline{1, m}, m < n$</p>
Задача с дифференциальными связями	$I(x_1(t), \dots, x_n(t)) = \int_{t_0}^T L(t, x_1(t), \dots, x_n(t), x_1'(t), \dots, x_n'(t)) dt \rightarrow$ $\rightarrow \underset{x(t) \in M}{extr}$ <p>Граничные условия: $x_i(t_0) = x_{i0}, x_i(T) = x_{iT},$ $i = \overline{1, n}$</p> <p>Функция $x_i(t)$ при всех $t \in [t_0, T]$ удовлетворяет дифференциальным связям: $\varphi_j(t, x_1(t), \dots, x_n(t), x_1'(t), \dots, x_n'(t)) = 0,$ $j = \overline{1, m}, m \leq n$</p>
Задача с интегральными связями. (изопериметрические задачи)	$I(x_1(t), \dots, x_n(t)) = \int_{t_0}^T L(t, x_1(t), \dots, x_n(t), x_1'(t), \dots, x_n'(t)) dt \rightarrow$ $\rightarrow \underset{x(t) \in M}{extr}$ <p>Граничные условия: $x_i(t_0) = x_{i0}, x_i(T) = x_{iT},$ $i = \overline{1, n}$</p> <p>Функция $x_i(t)$ при всех $t \in [t_0, T]$ удовлетворяет интегральным связям: $\int_{t_0}^T L_j(t, x_1(t), \dots, x_n(t), x_1'(t), \dots, x_n'(t)) dt = L_j,$ $j = \overline{1, m}$</p>

В зависимости от типа поставленной задачи выбирается и алгоритм ее аналитического решения [10-11].

1.2 Численные методы решения вариационных задач

1.2.1 Описание метода Эйлера и пример реализации.

Метод Эйлера является простейшим явным, одношаговым численным методом первого порядка точности [9]. Был впервые описан Леонардом Эйлером в 1768 году.

Для иллюстрации метода, рассмотрим вариационную задачу о нахождении экстремума функционала

$$K(y(x)) = \int_a^b F(x, y, y') dx, \quad (1.1)$$

при заданных граничных условиях $y(a) = A$, $y(b) = B$.

Основу метода Эйлера для вариационной задачи составляет, то, что значение функционала рассматривается не на произвольных, допустимых в вариационной задаче кривых, а лишь на ломанных, составленных из заданного числа n прямолинейных звеньев с заданными абсциссами вершин:

$$a + \Delta x, a + 2\Delta x \dots, a + (n-1)\Delta x, \quad (1.2)$$

$$\text{где } \Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

На ломанных, составленных из заданного числа n прямолинейных звеньев с заданными абсциссами вершин, функционал $K(y(x))$ принимает вид функции $\Phi(y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$ ординат вершин ломанной. Ординаты y_1, y_2, \dots, y_{n-1} выбираются таким образом, чтобы $\Phi(y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$ достигала экстремума. Отсюда следует вывод о том, что ординаты определяются из системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_i} = 0, i = \overline{1, n-1}. \quad (1.3)$$

В результате выше описанного метода, получается ломаная, являющаяся приближенным решением вариационной задачи.

Пример 5.

Найти экстремум функционала

$$I(y) = \int_0^1 (y'^2 - y^2 - 2x^2 y) dx, \quad (1.4)$$

при заданных граничных условиях $y(0) = y(1) = 0$.

Найдем точное решение задачи. Запишем уравнением Эйлера-Лагранжа для данного функционала:

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0,$$
$$F_y = -2y - 2x^2; \quad F_{y'} = 2y'; \quad \frac{d}{dx} F_{y'} = 2y''; \quad (1.5)$$
$$-2y - 2x^2 - 2y'' = 0 \quad \text{или} \quad y + y'' = -x^2.$$

Получили неоднородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

Общее решения данного дифференциального уравнения имеет вид:

$$y(x) = C_1 \sin(x) + C_2 \cos(x) + 2 - x^2. \quad (1.6)$$

Подставляя граничные условия в общее решение, получим точное решение (1.20):

$$y(x) = \left(\frac{2 \cos(1)}{\sin(1)} - \frac{1}{\sin(1)} \right) \sin(x) + 2 \cos(x) + 2 - x^2. \quad (1.7)$$

Найдем решение методом Эйлера. Разобьем равномерно отрезок $[0,1]$ точками $x_i = x_{i-1} + \Delta x, i = \overline{1, n}$.

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}, \quad \Delta x = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n} \quad (1.8)$$

где n – количество элементарных отрезков.

Обозначим $y_i = y(x_i), i = \overline{0, n}$, – значение решения в узле x_i . При этом $y_0 = y_n = 0$.

Заменим производные приближенно по формуле «правых» разностей

$$y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}, \quad i = \overline{0, n-1}. \quad (1.9)$$

Интеграл вычислим приближенно по формуле «левых» прямоугольников

$$\int_a^b f(x)dx \approx (f(a) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})) \cdot \Delta x = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot \Delta x. \quad (1.10)$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \int_0^1 (y'^2(x) - y^2(x) - 2x^2 y(x)) dx &\approx \left[\sum_{i=0}^{n-1} (y'^2(x_i) - y^2(x_i) - 2x_i^2 y(x_i)) \right] \cdot \Delta x = \\ &= \left[\sum_{i=0}^{n-1} \left(\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x} \right)^2 - y_i^2 - 2x_i^2 y_i \right) \right] \cdot \Delta x = \\ &= \left[\left(\frac{y_1}{\Delta x} \right)^2 \right] \cdot \Delta x + \left[\left(\frac{y_2 - y_1}{\Delta x} \right)^2 - y_1^2 - 2x_1^2 y_1 \right] \cdot \Delta x + \\ &+ \left[\left(\frac{y_3 - y_2}{\Delta x} \right)^2 - y_2^2 - 2x_2^2 y_2 \right] \cdot \Delta x + \dots \\ &\dots + \left[\left(\frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{\Delta x} \right)^2 - y_{n-2}^2 - 2x_{n-2}^2 y_{n-2} \right] \cdot \Delta x + \dots \\ &\dots + \left[\left(-\frac{y_{n-1}}{\Delta x} \right)^2 - y_{n-1}^2 - 2x_{n-1}^2 y_{n-1} \right] \cdot \Delta x = \Phi(y_1, y_2, \dots, y_{n-1}) \end{aligned} \quad (1.11)$$

Продифференцируем данную функцию по переменным y_i , $i = \overline{1, n-1}$, и приравняем к нулю:

$$\frac{1}{\Delta x} \frac{\partial \Phi}{\partial y_i} = 0, \quad i = \overline{1, n-1}. \quad (1.12)$$

После дифференцирования (1.12), получаем систему линейных алгебраических уравнений (1.13) с коэффициентами из приближенной формулы «левых» прямоугольников (1.11). Далее проводим процедуру по упрощению данной системы линейных алгебраических уравнений и окончательно получаем систему (1.15). Решая которую, получаем ломаную, являющуюся приближенным решением вариационной задачи (1.5).

$$\begin{cases} \frac{1}{\Delta x} \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} = 2 \frac{y_1}{(\Delta x)^2} - 2 \frac{(y_2 - y_1)}{(\Delta x)^2} - 2y_1(\Delta x)^2 - 2x_1^2 \Delta x = 0 \\ \frac{1}{\Delta x} \frac{\partial \Phi}{\partial y_i} = 2 \frac{(y_i - y_{i-1})}{(\Delta x)^2} - 2 \frac{(y_{i+1} - y_i)}{(\Delta x)^2} - 2y_i(\Delta x)^2 - 2x_i^2 \Delta x = 0, i = \overline{2, n-2} \\ \dots \\ \frac{1}{\Delta x} \frac{\partial \Phi}{\partial y_{n-1}} = 2 \frac{(y_{n-1} - y_n)}{(\Delta x)^2} + 2 \frac{y_{n-1}}{(\Delta x)^2} - 2y_{n-1}(\Delta x)^2 - 2x_{n-1}^2 \Delta x = 0 \end{cases} \quad (1.13)$$

Сокращаем на 2 и умножаем на $(\Delta x)^2$:

$$\begin{cases} y_1 - (y_2 - y_1) - y_1(\Delta x)^2 - x_1^2(\Delta x)^2 = 0 \\ (y_i - y_{i-1}) - (y_{i+1} - y_i) - y_i(\Delta x)^2 - x_i^2(\Delta x)^2 = 0, i = \overline{2, n-2} \\ \dots \\ (y_{n-1} - y_{n-2}) - y_{n-1} - y_{n-1}(\Delta x)^2 - x_{n-1}^2(\Delta x)^2 = 0 \end{cases} \quad (1.14)$$

Окончательно получаем

$$\begin{cases} \left(2 - (\Delta x)^2\right) \cdot y_1 - y_2 = x_1^2 \cdot (\Delta x)^2 \\ -y_{i-1} + \left(2 - (\Delta x)^2\right) \cdot y_i - y_{i+1} = x_i^2 \cdot (\Delta x)^2, i = \overline{2, n-2} \\ \dots \\ -y_{n-2} + \left(2 - (\Delta x)^2\right) \cdot y_{n-1} = x_{n-1}^2 \cdot (\Delta x)^2 \end{cases} \quad (1.15)$$

Представляем систему линейных алгебраических уравнений (1.15) относительно неизвестных $y_i, i = \overline{1, n-1}$.

Воспользуемся средствами ППП Matlab для нахождения решения системы (1.15).

В результате применения явного, одношагового численного метода Эйлера, были получены следующие графики, представленные на рисунках 1.3-1.5. Как видно из результатов численного эксперимента, относительная погрешность при $n=5$, составляет менее 1%. Отсюда можно сделать вывод о том, что при повышении числа n прямолинейных звеньев с заданными абсциссами вершин повышается точность данного метода.

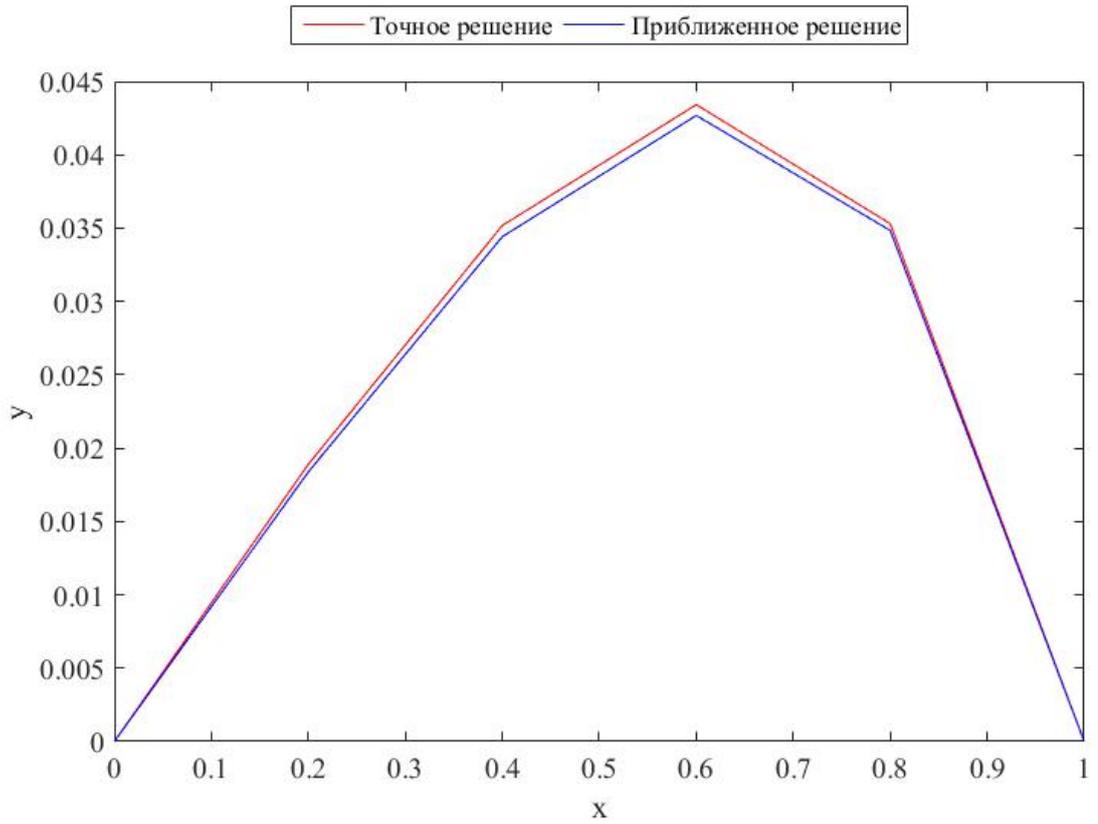


Рисунок 1.3 – График решений методом Эйлера при $n=5$

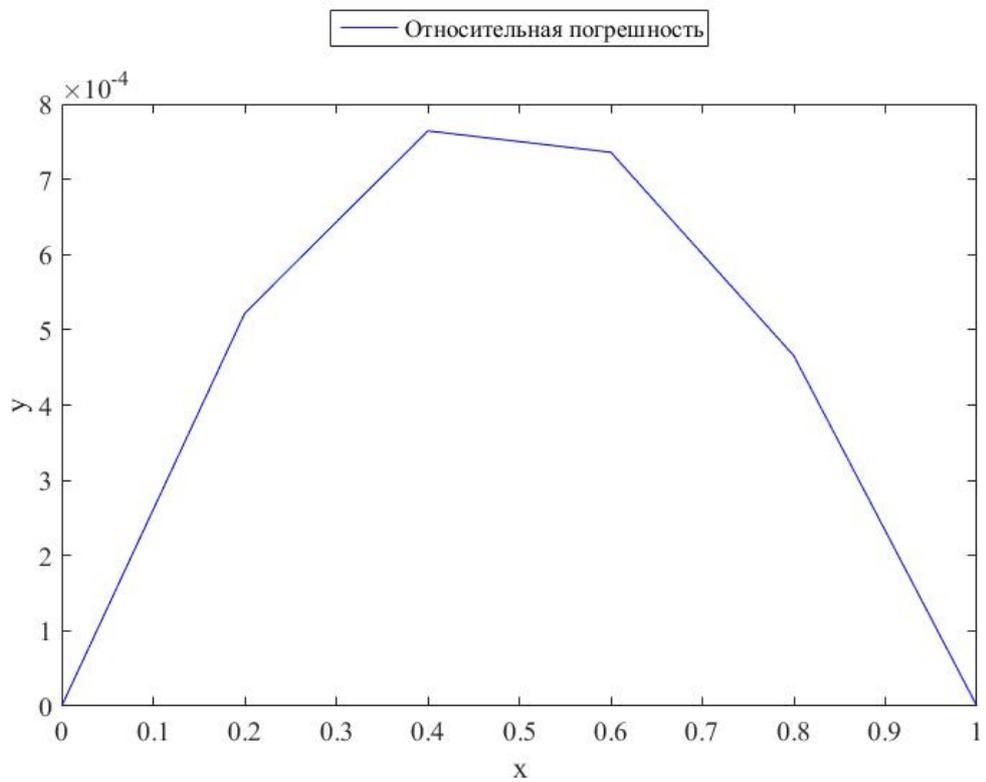


Рисунок 1.4 – Относительная погрешность

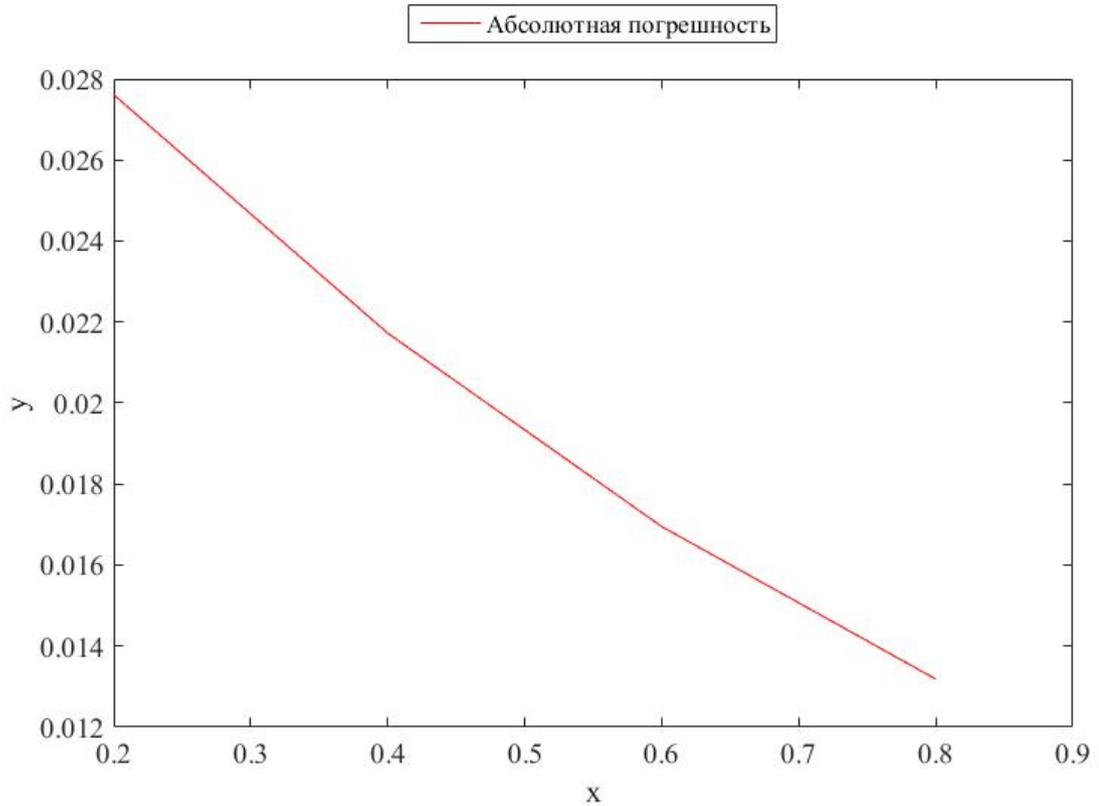


Рисунок 1.5 – Абсолютная погрешность

1.2.2 Описание метода Ритца и пример реализации.

Метод Ритца является прямым приближенным численным методом решения вариационных задач [9]. Метод был назван в честь Вальтера Ритца предложившим его в 1909 году.

Основная суть метода содержится в том, что при поиске экстремума функционала $K(y(x))$ под рассмотрение попадает не все допустимое пространство функции, а лишь разнообразные линейные комбинации допустимых функций вида (1.16):

$$y_n(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i(x) \quad (1.16)$$

где α_i – константы, а система $\{\varphi_i(x)\}$, называется системой координатных функций, такая, что функция $\varphi_i(x)$ линейно независима и образует полную систему функций в рассматриваемом пространстве.

Функционал $K(y(x))$ обращается в функцию аргументов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ при таких допустимых функциях $y_n(x)$, что на некоторые координатные функции $\varphi_i(x)$ имеют особые условия гладкости или удовлетворяют граничным условиям.

$$K(y_n(x)) = \Phi(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n). \quad (1.17)$$

Ищем значений $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, при которых функция $\Phi(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ достигает экстремума. Для нахождения коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ решаем систему нелинейных уравнений (относительно $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$)

$$\frac{d\Phi}{d\alpha_i} = 0 \text{ при } (i = 1, 2, \dots, n). \quad (1.18)$$

В результате поиска решения системы нелинейных уравнений, найденные значения коэффициентов α_i подставляем в (1.13). Получив в конечном итоге минимизирующую последовательность $\{y_n(x)\}$, т.е. такую, для которой последовательность функционала $\{K(y_n(x))\}$ сводится к минимуму или нижней границе значений функционала $K(y)$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K(y_n(x)) = \min K(y(x)), \quad (1.19)$$

Однако из того, что последовательность функционала $\{K(y_n(x))\}$ сводится к минимуму еще не следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = y(x)$. Минимизирующая последовательность может и не стремиться к функции, реализующей экстремум в классе допустимых значений.

Пример 6.

Рассмотрим задачу (1.4) определения экстремума интеграла при следующих граничных условиях $y(0) = y(1) = 0$.

Общее решения данного дифференциального уравнения (1.5) имеет вид (1.6). Подставляя граничные условия в общее решение, получим точное решение (1.7).

Согласно методу Рунге, решение задачи будем искать в виде:

$$\tilde{y}_n(x) = x(1-x) \cdot \sum_{i=0}^n C_i x^i = C_0 x(1-x) + C_1 x^2(1-x) + C_2 x^3(1-x) \dots \quad (1.20)$$

Выбор базисных функций $\Phi_i(x) = x(1-x)$ объясняется нулевыми граничными условиями: $\phi_i(0) = \phi_i(1) = 0$.

При $n=0$ $\tilde{y}_0(x) = C_0(x-x^2)$. Подставляем в искомый интеграл. И дифференцируем по C_0 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{I}}{\partial C_0} &= \frac{\partial}{\partial C_0} \int_0^1 \left[(C_0(1-2x))^2 - (C_0(x-x^2))^2 - 2x^2 C_0(x-x^2) \right] dx = \\ &= \int_0^1 (2C_0(1-2x)^2 - 2C_0(x-x^2)^2 - 2x^2(x-x^2)) dx = \\ &= C_0 \cdot \int_0^1 (2(1-2x)^2 - 2(x-x^2)^2) dx - \int_0^1 2x^2(x-x^2) dx = 0. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Вычисляя интегралы, получим $C_0 = \frac{1}{6}$. Подставляя $C_0 = \frac{1}{6}$ в

$\tilde{y}_0(x) = C_0(x-x^2)$, получим следующее приближенное решение

$$\tilde{y}_0(x) = \frac{1}{6}(x-x^2).$$

При $n=1$ $\tilde{y}_1(x) = C_0(x-x^2) + C_1(x^2-x^3)$. Подставляем в искомый интеграл и дифференцируем по C_0, C_1 и приравняем к нулю:

$$\begin{aligned} \tilde{I} &= I \left[C_0(x-x^2) + C_1(x^2-x^3) \right] = \int_0^1 \left[\left(C_0(1-2x) + C_1(2x-3x^2) \right)^2 - \right. \\ &\quad \left. - \left(C_0(x-x^2) + C_1(x^2-x^3) \right)^2 - 2x^2 \left(C_0(x-x^2) + C_1(x^2-x^3) \right) \right] dx \\ \frac{\partial \tilde{I}}{\partial C_0} &= \int_0^1 \left[2 \left(C_0(1-2x) + C_1(2x-3x^2) \right) \cdot (1-2x) - \right. \\ &\quad \left. - 2 \cdot \left(C_0(x-x^2) + C_1(x^2-x^3) \right) \cdot (x-x^2) - 2x^2(x-x^2) \right] dx = 0; \end{aligned} \quad (1.22)$$

$$\frac{\partial \tilde{I}}{\partial C_1} = \int_0^1 \left[2(C_0(1-2x) + C_1(2x-3x^2)) \cdot (2x-3x^2) - \right. \\ \left. - 2 \cdot \left((C_0(x-x^2) + C_1(x^2-x^3)) \cdot (x^2-x^3) - 2x^2(x^2-x^3) \right) \right] dx = 0.$$

Вычисляя интегралы, получим систему:

$$\begin{cases} \frac{3}{5}C_0 + \frac{3}{10}C_1 = \frac{1}{10} \\ \frac{3}{10}C_0 + \frac{26}{105}C_1 = \frac{1}{15} \end{cases}$$

Находя решение системы: $C_0 = \frac{7}{41}; C_1 = \frac{10}{123}$.

Второе приближение к $y(x)$ примет вид:

$$\tilde{y}_1(x) = \frac{7}{41}(x-x^2) + \frac{10}{123}(x^2-x^3).$$

При $n=2$, $\tilde{y}_2(x) = C_0(x-x^2) + C_1(x^2-x^3) + C_2(x^3-x^4)$. Подставляем в искомый интеграл и дифференцируем по C_0, C_1, C_2 , и приравниваем к нулю:

$$\begin{aligned} \tilde{I} &= I \left[C_0(x-x^2) + C_1(x^2-x^3) + C_2(x^3-x^4) \right] = \\ &= \int_0^1 \left[\left(C_0(1-2x) + C_1(2x-3x^2) + C_2(3x^2-4x^3) \right)^2 - \right. \\ &\quad \left. - \left(C_0(x-x^2) + C_1(x^2-x^3) + C_2(x^3-x^4) \right)^2 - \right. \\ &\quad \left. - 2x^2 \left(C_0(x-x^2) + C_1(x^2-x^3) + C_2(x^3-x^4) \right) \right] dx; \\ \frac{\partial \tilde{I}}{\partial C_0} &= \int_0^1 \left[-2(2x-1) \cdot \left(C_2(3x^2-4x^3) - C_0(2x-1) + C_1(2x-3x^2) \right) - \right. \end{aligned} \quad (1.23)$$

$$\left. - 2x^2(x-x^2) - 2(x-x^2) \cdot \left(C_0(x-x^2) + C_1(x^2-x^3) + C_2(x^3-x^4) \right) \right] dx = 0;$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{I}}{\partial C_1} &= \int_0^1 \left[2(2x-3x^2) \cdot \left(C_2(3x^2-4x^3) - C_0(2x-1) + C_1(2x-3x^2) \right) - \right. \\ &\quad \left. - 2x^2(x^2-x^3) - 2(x^2-x^3) \cdot \left(C_0(x-x^2) + C_1(x^2-x^3) + C_2(x^3-x^4) \right) \right] dx = 0; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \tilde{I}}{\partial C_2} = \int_0^1 \left[2(3x^2 - 4x^3) \cdot (C_2(3x^2 - 4x^3) - C_0(2x - 1) + C_1(2x - 3x^2)) - \right. \\ \left. - 2x^2(x^3 - x^4) - 2(x^3 - x^4) \cdot (C_0(x - x^2) + C_1(x^2 - x^3) + C_2(x^3 - x^4)) \right] dx = 0.$$

Вычисляя интегралы, получим систему:

$$\begin{cases} \frac{3}{5}C_0 + \frac{3}{10}C_1 + \frac{19}{105}C_2 = \frac{1}{10} \\ \frac{3}{10}C_0 + \frac{26}{105}C_1 + \frac{79}{420}C_2 = \frac{1}{15} \\ \frac{19}{105}C_0 + \frac{79}{420}C_1 + \frac{103}{630}C_2 = \frac{1}{21} \end{cases}$$

Находим решение системы: $C_0 = \frac{19}{200}$; $C_1 = \frac{1}{10}$; $C_2 = \frac{7}{100}$.

Второе приближение к $y(x)$ примет вид:

$$\tilde{y}_2(x) = \frac{19}{200}(x - x^2) + \frac{1}{10}(x^2 - x^3) + \frac{7}{100}(x^4 - x^3).$$

Для наглядности, построим графики решений, абсолютной и относительной погрешностей представленные на рисунках 1.6-1.8.

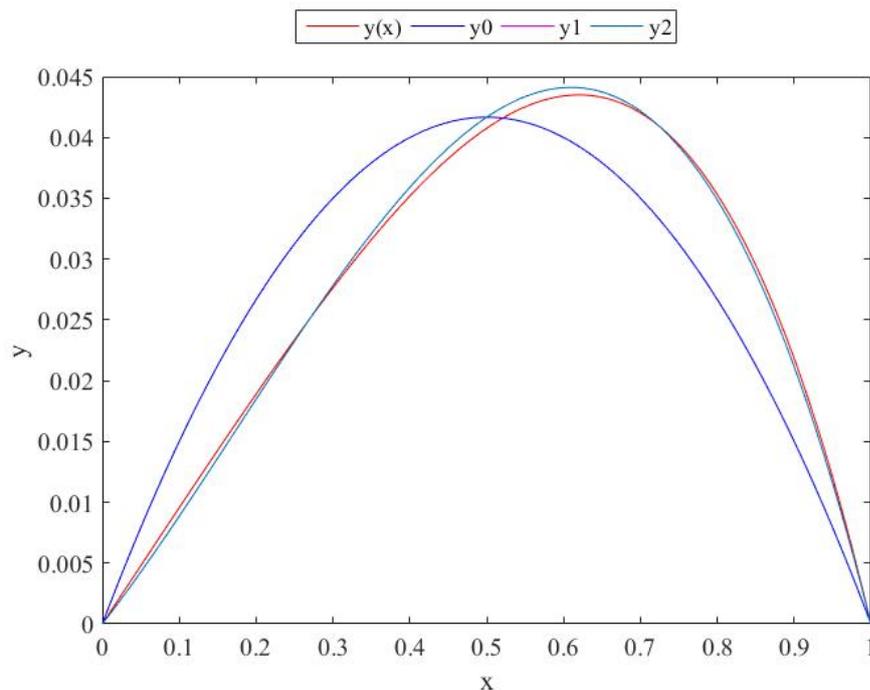


Рисунок 1.6 – График решений Методом Рунге

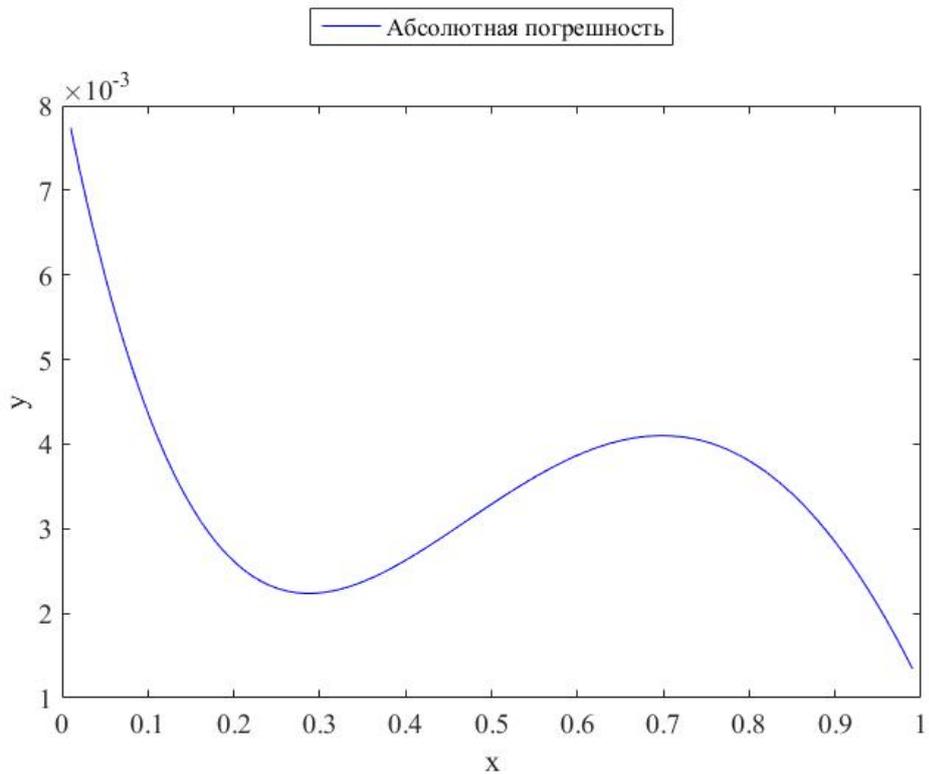


Рисунок 1.7 – Относительная погрешность 3-го приближения

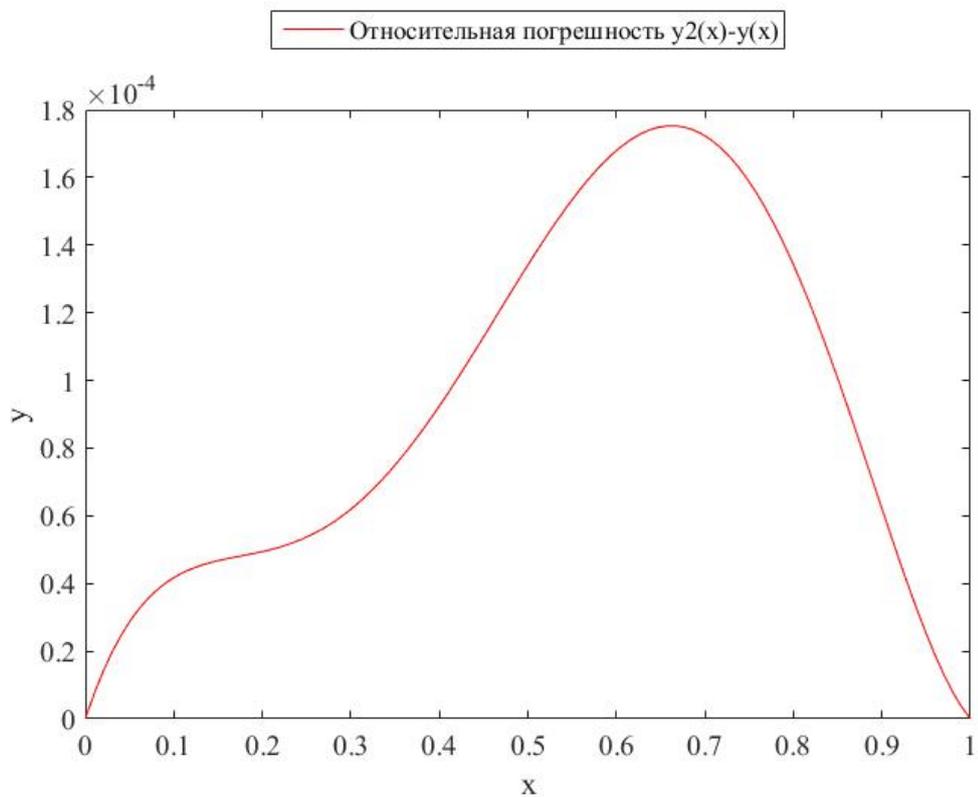


Рисунок 1.8 – Абсолютная погрешность

Как видно из результатов вычислительного эксперимента, второе и третье приближенное решение дало наиболее близкий результат.

1.3 Дифференциальное уравнение Бесселя

Дифференциальное уравнение Бесселя имеет вид

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2) y = 0,$$

где ν – действительное число, называемое порядком.

Для того чтобы функция Бесселя была гладкой, параметрам ν и $-\nu$ соответствуют разные функции [13].

При нахождении решения уравнения Лапласа и уравнения Гельмгольца (в цилиндрических и сферических координатах) возникает уравнение Бесселя. Данное уравнение используется для решения широко спектра задач:

- электромагнитные волны в цилиндрическом волноводе;
- теплопроводность в цилиндрических объектах;
- формы колебания тонкой круглой мембраны
- распределение интенсивности света, дифрагированного на круглом отверстии.
- скорость частиц в цилиндре, заполненном жидкостью и вращающемся вокруг своей оси.
- волновые функции в сферически симметричном потенциальном ящике.

Так как уравнение Бесселя является линейным дифференциальным уравнением второго порядка, оно имеет два линейно независимых решения (Функция Бесселя и Функция Неймана).

Функция Бесселя первого рода, представленная на рисунке 1.9, является решением уравнения Бесселя. (конечны в точке $x = 0$ при целых и неотрицательных α)

$$J_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(m+1)\Gamma(m+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu},$$

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(m+1)\Gamma(m-\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m-\nu},$$

где $\Gamma(x)$ – гамма-функция Эйлера, обобщение факториала на нецелые значения.

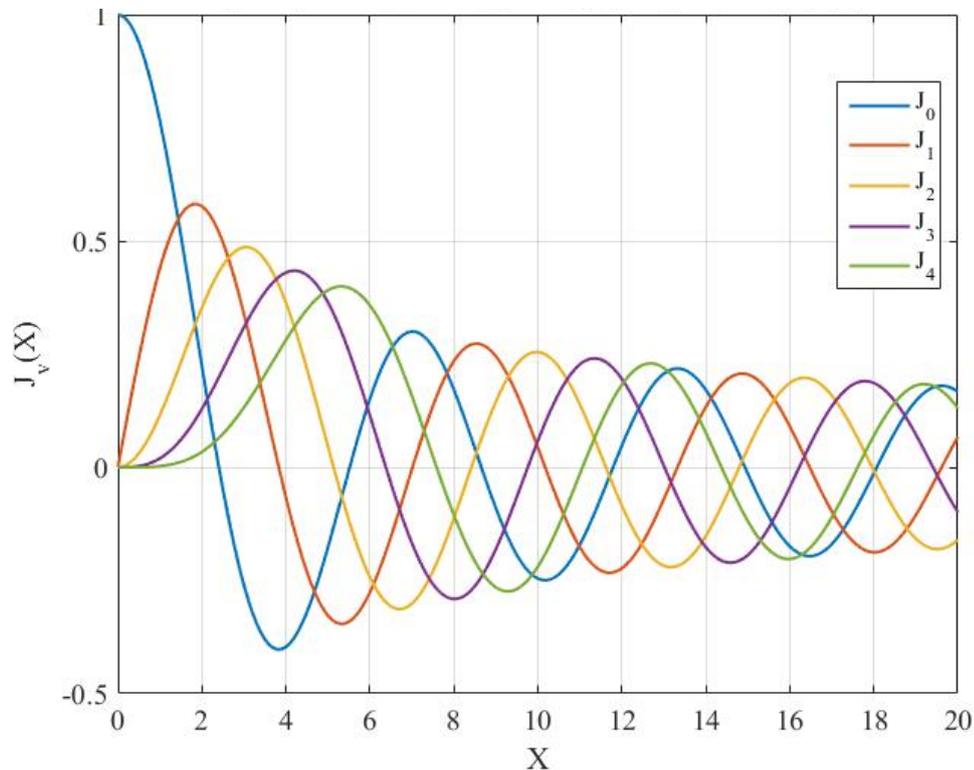


Рисунок 1.9 – Графики функций Бесселя первого рода для $\nu = 0,1,2,3,4$

Функции $J_{\nu}(x)$ и $J_{-\nu}(x)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения Бесселя. Общее решение уравнения Бесселя первого рода примет вид:

$$y = C_1 J_{\nu}(x) + C_2 J_{-\nu}(x).$$

Функция Неймана (Функция Бесселя второго рода) является решением $Y_{\nu}(x)$ уравнения Бесселя (бесконечна в точке $x = 0$), представленное на рисунке 1.10.

Функция Неймана связана с функцией Бесселя следующим соотношением:

$$Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)},$$

Линейная комбинация функций $J_\nu(x)$ и $Y_\nu(x)$ формирует полное решение уравнения Бесселя:

$$y(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 Y_\nu(x).$$

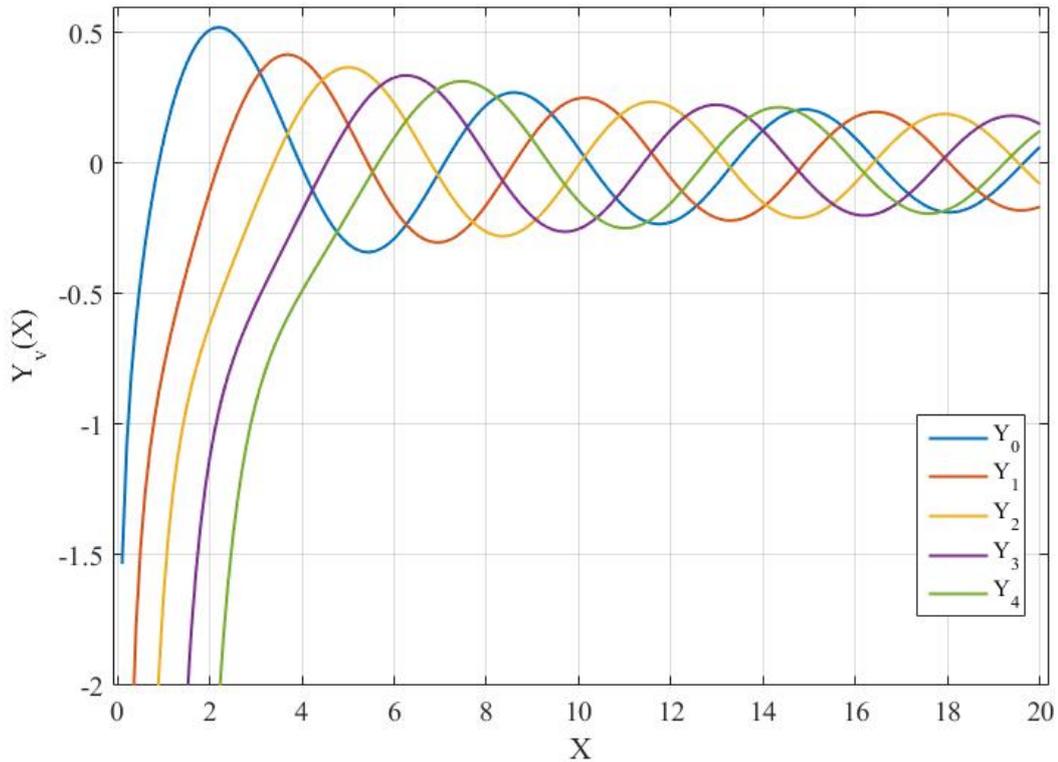


Рисунок 1.10 – Графики функций Бесселя второго рода $\nu = 0, 1, 2, 3, 4$

1.4 Сведение краевой задачи для уравнения Бесселя к вариационной задаче

Рассмотрим краевую задачу для дифференциального уравнения Бесселя

$$x^2 y_{xx} + xy_x + (x^2 - \nu^2)y = 0, \quad y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b \quad (1.24)$$

Для упрощения расчетов сведём неоднородные граничные условия к однородным с помощью следующей замены $y(x) = z(x) + cx + d$, где $z(a) = z(b) = 0$. Подставляя данную замену в граничные условия, получим (1.25):

$$\begin{cases} y(a) = z(a) + c \cdot a + d = y_a, \\ y(b) = z(b) + c \cdot b + d = y_b. \end{cases} \quad (1.25)$$

Откуда (1.26):

$$\begin{cases} c \cdot a + d = y_a, \\ c \cdot b + d = y_b, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} c = \frac{y_b - y_a}{b - a}, \\ d = \frac{b \cdot y_a - a \cdot y_b}{b - a}. \end{cases} \quad (1.26)$$

Тем самым, имеем $y = z + \frac{y_b - y_a}{b - a} \cdot x + \frac{b \cdot y_a - a \cdot y_b}{b - a}$. Преобразуем

дифференциальное уравнение (1.23). Для этого вычислим $y_x = z_x + \frac{y_b - y_a}{b - a}$,

$y_{xx} = z_{xx}$ и подставим в дифференциальное уравнение Бесселя (1.27):

$$x^2 z_{xx} + x \cdot \left(z_x + \frac{y_b - y_a}{b - a} \right) + (x^2 - \nu^2) \cdot \left(z + \frac{y_b - y_a}{b - a} \cdot x + \frac{b \cdot y_a - a \cdot y_b}{b - a} \right) = 0 \quad (1.27)$$

Окончательно получаем следующую краевую задачу для дифференциального уравнения (1.28)

$$x^2 z_{xx} + x z_x + (x^2 - \nu^2) z + x \cdot \frac{y_b - y_a}{b - a} + (x^2 - \nu^2) \cdot \left(\frac{y_b - y_a}{b - a} \cdot x + \frac{b \cdot y_a - a \cdot y_b}{b - a} \right) = 0 \quad (1.28)$$

с однородными граничными условиями:

$$z(a) = z(b) = 0. \quad (1.29)$$

Сведем линейную краевую задачу (1.30)-(1.31) к вариационной постановке, используя процедуру, представленную в [9]. Пусть краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения имеет вид:

$$y_{xx} = p(x)y_x + q(x)y + r(x), \quad y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b. \quad (1.30)$$

Представим краевую задачу (4) в стандартной форме:

$$-\frac{d}{dx} \left(P(x) \frac{dy}{dx} \right) = Q(x)y + R(x), \quad y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b. \quad (1.31)$$

Здесь $P(x) = e^{-\int_a^x p(t)dt}$, $Q(x) = -P(x)q(x)$, $R(x) = -P(x)r(x)$. Получим

искомый функционал вида:

$$I(y) = \frac{1}{2} \int_a^b (-P(x)y_x^2 + Q(x)y^2 + 2R(x)y) dx. \quad (1.32)$$

Применяя вышеизложенную процедуру к уравнению (1.28), получим:

$$z_{xx} = -\frac{1}{x} \cdot z_x - \frac{x^2 - \nu^2}{x^2} \cdot z - \frac{1}{x} \cdot \frac{y_b - y_a}{b-a} - \frac{x^2 - \nu^2}{x^2} \cdot \left(\frac{y_b - y_a}{b-a} \cdot x + \frac{b \cdot y_a - a \cdot y_b}{b-a} \right). \quad (1.33)$$

В нашем случае

$$p(x) = -\frac{1}{x}, \quad q(x) = -\frac{x^2 - \nu^2}{x^2},$$

$$r(x) = -\frac{1}{x} \cdot \frac{y_b - y_a}{b-a} - \frac{x^2 - \nu^2}{x^2} \cdot \left(\frac{y_b - y_a}{b-a} \cdot x + \frac{b \cdot y_a - a \cdot y_b}{b-a} \right).$$

Тогда вычислим

$$P(x) = e^{-\int_a^x \left(-\frac{1}{t}\right) dt} = e^{\ln x - \ln a} = \frac{x}{a}, \quad Q(x) = -\frac{x}{a} \cdot \left(-\frac{x^2 - \nu^2}{x^2} \right) = \frac{x^2 - \nu^2}{ax},$$

$$\begin{aligned} R(x) &= -\frac{x}{a} \cdot \left(-\frac{1}{x} \cdot \frac{y_b - y_a}{b-a} - \frac{x^2 - \nu^2}{x^2} \cdot \left(\frac{y_b - y_a}{b-a} \cdot x + \frac{b \cdot y_a - a \cdot y_b}{b-a} \right) \right) = \\ &= \frac{y_b - y_a}{a(b-a)} + \frac{x^2 - \nu^2}{ax} \cdot \left(\frac{y_b - y_a}{b-a} \cdot x + \frac{b \cdot y_a - a \cdot y_b}{b-a} \right) \end{aligned}$$

Тогда получим следующий интегральный функционал (1.34), соответствующий дифференциальному уравнению (1.28):

$$\begin{aligned} I_1[z] &= \frac{1}{2} \int_a^b \left(-\frac{x}{a} \cdot z_x^2 + \frac{x^2 - \nu^2}{ax} \cdot y^2 + \right. \\ &\left. + 2 \cdot \left(\frac{y_b - y_a}{a(b-a)} + \frac{x^2 - \nu^2}{ax} \cdot \left(\frac{y_b - y_a}{b-a} \cdot x + \frac{b \cdot y_a - a \cdot y_b}{b-a} \right) \right) y \right) dx \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} I[z] &= \int_a^b \left(x \cdot z_x^2 - \frac{x^2 - \nu^2}{x} \cdot z^2 + \right. \\ &\left. - 2 \cdot \left(\frac{y_b - y_a}{b-a} + \frac{x^2 - \nu^2}{x} \cdot \left(\frac{y_b - y_a}{b-a} \cdot x + \frac{b \cdot y_a - a \cdot y_b}{b-a} \right) \right) \cdot z \right) dx. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Рассмотрим задачу определения экстремали интегрального функционала (1.34) при граничных условиях (1.29).

2 РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БЕССЕЛЯ ВАРИАЦИОННЫМИ МЕТОДАМИ

2.1 Постановка задачи

Рассмотрим дифференциальное уравнение (2.1)

$$x^2 y_{xx} + xy_x + (x^2 - 1)y = 0 \quad (2.1)$$

и граничные условия (2.2)

$$y(1) = 2, y(2) = 4. \quad (2.2)$$

Это уравнения Бесселя с неоднородными граничными условиями. Для упрощения расчетов сведём неоднородные граничные условия к однородным, с помощью следующей замены:

$$y(x) = z(x) + (ax + b). \quad (2.3)$$

Подставляя данную замену (2.3) в граничные условия, получим коэффициенты:

$$\begin{cases} y(1) = z(1) + a + b \\ y(2) = z(2) + 2a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = 2 \end{cases} \quad (2.4)$$

Получим искомую замену (2.5):

$$\begin{aligned} y(x) &= z(x) + 2x; \\ y_x(x) &= z_x(x) + 2; \\ y_{xx}(x) &= z_{xx}(x). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Далее преобразуем исходное уравнения (2.6):

$$\begin{aligned} x^2 z_{xx} + x(z_x + 2) + (x^2 - 1)(z + 2x) &= 0; \\ x^2 z_{xx} + xz_x + 2x + x^2 z - z + 2x^3 - 2x &= 0; \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$xz_{xx} + z_x + \frac{x^2 - 1}{x} z + 2x^2 = 0$$

С однородными граничными условиями (2.7):

$$z(1) = 0, z(2) = 0. \quad (2.7)$$

2.2 Сведение линейной краевой задачи к вариационной задаче

Сведем линейную краевую задачу (2.8) к вариационной задаче используя процедуру, представленную в [9].

$$y_{xx} = p(x)y_x + q(x)y + r(x), \quad y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b. \quad (2.8)$$

Для этого, представим краевую задачу в стандартной форме (2.9).

$$-\frac{d}{dx}\left(P(x)\frac{dy}{dx}\right) = Q(x)y + R(x), \quad y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b. \quad (2.9)$$

Положим $P(x) = e^{-\int_a^x p(t)dt}$, $Q(x) = -P(x)q(x)$, $R(x) = -P(x)r(x)$, получим искомый функционал вида (2.10):

$$I(y) = \frac{1}{2} \int_a^b \left(-P(x)y_x^2 + Q(x)y^2 + 2R(x)y\right) dx. \quad (2.10)$$

Применяя вышеизложенную процедуру к уравнению (2.6), получим (2.11):

$$z_{xx} = -\frac{1}{x}z_x - \frac{x^2-1}{x^2}z - 2x,$$

$$p(x) = -\frac{1}{x}, \quad q(x) = -\frac{x^2-1}{x^2}, \quad r(x) = -2x.$$

$$P(x) = e^{-\int_1^x p(t)dt} = e^{-\int_1^x \left(-\frac{1}{t}\right)dt} = e^{\ln x - \ln 1} = e^{\ln x} = x.$$

$$Q(x) = -x \cdot \left(-\frac{x^2-1}{x^2}\right) = \frac{x^2-1}{x}, \quad R(x) = -x \cdot (-2x) = 2x^2.$$

$$\text{Получаем } I_1(z) = \frac{1}{2} \int_1^2 \left(-x \cdot z_x^2 + \left(\frac{x^2-1}{x}\right) \cdot z^2 + 4x^2 z\right) dx \text{ или}$$

$$I_1(z) = \int_1^2 \left(x \cdot z_x^2 - \left(\frac{x^2-1}{x}\right) \cdot z^2 - 4x^2 z\right) dx. \quad (2.11)$$

2.3 Реализация метода Эйлера

Рассмотрим задачу определения экстремума интеграла (2.11) при граничных условиях (2.7).

Общее решение уравнения Бесселя (2.1):

$$y(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 N_\nu(x),$$

где $J_1(x)$, $N_1(x)$ – функции Бесселя и Неймана первого рода.

Точное решение (при $\nu=1$) уравнения (2.1), в соответствии с граничными условиями (2.2), имеет вид (2.12):

$$y(x) = 7,2144 \cdot J_1(x) + 1,5039 \cdot N_1(x). \quad (2.12)$$

Разобьем равномерно отрезок $[0,1]$ точками $x_i = x_{i-1} + \Delta x, i = \overline{1, n}$.

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}, \Delta x = \frac{2-1}{n} = \frac{1}{n} \quad (2.13)$$

где n – количество элементарных отрезков.

Обозначим $z_i = z(x_i), i = \overline{0, n}$, – значение решения в узле x_i . При этом $z_0 = z_n = 0$.

Заменим производные приближенно по формуле «правых» разностей

$$z_x(x_i) \approx \frac{z_{i+1} - z_i}{\Delta x}, i = \overline{0, n-1}. \quad (2.14)$$

Интеграл вычислим приближенно по формуле «левых» прямоугольников

$$\int_a^b f(x) dx \approx (f(a) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})) \cdot \Delta x = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot \Delta x. \quad (2.15)$$

Имеем:

$$\begin{aligned} & \int_1^2 \left(z_x^2(x) - \left(\frac{x^2-1}{x} \right) z^2(x) - 4x^2 z(x) \right) dx \approx \\ & \approx \left[\sum_{i=0}^{n-1} \left(x \cdot z_x^2(x_i) - \left(\frac{x^2-1}{x} \right) z^2(x_i) - 4x_i^2 z(x_i) \right) \right] \cdot \Delta x = \\ & = \left[\sum_{i=0}^{n-1} \left(x_i \cdot \left(\frac{z_{i+1} - z_i}{\Delta x} \right)^2 - \left(\frac{x_i^2-1}{x_i} \right) z_i^2 - 4x_i^2 z_i \right) \right] \cdot \Delta x = \\ & = \left[x_0 \left(\frac{z_1}{\Delta x} \right)^2 \right] \cdot \Delta x + \left[x_1 \cdot \left(\frac{z_2 - z_1}{\Delta x} \right)^2 - \left(\frac{x_1^2-1}{x_1} \right) z_1^2 - 4x_1^2 z_1 \right] \cdot \Delta x + \\ & + \left[x_2 \cdot \left(\frac{z_3 - z_2}{\Delta x} \right)^2 - \left(\frac{x_2^2-1}{x_2} \right) z_2^2 - 4x_2^2 z_2 \right] \cdot \Delta x + \dots \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} & \dots + \left[x_i \left(\frac{z_{n-1} - z_{n-2}}{\Delta x} \right)^2 - \left(\frac{x_2^2 - 1}{x_2} \right) z_{n-2}^2 - 4x_{n-2}^2 z_{n-2} \right] \cdot \Delta x + \dots \\ & \dots + \left[x_{n-1} \left(-\frac{z_{n-1}}{\Delta x} \right)^2 - \left(\frac{x_2^2 - 1}{x_2} \right) z_{n-1}^2 - 4x_{n-1}^2 z_{n-1} \right] \cdot \Delta x = \Phi(z_1, z_2, \dots, z_{n-1}) \end{aligned}$$

Продифференцируем данную функцию по переменным y_i , $i = \overline{1, n-1}$, и приравняем к нулю:

$$\frac{1}{\Delta x} \frac{\partial \Phi}{\partial z_i} = 0, \quad i = \overline{1, n-1}. \quad (2.17)$$

Имеем:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\Delta x} \frac{\partial \Phi}{\partial z_1} = 2x_0 \cdot \left(\frac{z_1}{(\Delta x)^2} \right) - 2x_1 \cdot \left(\frac{(z_2 - z_1)}{(\Delta x)^2} \right) - 2 \cdot \left(\frac{x_1^2 - 1}{x_1} \right) z_1 (\Delta x)^2 - 4x_1^2 = 0 \\ \frac{1}{\Delta x} \frac{\partial \Phi}{\partial z_i} = 2x_i \cdot \left(\frac{(z_i - z_{i-1})}{(\Delta x)^2} \right) - 2x_{i+1} \cdot \left(\frac{(z_{i+1} - z_i)}{(\Delta x)^2} \right) - 2 \cdot \left(\frac{x_1^2 - 1}{x_1} \right) z_i (\Delta x)^2 - 4x_i^2 = 0, \\ i = \overline{2, n-2} \\ \dots \\ \frac{1}{\Delta x} \frac{\partial \Phi}{\partial z_{n-1}} = 2x_{n-2} \cdot \left(\frac{(z_{n-1} - z_n)}{(\Delta x)^2} \right) + 2x_{n-1} \cdot \left(\frac{y_{n-1}}{(\Delta x)^2} \right) - 2 \cdot \left(\frac{x_{n-1}^2 - 1}{x_{n-1}} \right) z_{n-1} (\Delta x)^2 - 4x_{n-1}^2 = 0 \end{array} \right.$$

Сокращаем на 2 и умножаем на $(\Delta x)^2$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 z_1 - x_1 (z_2 - z_1) - \left(\frac{x_1^2 - 1}{x_1} \right) z_1 (\Delta x)^2 - 2x_1^2 (\Delta x)^2 = 0 \\ x_{i-1} (z_i - z_{i-1}) - x_i (z_{i+1} - z_i) - \left(\frac{x_i^2 - 1}{x_i} \right) z_i (\Delta x)^2 - 2x_i^2 (\Delta x)^2 = 0, \\ i = \overline{2, n-2} \\ \dots \\ x_{n-2} (z_{n-1} - z_{n-2}) - x_{n-1} z_{n-1} - \left(\frac{x_{n-1}^2 - 1}{x_{n-1}} \right) z_{n-1} (\Delta x)^2 - 2x_{n-1}^2 (\Delta x)^2 = 0 \end{array} \right. \quad (2.18)$$

Окончательно получаем

$$\left\{ \begin{array}{l} \left((x_0 + x_1) - \left(\frac{x_1^2 - 1}{x_1} \right) (\Delta x)^2 \right) \cdot z_1 - x_1 z_2 = 2x_1^2 \cdot (\Delta x)^2 \\ -x_{i-1} z_{i-1} + \left((x_{i-1} + x_i) - \left(\frac{x_i^2 - 1}{x_i} \right) (\Delta x)^2 \right) \cdot z_i - x_i z_{i+1} = 2x_i^2 \cdot (\Delta x)^2, \\ i = \overline{2, n-2} \\ \dots \\ -x_{n-2} z_{n-2} + \left((x_{n-2} + x_{n-1}) - \left(\frac{x_{n-1}^2 - 1}{x_{n-1}} \right) (\Delta x)^2 \right) \cdot z_{n-1} = 2x_{n-1}^2 \cdot (\Delta x)^2 \end{array} \right. \quad (2.19)$$

Представляем систему линейных алгебраических уравнений (2.19) относительно неизвестных z_i , $i = \overline{1, n-1}$.

Построим также графики точного и приближенных решений, относительную и абсолютную погрешность, представленные на рисунках 2.1-2.3. Листинг вычислительной программы представлен в приложении А.

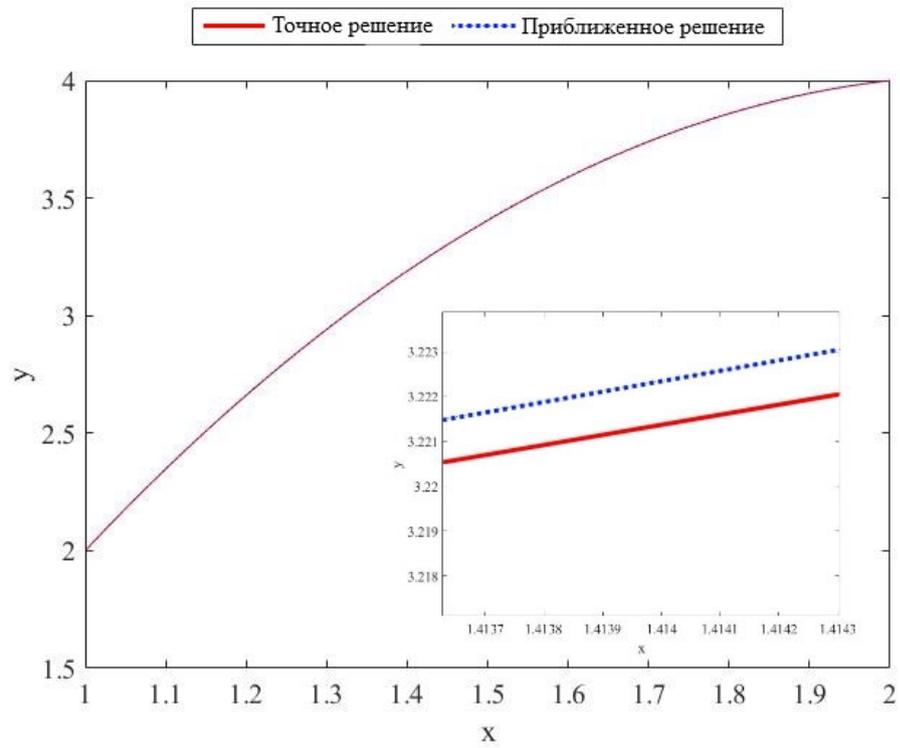


Рисунок 2.1 – Графики точного (2.12) и приближенного решения задачи (2.11)

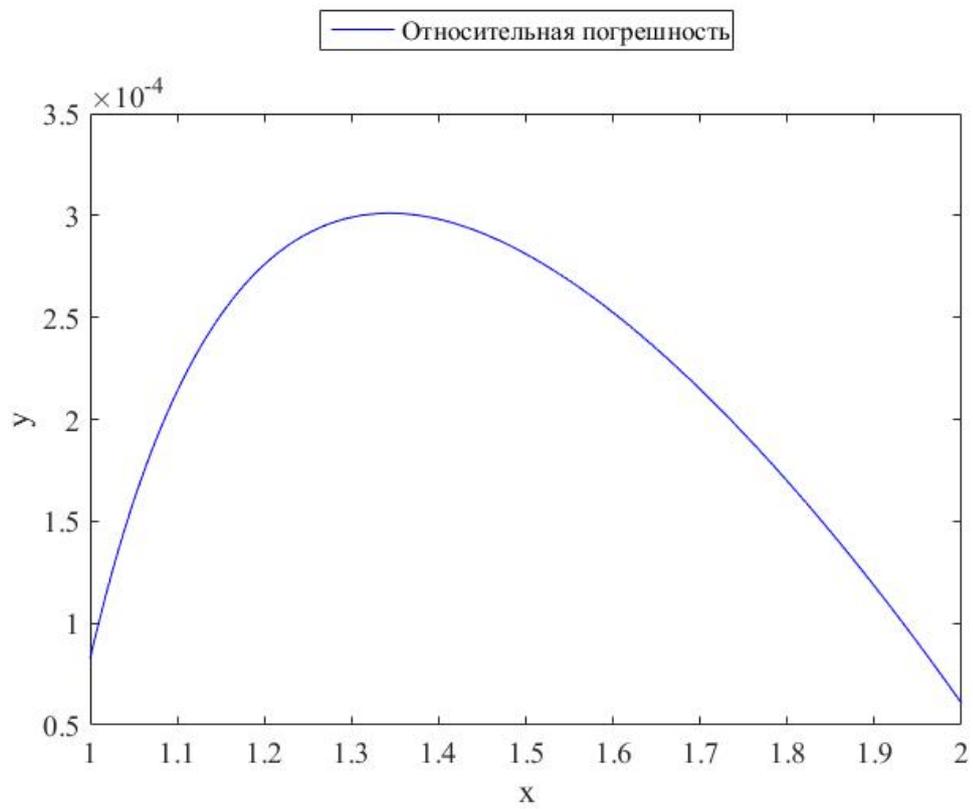


Рисунок 2.2 – Относительная погрешность приближенного решения (2.11)

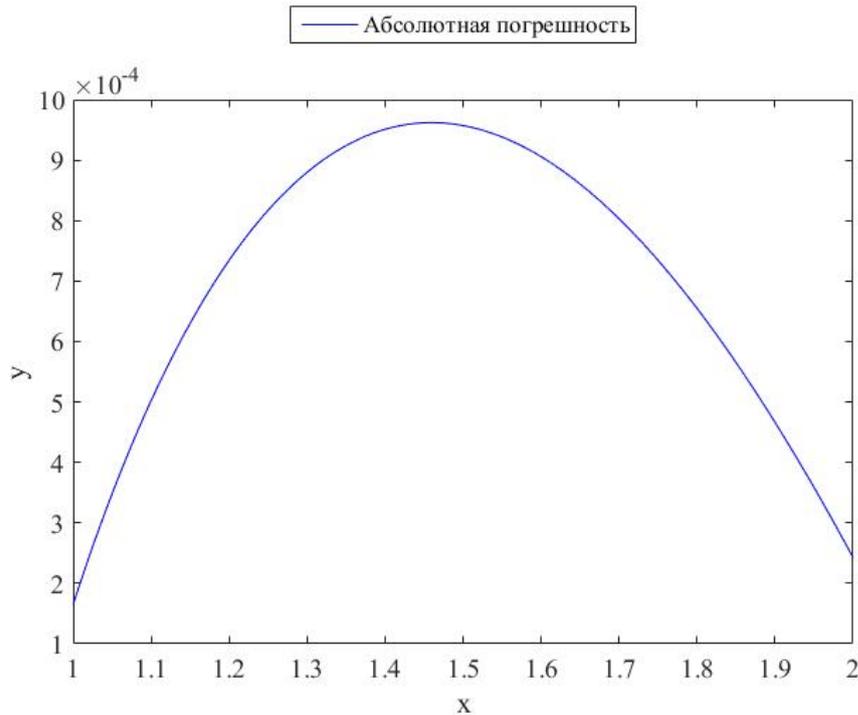


Рисунок 2.3 – Абсолютная погрешность приближенного решения (2.11)

2.4 Реализация метода Ритца

Рассмотрим задачу определения экстремума интеграла (2.11) при граничных условиях (2.7).

Согласно методу Ритца, решение задачи будем искать в виде (2.20):

$$\begin{aligned} \tilde{z}_n(x) = (x-1)(2-x) \cdot \sum_{i=0}^n C_i x^i = C_0(x-1)(2-x) + C_1 x(x-1)(2-x) + \\ + C_2 x^2(x-1)(2-x) \dots \end{aligned} \quad (2.20)$$

Выбор базисных функций $\Phi_i(x) = (x-1)(2-x)$ объясняется нулевыми граничными условиями: $\varphi_i(0) = \varphi_i(1) = 0$.

При $n = 0$ $\tilde{z}_0(x) = C_0(x-1)(2-x)$. Подставляем в искомый интеграл. И дифференцируем по C_0 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{I}_1}{\partial C_0} = \frac{\partial}{\partial C_0} \cdot \int_0^1 \left[x \cdot (C_0(x-1)(2-x))_x^2 - \left(\frac{x^2-1}{x} \right) \cdot (C_0(x-1)(2-x))^2 - \right. \\ \left. - 4x^2 \cdot (C_0(x-1)(2-x)) \right] dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \left[x \cdot C_0^2 (3-2x)^2 - \left(\frac{x^2-1}{x} \right) \cdot C_0^2 (x-1)^2 (2-x)^2 - \right. \\
&\quad \left. - 4x^2 \cdot (C_0(x-1)(2-x)) \right] dx = \\
&= \int_0^1 \left[-x \cdot C_0 (3-2x)^2 + \left(\frac{x^2-1}{x} \right) \cdot (x-1)^2 (2-x)^2 \cdot C_0 + \right. \\
&\quad \left. + 2x^2 \cdot (x-1) \cdot (2-x) \right] dx = 0.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Вычисляя интегралы, получим $C_0 = 1.662$. Подставляя $C_0 = 1.662$ в $\tilde{z}_0(x) = C_0(x-1)(2-x)$, получим следующее приближенное решение (2.22):

$$\tilde{z}_0(x) = 1.662 \cdot (x-1)(2-x). \tag{2.22}$$

При $n=1$ $\tilde{z}_1(x) = C_0(x-1)(2-x) + C_1x(x-1)(2-x)$. Подставляем в искомый интеграл. И дифференцируем по C_0, C_1 :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{I}_1}{\partial C_0} &= \frac{\partial}{\partial C_0} \cdot \int_0^1 \left[x \cdot (C_0(x-1)(2-x) + C_1x \cdot (x-1)(2-x))_x^2 - \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{x^2-1}{x} \right) \cdot (C_0(x-1)(2-x) + C_1x \cdot (x-1)(2-x))^2 - \right. \\
&\quad \left. - 4x^2 \cdot (C_0(x-1)(2-x) + C_1x \cdot (x-1)(2-x)) \right] dx = \\
&= \int_0^1 \left[x \cdot (C_0(3-2x) + C_1(-3x^2 + 6x - 2))^2 - \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{x^2-1}{x} \right) \cdot (C_0(-x^2 + 3x - 2) + C_1(-x^3 + 3x^2 - 2x))^2 - \right. \\
&\quad \left. - 4x^2 \cdot (C_0(x-1)(2-x) + C_1x \cdot (x-1)(2-x)) \right] dx = \\
&= \int_0^1 \left[2x \cdot (C_0 \cdot (2x-3) + C_1(3x^2 - 6x + 2)) \cdot (2x-3) + 4x^2 \cdot (x-1)(x-2) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{2(x-1)(x-2) \cdot (C_0 \cdot (x-1)(x-2) + C_1x \cdot (x-1)(x-2)) \cdot (x^2-1)}{x} \right] dx = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{I}_1}{\partial C_1} &= \frac{\partial}{\partial C_1} \cdot \int_0^1 \left[x \cdot (C_0(x-1)(2-x) + C_1x \cdot (x-1)(2-x)) \right]_x^2 - \\
&- \left(\frac{x^2-1}{x} \right) \cdot (C_0(x-1)(2-x) + C_1x \cdot (x-1)(2-x))^2 - \\
&- 4x^2 \cdot (C_0(x-1)(2-x) + C_1x \cdot (x-1)(2-x)) \Big] dx = \tag{2.23} \\
&= \int_0^1 \left[x \cdot (C_0(3-2x) + C_1(-3x^2 + 6x - 2)) \right]^2 - \\
&- \left(\frac{x^2-1}{x} \right) \cdot (C_0(-x^2 + 3x - 2) + C_1(-x^3 + 3x^2 - 2x))^2 - \\
&- 4x^2 \cdot (C_0(x-1)(2-x) + C_1x \cdot (x-1)(2-x)) \Big] dx = \\
&= \int_0^1 \left[x \cdot (C_0(3-2x) + C_1(-3x^2 + 6x - 2)) \right]^2 - \\
&= \int_0^1 \left[2x \cdot (C_0 \cdot (2x-3) + C_1(3x^2 - 6x + 2)) \cdot (3x^2 - 6x + 2) + 4x^3 \cdot (x-1)(x-2) - \right. \\
&\left. - 2(x-1)(x-2) \cdot (C_0 \cdot (x-1)(x-2) + C_1x \cdot (x-1)(x-2)) \cdot (x^2-1) \right] dx = 0,
\end{aligned}$$

Вычисляя интегралы, получим систему:

$$\begin{cases} -3.1884C_0 + 1.4809C_1 = 1.53 \\ 1.4809C_0 + 2.4642C_1 = 2.4 \end{cases}$$

Находим решение системы: $C_0 = 1.6495$; $C_1 = 0.0174$.

Второе приближение к $y(x)$ примет вид (2.24):

$$\tilde{z}_1(x) = 1.6495(x-1)(2-x) - 0.0174x(x-1)(2-x). \tag{2.24}$$

Результаты сравнения точного решения с приближенным, представлены в таблице 2.

Таблица 2 – Результаты метода Рунге

x	$y(x)$	$y_0(x)$	$y_1(x)$
1	2.00021	2.00000	2.00000
1.1	2.34739	2.34958	2.34674

1.2	2.66086	2.66592	2.66059
1.3	2.94103	2.94902	2.94165
1.4	3.18896	3.19888	3.19004
1.5	3.40486	3.41550	3.40586
1.6	3.58873	3.59888	3.58921
1.7	3.74032	3.74902	3.74019
1.8	3.85875	3.86592	3.85892
1.9	3.94577	3.94958	3.94548
2	3.99963	4.00000	4.00000

Также построим графики точного и приближенного решения, абсолютной и относительной погрешности, представленные на рисунках 2.4-2.6. Листинг вычислительной программы представлен в приложении Б.

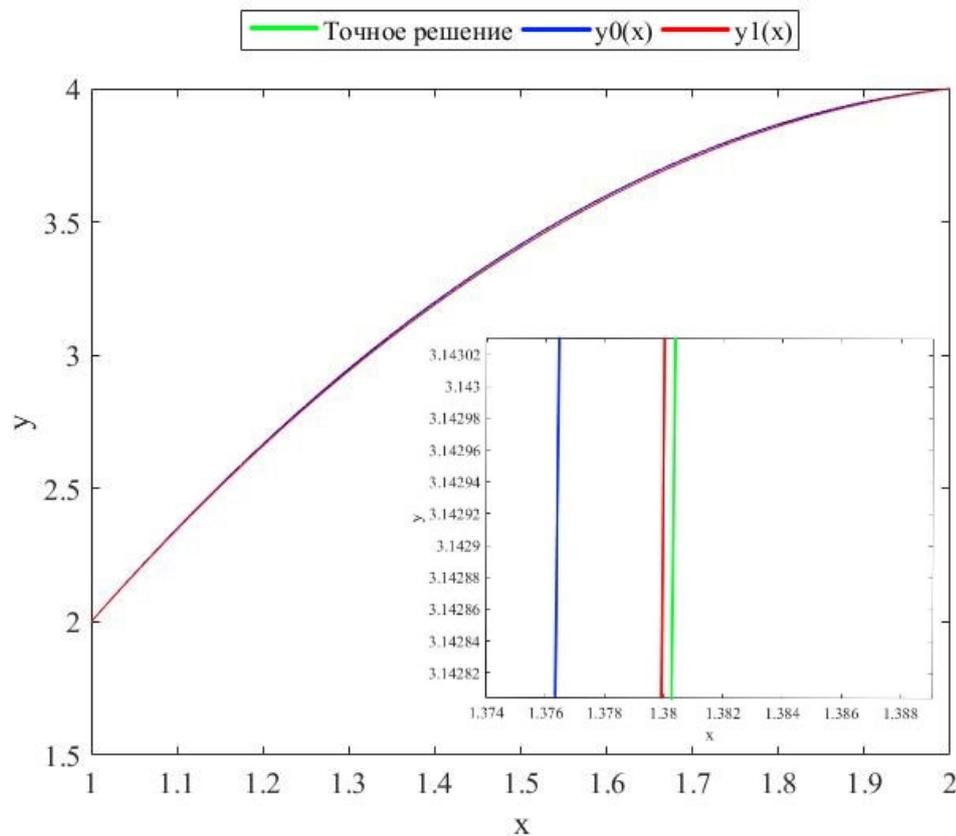


Рисунок 2.4 – Графики точного (2.12) и приближенных решений (2.22, 2.24)

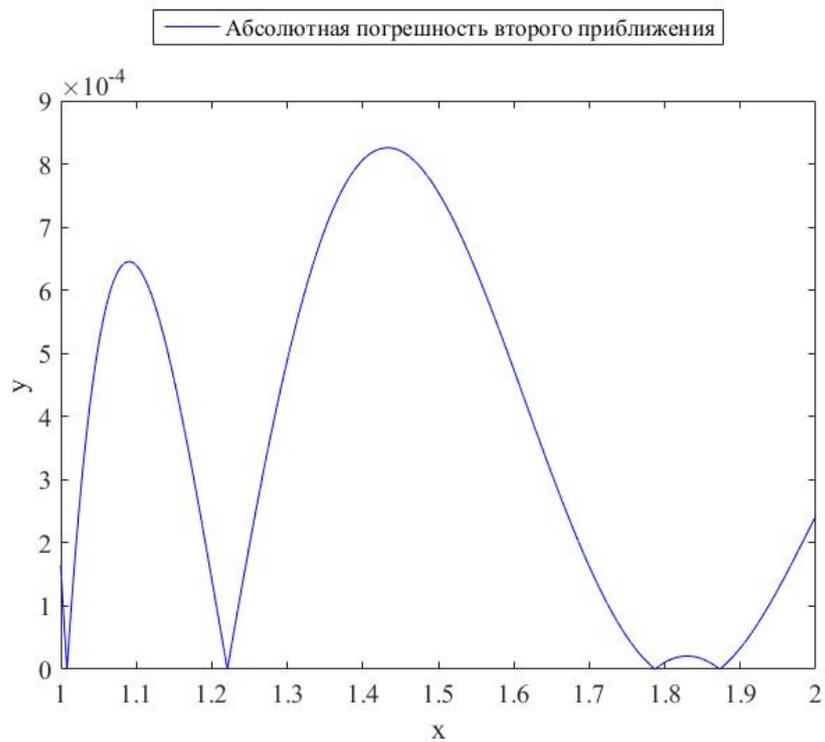


Рисунок 2.5 – Абсолютная погрешность второго приближения (2.24)

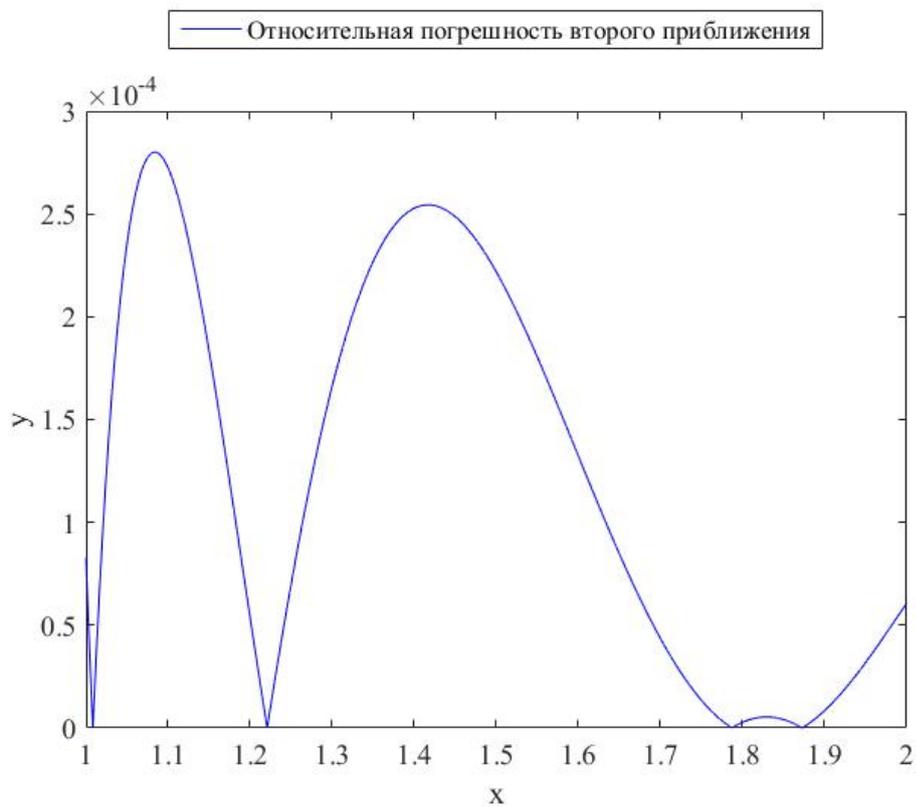


Рисунок 2.6 – Относительная погрешность второго приближения (2.24)

3 ИССЛЕДОВАНИЕ ДВУХМЕРНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕПЛА

3.1 Вариационная и краевая постановки

Рассмотрим двухмерную стационарную задачу распространения температуры в прямоугольной пластине $[0,1] \times [0,\pi]$, на краях которой поддерживается нулевая температура: найти функцию $T(x,y)$ распределения температуры, доставляющую минимум функционалу [1]

$$I = \int_0^1 \int_0^\pi \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 + \frac{2\beta T}{k} \sin x \sin \pi y \right] dx dy \quad (3.1)$$

и удовлетворяющую нулевым граничным условиям

$$T(0, y) = T(\pi, y) = T(x, 0) = T(x, 1) = 0. \quad (3.2)$$

Излучение тепла с поверхности пластины происходит со скоростью на единицу площади, равной $f(x, y) = \beta \sin x \sin \pi y$. Параметр k определяет теплопроводность пластины.

Для функционала (3.1) составим уравнение Эйлера-Остроградского [14] и получим соответствующее (3.1) дифференциальное уравнение. Обозначим

$$L = (T_x)^2 + (T_y)^2 + \frac{2\beta T}{k} \sin x \sin \pi y, \text{ тогда имеем:}$$

$$L_T - \frac{\partial}{\partial x} L_{T_x} - \frac{\partial}{\partial y} L_{T_y} = 0,$$

$$\frac{2\beta}{k} \sin x \sin \pi y - \frac{\partial}{\partial x} (2T_x) - \frac{\partial}{\partial y} (2T_y) = 0,$$

$$\frac{2\beta}{k} \sin x \sin \pi y - 2T_{xx} - 2T_{yy} = 0,$$

$$T_{xx} + T_{yy} = \frac{\beta}{k} \sin x \sin \pi y. \quad (3.3)$$

Уравнение (3.3) представляет собой уравнение Пуассона и совместно с граничными условиями (3.2) дает задачу Дирихле для уравнения Пуассона [16].

3.2 Аналитическое решение задачи методом Фурье

Найдем аналитическое решение задачи (3.3)-(3.2) методом Фурье (методом разделения переменных) [15, 17].

Запишем соответствующее (4.3) уравнение Лапласа

$$T_{xx} + T_{yy} = 0. \quad (3.4)$$

Решение задачи будем искать в виде $T(x, y) = X(x) \cdot Y(y)$, где функции $X(x)$ и $Y(y)$ удовлетворяют нулевым граничным условиям:

$$X(0) = X(\pi) = Y(0) = Y(1) = 0. \quad (3.5)$$

Подставляя выражение для $T(x, y)$ в (3.4), получим $X'' \cdot Y + X \cdot Y'' = 0$,

откуда $\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda^2$. Из последнего выражения получаем дифференциальное уравнение

$$X'' + \lambda^2 X = 0 \quad (3.6)$$

для определения неизвестной функции $X(x)$. Составим характеристическое уравнение, соответствующее (3.6), и найдем его корни [18]: $p^2 + \lambda^2 = 0$, $p = \pm \lambda i$. Откуда общее решение уравнения (3.6) имеет вид $X(x) = A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x)$. С учетом граничных условий (3.5) для $X(x)$ находим:

$$X(0) = A = 0,$$

$$X(\pi) = B \sin(\lambda \pi) = 0, \quad \lambda_n \pi = \pi n, \quad \lambda_n = n - \text{собственные значения.}$$

Тогда собственные функции имеют вид $X_n(x) = \sin(nx)$. Следовательно, решение ищем в виде ряда Фурье $T(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y) \sin(nx)$.

Продифференцируем последнее выражение дважды по x и дважды по y и подставим в уравнение (3.3):

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-n^2 Y_n(y) \sin(nx) + Y_n''(y) \sin(nx)) = \frac{\beta}{k} \sin x \sin \pi y,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (Y_n''(y) - n^2 Y_n(y)) \sin(nx) = \frac{\beta}{k} \sin x \sin \pi y. \quad (3.7)$$

Два ряда Фурье равны, если равны коэффициенты при соответствующих базисных функциях. Тогда из (3.7) получаем:

$$Y_1''(y) - Y_1(y) = \frac{\beta}{k} \sin \pi y. \quad (3.8)$$

$$Y_n''(y) - n^2 Y_n(y) = 0, \quad n = 2, 3, \dots \quad (3.9)$$

Решение уравнения (3.9) с учетом граничных условий (3.5) для $Y(y)$ тривиальное, т.е. $Y_n(y) = 0, n = 2, 3, \dots$. Для решения уравнения (3.8) составим характеристическое уравнение соответствующего однородного уравнения и найдем его корни: $p^2 - 1 = 0, p_{1,2} = \pm 1$. Откуда решение соответствующего однородного уравнения имеет вид $Y_{1,o}(y) = C_1 chy + C_2 shy$. Тогда решение неоднородного ищем в виде $Y_{1,n}(y) = A \cos \pi y + B \sin \pi y$. Подставляем данное выражение в уравнение (3.8), находим:

$$-A\pi^2 \cos \pi y - B\pi^2 \sin \pi y - A \cos \pi y - B \sin \pi y = \frac{\beta}{k} \sin \pi y,$$

$$-A(1 + \pi^2) \cos \pi y - B(1 + \pi^2) \sin \pi y = \frac{\beta}{k} \sin \pi y.$$

Из последнего соотношения находим $A = 0, B = -\frac{\beta}{k} \cdot \frac{1}{1 + \pi^2}$ и

$Y_{1,n}(y) = -\frac{\beta}{k} \cdot \frac{1}{1 + \pi^2} \sin \pi y$. Тогда общее решение уравнения (3.8) принимает вид

$$Y_1(y) = C_1 chy + C_2 shy - \frac{\beta}{k} \cdot \frac{1}{1 + \pi^2} \sin \pi y.$$

Определим неизвестные константы из граничных условий (3.5) для $Y(y)$:

$$Y_1(0) = C_1 chy = 0, \text{ следовательно, } C_1 = 0;$$

$$Y_1(1) = C_2 sh(1) = 0, \text{ следовательно, } C_2 = 0.$$

Тогда $Y_1(y) = -\frac{\beta}{k} \cdot \frac{1}{1 + \pi^2} \sin \pi y$. Окончательно получаем аналитическое

решение задачи (3.3)-(3.2) (и задачи (3.1)-(3.2)) в следующем виде

$T(x, y) = -\frac{\beta}{k} \cdot \frac{1}{1 + \pi^2} \cdot \sin x \cdot \sin \pi y$. На рисунке 3.1 представлен график решения задачи при $\beta / k = 1$.

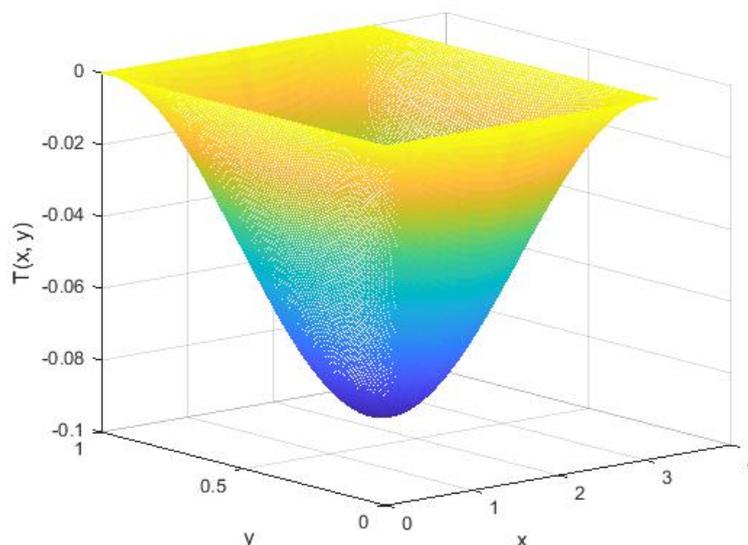


Рисунок 3.1 – График аналитического решения задачи (3.1)-(3.2) при $\beta / k = 1$

3.3 Решение задачи методом частичного интегрирования

Довольно часто можно получить хорошее приближение к решению дифференциального уравнения в частных производных, задавая поведение неизвестной функции по одному из измерений и оставляя ее произвольной по другим независимым переменным [1]. После того как выбрана форма решения по отношению к одной из переменных, можно частично выполнить интегрирование по этой переменной. При этом подынтегральная функция все еще будет зависеть от неизвестных функций. Эти функции затем могут быть подобраны так, чтобы удовлетворились уравнения Эйлера-Лагранжа для интегрального функционала по оставшейся переменной. Таким способом производится наилучший возможный выбор из класса функций, имеющую предложенную структуру.

Применим указанный подход для исследования вариационной задачи (3.1)-(3.2). Выберем структуру решения и функциональную форму распределения температуры по переменной y :

$$T_1(x, y) = y(1 - y)f(x). \quad (3.10)$$

Зависимость температуры от переменной x еще не определена. Выбор решения в виде (3.10) обусловлен тем, чтобы выполнялись граничные условия (3.2) по переменной y . Подставляя выражение (3.10) в функционал (3.1), получим:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_0^\pi \left[(y(1-y)f_x)^2 + ((1-2y)f)^2 + \frac{2\beta}{k} y(1-y)f \sin x \sin \pi y \right] dx dy = \\ &= \int_0^1 \int_0^\pi \left[(y-y^2)^2 f_x^2 + (1-2y)^2 f^2 + \frac{2\beta}{k} (y-y^2) \sin \pi y f \sin x \right] dy dx = \\ &= \int_0^\pi \left\{ \int_0^1 (y-y^2)^2 dy \cdot f_x^2 + \int_0^1 (1-2y)^2 dy \cdot f^2 + \frac{2\beta}{k} \cdot \int_0^1 (y-y^2) \sin \pi y dy \cdot f \sin x \right\} dx = \\ &= \int_0^\pi \left(\frac{1}{30} \cdot f_x^2 + \frac{1}{3} \cdot f^2 + \frac{2\beta}{k} \cdot \frac{4}{\pi^3} \cdot f \sin x \right) dx. \end{aligned}$$

Тем самым, получаем вариационную задачу: найти функцию $f(x)$, доставляющую минимум функционалу

$$I = \int_0^\pi \left(\frac{1}{30} \cdot f_x^2 + \frac{1}{3} \cdot f^2 + \frac{8\beta}{\pi^3 k} \cdot f \sin x \right) dx \quad (3.11)$$

и удовлетворяющую граничным условиям $f(0) = f(\pi) = 0$. Составим уравнение Эйлера-Лагранжа для функционала (3.11) и найдем его общее решение:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \cdot f + \frac{8\beta}{\pi^3 k} \cdot \sin x - \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{15} \cdot f_x \right) &= 0, \\ 10 \cdot f + \frac{120\beta}{\pi^3 k} \cdot \sin x - f_{xx} &= 0, \\ f_{xx} - 10f &= \frac{120\beta}{\pi^3 k} \cdot \sin x. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Характеристическое уравнение для однородного уравнения, соответствующего (3.12) имеет вид: $p^2 - 10 = 0$. Его корни $p_{1,2} = \pm\sqrt{10}$. Тогда решение однородного уравнения $f_o = C_1 e^{\sqrt{10}x} + C_2 e^{-\sqrt{10}x}$. Предполагаемый вид решения неоднородного уравнения $f_n = A \sin x + B \cos x$ подставляем в уравнение (3.12):

$$-A \sin x - B \cos x - 10A \sin x - 10B \cos x = \frac{120\beta}{\pi^3 k} \cdot \sin x,$$

$$-11A \sin x - 11B \cos x = \frac{120\beta}{\pi^3 k} \cdot \sin x,$$

откуда находим $A = -\frac{120\beta}{11\pi^3 k}$, $B = 0$. Тогда $f_u = -\frac{120\beta}{11\pi^3 k} \sin x$ и

$f = C_1 e^{\sqrt{10}x} + C_2 e^{-\sqrt{10}x} - \frac{120\beta}{11\pi^3 k} \sin x$. Неизвестные константы находим из нулевых

граничных условий:

$$\begin{cases} f(0) = C_1 + C_2 = 0, \\ f(\pi) = C_1 e^{\sqrt{10}\pi} + C_2 e^{-\sqrt{10}\pi} = 0. \end{cases}$$

Получаем $C_1 = C_2 = 0$. Тогда $f(x) = -\frac{120\beta}{11\pi^3 k} \sin x$. Окончательно получаем

приближенное решение задачи (3.1)-(3.2) в виде

$$T_1(x, y) = -\frac{120\beta}{11\pi^3 k} y(1-y) \sin x. \quad (3.13)$$

Сравним полученное приближение с точным, вычислив максимальное по модулю отклонение приближенного решения от точного (при $\beta / k = 1$):

$$\max |T(x, y) - T_1(x, y)| \approx 0.0040$$

и величину $\max |T(x, y) - T_1(x, y)| / \max |T(x, y)| \approx 0.0439$.

Очевидно, что найденное приближенное решение имеет отклонение около 4,39% от точного решения. На рисунке 3.2 представлен график приближенного решения (3.13) при $\beta / k = 1$.

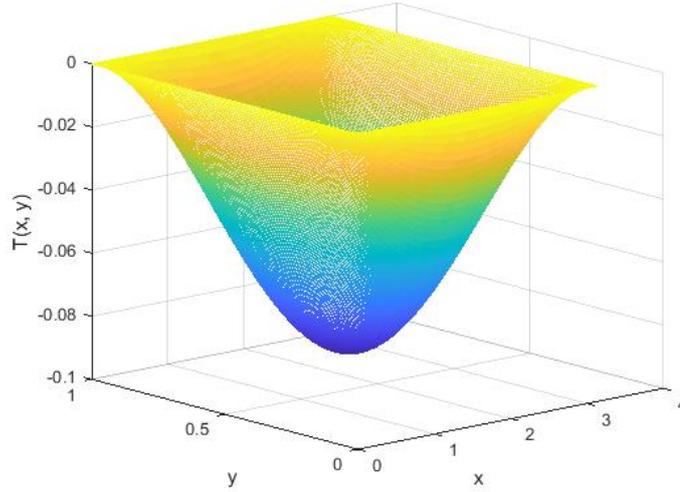


Рисунок 3.2 – График приближенного решения (3.13) при $\beta / k = 1$

Возможно, включение в вид приближенного решения слагаемых с квадратами y и $(1-y)$ «улучшит» приближенное решение. Будем искать решение в следующем виде

$$T_2(x, y) = y(1-y)f(x) + y^2(1-y)^2 g(x), \quad (3.14)$$

где $f(x), g(x)$ – две произвольные функции, обращающиеся в ноль при x , равном 0 и π . Подставим функцию (3.14) в интеграл (3.1) и получим:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^\pi \left[\left(y(1-y)f_x + y^2(1-y)^2 g_x \right)^2 + \left((1-2y)f + (2y-6y^2+4y^3)g \right)^2 + \right. \\ & \left. + \frac{2\beta}{k} \left(y(1-y)f + y^2(1-y)^2 g \right) \sin x \sin \pi y \right] dx dy = \\ & = \int_0^\pi \left[\left(\int_0^1 y^2(1-y)^2 dy \right) \cdot f_x^2 + 2 \cdot \left(\int_0^1 y^3(1-y)^3 dy \right) \cdot f_x \cdot g_x + \right. \\ & \left. + \left(\int_0^1 y^4(1-y)^4 dy \right) \cdot g_x^2 + \left(\int_0^1 (1-2y)^2 dy \right) \cdot f^2 + \right. \\ & \left. + 2 \cdot \left(\int_0^1 (1-2y) \cdot (2y-6y^2+4y^3) dy \right) \cdot f \cdot g + \left(\int_0^1 (2y-6y^2+4y^3)^2 dy \right) \cdot g^2 + \right. \\ & \left. + \frac{2\beta}{k} \cdot \left(\int_0^1 y(1-y) \sin \pi y dy \right) \cdot f \cdot \sin x + \right. \\ & \left. + \frac{2\beta}{k} \cdot \left(\int_0^1 y^2(1-y)^2 \sin \pi y dy \right) \cdot g \cdot \sin x \right] dx. \end{aligned}$$

После вычисления внутреннего интеграла по переменной y получим интегральный функционал относительно неизвестных функций $f(x)$ и $g(x)$:

$$I = \int_0^{\pi} \left[\frac{1}{30} \cdot f_x^2 + \frac{1}{70} \cdot f_x \cdot g_x + \frac{1}{630} \cdot g_x^2 + \frac{1}{3} \cdot f^2 + \frac{2}{15} \cdot f \cdot g + \frac{2}{105} \cdot g^2 + \frac{2\beta}{k} \cdot \frac{4}{\pi^3} \cdot f \cdot \sin x + \frac{2\beta}{k} \cdot \left(\frac{48}{\pi^5} - \frac{4}{\pi^3} \right) \cdot g \cdot \sin x \right] dx. \quad (3.15)$$

Теперь исходная задача свелась к задаче поиска экстремалей функционала (3.15) при нулевых граничных условиях. Составим систему уравнений Эйлера [10-11] для функционала (3.15):

$$\begin{cases} \frac{2}{3} \cdot f + \frac{2}{15} \cdot g + \frac{8\beta}{\pi^3 k} \cdot \sin x - \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{15} \cdot f_x + \frac{1}{70} \cdot g_x \right) = 0, \\ \frac{2}{15} \cdot f + \frac{4}{105} \cdot g + \frac{\beta}{k} \cdot \left(\frac{96}{\pi^5} - \frac{8}{\pi^3} \right) \cdot \sin x - \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{70} \cdot f_x + \frac{1}{315} \cdot g_x \right) = 0, \\ \frac{1}{15} \cdot f_{xx} + \frac{1}{70} \cdot g_{xx} - \frac{2}{3} \cdot f - \frac{2}{15} \cdot g = \frac{8\beta}{\pi^3 k} \cdot \sin x, \\ \frac{1}{70} \cdot f_{xx} + \frac{1}{315} \cdot g_{xx} - \frac{2}{15} \cdot f - \frac{4}{105} \cdot g = \frac{8\beta}{k} \cdot \left(\frac{12}{\pi^5} - \frac{1}{\pi^3} \right) \cdot \sin x. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 14 \cdot f_{xx} + 3 \cdot g_{xx} - 140 \cdot f - 28 \cdot g = \frac{1680\beta}{\pi^3 k} \cdot \sin x, \\ 9 \cdot f_{xx} + 2 \cdot g_{xx} - 84 \cdot f - 24 \cdot g = \frac{5040\beta}{k} \cdot \left(\frac{12}{\pi^5} - \frac{1}{\pi^3} \right) \cdot \sin x. \end{cases} \quad (3.16)$$

Система (3.16) представляет собой систему линейных дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных функций $f(x)$ и $g(x)$.

Частное решение соответствующей однородной системы

$$\begin{cases} 14 \cdot f_{xx} + 3 \cdot g_{xx} - 140 \cdot f - 28 \cdot g = 0, \\ 9 \cdot f_{xx} + 2 \cdot g_{xx} - 84 \cdot f - 24 \cdot g = 0, \end{cases}$$

при наличии нулевых граничных условий будет тривиальным. По наличию в левой части уравнений лишь производных второго порядка и самих функций и по виду правой части можно сделать вывод, что частные решения неоднородной системы (3.16) будут иметь вид: $f(x) = A \cdot \sin x$, $g(x) = B \cdot \sin x$.

Очевидно, при любых константах A и B данные функции будут удовлетворять

нулевым граничным условиям. Определим неизвестные константы, подставив указанные функции в систему (3.16):

$$\begin{cases} -14A \sin x - 3B \sin x - 140A \sin x - 28B \sin x = \frac{1680\beta}{\pi^3 k} \cdot \sin x, \\ -9A \sin x - 2B \sin x - 84A \sin x - 24B \sin x = \frac{5040\beta}{k} \cdot \left(\frac{12}{\pi^5} - \frac{1}{\pi^3} \right) \cdot \sin x, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 154A \sin x + 31B \sin x = -\frac{1680\beta}{\pi^3 k} \cdot \sin x, \\ 93A \sin x + 26B \sin x = -\frac{5040\beta}{k} \cdot \left(\frac{12}{\pi^5} - \frac{1}{\pi^3} \right) \cdot \sin x, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 154A + 31B = -\frac{1680\beta}{\pi^3 k}, \\ 93A + 26B = -\frac{5040\beta}{k} \cdot \left(\frac{12}{\pi^5} - \frac{1}{\pi^3} \right). \end{cases}$$

Из последней системы находим неизвестные коэффициенты:

$$\begin{cases} A = \frac{1680}{1121} \cdot \left(\frac{1116}{\pi^5} - \frac{119}{\pi^3} \right) \cdot \frac{\beta}{k}, \\ B = \frac{1680}{1121} \cdot \left(\frac{555}{\pi^3} - \frac{5544}{\pi^5} \right) \cdot \frac{\beta}{k}. \end{cases}$$

Тем самым, получили следующие функции:

$$f(x) = \frac{1680}{1121} \cdot \left(\frac{1116}{\pi^5} - \frac{119}{\pi^3} \right) \cdot \frac{\beta}{k} \cdot \sin x,$$

$$g(x) = \frac{1680}{1121} \cdot \left(\frac{555}{\pi^3} - \frac{5544}{\pi^5} \right) \cdot \frac{\beta}{k} \cdot \sin x.$$

Тогда окончательно получаем приближенное решение исходной задачи в следующем виде:

$$T_2(x, y) = \frac{1680}{1121} \cdot \frac{\beta}{k} \cdot \sin x \cdot \left[\left(\frac{1116}{\pi^5} - \frac{119}{\pi^3} \right) \cdot y(1-y) + \left(\frac{555}{\pi^3} - \frac{5544}{\pi^5} \right) \cdot y^2(1-y)^2 \right]. \quad (3.17)$$

Сравним полученное приближение с точным, вычислив максимальное по модулю отклонение приближенного решения от точного (при $\beta/k = 1$):

$$\max |T(x, y) - T_2(x, y)| \approx 8.36 \cdot 10^{-5}$$

и величину

$$\max |T(x, y) - T_2(x, y)| / \max |T(x, y)| \approx 9.09 \cdot 10^{-4}.$$

Очевидно, что найденное приближенное решение имеет отклонение около 0,09% от точного решения. Очевидно, второе приближение $T_2(x, y)$ гораздо ближе к точному решению в сравнении с первым приближением $T_1(x, y)$. На рисунке 3.3 представлен график приближенного решения (3.13) при $\beta / k = 1$.

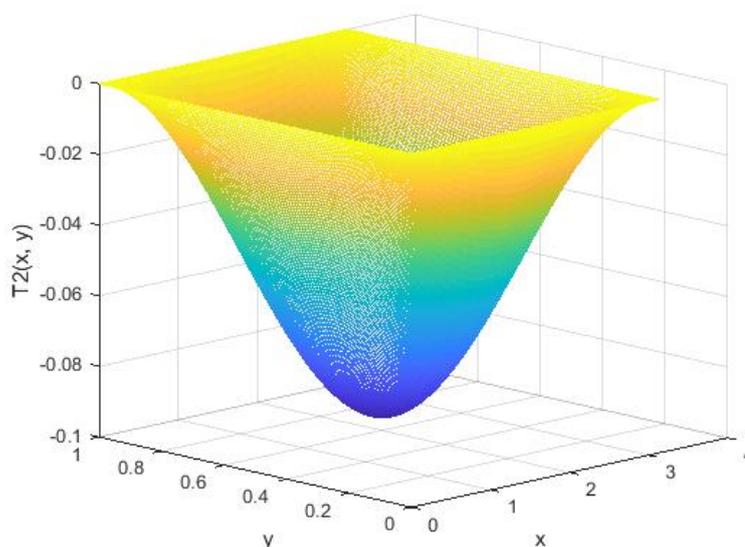


Рисунок 3.3 – График приближенного решения (3.17) при $\beta / k = 1$

3.4 Решение задачи в пакете PDETool

Найдем решение дифференциального уравнения (3.3) с граничными условиями (3.2) в пакете PDETool [19-21].

Для начала сконструируем прямоугольную пластину $[0, \pi] \times [0, 1]$, с теплоизолированными границами, представленную на рисунке 3.4.

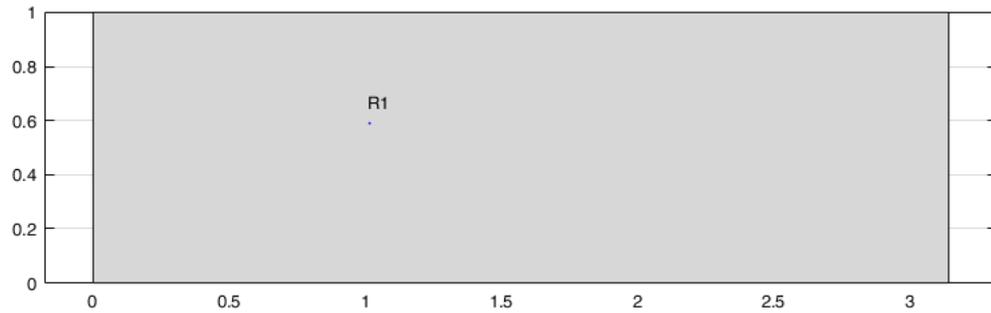


Рисунок 3.4 – Область исследования

Далее зададим коэффициенты уравнения (3.3) и граничных условий (3.2), представленную на рисунках 3.5-3.6.

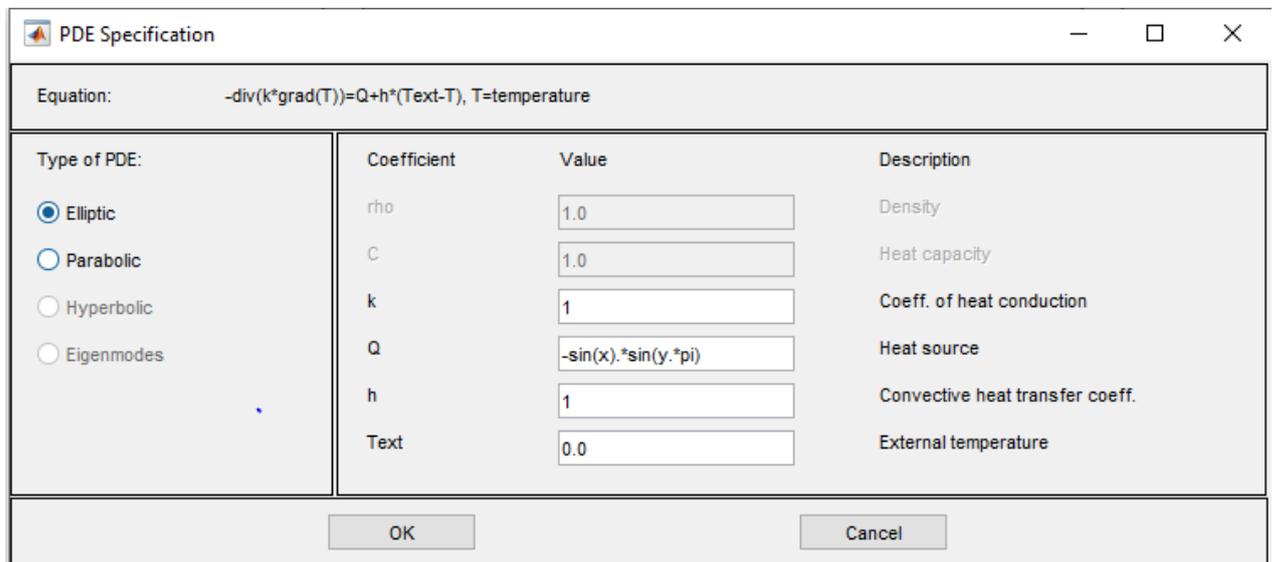


Рисунок 3.5 – Задание коэффициентов уравнения

На рисунке 3.5 обозначено: k – коэффициент теплопроводности, Q – функция распределения тепла на пластине, h – коэффициент конвективного теплообмена(в уравнении (3.1) это параметр β), $Text$ – внешняя температура.

Boundary Condition			
Boundary condition equation:		$h \cdot T = r$	
Condition type:	Coefficient	Value	Description
<input type="radio"/> Neumann	g	0	Heat flux
<input checked="" type="radio"/> Dirichlet	q	0	Heat transfer coefficient
	h	1	Weight
	r	0	Temperature
OK		Cancel	

Рисунок 3.6 – Задание граничных условий

На рисунке 3.6 обозначено: h – коэффициент веса, r – температура на границе. Согласно постановке задачи на границах пластины поддерживается нулевая температура.

Построим триангулярную сетку, чем меньше размер треугольников, тем выше точность получаемого результата, представленную на рисунке 3.7.

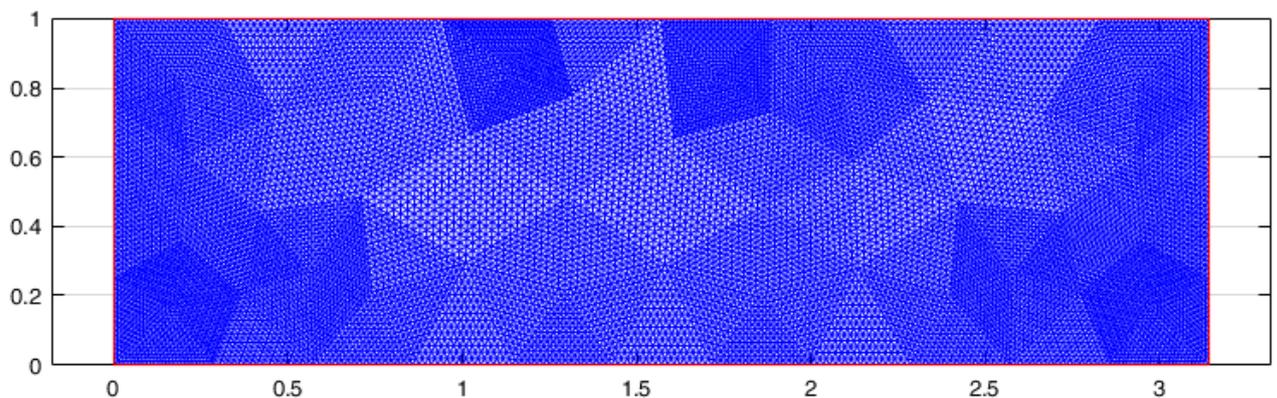


Рисунок 3.7 – Построение триангулярной сетки

В результате вычислительного эксперимента получаем графики решения уравнения (3.3) с граничными условиями (3.2), представленную на рисунке 3.8.

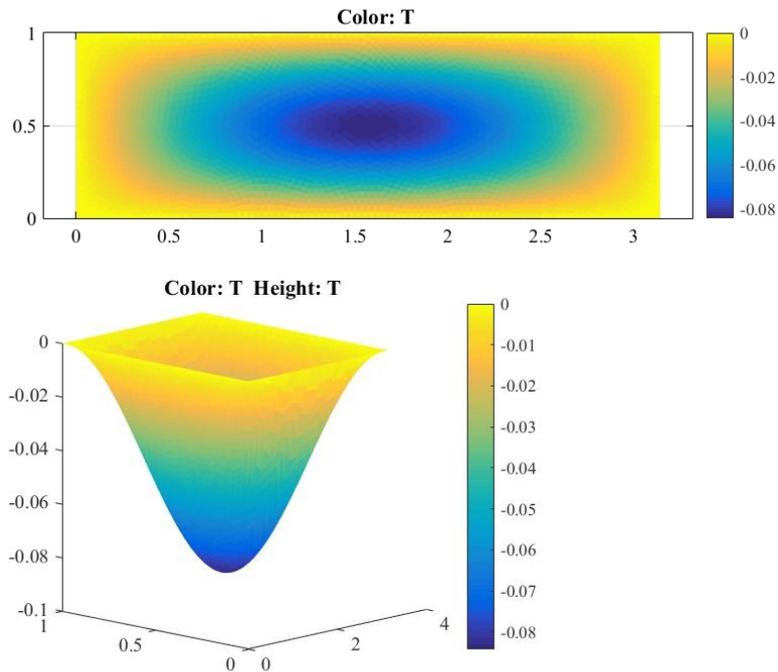


Рисунок 3.8– Решение задачи (3.3)-(3.2) в пакете PDETool

Сравнивая графики 3.1 и 3.8, видим, что решение, полученное методом конечных элементов в пакете PDETool, будет близким к аналитическому решению. Листинг вычислительной программы представлен в приложении В.

3.5 Решение задачи в пакете COMSOL Multiphysics

Исследуем дифференциальное уравнение (3.3) с граничными условиями (3.2) в пакете COMSOL Multiphysics [22-24].

Построим прямоугольную пластину $[0, \pi] \times [0, 1]$ с теплоизолированными границами, представленную на рисунке 3.9.

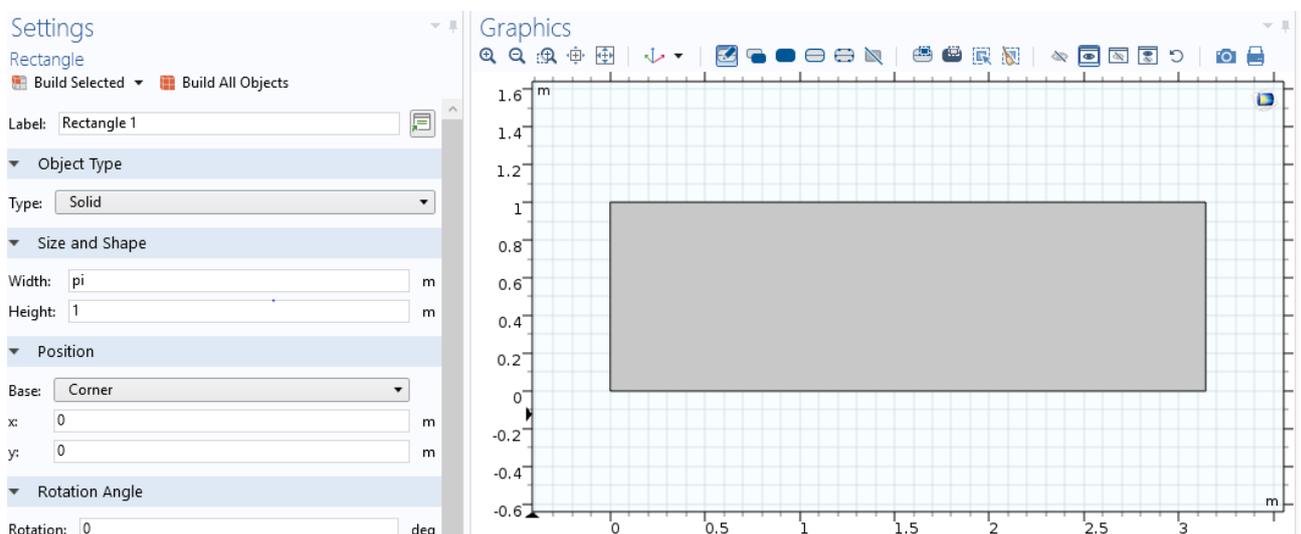


Рисунок 3.9 – Построение прямоугольной пластины

В модуле Heat Transfer in Solid добавляем граничные условия (Temperature 1) и функцию распределения тепла на пластине (Heat Source 1). Указываем границы для Temperature 1 и нулевую температуру. Указываем область распределения тепла на пластине (вся пластина) и задаем функцию распределения тепла $an1$, представленную на рисунках 3.10-3.12.

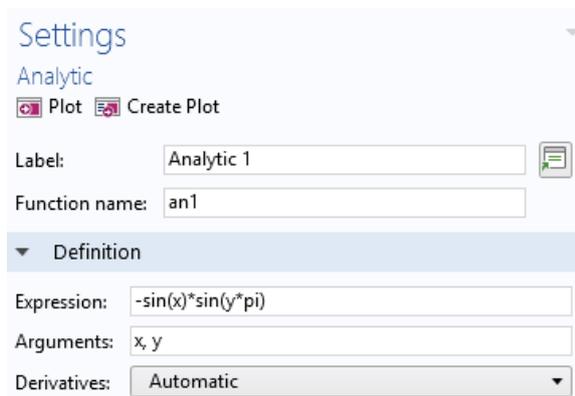


Рисунок 3.10 – Функция распределения тепла

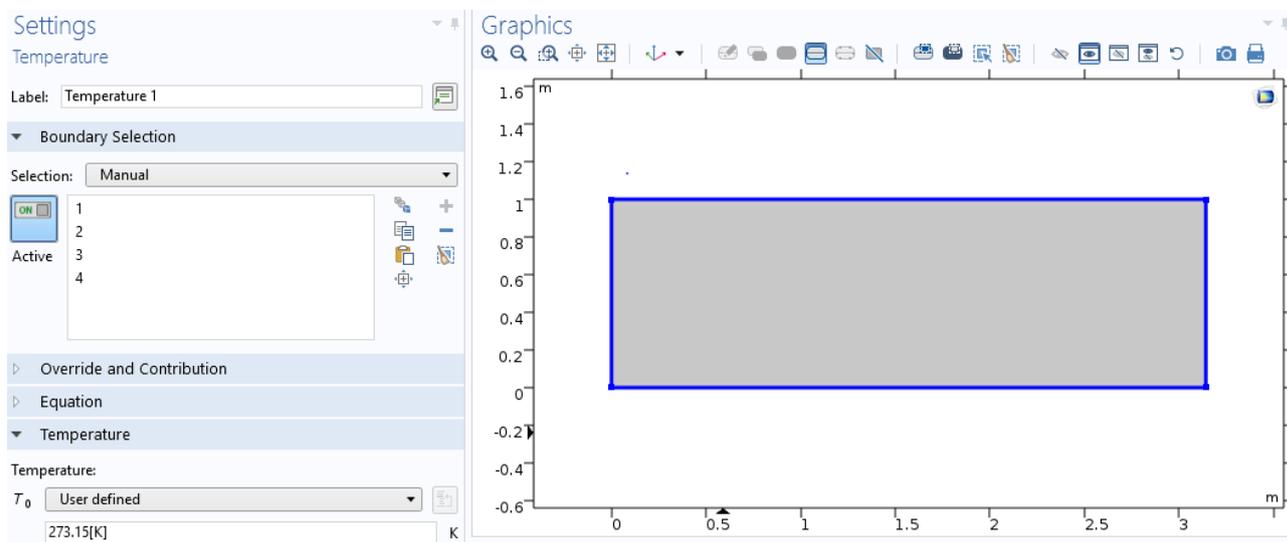


Рисунок 3.11 – Граничные условия

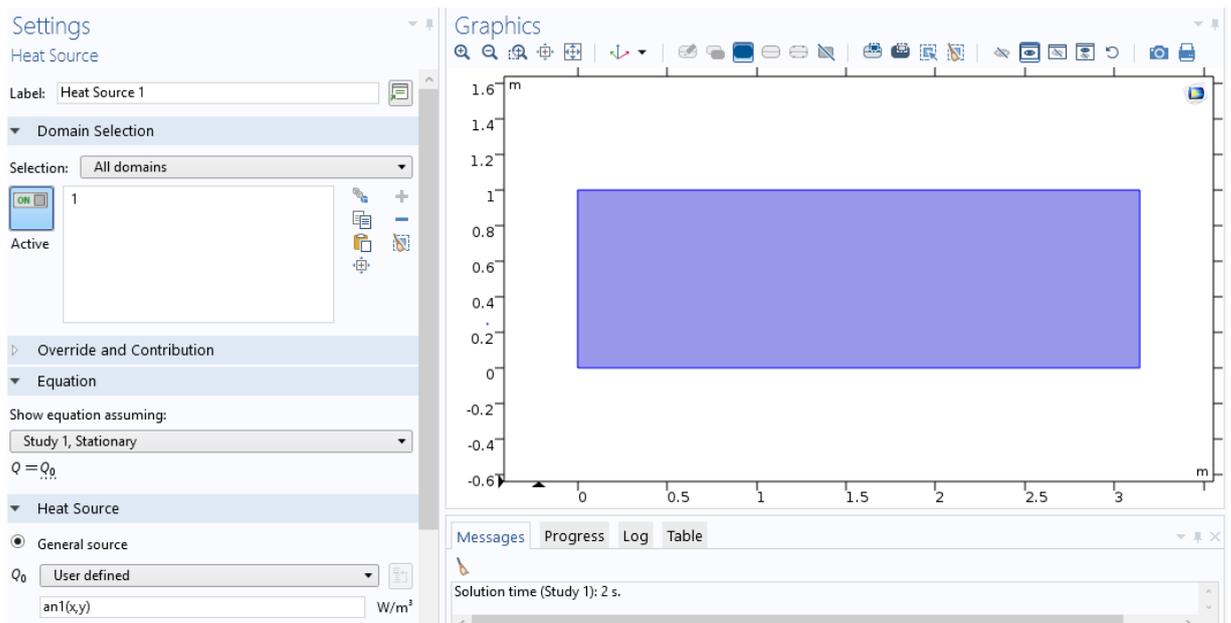


Рисунок 3.12 – Задание области распределения тепла

Накладываем триангулярную сетку на прямоугольную область пластины, представленную на рисунке 3.13.

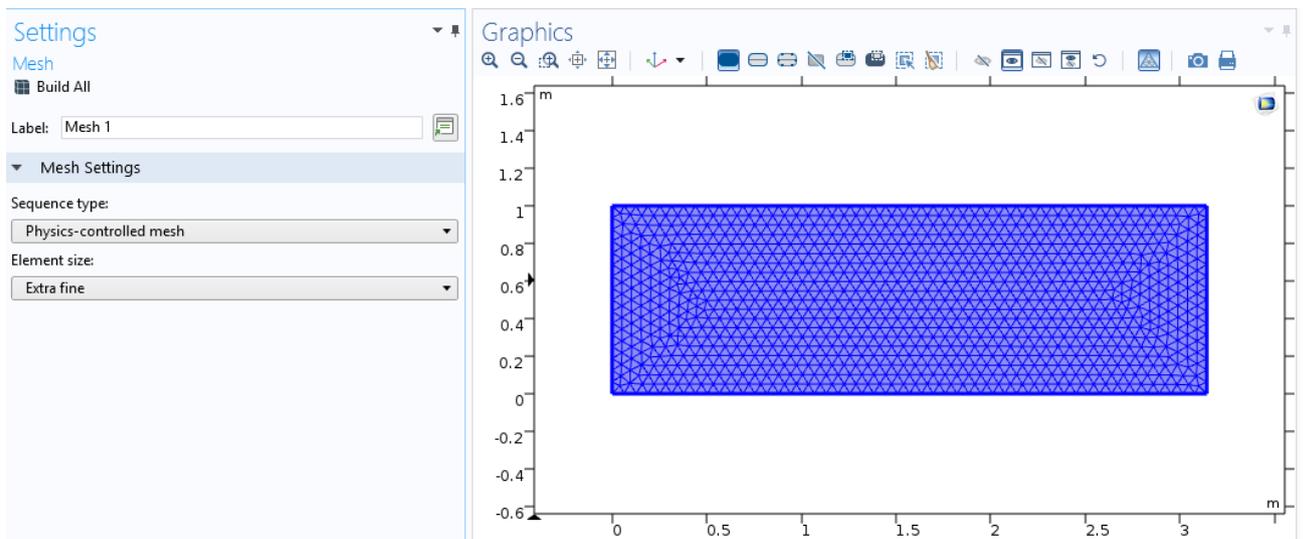


Рисунок 3.13 – Триангулярная сетка

Проводим вычислительный эксперимент в пакете COMSOL Multiphysics. И получаю графики решения уравнения (3.3) с граничными условиями (3.2), представленную на рисунках 3.14-3.15.

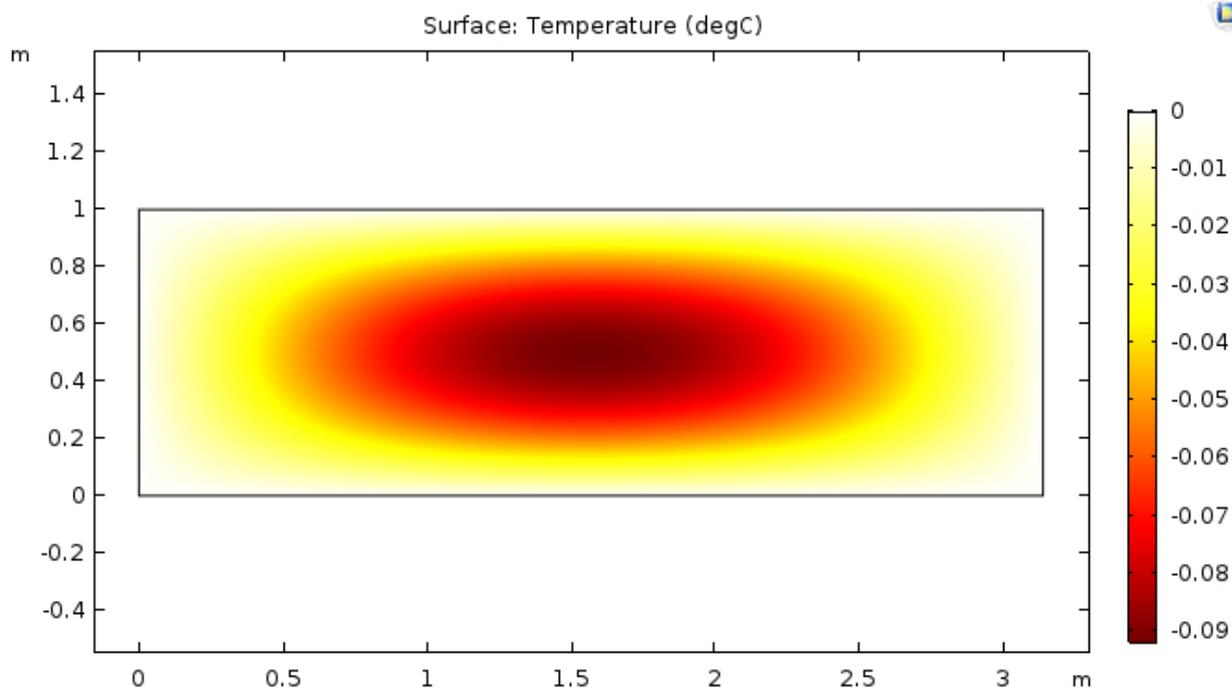


Рисунок 3.14 – График распределения температуры

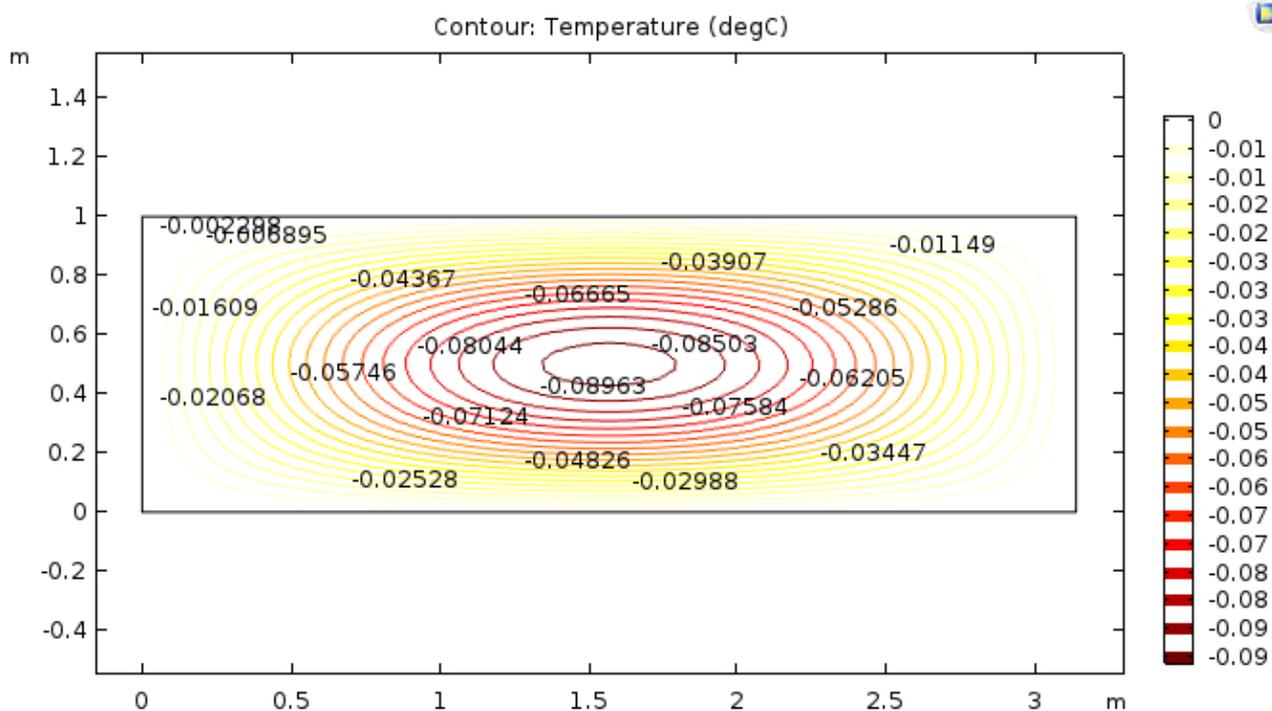


Рисунок 3.15 – Контурный график распределения температуры

Сравнивая график аналитического решения, представленный на рисунке 3.1, и контурный график, представленную на рисунке 3.15, видим, что решение, полученное методом конечных элементов в пакете COMSOL Multiphysics, совпадает с некоторой погрешностью с аналитическим решением.

4 ИСПОЛЬЗОВАНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ МАГИСТЕРСКОЙ ДИССЕРТАЦИИ В ПЕДАГОГИЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Результаты магистерской диссертации могут быть использованы в образовательном процессе при изучении дисциплин «Методы оптимизации» и «Численные методы» (направление подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика), «Вариационные методы» (специальность 24.05.01 Проектирование, разработка и эксплуатация ракет и ракетно-космических комплексов) в рамках проведения практических (или лабораторных) занятий.

Ниже предлагаются задания для самостоятельной работы студентов.

4.1 Задание для индивидуальной работы №1

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$x^2 y_{xx} + xy_x + (x^2 - v^2)y = 0,$$

при начальных граничных условиях $y(1) = d, y(2) = c$.

Свести неоднородные граничные условия с помощью замены:

$$y(x) = z(x) + (ax + b).$$

Преобразовать линейную краевую задачу в вариационную задачу с помощью приведения к стандартной форме:

$$-\frac{d}{dx} \left(P(x) \frac{dy}{dx} \right) = Q(x)y + R(x), \quad y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b;$$

$$I(y) = \frac{1}{2} \int_a^b (-P(x)y_x^2 + Q(x)y^2 + 2R(x)y) dx.$$

Найти точное и приближенное решения уравнения. Для выбора параметров уравнения, граничных условий и метода решения вариационной задачи использовать таблицу 3.

Таблица 3 – Варианты индивидуального задания №1

Номер варианта	Вариационный метод	v	Граничные условия	
			d	c

1	Эйлера	1	1	9
2	Ритца	1	8	4

Продолжение таблицы 3

3	Эйлера	1	2	1
4	Ритца	1	3	2
5	Ритца	1	4	7
6	Эйлера	3	4	8
7	Эйлера	2	1	3
8	Ритца	2	2	7
9	Ритца	3	8	9
10	Эйлера	3	1	8

4.2 Задание для индивидуальной работы №2

Рассмотрим двухмерную стационарную задачу распространения температуры в прямоугольной пластине $[a,b] \times [c,d]$, на краях которой поддерживается нулевая температура: найти функцию $T(x,y)$ распределения температуры, доставляющую минимум функционалу

$$I = \iint_{a,c}^{b,d} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 + \frac{2\beta T}{k} z(x,y) \right] dx dy,$$

и удовлетворяющую нулевым граничным условиям $T(0,y) = T(\pi,y) = T(x,0) = T(x,1) = 0$.

Излучение тепла с поверхности пластины происходит со скоростью на единицу площади, равной $f(x,y) = \beta \cdot z(x,y)$. Параметр k определяет теплопроводность пластины. Также $\frac{\beta}{k} = 1$.

Для метода частичного интегрирования выберем структуру решения и функциональную форму распределения температуры по переменной y :

$$T_1(x,y) = y(1-y)f(x).$$

Зависимость температуры от переменной x еще не определена. Выбор решения в виде $T_1(x,y) = y(1-y)f(x)$ обусловлен тем, чтобы выполнялись граничные условия $T(0,y) = T(\pi,y) = T(x,0) = T(x,1) = 0$ по переменной y .

Выполнить следующие задания с применением пакетов прикладных программ:

- Для функционала составить уравнение Эйлера-Остроградского.
- Найти аналитическое решение методом Фурье.
- Найти приближенное решения функционала методом частичного интегрирования.
- Сравнить аналитическое и приближенное решения.

Для выбора параметров функционала и функции излучения тепла использовать таблицу 4.

Таблица 4 – Варианты индивидуального задания №2

Номер варианта	$z(x,y)$	Размеры пластины $[a,b] \times [c,d]$
1	$\sin x \sin \pi y$	$[0,1] \times [0,\pi]$
2	$\sin(x+1) \sin \pi y$	$[0,2] \times [0,\frac{\pi}{2}]$
3	$\sin x \cos \pi y$	$[0,\pi] \times [0,\pi]$
4	$\sin(x-2) \sin \pi y^2$	$[0,\frac{\pi}{3}] \times [0,\frac{2\pi}{3}]$
5	$\sin x^2 \sin \frac{\pi}{2} y$	$[0,\frac{2\pi}{3}] \times [0,\frac{\pi}{2}]$
6	$\sin x \sin \pi(y+1)$	$[0,3] \times [0,3]$
7	$\sin x \cos \frac{2\pi}{3} y$	$[0,\pi] \times [0,4]$
8	$\cos x^2 \sin \pi y$	$[0,1] \times [0,\pi]$
9	$\sin(x+3) \sin \pi y^2$	$[0,3] \times [0,\pi]$
10	$\cos x \sin \pi y$	$[0,2] \times [0,\pi]$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате проделанной работы были исследованы вариационные методы решения краевых задач.

Для этого выполнены следующие задачи:

- исследование уравнения Бесселя с применением вариационного метода Эйлера;
- исследование уравнения Бесселя с применением вариационного метода Ритца;
- исследование двумерной стационарной задачи распределения тепла с применением метода частичного интегрирования;
- проведение вычислительных экспериментов.

В работе применены следующие методы: метод Эйлера, метод Ритца, метод частичного интегрирования, метод конечных элементов.

При сравнении полученных результатов сделаны следующие выводы:

- точность метода Эйлера повышается с ростом количества прямолинейных звеньев;
- метод Ритца показал, что для некоторого класса задач достаточно второго приближенного решения;
- метод частичного интегрирования в сравнении с методом конечных элементов, показал высокую точность и минимальную погрешность.

Результаты работы докладывались и обсуждались на XXVIII научной конференции «День науки» в АмГУ (2019 г.), на XX региональной научно-практической конференции «Молодежь XXI века: шаг в будущее» (2019 г.), на II всероссийской национальной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Молодежь и наука: Актуальные проблемы фундаментальных и прикладных исследований» (2019 г.), на научно-методических семинарах кафедры математического анализа и моделирования ФГБОУ ВО «Амурский государственный университет» (2018-2019 гг.).

По теме магистерской диссертации опубликовано три работы [16-18] в различных изданиях: «Вестник Амурского государственного университета», «Молодёжь XXI века: шаг в будущее материалы XX региональной научно-практической конференции», II всероссийской национальной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Молодежь и наука: Актуальные проблемы фундаментальных и прикладных исследований».

Результаты магистерской диссертации могут быть использованы в образовательном процессе при изучении дисциплин «Методы оптимизации» и «Численные методы» (направление подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика), «Вариационные методы» (специальность 24.05.01 Проектирование, разработка и эксплуатация ракет и ракетно-космических комплексов).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Шехтер, Р.С. Вариационный метод в инженерных расчетах / Р.С. Шехтер. – М.: Изд-во «Мир», 1971. – 292 с.
2. Гловински, Р. Численное исследование вариационных неравенств / Р. Гловински, Ж.-Л. Лионс, Р. Тремольтер. – М.: Мир, 1979. – 574 с.
3. Дюво, Г. Неравенства в механике и физике / Г. Дюво, Ж.-Л. Лионс. – М.: Мир, 1980. – 383 с.
4. Математическое моделирование и дифференциальные уравнения [Электронный ресурс]: учебное пособие для магистрантов всех направлений подготовки/ М.Е. Семенов [и др.]. – Электрон. текстовые данные. – Воронеж: Воронежский государственный архитектурно-строительный университет, ЭБС АСВ, 2017. – 149 с. – Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/72918.html>
5. Тихонов, Н.А. Основы математического моделирования. Часть 2. Учебное пособие / Н.А. Тихонов, М.Г. Токмачев. – М.: Физический факультет МГУ, 2012. – 91 с.
6. Беккер, М.В. Собственные колебания жидкости в полости сферической формы. Численно-аналитический вариант вариационного метода / М.В. Беккер, И.А. Дружинин // Журнал вычислительной математики и математической физики, – 2000. – № 40:4. – С. 633–637.
7. Монахов, В.Н. Об одном вариационном методе решения задач гидродинамики со свободными границами / В.Н. Монахов // Сибирский математический журнал, – 2000. – № 41:5. – С. 1106–1121.
8. Федотов, В.П. Граничный вариационный метод решения упруго-пластических задач с учетом предварительного наводороживания / В.П. Федотов // Математическое моделирование, – 2000. – № 12:8. – С. 30–34.
9. Краснов, М.Л. Вся высшая математика: Учебник. Т. 6 / М.Л. Краснов и др. – М.: Эдиториал УРСС, 2003. – 256 с.

10. Пантелеев, А.В. Вариационное исчисление в примерах и задачах: Учеб. пособие / А.В. Пантелеев. – М.: Высшая школа, 2006. – 272 с.
11. Пантелеев, А.В. Методы оптимизации [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Пантелеев А.В., Летова Т.А. – Электрон. текстовые данные. – М.: Логос, 2011. – 424 с. – Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/9093.html>
12. Гаврилов, В.С. Функции Бесселя в задачах математической физики: Учебно-методическое пособие / В.С. Гаврилов, Н.А. Денисова, А.В. Калинин. – Нижний Новгород: Издательство Нижегородского госуниверситета, 2014. – 40 с.
13. Краснов, М.Л. Вся высшая математика: Учебник. Т. 3 / М.Л. Краснов и др. – М.: Эдиториал УРСС, 2001. – 240 с.
14. Хеннер, В.К. Обыкновенные дифференциальные уравнения, вариационное исчисление, основы специальных функций и интегральных уравнений [Электронный ресурс]: учебное пособие / В.К. Хеннер, Т.С. Белозерова, М.В. Хеннер. – Электрон. дан. – Санкт-Петербург: Лань, 2017. – 320 с. – Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/96873>
15. Методы математической физики. Задача Дирихле для круга и прямоугольника: Методические указания к расчетно-графической работе / Сост. С.Е. Мансурова. – СПб: Изд-во Санкт-Петербургского горного университета, 2017. – 30 с.
16. Михлин, С.Г. Курс математической физики: учебник / С.Г. Михлин. – 2-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2002. – 575 с.
17. Мансурова, С. Е. Методы математической физики. Задача Дирихле для круга и прямоугольника: Методические указания к расчетно-графической работе / Сост. С.Е. Мансурова. – СПб: Изд-во Санкт-Петербургского горного университета, 2017. – 30 с.
18. Труфанова, Т.В. Методы решения уравнений математической физики. Учебное пособие / Т.В. Труфанова, А.Г. Масловская, Е.М. Веселова. – Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2015. – 196 с.

19. Щербакова, Ю.В. Дифференциальные уравнения [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Щербакова Ю.В. – Электрон. текстовые данные. – Саратов: Научная книга, 2019. – 159 с. – Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/81007.html>
20. Кетков, Ю.Л. MATLAB 7: программирование, численные методы/ Ю.Л.Кетков, А.Ю. Кетков, М.М. Шульц. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 752 с.
21. Иглин, С.П. Математические расчеты на базе Matlab. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005.– 640 с.
22. Ануфриев, И.Е. Matlab 7 / И.Е. Ануфриев, А.Б Смирнов, Е.Н. Смирнова – СПб.: БХВ – Петербург, 2005. – 1104 с.
23. Красников, Г.Е. Моделирование физических процессов с использованием пакета Comsol Multiphysics./ Г.Е Красников, О.В Нагорнов, Н.В. Старостин – М. НИЯУ МИФИ, 2012. – 184 с.
24. Огородников, А.С. Моделирование в среде MatLab – COMSOL 3.5a. Часть 1. Учебное пособие. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2012. – 104 с.
25. Pryor, R.W. Multiphysics Modeling Using COMSOL: A First Principles Approach / R.W. Pryor – Pryor Jones & Bartlett Publishers, Inc., 2011, 872 p.
26. Максимова, Н. Н. Численное решение краевой задачи для уравнения Бесселя методом Рунге/ Н.Н. Максимова, Н.П. Шкарлет // Вестник Амурского государственного университета. – 2019. – Вып. 85: Сер. Естеств. и экон. науки – С. 16 – 21.
27. Шкарлет, Н. П. Исследование двухмерной задачи распределения тепла методом Рунге/ Н.П. Шкарлет // Молодёжь XXI века: шаг в будущее материалы XX региональной научно-практической конференции (23 мая 2019 г., Благовещенск); в 3 томах. – Благовещенск : Изд-во Амурского гос. ун-та, 2019. – Т. 3 – С. 185 – 186.
28. Шкарлет, Н. П. Численное решение краевой задачи для уравнения Бесселя методом Эйлера/ Н.П. Шкарлет, Н.Н. Максимова// II всероссийской национальной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых

«Молодежь и наука: Актуальные проблемы фундаментальных и прикладных исследований». – 2019./ В печати.

ПРИЛОЖЕНИЕ А
Реализация метода Эйлера для уравнения Бесселя

```
set(0,'DefaultAxesFontSize',14,'DefaultAxesFontName','Times New Roman');
set(0,'DefaultTextFontSize',14,'DefaultTextFontName','Times New Roman');
clc
n=200;
a=1;
b=2;
dx=(b-a)/n;
for i=1:(n+1)
x(i)=a+(i-1)*dx; % деление отрезка [a,b]
J1 = besselj(1,x);% расчет Бесселевых функций
N1 = bessely(1,x);
end;
z=zeros(1, n+1);
for i=1:(n-1)
A(i, i) = ((x(i)+x(i+1)) - ((x(i+1).^2)-1)/x(i+1))*dx.^2; %элементы главной
диагонали
b(i, 1)=2*(x(i+1).^2)*(dx.^2); % вектор-столбец
end;
for i=1:(n-2)
A(i, i+1)=-x(i+1); %правая диагональ
A(i+1, i)=-x(i+1); % левая диагональ
end;
z(2:n)=A^-1*b;
y = z+2*x;
v = 7.2144*J1 + 1.50390*N1; % точное решение
```

```
figure(1)
```

Продолжение ПРИЛОЖЕНИЕ А

```
plot(x,v,'r', x,y,':b')
```

```
xlabel('x')
```

```
ylabel('y')
```

```
legend('Точное решение', 'Приближенное решение', 'Location', 'northoutside', 'Orientation', 'horizontal')
```

```
figure(2)
```

```
plot(x,abs(y-v),'b')
```

```
xlabel('x')
```

```
ylabel('y')
```

```
legend('Абсолютная погрешность', 'Location', 'northoutside', 'Orientation', 'horizontal')
```

```
figure(3)
```

```
plot(x,abs((y-v)./v),'b')
```

```
xlabel('x')
```

```
ylabel('y')
```

```
legend('Относительная погрешность', 'Location', 'northoutside', 'Orientation', 'horizontal')
```

ПРИЛОЖЕНИЕ Б
Реализация метода Рунге для уравнения Бесселя

```
clc
clear
set(0,'DefaultAxesFontSize',14,'DefaultAxesFontName','Times New Roman');
set(0,'DefaultTextFontSize',14,'DefaultTextFontName','Times New Roman');
x = 1:0.00001:2;
J1 = besselj(1,x);
N1 = bessely(1,x);
y = 7.2144*J1 + 1.50390*N1;
y0 = 1.662*(3*x-x.^2 - 2)+ (2*x);
y1 = 1.64956*(3*x-x.^2 - 2) - 0.01741*(3*x.^2 - x.^3 - 2*x)+ (2*x);
figure(1)
plot(x,y,'g',x,y0,'b',x,y1,'r')
xlabel('x')
ylabel('y')
legend('Точное
решение','y0(x)','y1(x)','Location','northoutside','Orientation','horizontal')
%относительная погрешность 2-го приближения
figure(2)
plot(x,abs(y1-y),'b')
xlabel('x')
ylabel('y')
legend('Абсолютная погрешность второго
приближения','Location','northoutside','Orientation','horizontal')
%абсолютная погрешность 2-го приближения
figure(3)
plot(x,abs((y1-y)./y),'b')
```

xlabel('x')

Продолжение ПРИЛОЖЕНИЕ Б

ylabel('y')

legend('Относительная погрешность второго
приближения', 'Location', 'northoutside', 'Orientation', 'horizontal')

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Листинг вычислительной программы для двухмерной стационарной задачи
распределения тепла

```
% This script is written and read by pdetool and should NOT be edited.
% There are two recommended alternatives:
% 1) Export the required variables from pdetool and create a MATLAB script
%    to perform operations on these.
% 2) Define the problem completely using a MATLAB script. See
%    http://www.mathworks.com/help/pde/examples/index.html for examples
%    of this approach.
function pdemodel
[pde_fig,ax]=pdeinit;
pdetool('appl_cb',9);
set(ax,'DataAspectRatio',[1 1 1]);
set(ax,'PlotBoxAspectRatio',[3.5 1 2]);
set(ax,'XLimMode','auto');
set(ax,'YLimMode','auto');
set(ax,'XTickMode','auto');
set(ax,'YTickMode','auto');
pdetool('gridon','on');

% Geometry description:
pdirect([0 3.1415926535897931 1 0],'R1');
set(findobj(get(pde_fig,'Children'),'Tag','PDEEval'),'String','R1')

% Boundary conditions:
pdetool('changemode',0)
pdesetbd(4,...
```

'dir',...

Продолжение ПРИЛОЖЕНИЕ В

1,...

'2',...

'0')

pdesetbd(3,...

'dir',...

1,...

'2',...

'0')

pdesetbd(2,...

'dir',...

1,...

'2',...

'0')

pdesetbd(1,...

'dir',...

1,...

'1',...

'0')

% Mesh generation:

```
setappdata(pde_fig,'Hgrad',1.3);
```

```
setappdata(pde_fig,'refinemethod','regular');
```

```
setappdata(pde_fig,'jiggle',char('on','mean',''));)
```

```
setappdata(pde_fig,'MesherVersion','preR2013a');
```

```
pdetool('initmesh')
```

```
pdetool('refine')
```

```
pdetool('refine')
```

```
pdetool('refine')
```

% PDE coefficients:

Продолжение ПРИЛОЖЕНИЕ В

```
pdeseteq(1,...
'1',...
'1',...
'(-sin(x).*sin(y.*pi))+(1.*(0.0))',...
'(1.0).(1.0)',...
'0:10',...
'0.0',...
'0.0',...
'[0 100]')
setappdata(pde_fig,'currparam',...
[1.0      ';...
'1.0      ';...
'1        ';...
'-sin(x).*sin(y.*pi)';...
'1        ';...
'0.0      ']
% Solve parameters:
setappdata(pde_fig,'solveparam',...
char('0','9696','10','pdeadworst',...
'0.5','longest','0','1E-4','','fixed','Inf'))
% Plotflags and user data strings:
setappdata(pde_fig,'plotflags',[1 2 1 1 1 1 6 1 0 1 0 1 1 0 1 0 0 1]);
setappdata(pde_fig,'colstring','');
setappdata(pde_fig,'arrowstring','');
setappdata(pde_fig,'deformstring','');
setappdata(pde_fig,'heightstring','');
% Solve PDE:
```

pdetool('solve')