

**Министерство науки и высшего образования Российской Федерации**  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
**АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**  
**(ФГБОУ ВО «АмГУ»)**

Факультет математики и информатики  
Кафедра математического анализа и моделирования  
Направление подготовки 01.04.02 Прикладная математика и информатика  
Направленность (профиль) образовательной программы Математическое  
и программное обеспечение вычислительных систем

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ

И.о. зав. кафедрой

\_\_\_\_\_ Н.Н. Максимова

« \_\_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2019 г.

**МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ**

на тему: Аналитические и численные методы решения нелинейных волновых  
уравнений в частных производных

Исполнитель

студент группы 7520м

\_\_\_\_\_  
(подпись, дата)

А. А. Загрузин

Руководитель

доцент, канд. техн. наук

\_\_\_\_\_  
(подпись, дата)

Т.В. Труфанова

Руководитель научного  
содержания программы  
магистратуры

\_\_\_\_\_  
(подпись, дата)

А.Г. Масловская

Нормоконтроль

старший преподаватель

\_\_\_\_\_  
(подпись, дата)

Л.И. Мороз

Рецензент

доцент, канд. техн. наук

\_\_\_\_\_  
(подпись, дата)

Л.В. Чепак

Благовещенск 2019

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
**АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**  
**(ФГБОУ ВО «АмГУ»)**

Факультет математики и информатики  
Кафедра математического анализа и моделирования

УТВЕРЖДАЮ  
И.о. зав. кафедрой  
\_\_\_\_\_ Н.Н. Максимова  
« \_\_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2019 г.

**З А Д А Н И Е**

К магистерской диссертации студента Загрузина Андрея Альбертовича

1. Тема магистерской диссертации: Аналитические и численные методы решения нелинейных волновых уравнений в частных производных (утверждена приказом от 04.02.2019 № 204-уч)

2. Срок сдачи студентом законченной работы: 18.06.2019 г.

3. Исходные данные к магистерской диссертации: отчет о прохождении преддипломной практики, учебные и периодические научные издания.

4. Содержание магистерской диссертации (перечень подлежащих разработке вопросов): теоретическое представление волновых процессов; аналитические решения волновых задач математической физики; численное моделирование процесса взаимодействия двух сталкивающихся солитонов.

5. Перечень материалов приложения: листинги вычислительных программ.

6. Консультанты по магистерской диссертации: рецензент – Чепак Л.В., канд. техн. наук; нормоконтроль – Мороз Л.И., старший преподаватель

7. Дата выдачи задания: 19.02.2019 г.

Руководитель магистерской диссертации: Труфанова Татьяна Вениаминовна, доцент, канд. техн. наук, доцент.

Задание принял к исполнению (19.02.2019): \_\_\_\_\_ Загрузин А. А.

## РЕФЕРАТ

Магистерская диссертация содержит 64 с., 14 рисунков, 2 приложения, 36 источников.

НЕЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА, УРАВНЕНИЕ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ, УРАВНЕНИЕ БЮРГЕРСА, УРАВНЕНИЕ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРИЗА, ТОЧНЫЕ И ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОСНОВНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ, ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ, УРАВНЕНИЕ ШРЁДИНГЕРА.

Целью данной дипломной работы является нахождение решений нелинейных волновых уравнений, таких как модифицированное уравнение Кортевега-де Фриза, уравнение Шредингера аналитическими и численными методами. Реализация решения модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза проведена в пакете прикладных программ Matlab. Рассмотрены такие понятия как: нелинейные модели, волновые задачи, солитон. Проведен литературный обзор подходов к исследованию методов решения нелинейных моделей математической физики. Проведен анализ определений. Рассмотрены примеры нелинейных волновых процессов.

Новизна магистерской диссертации заключается в следующем:

- Новизна магистерской диссертации заключается в следующем:
- решение аналога уравнения Кортевега-де Фриза;
- решения нелинейного уравнения Шредингера операторным методом Хироты;
- разработана модель взаимодействия двух сталкивающихся солитонов;
- построено численное решение для уравнения Кортевега-де Фриза.

Практическая значимость магистерской диссертации является то, что ее можно использовать при проведении занятий в высших учебных заведениях по дисциплинам: «Уравнения в частных производных», «Линейные и нелинейные

модели математической физики (специальные главы)», «Линейные и нелинейные уравнения физики». Результаты магистерской диссертации могут продолжены и использованы для написания других выпускных квалификационных работ.

Результаты проделанной работы были апробированы на 3 конференциях. Опубликовано одна научная статья и два тезисы-докладов.

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение	6
1 Методы построения аналитических решений нелинейных волновых уравнений	9
1.1 Исследование математической модели с нелинейным младшим членом	9
1.2 Решение нелинейного уравнение Бюргерса в виде бегущей волны	16
2 Точные методы интегрирования нелинейных волновых уравнений	25
2.1 Уравнение Кортевега-де Фриза	25
2.1.1 Решения уравнения Кортевега-де Фриза в виде уединенной волны	25
2.1.2 Решения уравнения Кортевега-де Фриза в виде двух сталкивающихся солитонов	32
2.2 Метод Хироты для решения уравнения Шрёдингера	39
2.3 Преобразование Миуры	45
3 Приближенные методы решения нелинейных уравнений	46
3.1 Пакет прикладных программ Matlab	46
3.2 Построение модели в ППП Matlab	47
3.2.1 Модель взаимодействия двух сталкивающихся солитонов	47
3.2.2 Численное решение уравнения Кортевега-де Фриза	50
4 Применение результатов научной работы в процессе обучения студентов	53
Заключение	57
Библиографический список	58
Приложение А Программная реализация взаимодействия двух сталкивающихся солитонов	62
Приложение Б Численная реализация уравнения Кортевега-де Фриза	63

## ВВЕДЕНИЕ

Математическое моделирование нелинейных волновых процессов является актуальной задачей, так как получило широкое применение во многих областях гидродинамики, биофизике, физике плазмы, физики твёрдого тела и т. д. Корректно поставленная задача – главное требование математической модели, которая содержит дифференциальное уравнение в частных производных, граничные и начальные условия. Задача поставлена корректно, если решение этой задачи существует единственно и устойчиво к малым изменениям исходных данных. Уравнение в частных производных отражают внутренние механизмы процессов, которые имеют бесчисленное множество решений. В задачах математической физики или математического моделирования, выделяют область, в которой следует решить уравнения. На границы области выставляют некоторые граничные условия на искомую функцию. Принятые классификации граничных условий обычно связана с порядком производных искомой функции, которые присутствуют в граничном условии и выражают различные условия связи. Если граничные условия не влияют на исследуемый процесс формы и размеров тел, то задачу решают в безграничном пространстве. Такие задачи называются задачами Коши.

В линейных задачах математической физики дифференциальные уравнения и граничные условия содержат только линейные соотношения между искомой функцией и её производными. Для линейных математических моделей существуют различные общие аналитические методы решений.

В современном моделировании широкого класса явлений и процессов приходится решать задачи, в которых уравнения или краевые условия являются нелинейными. Решение нелинейных задач значительно более сложные, чем линейные, так как происходит нарушение принципа суперпозиции. Для решения нелинейных задач приходится применять различные замены переменных и решать точными аналитическими методами. Общих методов решения таких задач не разработано. Тем не менее, многие нелинейные уравнения, такие как уравне-

ние Кортевега-де Фриза, уравнение Буссинеска, уравнение Шрёдингера решены точными аналитическими методами. Анализ полученных решений позволяет выявить качественно новые нелинейные эффекты в исследуемых процессах.

Волновые процессы являются эффективным средством передачи энергии и информации. Они широко используются в науке и технике [12, с. 261].

Данная магистерская диссертация посвящена нелинейным волновым процессам, которые описывают решения уравнений во многих задачах гидродинамики, квантовой теории поля, химической кинетики, тепловых волн в твердых телах, электродинамике. Все это позволяет сделать вывод о том, что теория нелинейных волновых процессов, рассматривающая взаимодействие волн различной природы, является актуальным направлением математической физики.

Математические объекты исследования - это аналитические и численные решения нелинейных волновых уравнений.

Целью данной магистерской диссертации является нахождение решений нелинейных волновых уравнений, таких как модифицированное уравнение Кортевега-де Фриза, уравнение Шрёдингера аналитическими и численными методами.

Задачи данной магистерской диссертации:

1. Исследование математической модели с нелинейным младшим членом, решение нелинейного уравнения Бюргера в виде бегущей волны;
2. Аналитическое решение уравнения Кортевега-де Фриза солитонного типа;
3. Метод Хироты для решения уравнения Шрёдингера;
4. Построение численного решения для уравнения Кортевега-де Фриза.

Методы исследования – аналитические и численные методы решения нелинейных волновых уравнений. В магистерской диссертации рассматривается нахождение решений нелинейных волновых уравнений, таких как модифицированное уравнение Кортевега-де Фриза, уравнение Шрёдингера аналитическими и численными методами.

Новизна магистерской диссертации заключается в следующем:

- решение аналога уравнения Кортевега-де Фриза;
- решения нелинейного уравнения Шредингера операторным методом Хироты;

- разработана модель взаимодействия двух сталкивающихся солитонов;
- построено численное решение для уравнения Кортевега-де Фриза.

Практическая значимость магистерской диссертации является то, что ее можно использовать при проведении занятий в высших учебных заведениях по дисциплинам: «Уравнения в частных производных», «Линейные и нелинейные модели математической физики (специальные главы)», «Линейные и нелинейные уравнения физики». Результаты магистерской диссертации могут продолжены и использованы для написания других выпускных квалификационных работ.

Результаты проделанной работы были апробированы на 3 конференциях. Опубликовано одна научная статья и два тезисы-докладов.

# 1 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ

## 1.1 Исследование математической модели с нелинейным младшим членом

В качестве первого примера рассмотрим математическую модель параболического типа, где нелинейность находится в младшем члене

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + ku(1-u), t > 0, x \in \mathbb{R}^1, \quad (1.1)$$

Здесь  $u(x,t) = \frac{N(x,t)}{N_m}$  – безразмерная плотность особей популяции, где  $0 \leq u \leq 1$ ;

$k = const > 0$  – коэффициент популяции.

Это уравнение (1.1) носит название Колмогорова-Петровского-Пискунова. Это уравнение является частным случаем полулинейного уравнения вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(u). \quad (1.2)$$

Решим уравнение (1.1) при следующих дополнительных условиях. Начальное условие: при  $t=0$  функция  $u=0$ , а при  $x > b > a$  – максимальное значение  $u=1$ . В частном случае  $b=a$  такое начальное распределение концентрации представляет собой ступенчатую функцию Хевисайда.

Из такой постановки задачи очевидно, что вследствие процессов генерации и диффузии область плотностей, близких к единице, будет распространяться справа налево в соответствии с рисунком 1, увеличивая территорию, занятую доминантными особями. О таком нестационарном процессе можно говорить как о распространении волны концентрации. При этом следует ожидать, что нелинейная генерация при наличии диффузии по истечении довольно большого промежутка времени формирует некоторый стационарный профиль волны в переходной зоне, где  $0 < u < 1$ . Форма данного стационарного профиля не зависит от начального распределения концентрации в переходной зоне, и он пе-

ремещается из области с большей концентрацией в область с меньшей концентрацией с некоторой отличительной скоростью  $v_*$ .

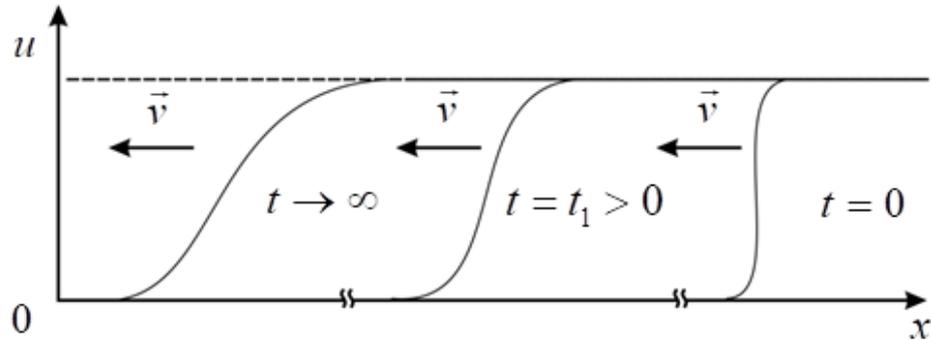


Рисунок 1 – Области плотностей

Для того чтобы определить этот стационарный профиль нелинейной волны и ее скорость распространения, перейдем в движущуюся систему отсчета и будем искать решение уравнения (1.1) в форме простой бегущей волны

$$u(x, t) = \Theta(x + vt), \quad v = \text{const}. \quad (1.3)$$

Тогда для функции  $\theta = \theta(\xi)$ , зависящей от переменного  $\xi = x + vt$ , после подстановки (1.3) в (1.1)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dt} = v \frac{d\theta}{d\xi}, \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{d\theta}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{d\theta}{d\xi}. \quad (1.5)$$

Из (1.5) следует, что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{d^2 \theta}{d\xi^2}, \quad (1.6)$$

получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$v \frac{d\theta}{d\xi} = \frac{d^2 \theta}{d\xi^2} + k\theta(1 - \theta), \quad 0 \leq \theta \leq 1. \quad (1.7)$$

Это уравнение следует решать при выполнении физически очевидных условий

$$\theta \rightarrow 0, \quad \frac{d\theta}{d\xi} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \xi \rightarrow -\infty; \quad \frac{d\theta}{d\xi} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \xi \rightarrow +\infty, \quad (1.8)$$

вытекающих из постановки задачи.

Задача (1.7), (1.8) содержит бесчисленное множество решений с непрерывным скоростей  $v$ , ограниченным снизу значением  $v_* = 2\sqrt{k}$ .

С целью подтверждения данного утверждения необходимо понизить порядок уравнения с помощью подстановки

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{d\xi} = p(\xi), \\ \frac{dp}{d\xi} = vp - k\theta(1 - \theta). \end{cases} \quad (1.9)$$

Учитывая, что

$$\frac{dp}{d\xi} = \frac{dp}{d\theta} \frac{d\theta}{d\xi} = p \frac{dp}{d\xi},$$

второе уравнение системы (1.9) можно записать в виде

$$p \frac{dp}{d\xi} = vp - k\theta(1 - \theta), \quad (1.10)$$

удобном для исследования на фазовой плоскости  $(\theta, p)$ .

Таким образом, с учетом условий (1.8), решению уравнения Колмогорова-Петровского-Пискунова типа (1.3) соответствует траектория  $p = p(\theta)$  на фазовой плоскости, которая является интегральной кривой уравнения

$$\frac{dp}{d\theta} = \frac{vp - k\theta(1 - \theta)}{p}. \quad (1.11)$$

И проходит через особые точки этого уравнения  $(0, 0)$  и  $(1, 0)$ . При этом интегральная кривая должна лежать в полосе  $0 \leq \theta \leq 1$  и не пересекать ось абсцисс вне конечных точек в соответствии с рисунком 2.

Покажем, что такая интегральная кривая может существовать только при  $v > v_* = 2\sqrt{k}$ . Действительно, с одной стороны, вблизи точки  $(0, 0)$ , т. е. для  $\theta \ll 1$ , искомую интегральную кривую можно аппроксимировать уравнением прямой  $p = a\theta$ , где  $a = const > 0$ . С другой стороны, при  $\theta \ll 1$  уравнение (1.11) можно линеаризовать, если пренебречь квадратичными по  $\theta$  членами по сравнению с линейными. Тогда оно примет вид

$$\frac{dp}{d\theta} \approx \frac{vp - k\theta}{p}.$$

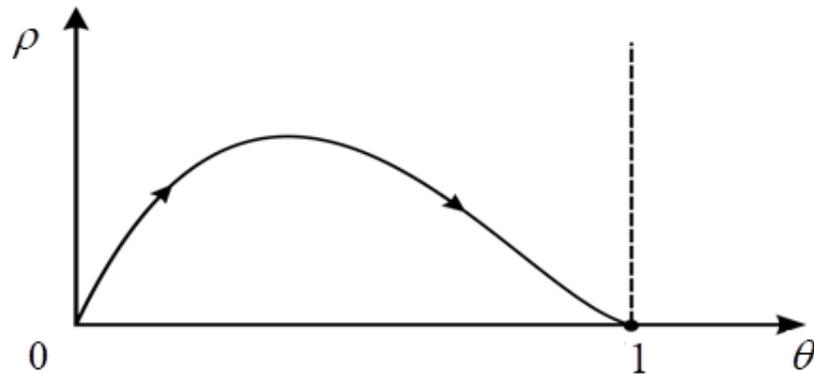


Рисунок 2 – Интегральная кривая

Подставляя  $p = a\theta$ , получаем для  $a$  квадратное уравнение

$$a^2 - va + k = 0.$$

Отсюда

$$a = \frac{v}{2} \pm \sqrt{\frac{v^2}{4} - k}.$$

Следовательно, условие существования вещественного  $a$  имеет вид

$$v \geq v_* = 2\sqrt{k}. \quad (1.12)$$

К этому же заключению можно прийти, исследуя особую точку  $(0, 0)$  уравнения при различных значениях параметров задачи  $v$  и  $k$ . Для этого линеаризуем систему (1.9) вблизи точки  $(0, 0)$ . В таком случае она примет вид линейной системы с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{d\xi} = p; \\ \frac{dp}{d\xi} = -k\theta + vp. \end{cases} \quad (1.13)$$

Определитель матрицы коэффициентов такой системы

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -k & v \end{vmatrix} = k \neq 0. \quad (1.14)$$

Находим собственные значения этой матрицы из условия

$$\begin{vmatrix} a_1 - \lambda & b_1 \\ a_2 & b_2 - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -k & v - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (1.15)$$

и получаем характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - v\lambda + k = 0. \quad (1.16)$$

Находим собственные значения уравнения (1.16)

$$\lambda_{1,2} = \frac{v}{2} \pm \sqrt{\frac{v^2}{4} - k}. \quad (1.17)$$

Докажем теперь, что для интегральной кривой рассматриваемого вида при  $v \geq 2\sqrt{k}$  выполняются условия (1.8). Для данной кривой справедливы следующие асимптотики:

$$p = a\theta + O(\theta) \text{ при } \theta \rightarrow 0; \quad p = c(1 - \theta) + O(1 - \theta) \text{ при } \theta \rightarrow 1, \quad (1.18)$$

где  $a$  и  $c$  – положительные константы.

Вспомним, что  $p = d\theta / d\xi$  или  $d\xi = d\theta / p(\theta)$ . Проинтегрируем соотношение и получим

$$\xi - \xi_0 = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{p(\theta)}, \quad 0 < \theta_0 < 1.$$

Отсюда, с учетом уравнения (1.10) следует, что  $\xi \rightarrow -\infty$  при  $\theta \rightarrow 0$  и  $\xi \rightarrow +\infty$  при  $\theta \rightarrow 1$ .

Волна, распространяющаяся с минимальной скоростью  $v = v_* = 2\sqrt{k}$ , устойчива. Это свойство состоит в том, что любой начальный профиль  $u(x,0) = f(x)$ , где  $u(x,0) = f(x)$ , где  $0 \leq f(x) \leq 1, f(+\infty) = 1, f(-\infty) = 0$ , а  $f'(x) \geq 0$ , по истечении довольно значительного промежутка времени всегда приобретает форму стационарного профиля, движущегося со скоростью  $v_* = 2\sqrt{k}$ . Форму этого устойчивого стационарного профиля определяет решение уравнения (1.7) с  $v = v_*$ , которое удовлетворяет условиям (1.8). Задача при  $v = v_*$  решается исключительно численными методами. Аналитического решения данной задачи нет.

Таким образом, для оценки скорости распространения нелинейных волн в процессах, описываемых уравнением (1.1), необходимо использовать значение  $v_* = 2\sqrt{k}$ . Примерами таких волн могут служить волны распространения популяции растений и животных или волны эпидемий.

Стоит заметить, что при одном значении  $\nu$ , близком к  $v_*$ , когда  $\nu = 5\sqrt{\frac{k}{6}} \approx 1,02v_*$ , точное решение уравнения (1.7), удовлетворяющее условиям (1.8), может быть найдено в аналитическом виде.

Введем в рассмотрение функцию

$$w(\xi; \alpha, \nu) = \left( \frac{e^{\alpha\xi}}{1 + e^{\alpha\xi}} \right)^\nu \equiv (1 + e^{-\alpha\xi})^{-\nu}, \quad -\infty < \xi < +\infty,$$

которая при  $\alpha > 0$  и  $\nu > 0$  удовлетворяет условиям (1.8).

Дифференцируем

$$\begin{aligned} \frac{dw}{d\xi} &= -\nu(1 + e^{-\alpha\xi})^{-\nu-1} e^{-\alpha\xi} = -\alpha\nu(1 + e^{-\alpha\xi})^{-\nu} e^{-\alpha\xi} (1 + e^{-\alpha\xi})^{-1} = \\ &= \alpha\nu w e^{-\alpha\xi} (1 + e^{-\alpha\xi})^{-1}, \end{aligned}$$

отсюда  $w^\nu = (1 + e^{-\alpha\xi})$ , подставляем в дифференцированное уравнение и находим

$$\frac{dw}{d\xi} = -\alpha\nu w (w^{\frac{1}{\nu}} - 1).$$

Аналогично найдём  $\frac{d^2w}{d\xi^2}$

$$\frac{d^2w}{d\xi^2} = \alpha^2\nu(\nu + 1)w \left( w^{\frac{1}{\nu}} - 1 \right) \left( w^{\frac{1}{\nu}} - \frac{\nu}{\nu + 1} \right).$$

Поэтому при действии на функцию  $w$  оператором

$$\hat{L} = \nu \frac{d}{d\xi} - \frac{d^2}{d\xi^2},$$

получим

$$\hat{L}w = -\alpha^2 \nu(\nu+1)w \left( w^{\frac{1}{\nu}} - 1 \right) \left( w^{\frac{1}{\nu}} + A \right),$$

где  $A = \frac{\nu}{\alpha(\nu+1)} - \frac{\nu}{\nu+1}$ .

Пусть  $A = 1$ , т. е.  $\nu = (2\nu + 1)\alpha$ . Тогда

$$\hat{L}w = \alpha^2 \nu(\nu+1)w \left( 1 - w^{\frac{2}{\nu}} \right).$$

Возьмем частный случай, когда  $\nu = 2$  и  $\nu = 5\alpha$

$$\hat{L}w = 6\alpha^2 w(1-w).$$

Отсюда следует, что функция  $\theta(\xi) = w(\xi; \sqrt{k/6}, 2)$  является решением задачи (1.7), (1.8) при  $\nu = 5\sqrt{k/6}$ .

Если  $A = 0$ , т. е.  $\nu = \alpha\nu$ , то

$$\hat{L}w = \alpha^2 \nu(\nu+1)w^{\frac{1+\nu}{\nu}} \left( 1 - w^{\frac{1}{\nu}} \right).$$

Следовательно, в частном случае, функция

$$u(x, t) = w \left( \xi; \sqrt{\frac{k}{2}}, 1 \right) \equiv \left( 1 + e^{-\sqrt{\frac{k}{2}}\xi} \right)^{-1},$$

где  $\xi = x + \sqrt{\frac{k}{2}}t$ , является решением уравнения Зельдовича

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + ku^2(1-u), \quad k = \text{const.}$$

Данное решение представляет собой бегущую волну со стационарным профилем, распространяющуюся с постоянной скоростью  $\nu = \sqrt{k/2}$ . При этом вследствие объемной генерации возмущений область, где  $u > 0$ , расширяется с течением времени [16, стр. 302].

С помощью решений вида (1.3) уравнений (1.1) либо (1.2) можно находить и исследовать асимптотические решения других нелинейных уравнений математической физики.

## 1.2 Решение нелинейного уравнение Бюргера в виде бегущей волны

При изучении распространения волн различных физических процессов, часто используется закон сохранения, который можно записать в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0. \quad (1.19)$$

Здесь  $u(x, t)$  является характеристикой изучаемой среды. Это может быть энергия, плотность массы и другие,  $q$  – плотность потока, вид которого зависит от выбора физического механизма переноса массы, импульса или энергии.

В случае конвективного механизма переноса  $q = au$ , где  $a = const$ . При такой подстановке уравнение (1.19) приводится к дифференциальному уравнению в частных производных вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (1.20)$$

решение этого уравнения имеет вид

$$u(x, t) = f(x - at), \quad (1.22)$$

которое представляет собой распространение волны со скоростью  $a$ .

Если зависит  $q = q(u)$  нелинейно, то мы переходим к нелинейным волнам, которые в первом приближение нелинейности конвективного механизма можно представить в виде

$$q = au + \frac{1}{2}bu^2, \quad a, b = const. \quad (1.22)$$

Подставляем (1.22) в (1.19), получаем уравнение (1.20), записанное в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} + bu \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (1.23)$$

Проделав замену независимых переменных  $x' = x - at$  и  $t' = bt$  и пересчитав все производные, входящие в уравнение (1.23)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial t'} \frac{\partial t}{\partial t'} = -a \frac{\partial u}{\partial x'} + b \frac{\partial u}{\partial t'},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x'} \frac{\partial x}{\partial x'} = \frac{\partial u}{\partial x'},$$

получаем так называемое нелинейное уравнение Римана

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (1.24)$$

Это уравнение имеет решение вида (1.22), по форме аналогичное решению (1.21), здесь формально константу  $a$  заменили на  $u$ . Это решение

$$u(x, t) = f(x - ut), \quad (1.25)$$

описывает распространение нелинейной волны при начальном условии  $u(x, 0) = f(x)$ .

Доказательство того что формула (1.25) определяет решение уравнения Римана, пересчитаем все производные, входящие в уравнение Римана

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left(-u - t \frac{\partial u}{\partial t}\right) f'; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \left(1 - t \frac{\partial u}{\partial x}\right) f'.$$

Подставляя их в (1.24), получаем

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -uf' - t \frac{\partial u}{\partial t} f' + uf' - ut \frac{\partial u}{\partial x} f' = -tf' \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right),$$

Отсюда

$$\left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) (1 + tf') = 0$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Проанализируем полученные решения (1.25). Искомая функция входит в это выражение неявно. То есть волна является нелинейной, которая меняет свою форму при её движении. Причём, точки волны имеют скорость, зависящую от высоты волны. Поэтому вершина волны начинает обгонять остальные участки волны и наступает такой момент, когда происходит опрокидывание волны в соответствии с рисунком 3.

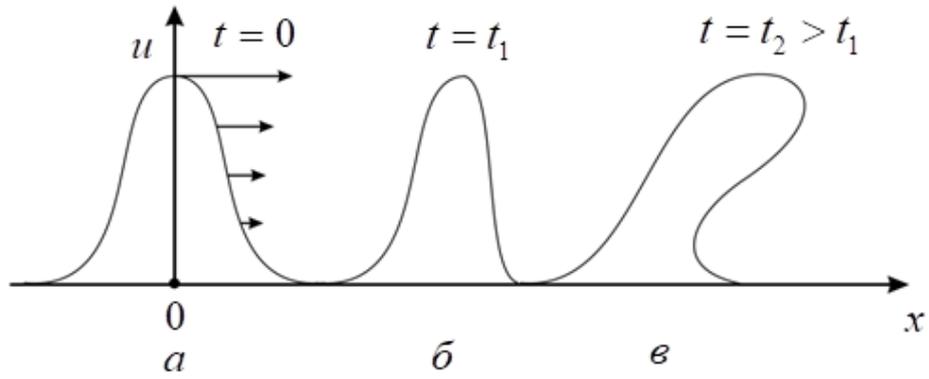


Рисунок 3 – Профиль нелинейной волны

В этот момент функция  $u$  становится многозначной, то есть одному значению координаты соответствует несколько значений функции. Чтобы придать такому решению физический смысл, можно поступить следующим образом. Многозначный непрерывный профиль нелинейной волны заменим профилем с разрывом в соответствии с рисунком 4.

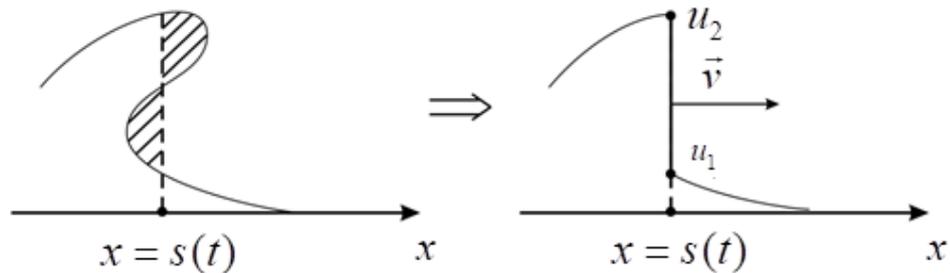


Рисунок 4 – Профиль нелинейной волны с разрывом

Такое разрывное решение моделирует ударную волну, если под  $u$  понимать, например, плотность среды. В области ударной волны плотность среды изменяется от  $u_2$  до  $u_1$ . Обозначим индексом «1» величину плотности до точки разрыва, а индексом «2» – после точки разрыва. В остальной области функция  $u(x, t)$  и её первые производные непрерывны

Проинтегрируем уравнение Римана (1.24) по  $x$  от точки  $x_2$  до точки  $x_1$  ( $x_2 < x_1$ ). Тогда после интегрирования получим

$$\frac{d}{dt} \int_{x_2}^{x_1} u(x, t) dx + \frac{1}{2} [u^2(x_1, t) - u^2(x_2, t)] = 0. \quad (1.26)$$

Если в интервал  $(x_2, x_1)$  попадает точка разрыва  $x = s(t)$ , то интеграл разбиваем на сумму

$$\frac{d}{dt} \left[ \int_{x_2}^{s(t)} u(x, t) dx + \int_{s(t)}^{x_1} u(x, t) dx \right] = \frac{1}{2} [u^2(x_2, t) - u^2(x_1, t)] \quad (1.27)$$

Проведя в уравнении (1.27) дифференцирование интегралов с переменными пределами, получим

$$u(s^-, t)V + \int_{x_2}^{s(t)} \frac{\partial u}{\partial t} dx - u(s^+, t)V + \int_{s(t)}^{x_1} \frac{\partial u}{\partial t} dx = \frac{1}{2} [u^2(x_2, t) - u^2(x_1, t)] \quad (1.28)$$

здесь  $u(s^-, t) = u_2$  и  $u(s^+, t) = u_1$  – предельные значения функции  $u$  слева и справа от точки разрыва;  $V = ds/dt$  – скорость распространения взрыва.

Переходя к пределу, устремляя  $x_2 \rightarrow s^-$  и  $x_1 \rightarrow s^+$  к точке разрыва  $x = s(t)$ , получаем, что интеграл (1.28) обратится в нуль, так как производная  $\partial u / \partial t$  ограничена. Следовательно, из выражения (1.28) получаем

$$(u_2 - u_1)V = \frac{1}{2}(u_2^2 - u_1^2),$$

проделав простейшие преобразования, находим

$$V = \frac{1}{2}(u_2 + u_1). \quad (1.29)$$

Это скорость распространения разрыва через плотность  $u$  слева и справа от разрыва.

Примером решения уравнения (1.24) является ударная волна сжатия при  $(u_2 > u_1)$ , имеющая форму прямоугольной ступеньки в соответствии с рисунком 5

$$u(x, t) = \begin{cases} u_1 = \text{const}, & x > Vt; \\ u_2 = \text{const}, & x < Vt, \end{cases} \quad (1.30)$$

профиль которой распространяется со скоростью  $V = (u_1 + u_2) / 2$ .

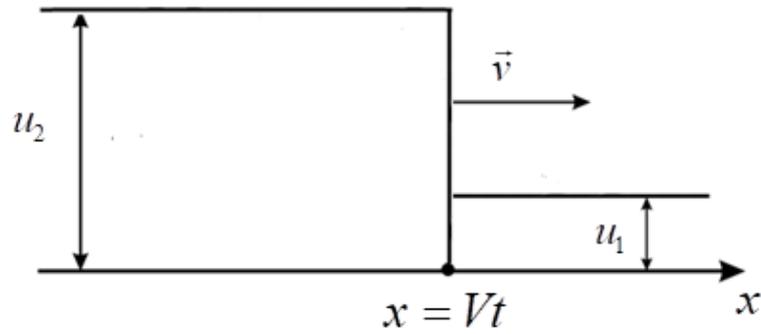


Рисунок 5 – Ударная волна сжатия

Если в механизме переноса учесть и диффузионную составляющую плотности потока

$$q_d = -c \frac{\partial u}{\partial x}, \quad c = \text{const} > 0,$$

то в законе сохранения (1.19)

$$q = au + \frac{1}{2}bu^2 - c \frac{\partial u}{\partial x},$$

пересчитая все производные, получаем нелинейное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad v = \text{const} > 0. \quad (1.31)$$

Это уравнение в математической физике называют уравнением Бюргерса.

Диффузионный член в уравнении Бюргерса возникает при учёте вязкости среды. При исследовании свойств решений уравнения Бюргерса можно изучить влияние на структуру ударной волны вязкости среды.

Прежде всего найдем решение уравнения Бюргерса (1.31) в виде бегущей волны с неизменным профилем, введя новую независимую переменную  $u = u(\xi)$ , где  $V$  - скорость распространения волны.

Потребуем выполнение следующих условий

$$\begin{aligned} u &\rightarrow u_2, \quad \frac{du}{d\xi} \rightarrow 0 \text{ при } \xi \rightarrow -\infty; \\ u &\rightarrow u_1, \quad \frac{du}{d\xi} \rightarrow 0 \text{ при } \xi \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Такая постановка задачи позволяет исследовать структуру ударной волны сжатия (1.30) с учетом вязкости среды. Наличие диффузионного слагаемого в уравнении (1.30) приводит к сглаживанию разрыв, если же  $\nu \rightarrow 0$ , то решение принимает вид (1.30).

Действительно, профиль, не зависящий от времени волны  $u(\xi)$  удовлетворяет уравнению

$$-V \frac{du}{d\xi} + u \frac{du}{d\xi} = \nu \frac{d^2u}{d\xi^2}. \quad (1.33)$$

Проинтегрируем это уравнение один раз, получаем

$$-Vu + \frac{1}{2}u^2 + C = \nu \frac{du}{d\xi}, \quad (1.34)$$

где  $C = const$ .

Воспользуемся дополнительными условиями (1.32), получаем

$$-Vu_1 + \frac{1}{2}u_1^2 + C = 0;$$

$$-Vu_2 + \frac{1}{2}u_2^2 + C = 0.$$

Отсюда находим скорость и постоянную  $C$

$$V = \frac{1}{2}(u_2 + u_1); C = \frac{1}{2}u_2u_1. \quad (1.35)$$

Отсюда следует, что вязкость среды не изменяет скорости распространения волны сжатия.

Учитывая (1.35), запишем уравнение (1.34) в виде

$$(u - u_1)(u - u_2) = 2\nu \frac{du}{d\xi}.$$

Мы получили уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{d\xi}{2\nu} = \frac{du}{(u - u_1)(u - u_2)}. \quad (1.36)$$

Используя разложение на простые дроби

$$\frac{1}{(u - u_1)(u - u_2)} = \frac{1}{u_2 - u_1} \left[ \frac{1}{u - u_1} + \frac{1}{u_2 - u} \right],$$

и интегрируя уравнение (1.36), получаем решение

$$\xi = \frac{2\nu}{u_2 - u_1} \ln \frac{u_2 - u}{u - u_1}, \quad u_1 < u < u_2. \quad (1.37)$$

Отсюда находим  $u$

$$u = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{1 + \exp\left(\frac{u_2 - u_1}{2\nu} \xi\right)}, \quad \xi = x - Vt. \quad (1.38)$$

Решение (1.38) уравнения Бюргерса представляет ударную волну с шириной переходной области  $l = \frac{2\nu}{u_2 - u_1}$  в соответствии с рисунком 6. Если  $\nu \rightarrow 0$ , то ширина переходной области также стремится к нулю и стационарный профиль волны (1.38) становится ступенчатым (1.30).

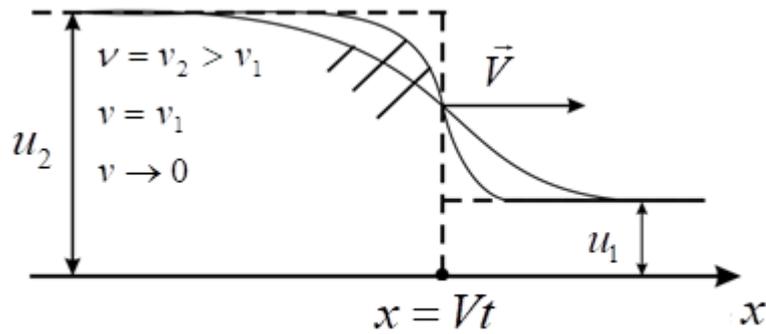


Рисунок 6 – Структура ударной волны в переходной области

Проделав простейшие преобразования, выражение (1.38) запишем в виде

$$u(x, t) = V - Ath \left[ \frac{A}{2\nu} (x - Vt) \right], \quad (1.39)$$

где  $V = \frac{u_2 + u_1}{2}$ ;  $A = \frac{u_2 - u_1}{2}$ .

Используя замену Коула-Хопфа

$$u = -\frac{2\nu}{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \equiv -2\nu \frac{\partial}{\partial x} \ln \varphi,$$

приводим уравнение Бюргерса (1.31) к линейному уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\nu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}. \quad (1.40)$$

Это можно показать при помощи простейших преобразований в уравнении (1.40), перейдя от  $\varphi$  к функции  $\psi = -2\nu \ln \varphi$ . То есть

$$\varphi = e^{-\frac{\psi}{2\nu}}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{1}{2\nu} e^{-\frac{\psi}{2\nu}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2};$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{4\nu^2} e^{-\frac{\psi}{2\nu}} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2\nu} e^{-\frac{\psi}{2\nu}} \frac{\partial \psi}{\partial t}.$$

Из уравнения теплопроводности (1.40) получим уравнение для функции  $\psi$ :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 = \nu \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}.$$

Дифференцируя это уравнение по  $x$ , получаем

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right).$$

Теперь, обозначив производную  $\frac{\partial \psi}{\partial x}$  через  $u$ , для функции

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial x} = -2\nu \frac{\partial}{\partial x} \ln \varphi$$

получим уравнение Бюргерса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Применив замену Коула-Хопфа, мы видим, что решение  $\varphi(x, t)$  линейного уравнения (1.40) порождает решение  $u(x, t)$  нелинейного уравнения Бюргерса (1.31).

Выберем начальное условие для уравнения (1.40) в виде

$$\varphi(x, 0) = \Phi(x) = \exp \left[ -\frac{1}{2\nu} \int_0^x F(\xi) d\xi \right], \quad (1.41)$$

тогда для уравнения Бюргерса начальное условие принимает вид

$$u(x, 0) = F(x), \quad -\infty < x < +\infty. \quad (1.42)$$

Известно, что решение уравнения теплопроводности с заданным начальным условием записывается в виде интеграла Пуассона

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\eta) \exp\left[-\frac{(x-\eta)^2}{4\nu t}\right] d\eta. \quad (1.43)$$

Подставляя начальное условие в решение (1.43), находим

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{1}{2\nu} \int_0^\eta F(\xi) d\xi - \frac{(x-\eta)^2}{4\nu t}\right] d\eta,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{(-1)}{\sqrt{4\pi\nu t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-\eta)}{2\nu t} \exp\left[-\frac{1}{2\nu} \int_0^\eta F(\xi) d\xi - \frac{(x-\eta)^2}{4\nu t}\right] d\eta.$$

Отсюда, используя соотношение Коула-Хопса, получаем

$$u(x, t) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-\eta}{t} e^{-B/(2\nu)} d\eta}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-B/(2\nu)} d\eta}, \quad (1.44)$$

$$\text{где } B(\eta, x, t) = \int_0^\eta F(\xi) d\xi + \frac{(x-\eta)^2}{2t}.$$

Следовательно, применяя замену Коула-Хопфа нашли решение нелинейного уравнения Бюргера в виде (1.44) при начальном условии (1.41). Таким образом, мы нашли решение в виде нестационарной волны, которая распространяется в результате конвективного переноса и диффузии.

## 2 ТОЧНЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ

### 2.1 Уравнение Кортевега-де Фриза

#### 2.1.1 Решения уравнения Кортевега-де Фриза в виде уединенной волны.

Пусть процесс распространения одномерных волн описывается линейным дифференциальным уравнением в частных производных по пространственной переменной  $x$  и времени  $t$ , имеющим вид

$$\hat{L}u = 0, \quad (2.1)$$

где  $\hat{L}$  – линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами;  $u(x, t)$  – функция, описывающая некоторую характеристику волны.

Найдем решение уравнения (2.1) в форме монохроматической волны

$$u(x, t) = \alpha \exp[-i(\omega t - kx)]. \quad (2.2)$$

Подставим (2.2) в (2.1)

$$D(\omega, k) = 0,$$

где  $\omega$  – частота,  $k$  – волновое число (дисперсионное соотношение).

Если  $\frac{d^2\omega}{dk^2} \neq 0$ , то фазовая скорость волны  $v_\phi = \omega/k$  не совпадает с групповой  $v_g = d\omega/dk$ .

Такую среду называют диспергирующей средой. При наличии дисперсии монохроматические волны разных частот распространяются с разными скоростями. Так как любую сложную по форме немонахроматическую волну с произвольным профилем возможно представить с помощью разложения в ряд либо интеграла Фурье как сумму монохроматических волн, то в диспергирующей среде, где эти монохроматические составляющие распространяются с разными скоростями, их сумма в разные моменты времени будет давать разнообразные профили немонахроматической волны. Дисперсия, как и нелинейность, приводит к искажению профиля распространяющейся волны [16, с. 313].

Простейшее дисперсионное соотношение  $\omega = v_0 k$  соответствует линейному дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad v_0 = \text{const}, \quad (2.3)$$

решения которого  $u(x, t) = f(x - v_0 t)$  для различных  $f$  описывают распространение недиспергирующих волн.

Более сложное дисперсионное соотношение  $w = v_0 k - \beta k^3$  соответствует линейному уравнению с дисперсией

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v_0 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad v_0 = \text{const}; \quad \beta = \text{const}. \quad (2.4)$$

Одновременный учет дисперсии и нелинейности приводит к уравнению

Рассмотрим нелинейное уравнение в частных производных третьего порядка:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad (2.5)$$

которое называется уравнением Кортевега-де Фриза (или КдФ).

Это уравнение было получено голландским ученым Кортевегом и его учеником де Фризом в 1895 г., когда они рассматривали в прямоугольном канале распространение длинных волн. В этом уравнении под  $u$  понимается вертикальное отклонение жидкости от положения равновесия.[]

Уравнение Кортевега-де Фриза стало эталонным уравнением при моделировании волновых.

Найдем решение уравнения Кортевега-де Фриза в виде бегущей волны со стационарным профилем. Сделаем замену независимых переменных  $\xi = x - vt$ . Пересчитаем все производные, входящие в уравнение (2.5). Подставляя эти производные в исходное уравнение, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{du}{d\xi}; \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -v \frac{du}{d\xi}; \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \frac{d^3 u}{d\xi^3}; \\ -v \frac{du}{d\xi} + u \frac{du}{d\xi} + \beta \frac{d^3 u}{d\xi^3} &= 0, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где  $v = \text{const}; \quad \beta = \text{const}$ .

Это уравнение можно проинтегрировать, понизив его порядок. В результате интегрирования по новой переменной, получим

$$-vu + \frac{1}{2}u^2 + \beta \frac{d^2u}{d\xi^2} = a, \text{ где } a = \text{const}.$$

Домножим это уравнение на  $\frac{du}{d\xi}$

$$-vu \frac{du}{d\xi} + \frac{1}{2}u^2 \frac{du}{d\xi} + \beta \frac{d^2u}{d\xi^2} \frac{du}{d\xi} = a,$$

проинтегрируем полученное уравнение ещё раз

$$-\frac{v}{2}u^2 + \frac{1}{6}u^3 + \frac{\beta}{2} \left( \frac{du}{d\xi} \right)^2 = au + b, \quad b = \text{const}. \quad (2.7)$$

Преобразуем полученное уравнение

$$\left( \frac{du}{d\xi} \right)^2 3\beta = -u^3 + 3vu^2 + 6au + 6b.$$

Введем обозначение  $F(u) = -u^3 + 3vu^2 + 6au + 6b$  и приведем к следующей форме

$$\left( \frac{du}{d\xi} \right)^2 3\beta = F(u), \quad (2.8)$$

где  $F(u)$  – кубический многочлен, его можно записать в виде  $F(u) = (u_1 - u)(u_2 - u)(u_3 - u)$ , где  $u_1, u_2, u_3$  – корни уравнения  $F(u) = 0$ . При этом

$$v = \frac{u_1 + u_2 + u_3}{3}; \quad a = -\frac{u_1u_2 + u_2u_3 + u_3u_1}{6}; \quad b = \frac{u_1u_2u_3}{6}.$$

Предположим, что корни действительны, причем  $u_3 \leq u_2 \leq u_1$ , уравнение (2.8) будет записано в виде

$$3\beta \left( \frac{du}{d\xi} \right)^2 = (u_1 - u)(u_2 - u)(u_3 - u). \quad (2.9)$$

Из вида левой части делаем вывод, что функция  $u$  может изменяться в интервале  $u_2 \leq u \leq u_1$ .

Для начала положим, что  $u_2 = u_3 = 0$ , а  $u_1 = 3v > 0$ . Тогда из (2.9) получаем уравнение  $3\beta \left( \frac{du}{d\xi} \right)^2 = u^2(u_1 - u)$ , разделяя переменные в этом уравнении, а затем интегрируя, находим

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u_1 - u}} = \frac{\xi + \xi_0}{\sqrt{3\beta}}.$$

Вычисляя интеграл, находим

$$-\frac{2}{\sqrt{u_1}} \operatorname{Arth} \sqrt{1 - \frac{u}{u_1}} = \frac{\xi + \xi_0}{\sqrt{3\beta}}. \quad (2.10)$$

Постоянную интегрирования  $\xi_0$  приравниваем к нулю. Тогда точка  $\xi = 0$  соответствует максимальному значению функции  $u$ , т. к.  $u(0) = u_1$  при  $\xi = 0$ . Прделаем элементарные преобразования в выражении (2.10), переходя к гиперболическому тангенсу, получаем

$$1 - \frac{u}{u_1} = \operatorname{th}^2 \left( -\frac{\xi}{2} \sqrt{\frac{u_1}{3\beta}} \right)$$

или

$$u(\xi) = u_1 \operatorname{ch}^{-2} \left( \xi \sqrt{\frac{u_1}{12\beta}} \right). \quad (2.11)$$

Вернёмся к старым независимым переменным  $x$  и  $t$ , запишем решение уравнения Кортевега-де Фриза в виде

$$u(x, t) = A \operatorname{ch}^{-2} \left( \frac{x - vt}{\Delta} \right), \quad (2.12)$$

где  $A = u_1$  – амплитуда волны;  $v = A/3$  – скорость волны;  $\Delta = \sqrt{12\beta/A}$  – параметр, характеризующий ширину волны, где  $u > 0,5A$ .

Решение (2.12) уравнения Кортевега-де Фриза называют солитоном, или уединенной волной. Покажем на рисунке 7 профиль уединенной волны.

Эта волна распространяется со скоростью  $v = A/3$ , где  $A$  – амплитуда солитона. Таким образом, скорость зависит от амплитуды для нелинейных волн. Чем больше амплитуда, тем меньше ширина  $\Delta$  солитона.

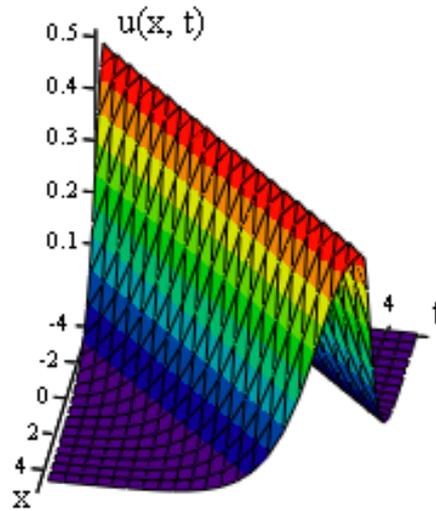


Рисунок 7 – Профиль уединенной волны

Если начальные условия ненулевые, то есть  $u \rightarrow u + u_0, v \rightarrow v + u_0, u_0 = const$ , то решение уравнения Кортевега-де Фриза можно записать в виде

$$u(x, t) = u_0 + Ach^{-2} \left\{ \sqrt{\frac{A}{12\beta}} \left[ x - \left( u_0 + \frac{A}{3} t \right) \right] \right\}. \quad (2.13)$$

Если все корни уравнения  $F(u) = 0$  ненулевые, то решение уравнения (2.9) имеет вид:

$$u(\xi) = u_1 + (u_1 - u_2) cn^2 \left( \xi \sqrt{\frac{u_1 - u_3}{12\beta}}, s \right), \quad (2.14)$$

где  $s$  равно  $s^2 = \frac{u_1 - u_2}{u_1 - u_3}$ .

Обозначим функцию  $w = cn(z, s)$ , которая называется эллиптической функцией Якоби или эллиптическим косинусом. Функция Якоби определяется с помощью интеграла

$$z = \int_0^w \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - s^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Это решение (2.14) носит название кноидальной волны. Эта волна изображена на рисунке 8, длина волны равна

$$\lambda = 4K(s) \sqrt{\frac{3\beta}{u_1 - u_3}},$$

где,  $K(s) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - s^2 \sin^2 \varphi}}$  является полным эллиптическим интегралом.

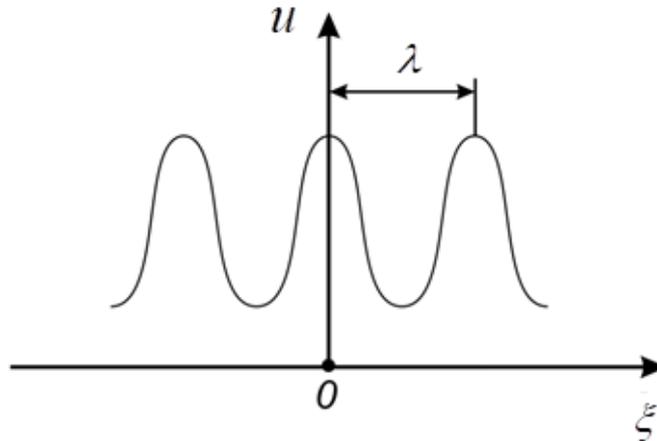


Рисунок 8 – Кноидальная волна

Если  $u_3$  и  $u_2$  стремятся к нулю, то  $s \rightarrow 1$ . Следовательно

$$K(s) \approx \frac{1}{2} \ln \frac{16}{1 - s^2}, \text{ а } \operatorname{cn}(z, s) \approx \frac{1}{chz},$$

а значит расстояние между максимумами кноидальной волны возрастает ( $\lambda \rightarrow \infty$ ) и превращается в одинокие солитоны.

Также, путем простых масштабных преобразований координаты, времени или искомой можно записать уравнение Кортевега-де Фриза в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sigma u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \quad (2.15)$$

В литературе используются различные нормировки, отвечающие значениям  $\sigma = 1$ ,  $\sigma = 6$  и  $\sigma = -6$ .

Возьмем значение  $\sigma = -6$  и решим аналог уравнения Кортевега-де Фриза. Запишем уравнение в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \quad (2.16)$$

Произведем замену переменного  $\xi = x - vt$  и преобразуем уравнение (2.16) в уравнение функции  $u = u(\xi)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{du}{d\xi}; \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -v \frac{du}{d\xi}; \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \frac{d^3 u}{d\xi^3}; \\ -v \frac{du}{d\xi} - 6u \frac{du}{d\xi} + \frac{d^3 u}{d\xi^3} &= 0. \end{aligned} \quad (2.17)$$

где  $v = const$ ;  $\beta = const$ .

Интегрируя выражение, получаем

$$-vu - 3u^2 + \frac{d^2 u}{d\xi} = a, \quad (2.18)$$

где  $a = const$ . Умножим уравнение на  $du/d\xi$

$$-vu \frac{du}{d\xi} - 3u^2 \frac{du}{d\xi} + \frac{du}{d\xi} \frac{d^2 u}{d\xi^2} = a \frac{du}{d\xi};$$

и интегрируем полученное соотношение

$$-\frac{v}{2}u^2 - u^3 + \frac{1}{2} \left( \frac{du}{d\xi} \right)^2 = au + b, \quad b = const. \quad (2.19)$$

Умножим уравнение (2.19) на 2 и приведем к виду

$$\left( \frac{du}{d\xi} \right)^2 = 2u^3 + vu^2 + 2au + 2b.$$

Полагая  $a = b = 0$

$$\frac{du}{d\xi} = \sqrt{2u^3 + vu^2},$$

следовательно,

$$\frac{d\xi}{du} = \frac{1}{\sqrt{u^2(2u+v)}} = \frac{1}{u\sqrt{(2u+v)}};$$

Отсюда  $\xi = \int \frac{du}{u\sqrt{(2u+v)}}$ . Путем преобразований мы получаем

$$\xi = -\frac{2}{\sqrt{v}} \operatorname{arctg} \left( \sqrt{1 + \frac{2}{v}u} \right). \quad (2.20)$$

Тогда

$$u(\xi) = -\frac{v}{2} \left( 1 - \tan^2 \left( \frac{\sqrt{v}}{2} \xi \right) \right) = -\frac{v}{2} + \frac{v}{2} \tan^2 \left( \frac{\sqrt{v}}{2} (x - vt) \right) \quad (2.21)$$

является решением уравнения (2.16).

2.1.2 Решения уравнения Кортевега-де Фриза в виде двух сталкивающихся солитонов.

Решим аналитически уравнение Кортевега-де Фриза

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0.$$

Для этого воспользуемся подстановкой Коула-Хопфа

$$u = 12\beta \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln F, \quad (2.22)$$

Пересчитаем все производные, входящие уравнение Кортевега-де Фриза

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 12\beta \frac{\partial^3}{\partial x^3 \partial t} \ln F; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 12\beta \frac{\partial^3}{\partial x^3} \ln F; \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 12\beta \frac{\partial^5}{\partial x^5} \ln F.$$

Подставим полученные производные в уравнение Кортевега-де Фриза

$$12\beta \frac{\partial^3}{\partial x^3 \partial t} \ln F + 12\beta \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln F \left( 12\beta \frac{\partial^3}{\partial x^3} \ln F \right) + 12\beta^2 \frac{\partial^5}{\partial x^5} \ln F = 0.$$

Выполним элементарные преобразования и представим это уравнение в виде

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \ln F \right) + 6\beta \left[ \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln F \right)^2 \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^4}{\partial x^4} \ln F \right) = 0.$$

Интегрируя полученное уравнение по  $x$ , находим

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \ln F + 6\beta \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln F \right)^2 + \frac{\partial^4}{\partial x^4} \ln F = C. \quad (2.23)$$

Положим, что постоянная интегрирования  $C = 0$ .

Учитывая, что

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \ln F = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial x} \right) = -\frac{1}{F^2} \frac{\partial F}{\partial t} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{F} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial t}; \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln F = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial x} \right) = -\frac{1}{F^2} \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{F} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\frac{1}{F^2} \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{F} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}. \quad (2.25)$$

Возводим правую и левую части выражения (2.25) в квадрат, находим

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln F \right)^2 &= \left( -\frac{1}{F^2} \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{F} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)^2 = \frac{1}{F} \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)^4 - \frac{2}{F^3} \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \\ &+ \frac{1}{F^2} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)^2. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Вычислим  $\frac{\partial^3}{\partial x^3} \ln F$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3}{\partial x^3} \ln F &= \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{1}{F^2} \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{F} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) = \\ &= (-1) \left( (-2F^{-3}) \frac{\partial F}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{F^2} 2 \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) + \left( -\frac{1}{F^2} \right) \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{1}{F} \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} = \\ &= \frac{2}{F^3} \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)^3 - \frac{2}{F^2} \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{1}{F^2} \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{1}{F} \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} = \\ &= \frac{2}{F^3} \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)^3 - \frac{3}{F^2} \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{1}{F} \frac{\partial^3 F}{\partial x^3}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Аналогично находим  $\frac{\partial^4}{\partial x^4} \ln F$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4}{\partial x^4} \ln F &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{2}{F^3} \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)^3 - \frac{3}{F^2} \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{1}{F} \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} \right) = \\ &= 2(-3)F^{-4} \frac{\partial F}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)^3 + \frac{2}{F^3} 3 \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \\ &- 3 \left( (-2)F^{-3} \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{1}{F^2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) \right) + \left( -\frac{1}{F^2} \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} + \frac{1}{F} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} \right) = \\ &= -\frac{6}{F^4} \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)^4 + \frac{12}{F^3} \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{3}{F^2} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)^2 - \frac{4}{F^2} \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} + \frac{1}{F} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Подставим (2.24), (2.26), (2.28) в (2.23), получаем

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{F^2} \frac{\partial F}{\partial t} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{F} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial t} + 6\beta \left( \frac{1}{F^4} \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)^4 - \frac{2}{F^3} \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{1}{F^2} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)^2 \right) + \\
& + \beta \left( -\frac{6}{F^4} \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)^4 + \frac{12}{F^3} \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{3}{F^2} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)^2 - \frac{4}{F^2} \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} + \frac{1}{F} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} \right) = 0.
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Преобразуем полученные выражения

$$-\frac{1}{F^2} \frac{\partial F}{\partial t} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{F} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial t} + \frac{3\beta}{F^2} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)^2 - \frac{4\beta}{F^2} \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} + \frac{\beta}{F} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} = 0. \tag{2.30}$$

А затем, умножая (2.30) на  $F^2$ , получаем выражение

$$F \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial t} - \frac{\partial F}{\partial t} \frac{\partial F}{\partial x} + 3\beta \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)^2 - 3\beta \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} - \beta \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} + F\beta \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} = 0.$$

Таким образом для функции  $F(x, t)$  получили нелинейное уравнение в частных производных четвертого порядка

$$F \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial t} + \beta \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} \right) - \frac{\partial F}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial t} + \beta \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} \right) + 3\beta \left( \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)^2 - \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} \right) = 0. \tag{2.31}$$

Это уравнение (2.31) содержит оператор

$$\frac{\partial}{\partial t} + \beta \frac{\partial^3}{\partial x^3}.$$

Нетрудно заметить, что экспоненциальная функция

$$F(x, t) = 1 + f = 1 + \exp(-\theta), \tag{2.32}$$

будет удовлетворять уравнениям

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \beta \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} = 0; \quad \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)^2 - \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} = 0,$$

этим уравнениям соответствует

$$\left( \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)^2 - \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} \end{vmatrix} = 0.$$

Введем обозначение

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, t) = y_t(x),$$

где  $t$  – параметр.

$$\begin{vmatrix} y_t & y_t' \\ y_t' & y_t'' \end{vmatrix} = 0;$$

$$y_t' = C y_t;$$

Интегрируя последнее выражение и заменяя  $F(x, t)$ , имеем

$$y_t = \frac{\partial F}{\partial x}(x, t) = \tilde{C} e^{cx},$$

$\tilde{C}$  и  $C$  не зависят от  $x$ .

Интегрируя второй раз, получаем

$$F(x, t) = \exp[c_1(t)x + c_2(t)] + c_3(t);$$

Полагая

$$c_3(t) \equiv 1, c_1(t) = -\alpha, c_2(t) = \alpha s + \alpha^3 \beta t;$$

тогда

$$F = 1 + \exp[-\alpha(x - s) + \alpha^3 \beta t] = 1 + f,$$

где  $\theta = \alpha(x - s) - \alpha^3 \beta t$ ;  $\alpha, s = const$ . Поэтому функция (2.32) является также решением уравнения (2.31). Теперь в соответствии с формулой преобразования (2.22) найдем решение уравнения КдФ, порожденное функцией  $F(x, t)$  из (2.32)

$$u = 12\beta \frac{\alpha^2 f}{(1 + f^2)} = 3\beta\alpha^2 \left( \frac{2}{e^{\frac{\theta}{2}} + e^{-\frac{\theta}{2}}} \right)^2 = 3\beta\alpha^2 ch^{-2} \frac{\theta}{2},$$

которая при  $3\beta\alpha^2 = A = const$  описывает одиночный солитон

$$u(x, t) = Ach^{-2} \left[ \frac{(x - s) - vt}{\Delta} \right], \quad (2.33)$$

где  $v = \beta\alpha^2 = \frac{A}{3}$ ;  $\Delta = \sqrt{12\beta/A}$ , сдвинутый вперед на величину  $s$  относи-

тельно «стандартного» солитона (2.12). Величина  $s$  представляет собой координату солитона при  $t=0$ . Эта величина носит название фаза солитона.

Найдем более сложное по структуре решение уравнения КдФ, описывающее взаимодействие двух солитонов. Для этого представим функцию  $F$  в виде разложения в ряд

$$F = 1 + \varepsilon F^{(1)} + \varepsilon^2 F^{(2)} + \dots \quad (2.34)$$

по параметру  $\varepsilon$ . После преобразований параметр  $\varepsilon$  можно положить равным единице

Подставляя (2.34) в выражение (2.24), полученные после замены Коула-Хопса (2.15)

$$\begin{aligned} & (1 + \varepsilon F^{(1)} + \varepsilon^2 F^{(2)}) \left( (\varepsilon F^{(1)} + \varepsilon^2 F^{(2)}) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F^{(k)}}{\partial t} + \beta \frac{\partial^3 F^{(k)}}{\partial x^3} \right) \right) - \\ & - (\varepsilon + \varepsilon^2) \frac{\partial F^{(k)}}{\partial x} (\varepsilon + \varepsilon^2) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F^{(k)}}{\partial t} + \beta \frac{\partial^3 F^{(k)}}{\partial x^3} \right) + \\ & + 3\beta \left( \left( (\varepsilon + \varepsilon^2) \frac{\partial^2 F^{(k)}}{\partial x^2} \right)^2 - (\varepsilon + \varepsilon^2) \frac{\partial F^{(k)}}{\partial x} (\varepsilon + \varepsilon^2) \frac{\partial^3 F^{(k)}}{\partial x^3} \right) = 0; \end{aligned} \quad (2.35)$$

и собирая члены при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , получаем уравнения при  $\varepsilon$ :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F^{(1)}}{\partial t} + \beta \frac{\partial^3 F^{(1)}}{\partial x^3} \right) = 0; \quad (2.36)$$

при  $\varepsilon^2$ :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F^{(2)}}{\partial t} + \beta \frac{\partial^3 F^{(2)}}{\partial x^3} \right) = -3\beta \left( \left( \frac{\partial^3 F^{(1)}}{\partial x^3} \right)^2 - \frac{\partial F^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial^3 F^{(1)}}{\partial x^3} \right); \quad (2.37)$$

при  $\varepsilon^3$ :

$$\begin{aligned} & F^{(1)} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F^{(2)}}{\partial t} + \beta \frac{\partial^3 F^{(2)}}{\partial x^3} \right) - \frac{\partial F^{(1)}}{\partial x} \left( \frac{\partial F^{(2)}}{\partial t} + \beta \frac{\partial^3 F^{(2)}}{\partial x^3} \right) + \\ & + 3\beta \left( 2 \frac{\partial^2 F^{(1)}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 F^{(2)}}{\partial x^2} - \left( \frac{\partial F^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial^3 F^{(2)}}{\partial x^3} + \frac{\partial F^{(2)}}{\partial t} \frac{\partial^3 F^{(1)}}{\partial x^3} \right) \right) = 0; \end{aligned} \quad (2.38)$$

при  $\varepsilon^4$ :

$$F^{(2)} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F^{(2)}}{\partial t} + \beta \frac{\partial^3 F^{(2)}}{\partial x^3} \right) - \frac{\partial F^{(2)}}{\partial x} \left( \frac{\partial F^{(2)}}{\partial t} + \beta \frac{\partial^3 F^{(2)}}{\partial x^3} \right) + 3\beta \left( \left( \frac{\partial^2 F^{(2)}}{\partial x^2} \right)^2 - \frac{\partial F^{(2)}}{\partial x} \frac{\partial^3 F^{(2)}}{\partial x^3} \right) = 0; \quad (2.39)$$

и т.д.

В качестве  $F^{(1)}$  выберем сумму двух экспонент, порождающих солитон

$$F^{(1)} = f_1 + f_2, f_j = \exp[-\alpha_j(x - s_j) + \alpha_j^3 \beta t], j = 1, 2,$$

то уравнение (2.36) тождественно выполняется, так как каждое из  $f_j$  является его решением.

$$\frac{\partial F^{(1)}}{\partial t} = \alpha_1^3 \beta f_1 + \alpha_2^3 \beta f_2, \frac{\partial F^{(1)}}{\partial x} = -\alpha_1 f_1 - \alpha_2 f_2, \quad (2.40)$$

$$\frac{\partial^2 F^{(1)}}{\partial x^2} = \alpha_1^2 f_1 + \alpha_2^2 f_2, \frac{\partial^3 F^{(1)}}{\partial x^3} = -\alpha_1^3 f_1 + \alpha_2^3 f_2. \quad (2.41)$$

Подставляем полученные производные (2.40) в уравнения (2.36)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F^{(1)}}{\partial t} + \beta \frac{\partial^3 F^{(1)}}{\partial x^3} \right) = \alpha_1^3 \beta f_1 + \alpha_1^3 \beta f_2 + \beta(-\alpha_1^3 f_1 - \alpha_2^3 f_2). \quad (2.42)$$

Соотношение (2.37) дает уравнение для определения функции  $F^{(2)}$ . Оно имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F^{(2)}}{\partial t} + \beta \frac{\partial^3 F^{(2)}}{\partial x^3} \right) = -3\beta \left( \left( \frac{\partial^3 F^{(1)}}{\partial x^3} \right)^2 - \frac{\partial F^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial^3 F^{(1)}}{\partial x^3} \right). \quad (2.43)$$

Подставим (2.41) в (2.43)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F^{(2)}}{\partial t} + \beta \frac{\partial^3 F^{(2)}}{\partial x^3} \right) = -3\beta \left( -(\alpha_1^2 f_1 + \alpha_2^2 f_2)^2 + (-\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)(-\alpha_1^3 f_1 - \alpha_2^3 f_2) \right), \quad (2.44)$$

свернем данное выражение и получим

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F^{(2)}}{\partial t} + \beta \frac{\partial^3 F^{(2)}}{\partial x^3} \right) = 3\beta \alpha_1 \alpha_2 (\alpha_1 - \alpha_2)^2 f_1 f_2. \quad (2.45)$$

Будем искать его решение в виде  $F^{(2)} = Bf_1f_2$ , где  $B$  – некоторая неопределенная постоянная. Дифференцируем по  $F^{(2)}$

$$\frac{\partial F^{(2)}}{\partial t} = B(\alpha_1^3 \beta f_1 f_2 + f_1 \alpha_2^3 \beta f_2), \quad (2.46)$$

сворачиваем (2.46) и получаем

$$\frac{\partial F^{(2)}}{\partial t} = B(\alpha_1^3 + \alpha_2^3) \beta f_1 f_2. \quad (2.47)$$

Найдем  $\frac{\partial^3 F^{(2)}}{\partial x^3}$

$$\frac{\partial F^{(2)}}{\partial x} = -B(\alpha_1 + \alpha_2) f_1 f_2, \quad (2.48)$$

$$\frac{\partial^2 F^{(2)}}{\partial x^2} = B(\alpha_1 + \alpha_2)^2 f_1 f_2, \quad (2.49)$$

$$\frac{\partial^3 F^{(2)}}{\partial x^3} = -B(\alpha_1 + \alpha_2)^3 f_1 f_2, \quad (2.50)$$

Подставим (2.47) и (2.50) в уравнение (2.45)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F^{(2)}}{\partial t} + \beta \frac{\partial^3 F^{(2)}}{\partial x^3} \right) = -(\alpha_1 + \alpha_2) (B(\alpha_1^3 \beta f_1 f_2 + f_2 \alpha_2^3 \beta f_2) - B\beta(\alpha_1 + \alpha_2)^3 f_1 f_2),$$

приведем полученное уравнение к виду

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F^{(2)}}{\partial t} + \beta \frac{\partial^3 F^{(2)}}{\partial x^3} \right) = 3B\beta\alpha_1\alpha_2(\alpha_1 + \alpha_2)^2 f_1 f_2.$$

Тогда с учетом (2.45) получаем

$$B = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)^2}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2}.$$

В остальных уравнениях цепочки для функций  $F^{(k)}$  при  $k > 2$  правые части обращаются в нуль, давая результат  $F^{(k)} = 0$  для всех  $k > 0$ . Поэтому функция

$$F = 1 + f_1 + f_2 + \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)^2}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2} f_1 f_2, \quad (2.51)$$

является точным решением уравнения (2.24).

Теперь, используя подстановку Коула-Хопса (2.15), находим соответствующее точное решение уравнения КдФ в виде

$$\frac{u}{12\beta} = \frac{\alpha_1^2 f_1 + \alpha_2^2 f_2 + 2(\alpha_2 - \alpha_1)f_1 f_2}{(1 + f_1 + f_2 + Bf_1 f_2)} + \frac{B(\alpha_2^2 f_1^2 f_2 + \alpha_1^2 f_2^2 f_1)}{(1 + f_1 + f_2 + Bf_1 f_2)}. \quad (2.52)$$

где

$$f_j = \exp[-\alpha_j(x - s_j) + \alpha_j^3 \beta t], \quad j = 1, 2; \quad B = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)^2}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2}.$$

Программный код, с помощью которого реализована модель взаимодействия двух сталкивающихся солитонов, описан в Приложении А.

## 2.2 Метод Хироты для решения уравнения Шрёдингера

Для большого числа физически интересных нелинейных уравнений математической физики были найдены решения в виде уединённой волны. Среди них можно отметить нелинейное уравнение Шрёдингера, которое в безразмерных координатах имеет вид

$$iu_t + u_{xx} + \beta|u|^2 u = 0. \quad (2.53)$$

Приведем уравнение (2.53) к билинейной форме. Для этого сделаем замену переменной  $u = \frac{g}{f}$ , здесь  $g$  – комплексная функция,  $f$  – действительная функция.

Найдем временные и координатные производные, входящие в уравнение (2.53)

$$\begin{aligned} u_t &= \left( \frac{g}{f} \right)_t = \frac{g_t f - g f_t}{f^2}, \\ u_x &= \left( \frac{g}{f} \right)_x = \frac{g_x f - g f_x}{f^2}, \\ u_{xx} &= \frac{((g_{xx} f + g_x f_x) - (g_x f_x + g f_{xx})) f^2 - (g_x f - g f_x) \cdot 2 f f_x}{f^4} = \\ &= \frac{f^2 g_{xx} - f g f_{xx} - 2 f f_x g_x + 2 g f_x^2}{f^3}, \end{aligned}$$

$$|u|^2 = \bar{u}u = \frac{\bar{g}}{f} \cdot \frac{g}{f} = \frac{\bar{g}g}{f^2}.$$

С учетом этих выражений, уравнение Шредингера запишется в виде

$$f(i(g_t f - g f_t) + f^2 g_{xx} - f g f_{xx} - 2 f f_x g_x + 2 g f_x^2 + \beta \bar{g} g g) = 0,$$

проделав группировку, получаем

$$f(i(g_t f - g f_t) + f_{xx} g - 2 f_x g_x + g f_{xx}) + g(\beta \bar{g} g - 2 f f_{xx} + 2 f_x^2) = 0.$$

Полагая

$$i(g_t f - g f_t) + f_{xx} g - 2 f_x g_x + g f_{xx} = 0,$$

отсюда следует, что

$$\bar{g} g = \frac{2}{\beta} (f f_{xx} - f_x^2).$$

Таким образом, полученные билейные уравнения можно записать в операторной форме

$$(i\hat{D}_t + \hat{D}_x^2)g \cdot f = \hat{P}g \cdot f = 0, \quad \bar{g}g = \frac{1}{\beta} \hat{D}_x^2 f \cdot f, \quad (2.54)$$

здесь многочлен  $P(x, y) = iy + x^2$ .

Решение уравнения (2.54) ищем в виде рядов

$$g = g^{(1)}\varepsilon + g^{(3)}\varepsilon^3 + \dots$$

$$f = 1 + f^{(2)}\varepsilon^2 + f^{(4)}\varepsilon^4 + \dots$$

Используя эти выражения для уравнения (2.54), получаем

$$\begin{aligned} \bar{g}g &= (\bar{g}^{(1)}\varepsilon + \bar{g}^{(3)}\varepsilon^3 + \dots)(g^{(1)}\varepsilon + g^{(3)}\varepsilon^3 + \dots) = \bar{g}^{(1)}g^{(1)}\varepsilon^2 + \\ &+ (\bar{g}^{(1)}g^{(3)} + \bar{g}^{(3)}g^{(1)})\varepsilon^4 + \dots \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\beta} \hat{D}_x^2 f \cdot f = \frac{1}{\beta} \hat{D}_x^2 (1 + 2f^{(2)}\varepsilon^2 + (2f^{(4)} + (f^{(2)})^2)\varepsilon^4 + \dots) =$$

$$= \varepsilon^2 \frac{2}{\beta} f_{xx}^{(2)} + \varepsilon^4 \frac{1}{\beta} (2f_{xx}^{(4)} + \hat{D}_x^2 f^{(2)} f^{(2)}) + \dots$$

$$\hat{P}g \cdot f = \hat{P}(g^{(1)}\varepsilon + (g^{(3)} + g^{(1)}f^{(2)})\varepsilon^3 + (g^{(5)} + g^{(3)}f^{(2)} + g^{(1)}f^{(4)})\varepsilon^5 + \dots) =$$

$$= \varepsilon \hat{P}^* g^{(1)} + \varepsilon^3 (\hat{P}^* g^{(3)} + \hat{P} g^{(1)} f^{(2)}) + \varepsilon^5 (\hat{P}^* g^{(5)} + \hat{P} g^{(3)} f^{(2)} + \hat{P} g^{(1)} f^{(4)}) + \dots$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon^2$ ,  $\varepsilon^3$ ,  $\varepsilon^4$ ,  $\varepsilon^5 \dots$ ,

находим

$$\hat{P}^* g^{(1)} = i g_t^{(1)} + g_{xx}^{(1)} = 0; \quad (2.55)$$

$$\bar{g}^{(1)} g^{(1)} = \frac{2}{\beta} f_{xx}^{(2)}; \quad (2.56)$$

$$\hat{P}^* g^{(3)} = -\hat{P} g^{(1)} f^{(2)}; \quad (2.57)$$

$$\bar{g}^{(1)} g^{(3)} + \bar{g}^{(3)} g^{(1)} = \frac{1}{\beta} (2 f_{xx}^{(4)} + \hat{D}_x^2 f^{(2)} f^{(2)}); \quad (2.58)$$

$$\hat{P}^* g^{(5)} + \hat{P} g^{(3)} f^{(2)} + \hat{P} g^{(1)} f^{(4)} = 0. \quad (2.59)$$

Сначала найдем односолитонное решение уравнения Шрёдингера (2.53).

Положим  $g^{(1)} = e^{kx + \omega t}$ . С учетом этого уравнения (2.55), принимает вид

$$i g_t^{(1)} + g_{xx}^{(1)} = (i\omega + k^2) e^{kx + \omega t} = 0.$$

Из этого соотношения находим

$$\omega = \frac{-k^2}{i} = ik^2, g^{(1)} = e^{kx + ik^2 t}.$$

Следовательно, левая часть равенства (2.56) принимает вид

$$\bar{g}^{(1)} g^{(1)} = e^{kx + ik^2 t} \cdot e^{kx - ik^2 t} = e^{2kx}.$$

Полагая  $f^{(2)} = B e^{2kx}$ , и используя (2.56), получаем

$$e^{2kx} = \frac{2}{\beta} B (2k)^2 e^{2kx}.$$

Отсюда

$$B = \frac{\beta}{8k^2}, \text{ и } f^{(2)} = \frac{\beta}{8k^2} e^{2kx}.$$

Левая часть уравнения (2.57) принимает вид

$$\hat{P} g^{(1)} f^{(2)} = \hat{P} e^{kx + ik^2 t} \cdot \frac{\beta}{8k^2} e^{2kx} = \frac{\beta}{8k^2} P(-k, ik^2) \cdot e^{3kx + ik^2 t} = 0.$$

Следовательно, можем допустить, что  $g^{(3)}, g^{(5)} \dots, u f^{(4)}, f^{(6)} \equiv 0$ . И функции

$$g = \varepsilon g^{(1)} = \varepsilon e^{kx + ik^2 t} \quad f = 1 + \varepsilon^2 f^{(2)} = 1 + \frac{\beta \varepsilon^2}{8k^2} e^{2kx}$$

построены для системы уравнений (2.54).

Таким образом, найдено решение уравнения Шрёдингера в виде уединённой волны

$$u = \frac{g}{f} = \frac{\varepsilon e^{kx+ik^2t}}{1 + \frac{\beta \varepsilon^2}{8k^2} e^{2kx}},$$

преобразуем это выражение к виду

$$u = \frac{g}{f} = \frac{\varepsilon e^{kx+ik^2t}}{1 + \frac{\beta \varepsilon^2}{8k^2} e^{2kx}} = \sqrt{\frac{2}{\beta}} k \cdot \frac{e^{ik^2t}}{ch(kx + \varphi)},$$

$$\text{где } \varphi = \ln \sqrt{\frac{\beta \varepsilon^2}{8k^2}}.$$

А это и есть односолитонное решение

Построим двухсолитонное решение для уравнения Шрёдингера.

Полагая

$$g^{(1)} = C_1 e^{\theta_1} + C_2 e^{\theta_2} = C_1 e^{k_1 x + ik_1^2 t} + C_2 e^{k_2 x + ik_2^2 t},$$

где  $\theta_i = k_i x + ik_i^2 t, i = 1, 2$ , следовательно

$$\begin{aligned} \bar{g}^{(1)} g^{(1)} &= (C_1 e^{k_1 x - ik_1^2 t} + C_2 e^{k_2 x - ik_2^2 t}) (C_1 e^{k_1 x + ik_1^2 t} + C_2 e^{k_2 x + ik_2^2 t}) = \\ &= C_1^2 e^{2k_1 x} + C_2^2 e^{2k_2 x} + C_1 C_2 e^{(k_1 + k_2)x} \left( e^{i(k_2^2 - k_1^2)t} + e^{i(k_1^2 - k_2^2)t} \right). \end{aligned}$$

Пусть

$$f^{(2)} = e^{2k_1 x} + e^{2k_2 x} + D e^{(k_1 + k_2)x} \left( e^{i(k_2^2 - k_1^2)t} + e^{i(k_1^2 - k_2^2)t} \right),$$

находим

$$\frac{2}{\beta} f_{xx}^{(2)} = \frac{2}{\beta} \left( (2k_1)^2 e^{2k_1 x} + (2k_2)^2 e^{2k_2 x} + D(k_1 + k_2)^2 e^{(k_1 + k_2)x} \left( e^{i(k_2^2 - k_1^2)t} + e^{i(k_1^2 - k_2^2)t} \right) \right).$$

Вычисляя коэффициенты

$$C_1 = \sqrt{\frac{8}{\beta}} k_1, \quad C_2 = \sqrt{\frac{8}{\beta}} k_2, \quad D = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2} = 1 - A,$$

$$\text{где } A = \frac{(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2}.$$

Таким образом,

$$g^{(1)} = \sqrt{\frac{8}{\beta}} \left( k_1 e^{k_1 x + i k_1^2 t} + k_2 e^{k_2 x + i k_2^2 t} \right),$$

$$f^{(2)} = e^{2k_1 x} + e^{2k_2 x} + (1-A) e^{(k_1 + k_2)x} \left( e^{i(k_2^2 - k_1^2)t} + e^{i(k_1^2 - k_2^2)t} \right).$$

Преобразуем полученные выражения, находим

$$\hat{P} g^{(1)} f^{(2)} = -\sqrt{\frac{8}{\beta}} E_1 \cdot 4k_1 k_2 \frac{(k_1 - k_2)^2}{k_1 + k_2} e^{(k_1 + 2k_2)x + i k_1^2 t} + e^{(k_2 + 2k_1)x + i k_2^2 t}.$$

Полагая

$$g^{(3)} = E_1 e^{(k_1 + 2k_2)x + i k_1^2 t} + E_2 e^{(k_2 + 2k_1)x + i k_2^2 t}.$$

Следовательно

$$\hat{P}^* g^{(3)} = E_1 (4k_1 k_2 + 4k_2^2) e^{(k_1 + 2k_2)x + i k_1^2 t} + E_2 (4k_1 k_2 + 4k_1^2) e^{(k_2 + 2k_1)x + i k_2^2 t}.$$

Из (2.57), находим коэффициенты

$$E_1 = \frac{\sqrt{\frac{8}{\beta}} \cdot 4k_1 k_2 \cdot \frac{(k_1 - k_2)^2}{k_1 + k_2}}{4k_2 (k_1 + k_2)} = \sqrt{\frac{8}{\beta}} k_1 A; E_2 = \sqrt{\frac{8}{\beta}} k_2 A.$$

Таким образом

$$g^{(3)} = \sqrt{\frac{8}{\beta}} A \left( k_1 e^{(k_1 + 2k_2)x + i k_1^2 t} + k_2 e^{(k_2 + 2k_1)x + i k_2^2 t} \right).$$

Распишем левую часть равенства (2.58)

$$\begin{aligned} \bar{g}^{(1)} g^{(3)} + \bar{g}^{(3)} g^{(1)} = \frac{8A}{\beta} \left( 2(k_1^2 + k_2^2) e^{(2k_1 + 2k_2)x} + k_1 k_2 (e^{(3k_1 + k_2)x} + \right. \\ \left. + e^{(k_1 + 3k_2)x}) \left( e^{i(k_2^2 - k_1^2)t} + e^{i(k_1^2 - k_2^2)t} \right) \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{D}_x^2 f^{(2)} f^{(2)} = 8(k_1 - k_2)^2 e^{(2k_1 + 2k_2)x} + \\ + 8A k_1 k_2 \left( e^{(3k_1 + k_2)x} + e^{(k_1 + 3k_2)x} \right) \left( e^{i(k_2^2 - k_1^2)t} + e^{i(k_1^2 - k_2^2)t} \right). \end{aligned}$$

Найденные выражения подставляем в (2.58), проделав простейшие преоб-

разования, находим

$$f^{(4)} = Fe^{(2k_1+2k_2)x}, \text{ а } f_{xx}^{(4)} = F \cdot (2k_1 + 2k_2)^2 e^{(2k_1+2k_2)x}.$$

С учетом (2.58), находим

$$F = \frac{16A(k_1^2 + k_2^2) - 8(k_1 - k_2)^2}{8(k_1 + k_2)^2} = A^2.$$

Следовательно  $f^{(4)} = A^2 e^{(2k_1+2k_2)x}$ .

Прделав простейшие преобразования, получим

$$\hat{P}(g^{(3)} f^{(2)} + g^{(1)} f^{(4)}) = 0.$$

Таким образом, можно положить, что  $g^{(5)}, g^{(7)} \dots f^{(6)}, f^{(8)} \dots$  равны нулю.

Таким образом полученное двухсолитонное решение уравнения Шрёдингера в виде частного двух функций

$$g = \sqrt{\frac{8}{\beta}} \left( k_1 e^{k_1 x + i k_1^2 t} + k_2 e^{k_2 x + i k_2^2 t} + A \left( k_1 e^{(k_1+2k_2)x + i k_1^2 t} + k_2 e^{(k_2+2k_1)x + i k_2^2 t} \right) \right)$$

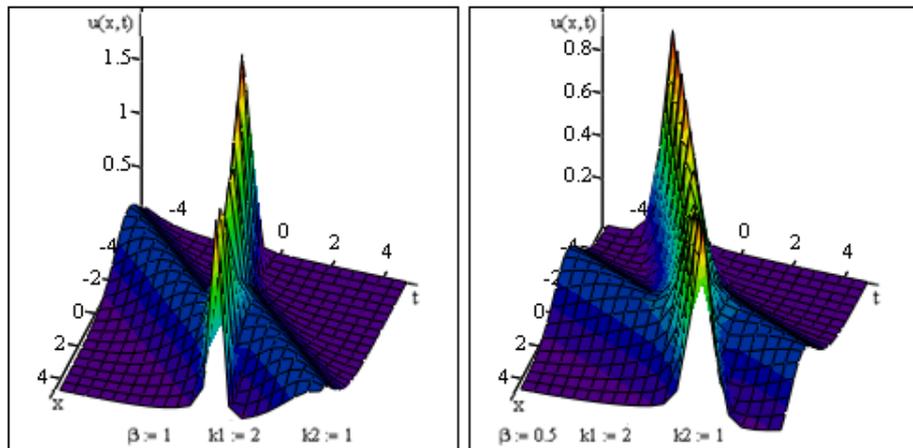
$$f = 1 + e^{2k_1 x} + e^{2k_2 x} + (1 - A) e^{(k_1+k_2)x} \left( e^{i(k_2^2 - k_1^2)t} + e^{i(k_1^2 - k_2^2)t} \right) + A^2 e^{2(k_1+k_2)x},$$

где

$$A = \frac{(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2}.$$

Таким образом, найдены одно- и двухсолитонные решения уравнения Шрёдингера операторным методом Хироты [31].

Покажем на рисунке 9 взаимодействия двух солитонов.



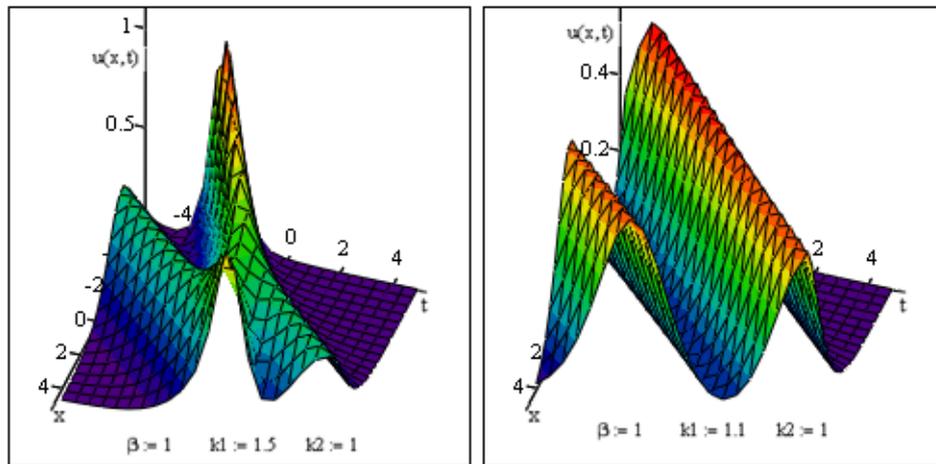


Рисунок 9 – Взаимодействия двух солитонов уравнения Шредингера

### 2.3 Преобразование Миуры

Преобразование уравнения Кортевега-де Фриза в модифицированное уравнение Кортевега-де Фриза при помощи преобразования Миуры

$$u = v^2 - iv_x \quad (2.60)$$

На примере уравнения Кортевега-де Фриза

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (2.61)$$

Пересчитаем все производные входящие в (2.61)

$$\begin{cases} u_t = 2vv_t - iv_{xt} \\ u_x = 2vv_x - iv_{xx} \\ u_{xx} = 2v_x^2 + 2vv_{xx} - iv_{xxx} \\ u_{xxx} = 4v_x v_{xx} + 2v_x v_{xx} + 2vv_{xxx} - iv_{xxxx} \end{cases}$$

Подставим (3) в (2), сокращая и группируя, приходим к выражению

$$2v(v_t + 6v^2 v_x + v_{xxx}) - i(v_{xt} + 6v^2 v_{xx} + 12vv_x^2 + v_{xxxx}) = 0$$

$$\text{Или: } 2v(v_t + 6v^2 v_x + v_{xxx}) - i \frac{d}{dx} (v_t + 6v^2 v_x + v_{xxx}) = 0$$

Комплексная функция равна нулю, когда действительная и мнимая часть равна нулю. Следовательно

$$v_t + 6v^2 v_x + v_{xxx} = 0$$

А это и есть модифицированное уравнение Кортевега-де Фриза.

## 3 ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРОГРАММНЫХ СРЕДСТВ ДЛЯ ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ

### 3.1 Пакет прикладных программ Matlab.

Matlab – пакет прикладных программ, который помогает решать задачи технических вычислений. Он имеет одноимённый язык программирования, который применяется в данном пакете. Данный пакет используют огромное количество как инженерных, так и научных работников. Он используется на операционных системах Linux, Mac OS и Windows. Он получил очень широкую известность из-за того, что считается мощным и универсальным средством обработки многомерных данных. Matlab охватывает диапазон проблем, такие как: обработку сигналов и изображений, матричный анализ, нейронные сети и др. Matlab является языком высокого уровня. Он имеет открытый код, для того чтобы предоставлять возможность опытным пользователям разбираться в запрограммированных алгоритмах. За время существования Matlab создал огромное количество функций и специальных пакетов ToolBox.

Язык программирования Matlab был изобретен Кливом Моулером в конце 1970-х годов. На тот момент Моулер являлся деканом факультета компьютерных наук в Университете Нью-Мексико. Главная цель разработки заключалась в следующем: дать учащимся использовать программные библиотеки Linpack и EISPACK без необходимости изучения Фортрана. Через некоторое время этот язык получил известность среди других университетов. Большой интерес получил у учёных, которые работали в области прикладной математики.

Matlab является высокоуровневым интерпретируемым языком программирования. Он включает структуры данных, основанные на матрицах, интегрированную среду разработки, объектно-ориентированные возможности и интерфейсы к программам, которые написаны на других языках программирования.

Бывает два типа программ, которые написаны на Matlab, - скрипты и функции. Функции имеют своё собственное рабочее пространство для хранения промежуточных результатов вычислений и переменных. Также функции имеют

входные и выходные аргументы. Скрипты же используют единое рабочее пространство. Они хранятся в виде текстовых файлов. Компиляция в машинный код происходит динамически.

Основная характерная черта языка Matlab – это широкие возможности по работе с матрицами. Создатели языка отметили данный момент в лозунге «Think vectorized» («Думай векторно»).

## 3.2 Построение модели в ППП Matlab

### 3.2.1 Модель взаимодействия двух сталкивающихся солитонов

Используя соотношение (2.52) необходимо составить программу в ППП Matlab, позволяющую наблюдать на дисплее взаимодействие двух сталкивающихся солитонов.

Программный код, с помощью которого реализована модель взаимодействия двух сталкивающихся солитонов, описан в Приложении А.

Опишем с помощью уравнения (2.52) взаимодействие уединенных волн. Пусть  $\alpha_2 > \alpha_1 > 0$ , а  $s_1 > s_2$ . Отсюда следует, что солитон с большей амплитудой находится сначала левее солитона с меньшей амплитудой, догоняя его.

При  $t \rightarrow -\infty$  область взаимодействия солитонов отсутствует в соответствии с рисунком 10 и уравнение (2.52) описывает две волны.

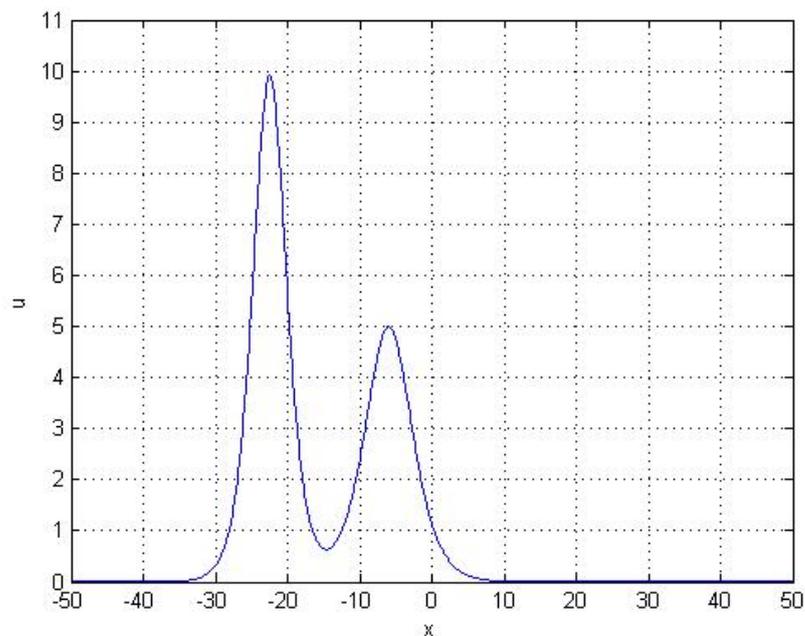


Рисунок 10 – Отсутствие взаимодействия солитонов

Центр уединенной волны с большей амплитудой находится в точке  $x = s_1 + \alpha_1^2 \beta t$ . Центр уединенной волны с меньшей амплитудой находится левее в точке

$$x = s_2 - \frac{1}{\alpha_2} \ln \left( \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} \right)^2 + \alpha_2^2 \beta t.$$

При  $t \rightarrow +\infty$  центр уединенной волны с меньшей амплитудой находится в точке

$$x = s_1 - \frac{1}{\alpha_1} \ln \left( \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} \right)^2 + \alpha_1^2 \beta t,$$

центр уединенной волны с большей амплитудой находится правее в точке  $x = s_2 + \alpha_2^2 \beta t$ .

Взаимодействие солитонов в соответствии с рисунком 11 происходит в окрестности точки

$$x = \frac{\alpha_2^2 s_1 - \alpha_1^2 s_2}{\alpha_2^2 - \alpha_1^2},$$

в некий момент времени  $t = \tau$ , где  $\tau = \frac{s_1 - s_2}{\beta(\alpha_2^2 - \alpha_1^2)}$ .

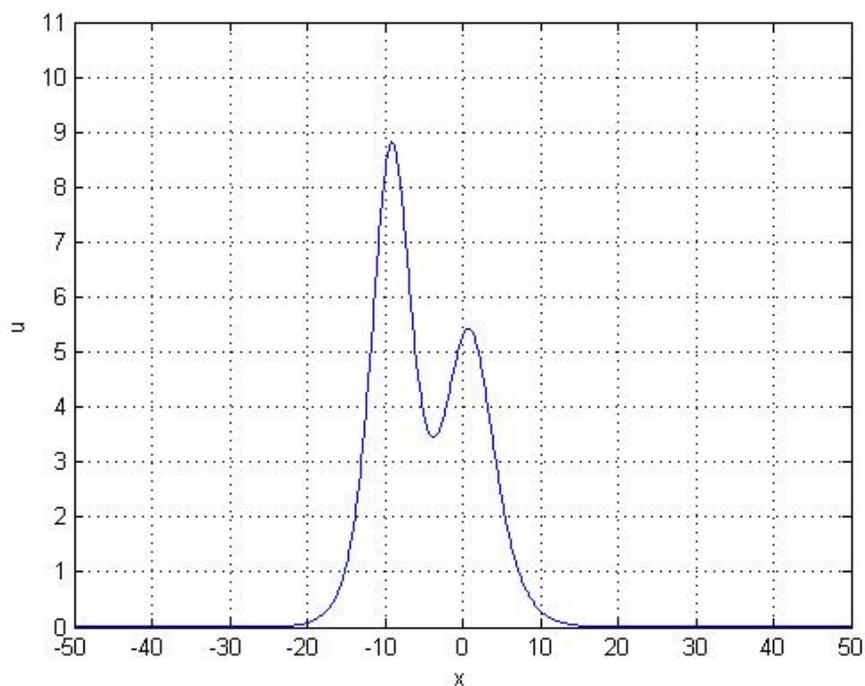


Рисунок 11 – Взаимодействие солитонов

После столкновения образуются снова два солитона с теми же амплитудами и скоростями, что и до столкновения в соответствии с рисунком 12.

Меняются лишь фазы этих солитонов. В результате столкновения «быстрый» получает дополнительный сдвиг вперед на величину

$$\frac{1}{\alpha_2} \ln \left( \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} \right)^2,$$

в то время, как «медленный» солитон сдвигается назад на величину

$$\frac{1}{\alpha_1} \ln \left( \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} \right)^2.$$

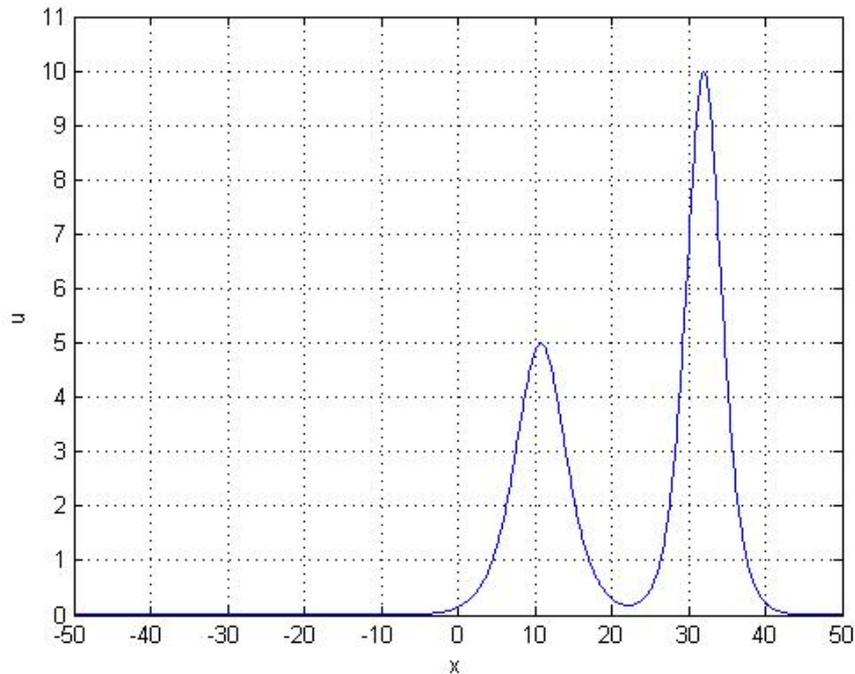


Рисунок 12 – Образование солитонов с теми же амплитудами и скоростями, но разными фазами

Таким образом, в работе проведено преобразование стандартного уравнения Кортевега-де Фриза к виду (2.52) и получено его решение в виде бегущей волны со стационарным профилем. Такое решения нелинейных уравнений устойчиво по отношению к изменению формы и используется во многих задачах гидродинамики, квантовой теории поля, физики плазмы и твердого тела.

### 3.2.2 Численное решение уравнения Кортевега-де Фриза

Требуется найти решение уравнения Кортевега-де Фриза

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad (3.1)$$

Задаём начально-граничные условия:

$$u_{xx} = u_{tt}, \quad u(0, t) = t^2, \quad u(\pi, t) = t^3,$$

$$u(x, 0) = \sin x, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0.$$

Для начала понизим порядок уравнения (3.1), сделав замену переменных

$$\begin{cases} z = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial t} = -u \cdot z - \beta \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \end{cases}$$

Рассмотрим вопрос о построении разностной схемы, аппроксимирующей исходную задачу.

В системе координат  $\{x, t\}$  покроем полуполосу  $t \geq 0, 0 \leq x \leq l$  прямоугольной сеткой (в соответствии с рисунком 13).

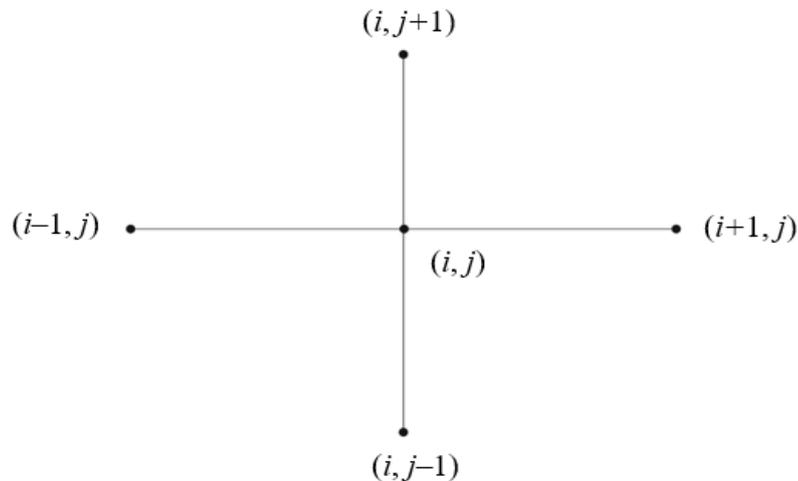


Рисунок 13 – Разностная схема «крест»

$x = ih, t = jk, i = \overline{0, n}$ , где  $h, k$  – шаги вдоль соответствующих осей.

Воспользовавшись для аппроксимации производных приближениями, получим сеточное уравнение, которое аппроксимирует соответствующее дифференциальное со вторыми порядками относительно шагов  $h$  и  $\tau$

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} = -u_i^j z - \beta \frac{z_{i+1}^j - 2z_i^j + z_{i-1}^j}{h^2}.$$

При  $k = \frac{h}{a}$  уравнение упрощается:  $U_{i,j+1} = U_{i+1,j} + U_{i-1,j} - U_{i,j-1}$

Выражаем узлы  $(j+1)$  слоя, используя узлы предыдущих слоев

$$z_i^{j+1} = \frac{u_i^{j+1} - u_{i-1}^{j+1}}{h}.$$

В результате на рисунке 14 мы наблюдаем зависимость функции от  $x$  в различные моменты времени ( $t=1$ ;  $t=5$ ;  $t=10$ ).

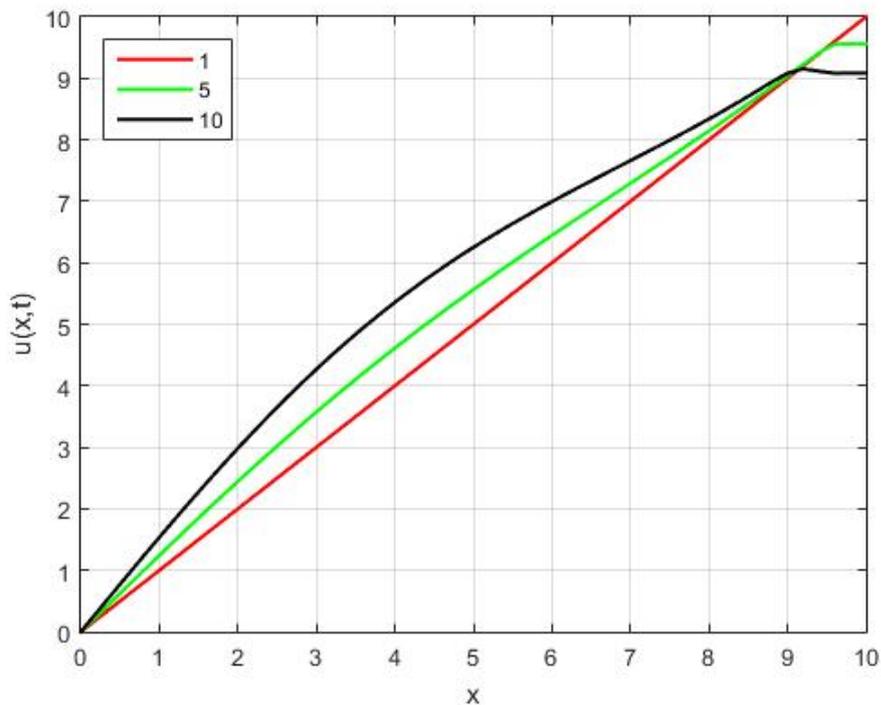


Рисунок 14 – График решения краевой задачи (3.1)

Программный код, описывающий численную реализацию уравнения Кортевега-де Фриза, описан в Приложении Б.

#### 4 ПРИМЕНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ НАУЧНОЙ РАБОТЫ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ СТУДЕНТОВ

При проведении занятий для бакалавриата и магистрантов направлений подготовки: 01.02.03 – «Прикладная математика и информатика», 03.03.02 – «Физика», 24.03.01 – Ракетные комплексы и космонавтика, 01.04.02 – «Прикладная математика и информатика» по дисциплинам, связанными с дифференциальными уравнениями математической физики, можно использовать результаты магистерской диссертации.

В дисциплинах, посвященных изучению математических моделей естественно-научных явлений, которые приводят к задачам для дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка и выше, такие как уравнения Шрёдингера и модифицированное уравнение Кортевега-де Фриза, можно решать аналитическими и численными методами.

Целью преподавания дисциплины является знакомство с методами построения математических моделей различных процессов и явлений естествознания, изучение основных методов исследования возникающих при этом математических задач и их решение, выяснение физического смысла полученного решения. Все это создает математическую основу для дальнейшего изучения термодинамики и теплопередачи, гидрогазоаэродинамики, математические модели функционирования ракетно-космических комплексов и специальных дисциплин.

Основными задачами изучения дифференциальных уравнений математической физики являются овладение умениями и навыками построения математических моделей физических процессов и явлений, аналитического и численного решения и исследования получающихся при этом математических задач, выяснение физического смысла полученного решения.

При построении аналитических решений нелинейных моделей математической физики часто приходится проделывать преобразования независимых пе-

ременных и искомых функций.

Покажем на простейших примерах преобразование независимых переменных для уравнения Кортевега-де Фриза и решим его.

В литературе используются различные нормировки, отвечающие значениям  $\sigma = 1$ ,  $\sigma = 6$  и  $\sigma = -6$ .

Возьмем значение  $\sigma = -6$  и решим аналог уравнения Кортевега-де Фриза. Запишем уравнение в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \quad (4.1)$$

Произведем замену переменного  $\xi = x - vt$  и преобразуем уравнение (4.1) в уравнение функции  $u = u(\xi)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{du}{d\xi}; \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -v \frac{du}{d\xi}; \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \frac{d^3 u}{d\xi^3}; \\ -v \frac{du}{d\xi} - 6u \frac{du}{d\xi} + \frac{d^3 u}{d\xi^3} &= 0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

где  $v = const$ ;  $\beta = const$ .

Интегрируя выражение, получаем

$$-vu - 3u^2 + \frac{d^2 u}{d\xi} = a, \quad (4.3)$$

где  $a = const$ . Умножим уравнение на  $du / d\xi$

$$-vu \frac{du}{d\xi} - 3u^2 \frac{du}{d\xi} + \frac{du}{d\xi} \frac{d^2 u}{d\xi^2} = a \frac{du}{d\xi};$$

и интегрируем полученное соотношение

$$-\frac{v}{2}u^2 - u^3 + \frac{1}{2} \left( \frac{du}{d\xi} \right)^2 = au + b, \quad b = const. \quad (4.4)$$

Умножим уравнение (4.4) на 2 и приведем к виду

$$\left( \frac{du}{d\xi} \right)^2 = 2u^3 + vu^2 + 2au + 2b.$$

Полагая  $a = b = 0$

$$\frac{du}{d\xi} = \sqrt{2u^3 + vu^2},$$

следовательно,

$$\frac{d\xi}{du} = \frac{1}{\sqrt{u^2(2u+v)}} = \frac{1}{u\sqrt{(2u+v)}};$$

Отсюда  $\xi = \int \frac{du}{u\sqrt{(2u+v)}}$ . Путем преобразований мы получаем

$$\xi = -\frac{2}{\sqrt{v}} \operatorname{arctg} \left( \sqrt{1 + \frac{2}{v}u} \right). \quad (4.5)$$

Тогда

$$u(\xi) = -\frac{v}{2} \left( 1 - \tan^2 \left( \frac{\sqrt{v}}{2} \xi \right) \right) = -\frac{v}{2} + \frac{v}{2} \tan^2 \left( \frac{\sqrt{v}}{2} (x - vt) \right) \quad (4.6)$$

является решением уравнения (4.1).

Покажем на примере преобразование искомой функции.

Преобразование уравнения Кортевега-де Фриза в модифицированное уравнение Кортевега-де Фриза при помощи преобразования Миуры

$$u = v^2 - iv_x \quad (4.7)$$

На примере уравнения Кортевега-де Фриза

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (4.8)$$

Пересчитаем все производные входящие в (4.8)

$$\begin{cases} u_t = 2vv_t - iv_{xt} \\ u_x = 2vv_x - iv_{xx} \\ u_{xx} = 2v_x^2 + 2vv_{xx} - iv_{xxx} \\ u_{xxx} = 4v_x v_{xx} + 2v_x v_{xx} + 2vv_{xxx} - iv_{xxxx} \end{cases}$$

Подставим производные в (4.8), сокращая и группируя, приходим к выражению:

$$2v(v_t + 6v^2 v_x + v_{xxx}) - i(v_{xt} + 6v^2 v_{xx} + 12vv_x^2 + v_{xxxx}) = 0$$

$$\text{или: } 2v(v_t + 6v^2 v_x + v_{xxx}) - i \frac{d}{dx} (v_t + 6v^2 v_x + v_{xxx}) = 0$$

Комплексная функция равна нулю, когда действительная и мнимая часть равна нулю. Следовательно

$$v_t + 6v^2 v_x + v_{xxx} = 0$$

А это и есть модифицированное уравнение Кортевега-де Фриза.

Таким образом, на двух примерах показали, что при помощи введения новых независимых переменных или преобразования искомой функции сводить к эталонным уравнениям, решения которых уже найдены.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной магистерской диссертации было уделено внимание нахождению решений нелинейных волновых уравнений, таких как модифицированное уравнение Кортевега-де Фриза, уравнение Шрёдингера аналитическими и численными методами.

Исследованы математические модели с нелинейным младшим членом, решено нелинейное уравнение Бюргера в виде бегущей волны, построено аналитическое решение уравнения Кортевега-де Фриза солитонного типа, решено уравнение Шрёдингера операторным методом Хироты. Также было построено численное решение для уравнения Кортевега-де Фриза.

Новизна магистерской диссертации заключается в следующем:

- решение аналога уравнения Кортевега-де Фриза;
- решения нелинейного уравнения Шрёдингера операторным методом Хироты;
- разработана модель взаимодействия двух сталкивающихся солитонов;
- построено численное решение для уравнения Кортевега-де Фриза.

Практическая значимость магистерской диссертации является то, что ее можно использовать при проведении занятий в высших учебных заведениях по дисциплинам: «Уравнения в частных производных», «Линейные и нелинейные модели математической физики (специальные главы)», «Линейные и нелинейные уравнения физики». Результаты магистерской диссертации могут продолжены и использованы для написания других выпускных квалификационных работ.

Результаты проделанной работы были апробированы на 3 конференциях. Опубликовано одна научная статья и два тезисы-докладов.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

- 1 Абловиц, М. Солитоны и метод обратной задачи рассеяния / М. Абловиц, Х. Сигур. – М.: Мир, 1987. – 480 с.
- 2 Агошков, В.И. Методы решения задач математической физики: учебное пособие / В.И. Агошков, П.Б. Дубовский, В.П. Шутяев; под ред. Г.И. Марчука. – М.: Физматлит, 2002. – 320 с.
- 3 Березин, Ю.А. Моделирование нелинейных волновых процессов / Ю.А. Березин; ред. Н. Н. Яненко. - Новосибирск: Наука, 1982. – 160 с.
- 4 Борисов, А.А. Самоподдерживающиеся уединенные волны в неравновесных средах. Физика горения и взрыва / А.А. Борисов, О.В. Шарыпов, 1993. – 257 с.
- 5 Буллаф, Р. Солитоны / Р. Буллаф, Ф. Кодри. – М.: Мир, 1983. – 385 с.
- 6 Вайнберг, Б. Р. Асимптотические методы в уравнениях математической физики: монография / Б. Р. Вайнберг. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1982. – 295 с.
- 7 Гордеев, Ю.Н. Уединенные волны в диссипативно-дисперсных системах с неустойчивостью / Ю.Н. Гордеев, Н.А. Кудряшов // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1989. – № 2. – С. 80-82.
- 8 Громак, В. И. Аналитические свойства решений уравнений Пенлеве / В.И. Громак, Н.А. Лукашевич. – Минск: Университетское, 1990. – 315 с.
- 9 Додд, Р. Солитоны и нелинейные волновые уравнения / Р. Додд, Д. Эйлбек, Д. Гиббон, Х. Моррис. – М.: Мир, 1988. – 694 с.
- 10 Загрузин А. А. Методы решения нелинейных уравнений волновых процессов /Амурский Государственный Университет, Благовещенск, 2017. – 47 с.
- 11 Заславский, Г.М. Введение в нелинейную физику: От маятника до турбулентности и хаоса / Г.М. Заславский, Р.З. Сагдеев. – М.: Наука, 1988. – 368 с.
- 12 Землянухин А. И. Нелинейные волны в цилиндрических оболочках: солитоны, симметрии, эволюция / А.И. Землянухин, Л.И. Могилевич. – Саратов, 1999. – 132 с.

- 13 Камке, Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. – М.: Наука, 1971. – 576 с.
- 14 Карпман, В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах / В.И. Карпман. – М.: Наука, 1973. – 175 с.
- 15 Кудряшов, Н.А. Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений / Н.А. Кудряшов. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. – 360 с.
- 16 Кудряшов, Н.А. Методы нелинейной математической физик: учебное пособие / Н. А. Кудряшов. – Долгопрудный: Интеллект, 2010. – 368 с.
- 17 Мартинсон, Л.К. Дифференциальные уравнения математической физики: учебник для вузов / Л.К. Мартинсон, Ю.И. Малов. – М.: Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2011. – 368 с.
- 18 Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики: учебное пособие: доп. УМО / А.Д. Полянин [и др.]. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 255 с.
- 19 Новокшенов, В. Ю. Введение в теорию солитонов: учебное пособие / В.Ю. Новокшенов. – М. ; Ижевск : Ин-т компьютер. исслед., 2002. – 96 с.
- 20 Ньюэлл, А. Солитоны в математике и физике / А. Ньюэлл. – М.: Мир, 1989. – 326 с.
- 21 Павлов, М.В. Уравнение Буссинеска и преобразования типа Миуры / М.В. Павлов // *Фундаментальная и прикладная математика*. 2004. Т. 10. Вып. 1. С. 175-182 [Электронный ресурс] // *Фундаментальная и прикладная математика*: офиц. сайт. – Режим доступа: <http://mech.math.msu.su/~fpm/rus>. – 22.04.2018.
- 22 Полянин, А. Д. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: Точные решения / А.Д. Полянин, В.Ф. Зайцев. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 432 с.
- 23 Полянин, А.Д. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики: учебное пособие: доп. УМО / А.Д. Полянин, А.Д. Зайцев, А.И. Журов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 255 с.

24 Рыскин, Н.М. Нелинейные волны. Серия: Синергетика От прошлого к будущему / Н.М. Рыскин, Д.И. Трубецков. – М.: URSS 2017. – 312 с.

25 Свешников, А.Г. Лекции по математической физике: учебное пособие: доп. Мин. обр. РФ / А. Г. Свешников, А.Н. Боголюбов, В.В. Кравцов. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Изд-во Моск. гос. ун-та : Наука, 2004. – 415 с.

26 Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики: учебник: рек. Мин. обр. РФ / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М.: Наука, 2004. – 798 с.

27 Труфанова, Т.В. Методы решения уравнений математической физики: учебное пособие / Т.В. Труфанова, А.Г. Масловская, Е. М. Веселова. – Благовещенск: Изд-во Амур. гос. ун-та, 2015. – 196 с.

28 Филлипов, А.Т. Многоликий солитон / А.Т. Филлипов. – М.: Наука, 1990. – 288 с.

29 Хирота Р. Прямые методы в теории солитонов / Р. Хирота // Солитоны: сборник / под ред. С. П. Новиков. – М.: Мир, 1983. – 408 с.

30 Цзиньей, Му. Аналитические методы решения нелинейных уравнений волновых процессов/ Му Цзиньей // Молодёжь XXI века: шаг в будущее материалы XVIII региональной научно-практической конференции. – 2017. – С. 1040-1041.

31 Цзиньей, Му. Операторный метод Хирота решение уравнения Шредингера/ Му Цзиньей, А.А. Загрузин // Молодёжь XXI века: шаг в будущее материалы XVIII региональной научно-практической конференции. – Т. 3. – 2018. – С. 49-50.

32 Цзиньей, Му. Аналитический метод решения нелинейного волнового уравнения / Му Цзиньей, Т.В. Труфанова // Вестник Амурского государственного университета. Серия: Естественные и экономические науки. – 2017. – № 79. – С. 12-16.

33 Цзиньей, Му. Аналитический метод решения нелинейного волнового уравнения Шредингера / Му Цзиньей, Т.В. Труфанова // Вестник Амурского государственного университета. Серия: Естественные и экономические науки. – 2018. – № 81. – С. 3-7.

34 Цзинюй, Му. Преобразование уравнения Буссинеска в уравнение Кортевега-де Фриза / Му Цзинюй, Т.В. Труфанова // Современные проблемы науки материалы Российской национальной научной конференции с международным участием. – 2017. – С. 24-27.

35 Daripa P. A Class of Model Equations for Bi-directional Propagation of Capillary-Gravity Waves Department of Mathematics / P. Daripa, Dash K. Ranjan. – Texas : A&M University, College Station, TX-77843 [Электронный ресурс]. Режим доступа:<https://pdfs.semanticscholar.org/0606/182d2a00bdec791c04e0ad04cdff5ea0091f.pdf>.

36 Korteweg, D.J. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves / D.J. Korteweg, G. de Vries // Phil. Mag. – 1895. – № (5) 39. – P. 422-443.

## ПРИЛОЖЕНИЕ А

### Программная реализация взаимодействия двух сталкивающихся солитонов

```
function soliton
clc; clear all; clf;
A=[5 10];
beta=8;
alpha=sqrt(A./(3*beta));
s =[5 5];
x=-50:0.1:50;
for t=-10:0.1:10
    u=sol(alpha(1),alpha(2), beta, x, s, t) ;
    plot(x,u); hold on;
    xlabel('x'); ylabel('u');
    ylim([0 max(A)+1]); xlim([-50 50])
    hold off; grid on;
    drawnow
end

function u=sol(a1, a2, b, x, s, t)
B=((a2-a1)/(a2+a1))^2;
f1=exp(-a1*(x-s(1))+a1^3*b*t);
f2=exp(-a2*(x-s(2))+a2^3*b*t);

u1ch=a1^2*f1+a2^2*f2+2*(a2-a1)^2*f1.*f2;
u2ch=B*(a2^2*f1.^2.*f2+a1^2*f1.*f2.^2);
uzn=(1+f1+f2+B*f1.*f2).^2;
u=12*b*(u1ch+u2ch)./uzn;
```

ПРИЛОЖЕНИЕ Б  
Численная реализация уравнения Кортевега-де Фриза

```
clear all
close all
L=10;
N=100;
M=10;
B=-6;
h=L./N;
T=0.0005;
u=zeros(N,M);
z=zeros(N,M);
for i=1:N
    x(i)=(i-1)*h;
    u(i,1)=10*exp(-(x(i)-10).^2);
end
for i=1:N
    z(i,1)=0;
end
for j=2:M
    t(j)=(j-1)*T;
    u(1,j)=exp(-t(j)); u(N,j)=pi;
    z(1,j)=sin(x(j))*cos(x(j)); z(N,j)=1;
end
for j=1:(M-1)
    for i=2:(N-1)
        u(i,j+1)=u(i,j)-T*u(i,j)*z(i,j)-B*(z(i+1,j)-2*z(i,j)+z(i-1,j))*T;
        z(i,j+1)=u(i+1,j+1)-u(i,j+1);
    end
end
```

## Продолжение ПРИЛОЖЕНИЯ Б

```
end
for i=1:N
    x(i)=(i-1)*h;
end
figure(1)
plot(x,u(:,1),x,u(:,M/2),x,u(:,M), 'LineWidth',1.5);
legend('1','5','10','Location','northwest')
xlabel('x')
ylabel('u(x,t)')
grid on
```