

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
(ФГБОУ ВО «АмГУ»)

Факультет математики и информатики
Кафедра математического анализа и моделирования
Направление подготовки 01.04.02 – «Прикладная математика и информатика»
Направленность (профиль) образовательной программы – «Математическое
и программное обеспечение вычислительных систем»

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ
И.о. зав. кафедрой
_____ Н.Н. Максимова
« ____ » _____ 2019 г.

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

на тему: Математическое моделирование финансовых систем на основе
дробно-дифференциального подхода

Исполнитель
студент группы 752 ом

(подпись, дата)

К.В. Биссенова

Руководитель
д-р физ.-мат. наук, профессор

(подпись, дата)

А.Г. Масловская

Руководитель научного
содержания программы
магистратуры

(подпись, дата)

А.Г. Масловская

Нормоконтроль
старший преподаватель

(подпись, дата)

Л.И. Мороз

Рецензент
доцент, канд. экон. наук

(подпись, дата)

О.А. Цепелев

Благовещенск 2019

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
(ФГБОУ ВО «АмГУ»)

Факультет математики и информатики
Кафедра математического анализа и моделирования

УТВЕРЖДАЮ
И.о. зав. кафедрой
_____ Н.Н. Максимова
« ____ » _____ 2019 г.

З А Д А Н И Е

К магистерской диссертации студента Биссеновой Кристины Валерьевны

1. Тема магистерской диссертации: «Математическое моделирование финансовых систем на основе дробно-дифференциального подхода» (утверждена приказом от 04.02.2019 № 214-уч).

2. Срок сдачи студентом законченной работы: 18.06.2019 г.

3. Исходные данные к магистерской диссертации: отчет по преддипломной практике, отчеты по научно-исследовательской работе, ППП Matlab.

4. Содержание магистерской диссертации (перечень подлежащих разработке вопросов): теоретические основы построения и реализации детерминированных моделей в экономике; концепции дробно-дифференциального исчисления: основные понятия, аппроксимация производных и численное решение дифференциальных уравнений дробного порядка; фрактальная модель динамики финансовых систем.

5. Перечень материалов приложения: листинг программы численного решения задачи Коши для системы дробно-дифференциальных уравнений

6. Консультанты по магистерской диссертации: рецензент – Цепелев О.А., доцент, канд. экон. наук; нормоконтроль – Мороз Л.И., старший преподаватель.

7. Дата выдачи задания: 19.02.2019 г.

Руководитель магистерской диссертации: Масловская Анна Геннадьевна, д-р физ.-мат. наук, профессор

Задание принял к исполнению (19.02.2019): _____ Биссенова К.В.

РЕФЕРАТ

Магистерская диссертация содержит 85 с., 20 рисунков, 3 таблицы, 46 источников.

ФИНАНСОВАЯ СИСТЕМА, ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ, СИСТЕМА ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА, УСТОЙЧИВОСТЬ, ФОРМУЛА ГРЮНВАЛЬДА-ЛЕТНИКОВА, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

В настоящее время в числе известных моделей динамических систем можно выделить класс макроэкономических математических моделей, описывающих эволюцию финансовой системы в терминах экономических показателей. Для учета свойств памяти в таких системах используют производные дробного порядка. Магистерская диссертация направлена на развитие подходов к применению концепций фрактального формализма для моделирования динамических характеристик финансовых систем (на основе концепций дробно-дифференциального исчисления). Объектом исследования является математические модели динамики макроэкономических систем, предмет – дробно-дифференциальная модель финансовой системы.

Цель работы заключалась в развитии математического и алгоритмического аппарата для моделирования и программной реализации фрактальной модели динамики финансовых систем, а также в проведении вычислительного эксперимента по оценке характеристик финансовой системы.

Решены важные научные задачи: реализация моделей на основе вычислительных схем повышенной точности, разработка программного обеспечения для анализа характеристик финансовых систем, постановка и проведение вычислительного эксперимента с учетом реальных значений показателей финансовой системы на примере экономики отдельного государства.

Результаты имеют теоретическое и практическое значение. Сконструированная вычислительная схема и разработанная прикладная программа могут быть использованы для решения прикладных задач из различных предметных областей в дробно-дифференциальной постановке (начальные задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений дробного порядка). На основе разработанных математических и алгоритмических средств можно проводить макроэкономическое моделирование финансовых систем отдельных государств и прогнозирование показателей: ключевая ставка, валовое накопление основного капитала и индекс цен в устойчивом режиме.

Результаты научно-исследовательской работы докладывались и обсуждались на пяти научных конференциях вузовского, регионального и всероссийского уровня. За время работы над темой научного исследования были опубликованы 7 научных работ.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	8
1 Теоретические основы построения и реализации детерминированных моделей в экономике	13
1.1 Математические модели динамических систем, формализуемых с помощью дифференциальных и разностных уравнений	13
1.1.1 Обыкновенные дифференциальные и разностные уравнения: введение	13
1.1.2 Качественный анализ дифференциальных уравнений	15
1.1.3 Хаотические режимы и бифуркация динамических систем	17
1.2 Приложение математического аппарата моделирования и исследования динамических систем в экономике	19
1.2.1 Модели экономических процессов, основанные на уравнении популяционной динамики	19
1.2.2 Примеры классических математических моделей макрэкономии	25
1.2.3 Экономико-математические модели финансовых систем: дифференциальный подход	29
1.3 Экономические показатели состояния финансовой системы – параметры математической модели	32
2 Концепции дробно-дифференциального исчисления: основные понятия, аппроксимация производных и численное решение дифференциальных уравнений дробного порядка	34
2.1 Определения дробной производной и этапы становления теории дробного дифференцирования и интегрирования	34
2.2 Сравнение подходов в фундаментальном анализе и теории дробного исчисления	37

2.3 Интегро-дифференциальные уравнения дробного порядка	42
2.3.1 Основные типы уравнений и подходы к решению задач	42
2.3.2 Дробно-дифференциальные уравнения и их системы: начальные задачи	44
2.4 Приложение дробного исчисления к решению прикладных задач	47
2.4.1 Приложение дробного дифференцирования в естествознании. Примеры математических моделей	47
2.4.2 Приложение дробного дифференцирования в экономике и финансах	49
2.5 Аппроксимация формул дифференцирования и интегрирования нецелых порядков и численное решение дробно-дифференциальных уравнений	50
3 Фрактальная модель динамики финансовых систем	56
3.1 Математическая постановка дробно-дифференциальной динамической модели финансовой системы	56
3.1.1 Фрактальная модель финансовой системы Ма и Чена	56
3.1.2 Авторская модификация дробно-дифференциальной модели динамики финансовых систем	57
3.2 Исследование устойчивости динамической системы	59
3.3 Конструирование вычислительной схемы для реализации модели финансовых систем	61
3.3.1 Явная конечно-разностная схема	61
3.3.2 Модифицированная схема типа «предиктор-корректор»	63
3.4 Программная реализация и верификация работы прикладной программы	64
3.5 Вычислительный эксперимент	69
3.5.1 Вычислительный эксперимент в концепции реализации модели финансовой системы Ма и Чена	69

3.5.2 Вычислительный эксперимент в концепции реализации модифицированной модели финансовой системы	75
Заключение	78
Библиографический список	79
Приложение Листинг программы численного решения задачи Коши для системы дробно-дифференциальных уравнений	84

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время теория дробно-дифференциального исчисления находится в процессе бурного развития и в теоретическом плане, и в части ее практических приложений. Можно сказать, что этот раздел математического анализа превратился в инструмент математического и компьютерного моделирования сложнейших динамических процессов в обычных и фрактальных системах, позволяющий решать различные задачи анализа, синтеза, идентификации, диагностики, создания новых систем. Известен широкий ряд математических моделей, формализуемых с помощью дифференциальных уравнений дробного порядка и имеющих приложения в самых различных областях.

Одним из важнейших направлений использования аппарата дробного дифференцирования является модельное описание процессов и явлений, обладающих фрактальными характеристиками. Для указания на то, что рассматриваемый процесс обладает особым свойством – память, используют дробную производную по времени. Чтобы показать, что процесс протекает в самоподобной неоднородной среде, применяют дробную производную по координате.

В последние годы особое развитие в экономической теории и приложениях получили экономико-математические модели динамических систем, теоретическое описание которых строится на использовании математической теории дробно-дифференциального и дробно-интегрального исчисления. В литературных источниках представлены модели, в математическом представлении заданные в виде обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем, интегро-дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений с запаздыванием. Среди опубликованных в открытой печати математических моделей можно отметить класс моделей макроэкономики, позволяющих формализовать развитие некоторой финансовой системы, используя три базовых экономических индикаторов: индекс потребительских цен, валовое накопление основного капитала, ключевая ставка. Модельное представление эффекта памяти основано в подобных моделях на применении дробно-дифференциального подхода. Можно

заметить, что теория дробно-дифференциальных моделей экономики сравнительно молода и переживает этап своего становления. Дробно-дифференциальные модели финансовых систем впервые были описаны в начале нашего столетия и в настоящее время активно развиваются.

Аналитические методы решения разработаны для достаточно узкого класса прикладных задач. Поэтому привлекательной альтернативой поиску аналитических подходов к реализации этих математических моделей является конструирование вычислительных схем решения дифференциальных уравнений с дробными производными.

В работе Ма впервые были изучены математические модели финансовых систем. Chen рассмотрел фрактальную динамику финансовых систем с использованием дробно-дифференциального подхода. Авторами Juma и Hammodat была исследована вариационная модель с четырьмя переменными. В 2011 году было предложено использовать элементы теории управления для моделирования нелинейной динамики финансовой системы. Оценка параметров модели финансовой системы с запаздыванием проведена в работе автора Novotna.

Несмотря на высокую степень разработанности фрактальных моделей финансовых систем на основе дробно-дифференциального подхода, остается ряд вопросов, открытых для обсуждения: реализация моделей на основе вычислительных схем повышенной точности, разработка программного обеспечения для анализа поведения характеристик финансовых систем, постановка и проведение вычислительного эксперимента с учетом реальных значений показателей финансовых систем, а также оценка границ применимости данной модели на примере экономик отдельных государств.

Объектом исследования является математические модели динамики макроэкономических систем, **предмет** – дробно-дифференциальная модель финансовой системы.

Цель работы заключалась в разработке вычислительных и программных средств для реализации дробно-дифференциальной модели динамики финансо-

вых систем, а также в проведении вычислительных экспериментов по оценке динамических параметров финансовой системы.

Для достижения указанной цели были сформулированы следующие **задачи**:

1. Обзор динамических моделей финансовых систем и анализ устойчивости исследуемой модели.

2. Разработка модифицированной математической модели финансовой системы на основе дробно-дифференциального подхода.

3. Конструирование вычислительной схемы решения задачи на основе разностных методов, направленных на эффективную реализацию фрактальной модели финансовой системы.

4. Разработка прикладной программы, предназначенной для реализации моделей в постановке начальных задач для системы дробно-дифференциальных уравнений.

5. Верификация результатов моделирования и проведение вычислительных экспериментов по моделированию динамики финансовых систем в условиях экономик отдельных государств. Оценка границ применимости модели.

Методы и средства решения задач. В магистерской диссертация применена общая методология математического и компьютерного моделирования. Для построения вычислительной схемы решения задачи Коши для системы дифференциальных уравнений использована формула аппроксимации производной дробного порядка Грюнвальда – Летникова. Для верификации результатов использованы аналитические решения дробно-дифференциальных задач. Вычислительные алгоритмы реализованы в ППП Matlab.

Новизна результатов исследования заключается в

- разработке модификации математической модели динамики финансовой системы, включающей размерные параметры системы, логистический рост для валового накопления основного капитала и коррелированную зависимость между ключевой ставкой и индексом потребительских цен;

- конструировании модифицированной вычислительной схемы типа «предиктор-корректор» решения начальных задач для системы дробно-дифференциальных уравнений на основе формулы Грюнавальда – Летникова с учетом неоднородных краевых условий;

- разработке специального программного обеспечения, предназначенного для компьютерного моделирования фрактальных динамических систем;

- установлении закономерностей на основе интерпретации результатов вычислительных экспериментов, а также прогнозировании поведения динамических данных устойчивых финансовых систем на примере Германии.

Теоретическая и практическая значимость состоит в следующем.

- Сконструированная вычислительная схема и разработанная прикладная программа могут быть использованы для решения прикладных задач из различных предметных областей в дробно-дифференциальной постановке (начальные задачи для системы ОДУ дробного порядка).

- На основе разработанных математических и алгоритмических средств можно проводить макроэкономическое моделирование финансовых систем отдельных государств и прогнозирование показателей: ключевая ставка, валовое накопление основного капитала и индекс цен в устойчивом режиме.

Результаты работы были **апробированы** на следующих научных мероприятиях вузовского, городского и российского уровня:

- 17 международная научно-практическая конференция «Фундаментальные исследования, методы и алгоритмы прикладной математики в технике, медицине и экономике» (г. Новочеркасск, 2018 г.);

- III международная научно-практическая конференция «Математическое моделирование в экономике, управлении, образовании» (г. Калуга, 2017 г.);

- VI международная научная конференция «Математическое и компьютерное моделирование» (г. Омск, 2018 г.)

- XIII региональная научно-практическая конференция «Молодежь XXI века: шаг в будущее» – 2017 г., – очное участие;

- XXVI научная конференция «День науки АмГУ - 2017», диплом III степени;
- XIV региональная научно-практическая конференция «Молодежь XXI века: шаг в будущее» – 2018 г., – очное участие;
- XXVII научная конференция «День науки АмГУ– 2018», диплом III степени;
- XXVIII научная конференция «День науки АмГУ– 2019».

Выступления на научных семинарах кафедры математического анализа и моделирования.

Научно-исследовательская работа в 2018-2019 году была поддержана грантом АмГУ для выполнения научно-исследовательского проекта «Математическое моделирование финансовых систем на основе дробно-дифференциального подхода».

За время работы над данной темой научного исследования **опубликованы** 7 научных работ, библиографическое описание которых приведено в общем списке литературы (заключительная часть).

Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения, библиографического списка и приложения. Первая глава посвящена теоретическим основам построения и реализации детерминированных моделей в экономике. Вторая глава является методической, в ней представлены концепции дробно-дифференциального исчисления: основные понятия, аппроксимация производных и численное решение дифференциальных уравнений дробного порядка. Результаты оригинальных исследований описаны в третьей главе.

Магистерская работа является продолжением выпускной квалификационной работы бакалавра «Применение численных методов дробного дифференцирования для математического моделирования финансовых систем» которая была защищена автором в Амурском государственном университете в 2017 году.

1 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПОСТРОЕНИЯ И РЕАЛИЗАЦИИ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ МОДЕЛЕЙ В ЭКОНОМИКЕ

1.1 Математические модели динамических систем, формализуемых с помощью дифференциальных и разностных уравнений

1.1.1 Обыкновенные дифференциальные и разностные уравнения: введение. Дифференциальные уравнения – уравнения, содержащие функцию и некоторые ее производные. Обыкновенным дифференциальным называется уравнение, если неизвестная функция имеет зависимость от скалярного аргумента, а дифференциальным уравнением в частных производных – если от нескольких переменных. Наивысшим порядком производной функции, входящей в данное уравнение называют порядком уравнения [1].

Общим решением или общим интегралом дифференциального уравнения называют множество решений дифференциального уравнения содержащее все решения этого уравнения. Пока решение дифференциального уравнения удовлетворяет изначально заданным дополнительным условиям, его называют частным решением дифференциального уравнения.

График решения дифференциального уравнения $y = f(x) + C$, где каждому C соответствует определенная кривая называется интегральной кривой.

Уравнение называют разностным, если оно содержит значения функции целочисленного аргумента, относящиеся к различным периодам времени (при условии, что в качестве аргумента берется дискретно меняющееся время $t=0,1,2,\dots$) [2]. Порядком разностного уравнения называют наибольшую разность между номерами периодов, с которыми функция входит в уравнение.

Удобнее исследовать дифференциальное уравнение, разрешенное относительно y' , и может иметь вид $y' = f(t, y)$, где $f(t, y)$ – заданная функция, которая «регулирует» скорость моделируемого процесса. Каждой точке на плоскости (t, y) ставится в соответствие некоторое число, равное производной решения и график которой проходит через данную точку. Производная совпадает с тангенсом угла наклона касательной к интегральной кривой в точке.

Если дифференциальное уравнение не содержит явно независимой переменной, то его называют автономным дифференциальным уравнением. Уравнение такого типа может быть записано в виде $y' = f(t, y)$. Если посмотреть с точки зрения приложений автономность может означать, что моделируемая система или процесс эволюционируют в условиях постоянной во времени внешней среды – природных условий, постоянства технологий, возмущений и управлений.

Задача Коши для дифференциальных уравнений и систем дробного порядка общего вида.

Пусть требуется найти функцию $y(x)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} y(x) = f(x, y), \quad n-1 < \alpha \leq n, \quad n=1,2,\dots, \quad (1.1)$$

при начальных условиях

$$\frac{d^{\alpha-k}}{dx^{\alpha-k}} y_i(x) = b_k, \quad k = 1,2,\dots,n, \quad (1.2)$$

где $f(x, y)$ – заданная функция;

α, b_1, \dots, b_n – заданные постоянные величины.

Рассмотрим теорему о существовании и единственности решения поставленной задачи.

Обозначим через R_n множество точек (x, y) из области D , лежащей в $R \times R$:

$$R_n = \left\{ (x, y) \in D : 0 < x \leq h, \left| x^{n-\alpha} y(x) - \frac{b_n}{\Gamma(\alpha - n + 1)} \right| \leq a \right\}, \quad (1.3)$$

$$a > \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h^{n-k} b_k}{\Gamma(\alpha - k + 1)},$$

где a, h, b_0 – некоторые постоянные.

Теорема 1. Пусть $f(x, y)$ – вещественнозначная, непрерывная в области D функция, удовлетворяющая по y условию Липшица

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq A|y_1 - y_2|$$

и ограничению $\sup_{(x,y) \in D} |f(x,y)| = b_0 < \infty$. Тогда решение задачи Коши для $n=1$ в

области $R_1 \subset D$ существует, непрерывно и единственно [3].

1.1.2 Качественный анализ дифференциальных уравнений.

Рассмотрим однородную систему дифференциальных уравнений n -го порядка с постоянными коэффициентами:

$$X'(t) = AX(t), \quad X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \vdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \vdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

где $X(t)$ – n -мерный вектор, A – матрица размерностью $n \times n$.

Нелинейную систему также можно свести к такой, выполнив линеаризацию вблизи точки равновесия. Далее будем считать, что точка равновесия расположена в начале координат.

Устойчивость или неустойчивость определяется знаками действительных частей собственных значений матрицы A . Далее решаем характеристическое уравнение, чтобы найти собственные значения λ

$$\det(A - \lambda I) = 0,$$

которое сводится к алгебраическому уравнению n -ой степени

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0.$$

В случае $n=2$ и некоторых случаях при $n \geq 3$ корни такого уравнения вычисляются просто. Иначе решение характеристического уравнения вызывает значительные трудности. Более того, Н.Х. Абель (1802–1829) доказал теорему, согласно которой при $n \geq 5$ общее алгебраическое уравнение неразрешимо в радикалах, т.е. в общем случае не существует формул, выражающих корни уравнения через его коэффициенты в случае $n \geq 5$.

Большое значение имеют методы, которые позволяют не решая характеристическое уравнение установить устойчивость системы (будут ли все его корни иметь отрицательную действительную часть). Один из таких методов –

критерий Рауса-Гурвица, который содержит необходимые и достаточные условия устойчивости системы.

Снова рассмотрим характеристическое уравнение

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0, \quad (1.4)$$

которое описывает динамическую систему. Видим, что необходимое условие устойчивости выполняется, если $a_i > 0$ (далее считаем, что $a_0 > 0$). Далее составим матрицу Гурвица: главная диагональ матрицы содержит элементы a_1, a_2, \dots, a_n . В первом столбце числа с нечетными числами $a_1, a_3, a_5 \dots$. В каждой строке индекс каждого следующего числа (счет идет слева направо) меньше на 1 индекса предыдущего числа. Остальные коэффициенты a_i с индексом больше n или меньше 0 меняются на нули. И получаем матрицу

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & a_n \end{pmatrix}$$

Главные миноры Δ_i матрицы Гурвица находятся по формулам

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \vdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \vdots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & a_n \end{vmatrix}.$$

Критерий Рауса-Гурвица: Чтобы все корни характеристического уравнения имели отрицательные действительные части, необходимо и достаточно, чтобы все главные диагональные миноры матрицы Гурвица были положительны при условии $a_0 > 0$: $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0$. Так как $\Delta_n = a_n \Delta_{n-1}$, то можно записать $a_n > 0$.

Для системы 2-го порядка условие устойчивости выглядит следующим образом:

$$a_0 > 0, \Delta_1 = a_1 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 > 0$$

или

$$a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0.$$

Рассмотрим систему двух дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y),$$

$$\frac{dy}{dt} = Q(x, y).$$

Рассмотрим стационарные (автономные) системы, то есть где P и Q не зависят явно от времени. Особыми точками данной системы будут называться такие точки, в которых и P и Q одновременно обращаются в ноль [4].

Классификация положений равновесия определяется собственными значениями λ_1, λ_2 матрицы A . Числа λ_1, λ_2 находятся из решения характеристического уравнения (1.4). В общем случае, существует 4 типа точек равновесия:

- Узел – если λ_1, λ_2 - действительные числа одного знака ($\lambda_1, \lambda_2 > 0$);
- Седло – если λ_1, λ_2 - действительные числа разного знака ($\lambda_1, \lambda_2 < 0$);
- Фокус – если λ_1, λ_2 - комплексные числа; действительные части равны и отличны от нуля ($\text{Re } \lambda_1 = \text{Re } \lambda_2 \neq 0$);
- Центр – если λ_1, λ_2 - чисто мнимые числа ($\text{Re } \lambda_1 = \text{Re } \lambda_2 = 0$)

1.1.3 Хаотические режимы и бифуркация динамических систем.

Обычно под хаосом мы понимаем беспорядок, непредсказуемость действий, какую-либо непоследовательность. Кажется, что хаос возникает из-за случайного изменения каких-либо величин, но это не так. Динамический хаос – хаотическое поведение динамических систем, которые описываются полностью детерминированными дифференциальными или разностными уравнениями. Однако поведение является хаотическим. Условием для появления динамического хаоса является нелинейность системы. Также система должна проявлять зависимость от начальных условий. Такое свойство Лоренц назвал эффектом «бабочки»: даже такое ничтожно малое воздействие, как взмах крыльев бабоч-

ки способно привести к значительному изменению динамики хаотической системы.

В 1963 г. Эдвард Лоренц занимался компьютерным моделированием метеосистем [5]. Также он изучал конвекцию в подогреваемом снизу слое. Основываясь на уравнении Навье-Стокса, была получена следующая система уравнений

$$\begin{cases} X' = -\sigma X + \sigma Y, \\ Y' = -XZ + \gamma X - Y, \\ Z' = XY - bZ. \end{cases}$$

При $\gamma=28$, $\sigma=10$, $b=8/3$ система начинает вести себя хаотически. На рисунке 1.1 показан вид аттрактора Лоренца. Даже малейшее изменение начальных условий ведут за собой кардинальные изменения поведения системы. Область притяжения фазовых траекторий имеет фрактальный характер и называется аттрактором Лоренца.

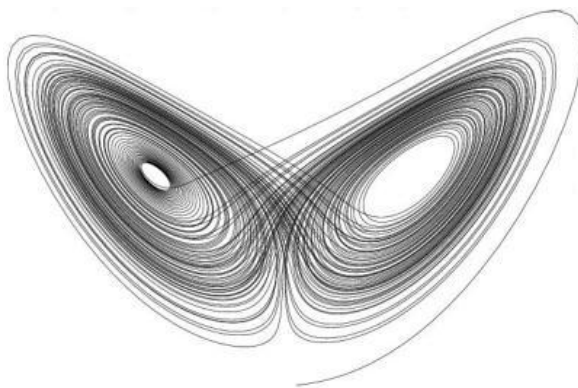


Рисунок 1.1 – Аттрактор Лоренца

Так как данная система уравнений описывает динамику атмосферы, можно сделать вывод о невозможности точного долгосрочного предсказания погоды, поскольку любые замеры параметров атмосферы проводятся с конечной точностью.

В 1976 г. Ресслер предложил систему дифференциальных уравнений, которые описывают динамику химических реакций с перемешиванием [5]:

$$\begin{cases} X' = -(Y + Z), \\ Y' = X + \frac{1}{5}Y, \\ Z' = \frac{1}{5} + Z(X - \mu). \end{cases}$$

Эта модель стала базовой для описания химических процессов в химии. Фазовый портрет системы Ресслера показан на рисунке 1.2.

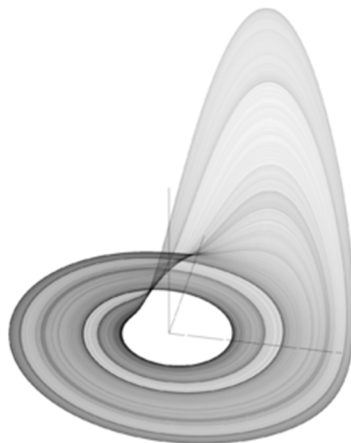


Рисунок 1.2 – Фазовый портрет системы Ресслера

1.2 Приложение математического аппарата моделирования и исследования динамических систем в экономике

1.2.1 Модели экономических процессов, основанные на уравнении популяционной динамики.

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение вида $y' = ay + b$ или его разностный аналог $y(t + 1) = ay(t) + b$, где a, b – некоторые постоянные.

При $b=0$ уравнения будут называться однородными. Тогда первое можно записать в виде $y' / y = a$, откуда следует, что оно описывает динамику переменной $y(t)$, которая имеет постоянный темп прироста a , или же зависящий только от времени.

Впервые данное уравнение в социально-экономической сфере использовал в своих исследованиях динамики населения Земли Т. Мальтус [6,7]. Так как при начальном условии $y(0) = y_0$ и постоянном a уравнение будет иметь реше-

ние экспоненциального вида $y(t) = y_0 e^{at}$, то Мальтус сделал вывод о неминуемом наступлении голода: население неограниченно растет, а природные ресурсы ограничены. Но он не учитывал механизмы саморегуляции, которые приводят уже к нелинейным системам.

Нелинейные модели являются гораздо более гибкими. Процессы, в которых величина увеличивается в одно и то же число раз за равные промежутки времени, называют процессами естественного роста. Якоб Бернулли впервые вывел дифференциальное уравнение естественного роста, которое имеет следующий вид:

$$\frac{dy(t)}{dt} = ky(t), \quad (1.5)$$

где $y(t_0) = y_0$ – начальное условие,

$y(t) = y_0 \exp(kt)$ – решение уравнения.

Рассмотрим на примере задачу о кредитовании:

Заемщик платит кредитору $p\%$ от занятой суммы y_0 за год, сколько он должен заплатить за t лет, если проценты начисляются непрерывно?

Закон изменения долга описывается дифференциальным уравнением (1.5). Сумма, которую заемщик должен заплатить кредитору от занятых y_0 денежных единиц за t лет, составит $y(t) = y_0 \exp\left(\frac{pt}{100}\right)$. Так, при $p = 5\%$, $t = 5$ лет, $y_0 = 10$ у.е. получим сумму в размере $10 * \exp(0.05 * 5) = 12.8403$ у.е.

При изучении понятия темпа инфляции в экономической теории используется правило величины 70. С его помощью можно быстро подсчитать количество лет t , необходимых для удвоения уровня цен при уровне инфляции $p\%$:

$$t = 70 / p.$$

Например, при ежегодном уровне инфляции 10% уровень цен удвоится через 7 лет. «Правило 70» может быть использовано для примерного подсчета времени, которое потребуется для удвоения личных сбережений в банке. Полу-

чим $2y_0 = y_0 \exp\left(\frac{pt}{100}\right)$, тогда $t = \frac{100 \ln 2}{p} \approx \frac{70}{p}$. Инфляционные процессы достаточно точно описываются уравнением естественного роста.

Пусть требуется найти закон роста выпуска дефицитной продукции в условиях ненасыщаемости рынка.

$y(t)$ – количество продукции, произведенной в момент времени t . Продукция продается по фиксированной цене p и моментально реализуется.

В момент времени t доход составит $p \cdot y(t)$.

Предприятие получает прибыль от реализации продукции в течении долгого времени, поэтому ему выгодно расширить производство. На инвестиции $i(t)$ расходуется m -я часть производства:

$$i(t) = \frac{p}{m} y(t).$$

В результате расширения производства будет получен прирост дохода. Это приведет к росту скорости выпуска продукции: $y'(t) = a \cdot i(t)$. В результате получаем $\frac{dy(t)}{dt} = ky(t)$, где $k = \frac{ap}{m}$. Решением дифференциального уравнения естественного роста является экспоненциальная функция $y = Ce^{kt}$, показывающая как быстро можно добиться огромных объемов выпуска дефицитной продукции, если постоянно направлять часть дохода в расширение производства.

Изменение количества продукции на некотором предприятии (не вкладывает вырученные деньги в производство, происходит изнашивание оборудования – выбытие фондов):

$$\frac{dy(t)}{dt} = -k(t)y(t),$$

где $y(t_0) = y_0$ – начальное условие

$y(t) = y_0 \exp(-kt)$ – решение уравнения (падение производства).

Рассмотрим пример роста производства с учетом инвестиций:

$$\frac{dy(t)}{dt} = \pm k(t)y(t) + u(t, y)$$

$u(t, y) > 0$ – величина, характеризующая внешние инвестиции

$u(t, y) < 0$ – величина, характеризующая выплаты по налогам, потребительские расходы и т.п.

$y(t_0) = y_0$ – начальное условие.

$$y' = ay - by^2, \tag{1.6}$$

Уравнение (1.6) – логистическое уравнение в непрерывном времени, а в дискретном оно имеет следующий вид

$$y(t + 1) = ay(t) - by^2(t), \tag{1.7}$$

где $a, b > 0$ – некоторые переменные.

Данные уравнения называют моделью Ферхюльста-Пирла по имени ученых, которые предложили его в качестве альтернативы к модели Мальтуса для описания динамики биологической популяции [8, 9]. Записав их в виде

$$\frac{y'}{y} = a - by,$$

$$\frac{y(t + 1)}{y(t)} = a - by(t).$$

Видно, что в непрерывной модели темп прироста линейно убывает по y , а в дискретной так же ведет себя темп роста (т.е. они уже не постоянны, как у Мальтуса). При малых значениях y главным членом в уравнениях (1.6) и (1.7) является ay , так что при таких y решения этих уравнений ведут себя подобно мальтузианским, но с ростом y начинают превалировать вторые слагаемые – вступают в действие процессы саморегуляции и лимитирования; чем больше значение y , тем сильнее действуют лимитирующие факторы.

Модель естественного роста слишком упрощенно иллюстрирует реальную ситуацию – темпы роста, описываемые первоначально экспоненциальной функцией, далее замедляются и наступает период насыщения. Модификацией модели естественного роста является уравнение Ферхюльста, которое он предложил в 1836 году:

$$\frac{dy(t)}{dt} = a\left(1 - \frac{y(t)}{b}\right)y(t),$$

где $y(t_0) = y_0$ – начальное условие,

$$y(t) = \frac{b \cdot y_0 \cdot \exp(at)}{b - y_0(1 - \exp(at))} - \text{решение уравнения.}$$

В экономико-математическом моделировании спроса и предложения на рынке товаров широко используется аппарат разностных уравнений. Приведем некоторые примеры [10].

Рассмотрим паутинообразную модель с запаздыванием спроса – дискретные модели динамики цен первого порядка, в которых наблюдается запаздывание либо спроса, либо предложения. Тогда динамика цен задается уравнением

$$D(P_{t+1}) = S(P_t). \quad (1.8)$$

Соответствующий итерационный процесс изображается на плоскости (Q, p) в виде паутины на рисунке 1.3, которая наматывается на кривые спроса и предложения [11]. Отсюда и название – паутинообразные.

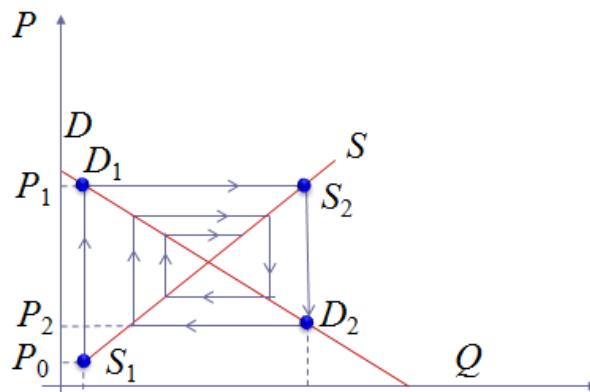


Рисунок 1.3 – Паутинообразная модель при $s < d$
(направление по часовой стрелке)

Данная модель является одной из исторически первых динамических моделей рынка, которые отражают поведение участников и иллюстрирует применение метода моделирования при анализе экономических процессов. Блок-схема паутинообразной модели с запаздыванием спроса изображена на рисунке 1.4. Существует несколько гипотез, лежащих в основе этой модели:

-товаропроизводитель, принимая решение об объеме предложения, ориентируется на цену предыдущего периода

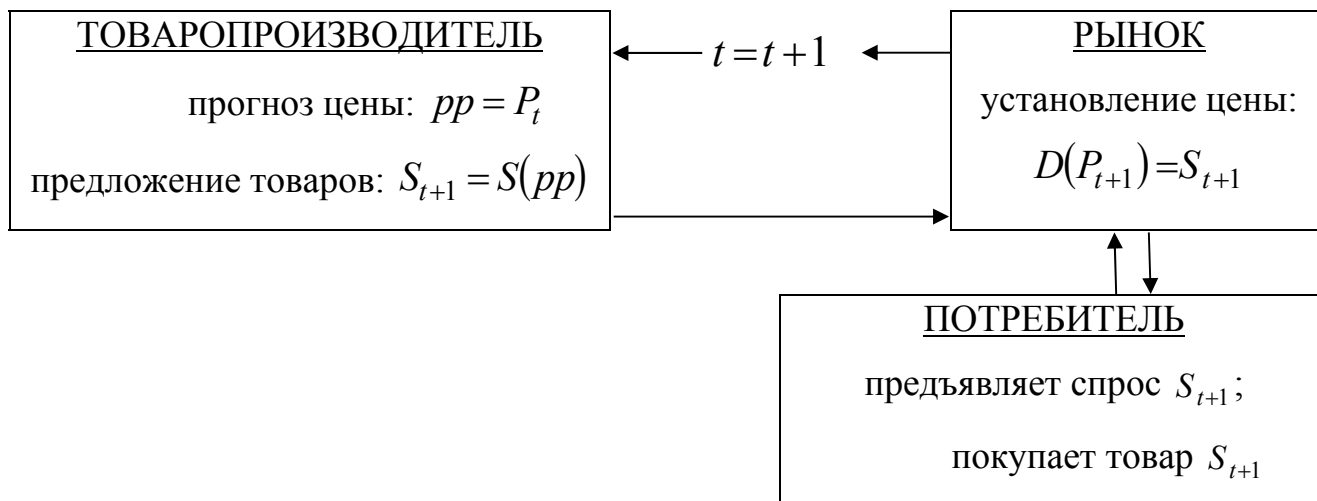


Рисунок 1.4 – Блок-схема паутинообразной модели с запаздыванием спроса

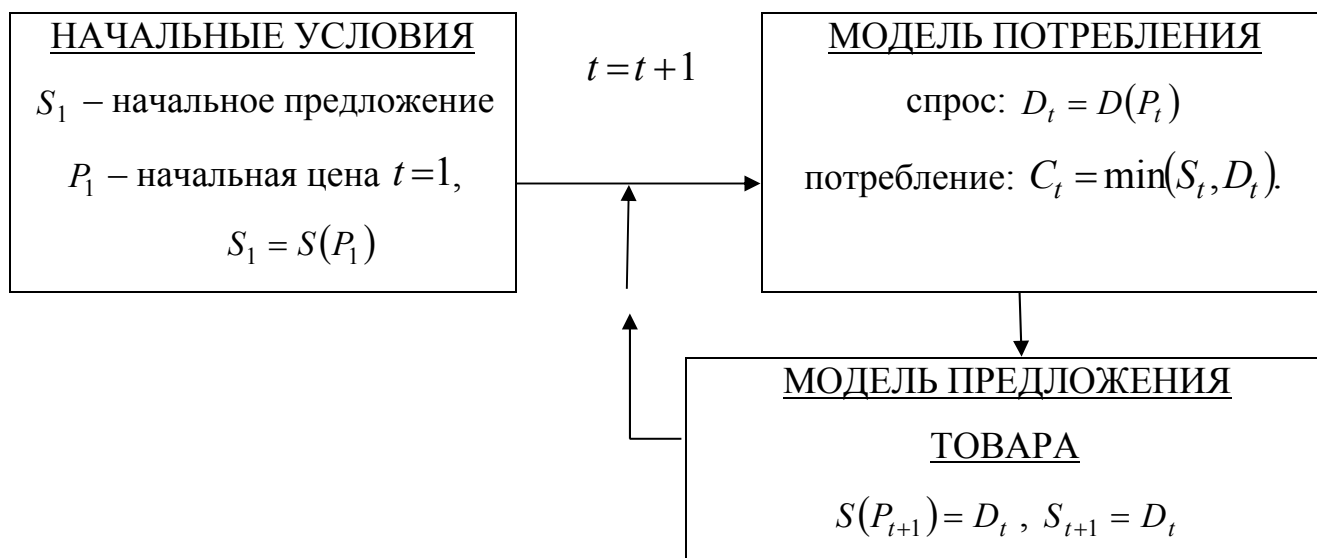


Рисунок 1.5 – Блок-схема паутинообразной модели с запаздыванием предложения

Рассмотрим паутинообразную модель с запаздыванием предложения, изображенную на рисунке 1.5. Она основана на гипотезах:

- рынок всегда находится в состоянии равновесия;
- при определении объема предложения в каждый период времени товаропроизводитель ориентируется на спрос в предыдущий период;

-цена товара устанавливается товаропроизводителем на уровне, определяемом в соответствии с функцией предложения;

-объем потребления товара не может превосходить ни объема предложения, ни объема спроса.

1.2.2 Примеры классических математических моделей макроэкономики.

Модель рынка товаров и механизм установления равновесия

Основные модели макроэкономических процессов в краткосрочном периоде опираются на классический и кейнсианский подходы. В основе классической макроэкономической модели лежит закон Сэя, в котором говорится что «предложение товаров создает спрос». Это означает, что спрос на товары и их предложение неразрывны в масштабах всей экономики [11].

Из закона Сэя следует, что на товарном рынке условием равновесия есть равенство национального дохода и объема национальных расходов:

$$Y = E, \tag{1.9}$$

где Y – национальный доход, E – объем национальных расходов.

Объем национальных расходов – спрос населения и предпринимателей на товары, где инвестиционные товары I и потребительские товары C :

$$E = I + C. \tag{1.10}$$

Также национальный доход Y предназначен для потребления C и сбережений S :

$$Y = C + S, \tag{1.11}$$

поэтому, национальный доход можно понимать как предложение товаров [12].

Из соотношений (1.9) – (1.11) получим условие равновесия между спросом и предложением

$$I = S. \tag{1.12}$$

В рамках классического подхода в основе модели установления равновесия лежат три гипотезы:

Гипотеза 1. Объем сбережений – возрастающая функция ставки процента: $S = S(r)$, $S'(r) > 0$. Графическое изображение функции сбережений изображено на рисунке 1.6.

Гипотеза 2. Зависимость инвестиций от ставки процента монотонно убывает: $I = I(r)$, $I'(r) < 0$.

Гипотеза 3.

а) Если ставка процента меньше равновесной r_e : $r < r_e$, то спрос на инвестиции превышает сбережения. Не все предприниматели, желающие платить r за заемные средства найдут владельцев сбережений, которые готовы предложить им займы.

б) Если ставка процента больше равновесной r_e : $r > r_e$, то предложение заемных средств S будет превышать спрос I . Не все, кто намерен сберегать, найдут предпринимателей, готовых заплатить r .

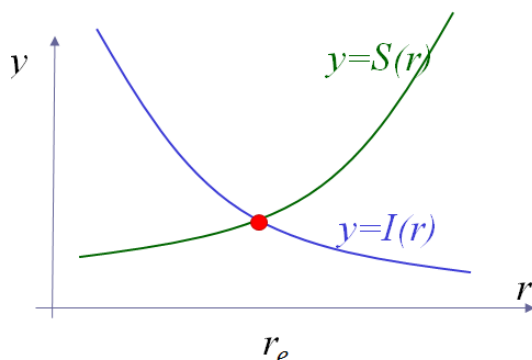


Рисунок 1.6 – Изменение сбережений и капиталовложений в зависимости от ставки процента

Процесс установления равновесия между инвестициями и сбережениями можно показать дифференциальным уравнением

$$\frac{dr}{dt} = a(I(r) - S(r)),$$

где a – коэффициент адаптации ставки процента (положительная константа, характеризующая реакцию рынка на несоответствие спроса предложению).

Уравнение в силу монотонности $S(r)$ и $I(r)$ имеет устойчивое значение r_e , к которому стремятся значения сбережений и капиталовложений.

$$\text{Если } \begin{cases} I = I_e - b(r - r_e) \\ S = I_e + c(r - r_e) \end{cases},$$

где I_e – равновесное значение инвестиций и сбережений;

b, c – положительные константы;

$$\text{то } r = r_e + (r_0 - r_e)e^{-a(b+c)t}.$$

Классическая теория хорошо служила для понимания и макроэкономических процессов и для обоснования государственной экономической политики. Однако она не смогла дать объяснений многих проблем после первой мировой войны и экономического кризиса 30-х годов. Тогда делалось множество попыток усовершенствования теории для анализа новых экономических проблем. Наибольший успех получил подход Дж.М. Кейнса о невозможности существования экономики на основе самоорганизации – государство должно регулировать экономические процессы. Упрощенную модель Кейнса называют моделью мультипликатора: рассматривается один макроэкономический рынок – рынок товаров, который переходит к состоянию равновесия. Гипотеза Кейнса – «спрос создает предложение». Эта фраза является допущением, согласно которому «предпринимателям выгодно расширять производство при наличии избыточного спроса» [11].

В модели Кейнса состояние экономики описывается двумя переменными: уровень национального дохода, которая трактуется как предложение товаров и услуг – Y_S и Y_D – совокупный спрос на товары и услуги. Y_D представляет собой сумму спроса на инвестиции I и спроса на текущее потребление C_D . При этом C_D есть возрастающая функция национального дохода:

$$C_D = C(Y_S), \quad C'(Y_S) > 0.$$

Предположим, что до некоторого момента времени T экономике находилась в состоянии равновесия, а далее по какой-либо причине спрос на инвестиции увеличился на ΔI . В гипотезе Кейнса говорится, что прирост инвестиций

приводит к росту совокупного спроса, что влечет за собой превышение спроса над предложением. Концептуальная схема модели приведена на рисунке 1.7.

При формализации утверждения «спрос создает предложение» учитывают то, что национальный доход в последующий момент времени равен совокупному спросу

$$Y_S(t+1) = Y_D(t).$$

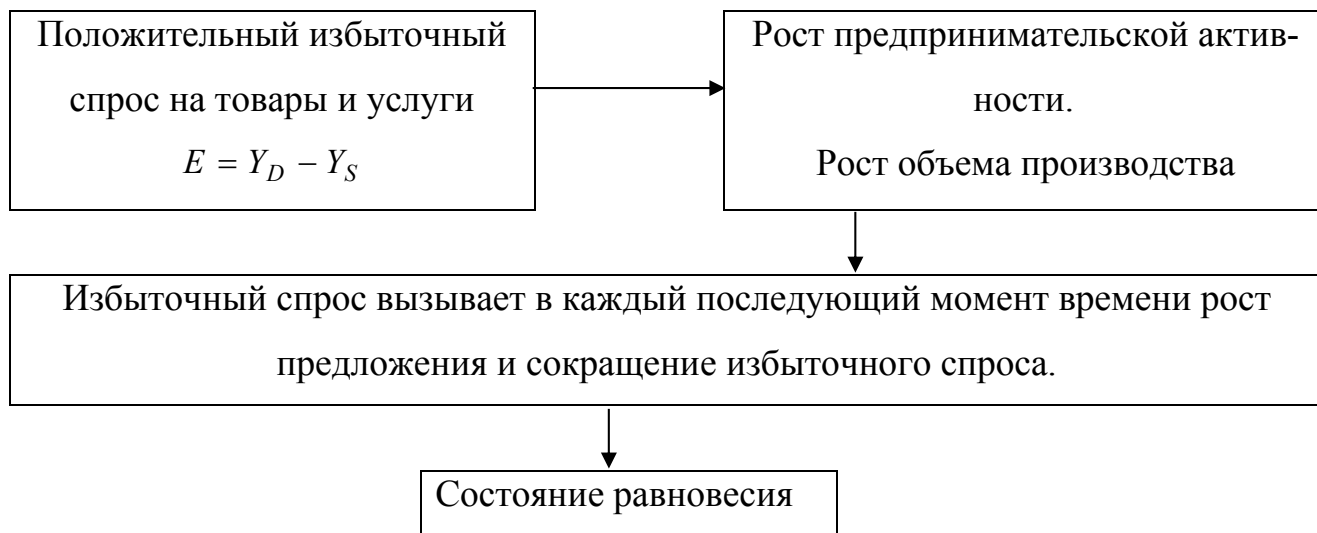


Рисунок 1.7 – Концептуальная схема
макрэкономической модели кейнсианского типа

Спрос складывается из объема потребления (зависит от национального дохода) и капиталовложений $I(t)$:

$$Y_D(t) = C(Y_S(t)) + I(t).$$

Примем линейную зависимость между объемом потребления и национальным доходом:

$$Y_D = a + cY_S + I.$$

Пусть при $t < 0$ инвестиции составляли $I = I_0$ и система находилась в равновесии, то:

$$Y_D(t) = Y_S(t) = \frac{I_0 + a}{1 - c}.$$

Пусть при $t = 0$ равновесие системы нарушилось из-за импульсного увеличения спроса до уровня $I_1 > I_0$, тогда получим

$$Y_S(t+1) = I_0 + \Delta I + a + cY_S(t).$$

При этом начальное значение национального дохода можно вычислить по формуле

$$Y_S(0) = \frac{I_0 + a}{1 - c}.$$

При $0 < c < 1$ – итерационный процесс будет сходиться.

1.2.3 Экономико-математические модели финансовых систем: дифференциальный подход. В настоящее время стремительно растет число применений дробного исчисления в различных областях науки, естествознания, экономики и других исследованиях, использующих математические методы и средства компьютерного моделирования. Введение нецелочисленных порядков, уточнение математических моделей процессов в различных областях науки, технике, технологии приводит к новой постановке, ранее известных задач.

Дробные версии математических моделей финансовых систем демонстрируют интересное динамическое поведение, которое может хорошо отражать фиксированные точки, и периодические, и хаотические движения. Обнаружено, что хаос проявляется в поведении моделей финансовых систем дробного порядка при порядках меньше трех.

В литературе представлена математическая модель финансовой системы, которая формализуется в виде нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка. Впервые модель была детально изучена учеными Ma и Chen [13, 14]:

$$\begin{cases} X' = Z + (Y - a)X, \\ Y' = 1 - bY - X^2, \\ Z' = -X - cZ, \end{cases}$$

где X – ставка процентов;

Y – спрос на капитальные вложения;

Z – индекс цен;

a – величина сбережений;

b – стоимость инвестиций;

c – эластичность спроса коммерческих рынков.

В работах [13, 14] представлена детерминированная модель, описывающая динамику финансовых систем на основе классических методов математического анализа. Но переменные, которые определяют поведение модели финансовых систем, характеризуются наличием долговременной памяти и для формализации систем, проявляющих фрактальные свойства, нашли применение дифференциальные уравнения дробного порядка.

В 2013 году Juma и Hammodat предложили вариационную модель с четырьмя переменными [15]:

$$\dot{x} = -a(x + y) + w$$

$$\dot{y} = -y - axz$$

$$\dot{z} = b + axy$$

$$\dot{w} = -cxz - dw$$

Исследовали устойчивость математической модели финансовой системы. Определили, что при значениях параметров $-(1 + d) < a < 0$, $b < 0$, $d > 1$, $c > a^2 d$ система асимптотически устойчива. Приведены иллюстрации примеров.

В работе [16] ученые Volos, Kyprianidis, Stavrinides, Stouboulos, Magafas, Anagnostopoulos в 2011 году предложили использовать элементы теории управления для моделирования нелинейной динамики финансовой системы. Динамическое поведение нелинейной финансовой хаотической системы моделировалось электронной схемой, и ее поведение изучалось с помощью инструментов моделирования систем управления. В численных методах этого подхода используется как бифуркационная диаграмма, так и максимум показателя Ляпунова и фазовый портрет.

Jabbari в совместной работе [17] с Kheiri в 2012 году представили схему адаптивного управления для изучения антисинхронизационного поведения между двумя идентичными модифицированными трехмерными хаотическими финансовыми системами с неизвестными параметрами. В работе аналитически были получены достаточные условия для антисинхронизации. Чтобы продемонстрировать эффективность предлагаемого метода, использовано численное

моделирование модифицированной трехмерной хаотической финансовой системы,.

Статья Kai и Zhang [18] посвящена классу нелинейной хаотической финансовой модели управления с обратной связью. Они предложили модификацию математической модели финансовой системы с учетом эффекта запаздывания. В работе проанализированы динамические отклики запаздывания финансовой системы и рассмотрены проблемы управления хаосом.

В 2016 авторами Tacha, Volos, Stouboulos и Kurgianidis [19] описана модификация, учитывающая сверхрасходы в экономико-математической постановке задачи моделирования финансовой системы. Динамический анализ данной системы подтвержден сложным динамическим поведением, которое изучается с использованием известных инструментов моделирования нелинейной теории, такие как экспонента Ляпунова, бифуркационная диаграмма, и фазовый портрет.

Другие модификации были направлены на модернизацию алгоритмов, например, в работе [20] авторами Kocamaz, Goksu, Taskin и Uyaroglu предлагается использовать два направления: скользящий режим и пассивный контроль. Методы исследованы для синхронизации двух одинаковых хаотических финансовых систем с начальными условиями.

В статье Chen, Fan и Wang [21] рассмотрена модель финансовой системы как объекта теории управления, при этом проведена реализация модифицированной модели с четырьмя переменными. Данный метод может избежать трудностей, вызванных решением уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана.

Оценка параметров модели финансовой системы с запаздыванием проведена Novotna и Stepankova в работе [22]. Данная статья направлена на определение соответствующей длительности переменных времени запаздывания в динамической модели финансовой системы с целью выражения реальной экономической ситуации и учета влияния истории рассматриваемых факторов С этой целью авторы используют ресурсы сайта www.tradingeconomics.com [23]. Авторы установили времена запаздывания, однако инициализация параметров a , b , c

остаётся за рамками рассмотрения данной работы. В работе приводится конкретный пример.

1.3 Экономические показатели состояния финансовой системы – параметры математической модели

Для математической формализации экономической системы всеми авторами [13-23] вводятся в рассмотрение следующие переменные:

x – ключевая ставка (interest rate);

y – валовое накопление основного капитала (Gross Fixed capital formation);

z – индекс цен (Consumer price index, CPI).

Кроме того, экономический смысл имеют и управляющие параметры математической модели:

a – величина сбережений;

b – стоимость инвестиций;

c – эластичность спроса коммерческих рынков.

Приведем описание основных переменных и параметров математической модели финансовой системы.

Ключевая ставка – это минимальная процентная ставка, по которой Центральный банк России (ЦБ РФ) предоставляет кредиты коммерческим банкам на срок в 1 неделю, и в то же время это максимальная ставка, по которой ЦБ РФ готов принимать от банков на депозиты денежные средства. Она играет ключевую роль при установлении процентных ставок по банковским кредитам и оказывает влияние на уровень инфляции и стоимость фондирования банков. Измеряется в %, либо в долях от единицы.

Валовое накопление основного капитала – это прирост нефинансовых активов, которые в течение длительного времени используются в процессе производства.

Размер валового накопления основного капитала оценивается исходя из общей стоимости основных средств, приобретенных институциональными единицами (за исключением реализованных) в отчетном периоде, а также увеличение невыработанное активов, которое произошло в результате продуктивной деятельности институциональных единиц.

Размер валового накопления основного капитала оценивается исходя из общей стоимости основных средств, приобретенных институциональными единицами (за исключением реализованных) в отчетном периоде, а также увеличение невыработанное активов, которое произошло в результате продуктивной деятельности институциональных единиц. Рассчитывается в процентах от ВВП.

Индекс цен – это индекс цен, который рассчитывается для определенной группы товаров и услуг, определяющих состав потребительской корзины одного жителя страны и рассчитывающийся за определенный период времени. Индекс потребительских цен представляет собой отношение всей потребительской корзины базового года, которая оценивается в ценах текущего года, к потребительской корзине за базовый год, которая оценивается в ценах базового года.

Величина сбережений – это отсроченное на будущее потребление или часть дохода, которая не потребляется в настоящее время.

Стоимость инвестиции – будущие доходы для каждого конкретного инвестора. При этом будущая выгода приводится к настоящему времени.

Эластичность спроса коммерческих рынков – эластичность спроса характеризует степень реакции спроса на действие какого-либо фактора. В зависимости от вида фактора, воздействующего на спрос, различают эластичность спроса по цене, эластичность спроса по доходу и перекрестную эластичность.

Для просмотра численных значений показателей можно воспользоваться ресурсом сайта www.tradingeconomics.com, который предоставляет пользователям точную информацию на разных языках для 196 стран, включая исторические данные для более чем 300 тысяч экономических показателей, таких как курсы валют, индексы фондового рынка, доходности государственных облигаций и цен на сырьевые товары [23]. Поиск может осуществляться как по странам, так и по конкретным показателям.

2 КОНЦЕПЦИИ ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ: ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, АППРОКСИМАЦИЯ ПРОИЗВОДНЫХ И ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

2.1 Определение дробной производной и этапы становления теории дробного дифференцирования и интегрирования

Возникновение дробного математического анализа связывают с периодом становления классического анализа. Начиная с XVII в. получил развитие математический анализ на основе интегро-дифференциальных операторов нецелых порядков. В переписке Я. Бернулли и Г. Лейбница можно найти первое упоминание о производных нецелого порядка. В письмах Г. Лопиталю (1695 г.) Г. Лейбниц сделал несколько замечаний о возможности рассматривать дифференциалы и производные порядка $1/2$ [24].

Л. Эйлер в 1738 г. впервые заметил, что при нецелом p результату вычисления производной $\frac{d^p x^a}{dx^p}$ от степенной функции можно придать смысл. Далее Ж. Фурье в 1822 г. предложил использовать равенство [25]:

$$\frac{d^p f(x)}{dx^p} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^p d\lambda \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(tx - t\lambda + p\pi/2) dt$$

для определения производной нецелого порядка. Это было первое определение производной любого положительного порядка и от любой функции.

Применяя разложение функций в степенные ряды, Ж. Лиувилль (1832–1835 гг.) в своих работах определял « p »-ю производную путем почленного дифференцирования. Он же, в частности, дал первые практические приложения созданной им теории к решению задач математической физики. Затем Б. Риман (1847 г.) предложил иное решение на основе определенного интеграла, пригодное к степенным рядам с нецелыми показателями [24]. Конструкции Лиувилля и Римана являются основными формами дробного интегрирования.

$$\frac{\partial^\alpha f(t)}{\partial t^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^\alpha}, f(x) \in [a, b], 0 < \alpha < 1.$$

Продолжая теорию Лиувилля, А. Грюнвальд (1867 г.) предложил определение дробной производной как предел разностных отношений [26].

$$\frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{\left[\frac{t}{h} \right]} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t - jh).$$

Одновременно с теоретическими начинаниями разрабатывались приложения дробного анализа к решению различных задач. Одним из таких явилось открытие Н. Абеля (1823 г.), показавшего, что решение задачи о таутохроне может быть получено путем интегрального преобразования, которое записывается как производная полуцелого порядка. Его работы сыграли огромную роль в развитии идей дробного интегродифференцирования. Заслугой Хольмгрена является рассмотрение дробного дифференцирования как операции, обратной интегрированию, и приложение данных понятий к решению обыкновенных дифференциальных уравнений.

Весомый вклад в прогресс математического анализа нецелых порядков внес известный русский математик, президент Московского математического общества А.В. Летников, который за время своей 20-летней научной деятельности создал полную теорию дифференцирования с произвольным показателем.

Дробное исчисление стало строгой математической теорией, только начиная с работ А.В. Летникова. В конце XIX в. вышла содержательная работа Ж. Адамара (1892 г.), в которой на основе разложения в ряд Тейлора было рассмотрено дробное дифференцирование аналитической в круге функции по радиусу, которое носит название подхода Адамара [24].

В первой половине XX в. заметный вклад, как в теорию, так и в практику дробного анализа внесли Г. Харди, Г. Вейль, М. Рисс, П. Монтель, А. Маршо, Д., А. Зигмунд, Х. Кобер, Ж. Коссар, и ряд других ученых. В 1915 г. Г. Харди и М. Рисс использовали дробное интегрирование для суммирования расходящихся рядов. В 1917 г. Г. Вейль определил дробное интегрирование для периодических функций в виде свертки с некоторой специальной функцией. Аналог неравенства С.Н. Бернштейна для дробных производных алгебраических многочле-

нов на конечном отрезке дал в 1918 г. П. Монтель. В работе А. Маршо (1927 г.) была введена новая форма дробного дифференцирования, которая применима в случае функций с «плохим» поведением на бесконечности. Были введены в обиход дробные производные Маршо [25].

$$\frac{\partial^\alpha f(t)}{\partial t^\alpha} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(x)f(x \mp t) dt}{t^{1+\alpha}}, 0 < \alpha < 1.$$

В работах М. Рисса (1936, 1938, 1949 г.г.) были получены операторы типа потенциала (потенциалы Рисса), позволившие определить дробное интегрирование функций многих переменных. Для некоторых интегральных операторов и интегральных уравнений очень полезными оказались дробные интегралы Эрдейи и Кобера (1940 г.) и т.д. [26].

Известно, что обычное дифференцирование $\frac{d}{dx}$ и интегрирование $\int_a^x \dots dt$ являются взаимно обратными операциями, если дифференцирование применяется слева, т.е. $\left(\frac{d}{dx}\right) \int_a^x f(t) dt = f(x)$. Однако, $\int_a^x f'(t) dt \neq f(x)$ так как добавляется постоянная $f(a)$. Точно так же $\left(\frac{d}{dx}\right)^n I_a^n + f \equiv f$, но $I_a^n + f^{(n)} \neq f$, отличаясь от f многочленом порядка $n-1$. Подобным образом для дробного дифференцирования всегда будет $D_{a+}^\alpha I_a^\alpha + f \equiv f$, но $I_{a+}^\alpha D_a^\alpha + f$ не всегда совпадает с $f(x)$ [26].

Дробные производные Лиувилля на оси можно привести к другому виду. Предположим, что функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема и убывает вместе с производной $f'(x)$ не медленнее, чем $|x|^{\alpha-1-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$.

Предполагаем, что $0 < \alpha < 1$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} (D_+^\alpha f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^\infty t^{-\alpha} f(x-t) dt = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty t^{-\alpha} f'(x-t) dt = \\ &= \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty f'(x-t) dt \int_t^\infty \frac{d\xi}{\xi^{1+\alpha}} = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty \frac{f(x) - f(x-\xi)}{\xi^{1+\alpha}} d\xi. \end{aligned}$$

$$(D_+^\alpha f)(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty \frac{f(x) - f(x-t)}{t^{1+\alpha}} dt = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-\infty}^x \frac{f(x) - f(t)}{(x-t)^{1+\alpha}} dt \quad (2.1)$$

Аналогичные преобразования приводят к выражению

$$(D_-^\alpha f)(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty \frac{f(x) - f(x+t)}{t^{1+\alpha}} dt, \quad -\infty < x < \infty \quad (2.2)$$

Конструкции (2.1), (2.2) называют производным Маршо [25].

Часто используются конструкции, в которых вначале выполняется кратное дифференцирование, а затем вычисляется дробный интеграл

$$f(x) = I_x^{n-\nu} D_x^n f(x).$$

Такая конструкция называется производной Капуто.

В общем случае соотношение между производными Капуто и Римана-Лиувилля имеет вид [25]:

$$f^{(\nu)}(x) = f(x) + \sum_{j=0}^n \frac{1}{\Gamma(1+j-\nu)^{\nu-j}}, \nu > 0.$$

2.2 Сравнение подходов в фундаментальном анализе и теории дробного исчисления

Дробный математический анализ имеет дело с функциями, которые представляют собой своего рода обобщение функций, применяемых в классическом анализе.

Так, например, гамма-функция Эйлера является обобщением понятия факториала на нецелые числа и играет фундаментальную роль в дробном математическом анализе. Выражение для определения гамма-функции имеет вид [27]:

$$\Gamma(x) = \begin{cases} \int_0^\infty \exp(-t)t^{x-1} dt, & (\operatorname{Re}(x) > 0), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n^{x-1}}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1)}, & (x - \text{любой}). \end{cases}$$

Факториал $x!$ и гамма-функция $\Gamma(x)$ при целом неотрицательном x связаны соотношением: $\Gamma(n+1) = n!$.

На рисунке 2.1а представлен график модуля гамма-функции.

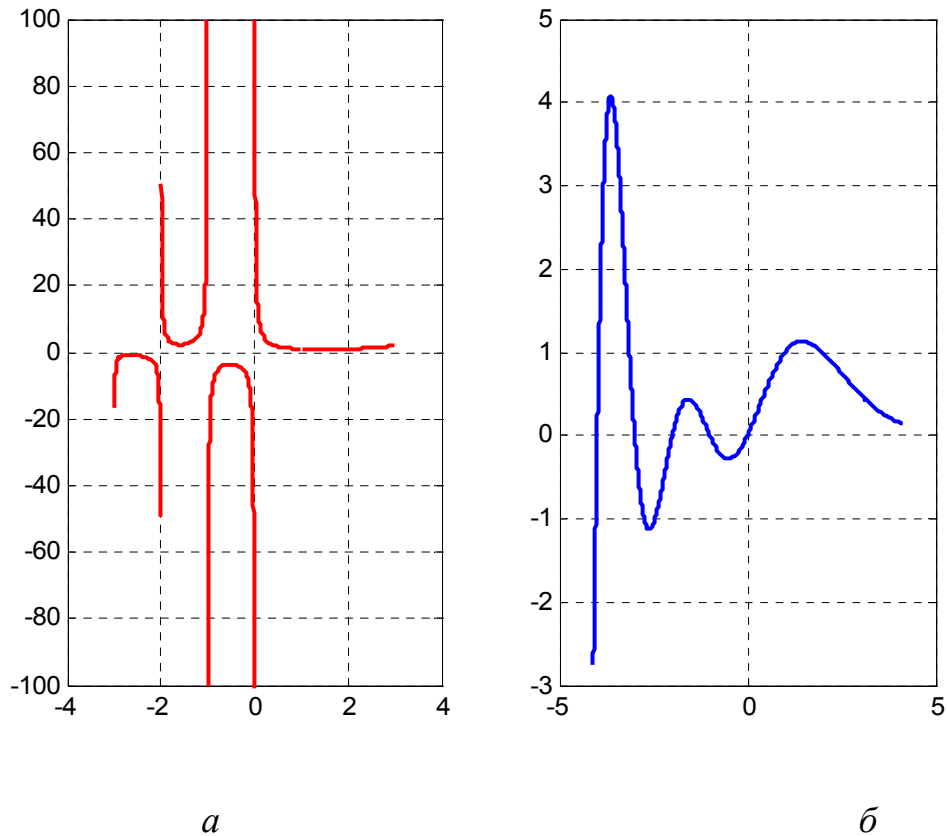


Рисунок 2.1 – Гамма-функция действительного аргумента – *a*;
график функции $1/\Gamma(x)$ – *б*

Как видно на графике, гамма-функция имеет разрывы, однако в дробном анализе чаще используется гамма функция в степени – 1, график которой изображен на рисунке 2.1б.

Неполная Гамма – функция определяется выражением:

$$\gamma(c, x) = \frac{c^{-x}}{\Gamma(x)} \int_0^x y^{x-1} e^{-y} dy = e^{-x} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{\Gamma(j+c+1)}.$$

Бэта-функция выражается через гамма-функцию следующим образом:

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

$$\psi(x) = \frac{1}{\Gamma(x)} \frac{d\Gamma(x)}{dx},$$

ψ – функция обладает интересными свойствами, которые часто используются в дробном исчислении:

$$\psi(x+1) = \psi(x) + x^{-1},$$

$$\psi(n+1) = \psi(1) + \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}.$$

Функция Миттаг – Леффлера задается на множестве значений комплексного аргумента z с помощью бесконечного ряда и зависит от двух параметров α и β [28]:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\beta + \alpha k)}, \alpha \in R_+, \beta \in R, z \in C.$$

Приведенная формула для случая $\alpha = \beta = 1$ определяет экспоненциальную функцию e^z .

В качестве примера приведем семейство функций Миттаг-Леффлера $E_{1,m}$ для $m = 1, \dots, 5$. Эти функции определяются следующими выражениями [29]:

$$E_{1,2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(2+k)} = \frac{e^z - 1}{z},$$

$$E_{1,3}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(3+k)} = \frac{e^z - 1 - z}{z^2},$$

...

$$E_{1,m}(z) = \frac{e^z - \sum_{k=0}^{m-2} \frac{z^k}{k!}}{z^{m-1}}.$$

Функции Миттаг-Леффлера играют важную роль в решении интегро-дифференциальных уравнений нецелых порядков. Многие специальные функции могут быть выражены через функции Миттаг-Леффлера с различными параметрами. К таким функциям, в частности, относятся гиперболические синус и косинус, функции Миллера-Росса, Работнова и др.

Рассмотрим переход от производной целого порядка к определению производной дробного порядка. Запишем сначала формулы дифференцирования с порядками $1, 2, \dots, n$ для степенной функции $x(t) = t^k$

$$\frac{dx(t)}{dt} = kt^{k-1},$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = k(k-1)t^{k-2},$$

...

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} = k(k-1)\dots(k-n+1)t^{k-n} = \frac{k!}{(k-n)!}t^{k-n}.$$

Заменяв целое значение n на нецелое значение α и факториальную функцию $(n-1)!$ на гамма-функцию нецелого аргумента $\Gamma(\alpha)$, получим формулу дифференцирования степенной функции с дробным порядком:

$$\frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\alpha+1)}t^{k-\alpha}. \quad (2.3)$$

Рассмотрим экспоненциальную функцию $y(t) = e^{kt}$. Дифференцируя ее с порядками $1, 2, \dots, n$ получим:

$$\frac{dy(t)}{dt} = ke^{kt},$$

...

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} = k^n e^{kt}.$$

Выражение производной порядка n обобщается на дробные порядки путем простой замены n на β :

$$\frac{d^\beta y(t)}{dt^\beta} = k^\beta e^{kt}. \quad (2.4)$$

Первая производная натурального логарифма, как известно, является гиперболой:

$$\frac{d \ln t}{dt} = \frac{1}{t}.$$

Формула n -ой производной натурального логарифма имеет вид:

$$\frac{d^n \ln t}{dt^n} = (1)^{r-1} (r-1)! \frac{1}{t^n}.$$

Если основание логарифма равно a , эти выражения изменяются незначительно и принимают вид:

$$\frac{d \log_a t}{dt} = \frac{1}{t \ln a},$$

$$\frac{d^n \log_a t}{dt^n} = (-1)^{r-1} (r-1)! \frac{1}{t^n \ln a}. \quad (2.5)$$

Поступая аналогично, получим систему формул целочисленного и дробного дифференцирования синусоидальной функции $z(t) = \sin(\omega t + \alpha)$ [30]:

$$\frac{dz(t)}{dt} = \omega \cos(\omega t + \alpha) = \omega \sin(\omega t + \alpha + \pi/2),$$

$$\frac{d^2 z(t)}{dt^2} = \omega^2 \sin(\omega t + \alpha + 2\pi/2),$$

...

$$\frac{d^n z(t)}{dt^n} = \omega^n \sin(\omega t + \alpha + n\pi/2),$$

$$\frac{d^\beta z(t)}{dt^\beta} = \omega^\beta \sin(\omega t + \alpha + \beta\pi/2).$$

Для n -кратного интеграла известна формула:

$$\int_a^x dx \int_a^x dx \dots \int_a^x f(x) dx = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt. \quad (2.6)$$

Заметив, что $(n-1)! = \Gamma(n)$, видим, что правой части уравнения (2.6) можно придать смысл при нецелых значениях n .

Интегралы

$$(I_a^\alpha + f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, x > a, \quad (2.7)$$

$$(I_b^\alpha - f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{f(t)}{(t-x)^{1-\alpha}} dt, x < b, \quad (2.8)$$

где $\alpha > 0$ называют интегралами дробного порядка α . Интеграл (2.7) называют левосторонним, а (2.8) – правосторонним.

Операторы I_{a+}^{α} , I_{b-}^{α} называют операторами дробного интегрирования. Интегралы (2.7), (2.8) принято также называть дробными интегралами Римана-Лиувилля.

Интеграл порядка α от константы β [31].:

$$\frac{d^{\alpha}\beta}{dx} = \frac{\beta}{\alpha\Gamma(\alpha)} x^{\alpha}$$

2.3 Интегро-дифференциальные уравнения дробного порядка

2.3.1 Основные типы уравнений и подходы к решению задач. В последние годы возрос интерес к исследованию так называемых дифференциальных уравнений дробного порядка, в которых неизвестная функция содержится под знаком производной дробного порядка. Это обусловлено как развитием самой теории дробного интегрирования и дифференцирования, так и приложениями таких конструкций в различных областях науки.

Используя аналогию с классическим математическим анализом интегро-дифференциальное уравнение дробного порядка определяют, как уравнение, задающее связь между функцией, ее производной и интеграла, имеющих различные порядки:

$$R(x(t), \frac{\partial^{\beta_i} x(t)}{\partial t^{\beta_i}}, f(t)) = 0, \beta_i \in R.$$

Зададим линейные интегро-дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами в виде:

$$\sum_{i=1}^m a_i(t) \cdot \frac{\partial^{\beta_i} x(t)}{\partial t^{\beta_i}} = f(t), n \geq \beta_1 > \beta_2 > \dots > \beta_m,$$

где n – округленное до целого значения число β_1 .

Для замыкания математической постановки уравнения дополняются начальными или граничными условиями [32].

Используя аналогию классического анализа и теории дифференциальных уравнений с концепциями дробного дифференциального исчисления, выделяют следующие классы уравнений:

- обыкновенные дифференциальные уравнения и их системы, решение которых дает неизвестную функцию только одного аргумента – пространственной координаты или времени;

- дифференциальные уравнения с частными производными относительно неизвестной функции многих переменных: в нестационарном случае – времени и пространственных координат и в стационарном случае – только пространственных переменных.

В противовес этому, интегро-дифференциальные уравнения дробного порядка в части методов их решения и классификации существенно отличаются от их целочисленных аналогов. Это обусловлено спецификой постановок задач и методов решений таких задач.

Обыкновенные дробно-дифференциальные уравнения классифицируют с точки зрения математического оператора как линейные и нелинейные, по виду уравнения – на уравнения с постоянными и переменными коэффициентами, однородные и неоднородные, и, кроме того, на одночленные, двучленные и многочленные по числу производных и (или) интегралов различных нецелых порядков.

Известная классификация дифференциальных уравнений с частными производными разделяет уравнения по наивысшему порядку входящих в него производных. Как правило, рассматривают уравнения n порядка параболического, гиперболического и эллиптического типов в зависимости от соотношения значений коэффициентов уравнений. Линейные уравнения параболического типа включают производные по времени первого порядка, а по пространственным переменным – второго. Линейные уравнения гиперболического типа содержат производные и по времени и по пространственным переменным второго порядка. Для линейных уравнений эллиптического типа производные по времени отсутствуют, а порядок производной по пространственным переменным равен двум. Интегро-дифференциальные уравнения в частных производных нецелых порядков, в зависимости от значений дробного порядка временной производной, относят к диффузионным, если порядок дробной производ-

ной изменяется между нулем и единицей, или к волновым при варьировании порядка дифференцирования в интервале от 1 до 2. Подобные уравнения также называют диффузионно-волновыми [32].

Чтобы решить интегро-дифференциальные уравнения нецелого порядка можно использовать методы следующих групп:

а) *аналитические методы* используют тогда, если возможно определить функцию Грина для решаемого уравнения. Как правило, решения уравнений будут содержать комбинацию функций Миттаг – Леффера, представляющих обобщение экспоненциальной функции;

б) *численные методы* используют определение производных дробного порядка на основе формулы Грюнвальда – Летникова, которая представляет некоторое обобщение формулы конечно-разностной аппроксимации производной и римановых сумм.

Использование операционного метода Лапласа при решении дробно-дифференциальных уравнений вызывает необходимость решать характеристические уравнения иррационального вида, что возможно только для линейных интегро-дифференциальных уравнений с постоянными и переменными коэффициентами [31].

2.3.2 Дробно-дифференциальные уравнения и их системы: начальные задачи.

Пусть требуется найти функцию $y(x)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} y(x) = f(x, y), \quad n-1 < \alpha \leq n, \quad n=1,2,\dots, \quad (2.9)$$

при начальных условиях

$$\frac{d^{\alpha-k}}{dx^{\alpha-k}} y_i(x) = b_k, \quad k=1,2,\dots,n, \quad (2.10)$$

где $f(x, y)$, α , b_1, \dots, b_n – заданные функции и постоянны величины.

Рассмотрим теорему о существовании и единственности решения поставленной задачи.

Обозначим через R_n множество точек (x, y) из области D , лежащей в $R \times R$:

$$R_n = \left\{ (x, y) \in D : 0 < x \leq h, \left| x^{n-\alpha} y(x) - \frac{b_n}{\Gamma(\alpha - n + 1)} \right| \leq a \right\},$$

$$a > \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h^{n-k} b_k}{\Gamma(\alpha - k + 1)}, \quad (2.11)$$

где a, h, b_0 – некоторые постоянные.

Теорема 1. Пусть $f(x, y)$ – вещественнозначная, непрерывная в области D функция, удовлетворяющая по y условию Липшица

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq A |y_1 - y_2|$$

и ограничению $\sup_{(x, y) \in D} |f(x, y)| = b_0 < \infty$. Тогда решение задачи Коши для $n=1$ в

области $R_1 \subset D$ существует, непрерывно и единственно [32].

Доказательство. Интегрируя уравнение (2.9), где $\frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}} = I^\alpha$, имеем

$$\frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}} \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} y(x) = \frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}} f(x, y), \text{ тогда согласно условию (2.10), получим}$$

$$y(x) = b_1 \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \int_0^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(t, y) dt. \quad (2.12)$$

Задача (2.9-2.10) приводится к уравнению (2.12). Покажем наоборот, что если непрерывная функция $f(x, y)$ удовлетворяет (2.12), то она удовлетворяет

и (2.9-2.10). Применяя к последнему равенству оператор $\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}$, имеем

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} y(x) = \frac{b_1}{\Gamma(\alpha)} \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} x^{\alpha-1} + \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} \frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}} f(x, y),$$

откуда $\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} y(x) = f(x, y)$.

Если к (1.12) применить оператор $\frac{d^{\alpha-1}}{dx^{\alpha-1}}$:

$$\frac{d^{\alpha-1}}{dx^{\alpha-1}} y(x) = \frac{b_1}{\Gamma(\alpha)} \frac{d^{\alpha-1}}{dx^{\alpha-1}} + \frac{d^{-1}}{dx^{-1}} f(x, y) = b_1 + \frac{1}{\Gamma(1)} \int_0^x f(t, y(t)) dt,$$

а затем положить $x = 0$.

Следовательно, уравнение (2.12) равносильно уравнению (2.9) с начальным условием (2.10).

$$\text{Пусть } y_0(x) = b_1 \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \quad y_n(x) = b_1 \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \int_0^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma_k(\alpha)} f(t, y_{n-1}(t)) dt,$$

$$n = 1, 2, \dots \quad (2.13)$$

Точки $(x, y_n(x))$ должны оставаться в R_1 при $0 < x \leq h$. Из условия $\sup_{(x,y) \in D} f(x, y) = b_0$ следует оценка

$$\begin{aligned} \left| x^{1-\alpha} y_n(x) - \frac{b_1}{\Gamma(\alpha)} \right| &= \left| \frac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t, y_{n-1}(t)) dt \right| \leq \\ &\leq \frac{b_0 x}{\Gamma(\alpha+1)} \leq \frac{b_0 h}{\Gamma(\alpha+1)}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Если $\frac{b_0 h}{\Gamma(\alpha+1)} < \alpha$, $(x, y_n(x)) \in R_1$ при $0 < x \leq h$.

$$\text{Согласно (2.13) имеем } |y_1(x) - y_0(x)| \leq \frac{b_0 x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \leq \frac{b_0 h^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

При $n = 1$ с помощью условия Липшица и предыдущей оценки получим

$$\begin{aligned} |y_2(x) - y_1(x)| &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} (f(t, y_1(t)) - f(t, y_0(t))) dt \right| \leq \\ &\leq \frac{A}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} |y_1(t) - y_0(t)| dt \leq \frac{A}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} \frac{b_0 t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} dt \leq \frac{A b_0 h^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)}. \end{aligned}$$

Повторив многократно, приходим к равенству

$$\left| x^{1-\alpha} y(x) - \frac{b_1}{\Gamma(\alpha)} \right| \leq \alpha,$$

которое в пределе при $n \rightarrow \infty$ следует из неравенства (2.14). Совершив в (2.13) предельный переход получим равенство (2.12).

Покажем, что при малых h решение $y(x)$ единственно. Пусть $\frac{Ah^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} < 1$, и предположим, что имеются два решения $y(x)$ и $Y(x)$ рассматриваемой задачи. Подставив их в (2.12), после вычитания получим

$$\left| y(x) - Y(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} (f(t, y(t)) - f(t, Y(t))) dt \right| \leq \\ \leq \frac{A}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} |y(t) - Y(t)| dt.$$

Предположим, что разность $|y(x) - Y(x)|$ на промежутке $0 < x \leq h$ принимает наибольшее значение δ при некотором $x = \xi$. Тогда при $x = \xi$ будем иметь $\delta \leq A\Gamma^{-1}(\alpha)\delta h^\alpha \alpha^{-1}$, что противоречит предположению. Теорема доказана [28].

2.4 Приложение дробного исчисления к решению прикладной задачи

2.4.1 Приложение дробного дифференцирования в естествознании. Примеры математических моделей.

В последние годы отмечается повышенный уровень внимания к использованию концепций дробного исчисления в различных прикладных областях: экология, физика, экономика при применении средств и методов математического и компьютерного моделирования для анализа и прогнозирования моделируемых систем.

Рядом авторов ранее были озвучены идеи модификации в механике – второго закона Ньютона, в теории упругости – закон Гука ($F = kx$) с помощью аппарата дробно-дифференциального исчисления с помощью соотношения общего типа [28]:

$$F = kx^{(\beta)},$$

где β – порядок дробной производной.

Фундаментальному закону теории относительности $E = m \cdot c^2$ также предлагалось поставить в соответствие закон, учитывающий эффект памяти и использующий дробный оператор интегрирования по времени [25]:

$$\frac{d^{-2\alpha}W(t)}{dt^{-2\alpha}} = m(t) \cdot c_0^2, \text{ где } 0 < \alpha < 1.$$

Также представляет интерес математическая модель аномальной диффузии, представленная в форме уравнения в частных производных смешанного порядков [28].

$$\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} = k \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},$$

где $\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}$ – производная дробного порядка α по Капуто.

Известно также применение теории дробного дифференцирования в теории вязкоупругости. Фундаментальные модели механики сплошной среды, формализующие связи между напряжениями $\sigma(t)$ и деформациями $\varepsilon(t)$, могут быть записаны в форме:

$$\sigma(\varepsilon) = b \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \text{ – закон Ньютона;}$$

$$\sigma(t) = m \cdot \varepsilon(t) \text{ – закон Гука;}$$

$$\sigma(t) + a \cdot \frac{d\sigma(t)}{dt} = b \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \text{ – модель Максвелла;}$$

$$\sigma(t) = m \cdot \varepsilon(t) + b \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \text{ – модель Фойгта;}$$

$$(1 + a \cdot \frac{d}{dt})\sigma(t) = (m + b \frac{d}{dt})\varepsilon(t) \text{ – модель Зенера, являющаяся обобщением}$$

указанных моделей.

Используя указанные модели, запишем обобщенное дифференциальное уравнение вязко-упругой системы [28]:

$$(1 + \sum_{k=1}^p a_k \cdot \frac{d^k}{dt^k})\sigma(t) = (m + \sum_{k=1}^q b_k \frac{d^k}{dt^k})\varepsilon(t).$$

Приведенное уравнение также называют операторным уравнением механической системы. Представим обобщение этого уравнения с учетом введения нецелых порядков для интегро-дифференциальных операторов [28]:

$$\left(1 + \sum_{k=1}^p a_k \cdot \frac{d^{\beta_k}}{dt^{\beta_k}}\right) \sigma(t) = \left(m + \sum_{k=1}^q b_k \frac{d^{\beta_k}}{dt^{\beta_k}}\right) \varepsilon(t), \quad \beta_k = k + \beta - 1, 0 < \beta \leq 1 .$$

Закон Мальтуса или закон динамики численности популяции в биологических приложениях реализует принцип аналогии в моделировании, задается линейным дифференциальным уравнением и его решение определяется экспоненциальной зависимостью вида:

$$u(t) = u(\tau) \cdot e^{\mu(t-\tau)}, \quad t, \tau \in [t_0, T], \mu - \text{характеристический параметр.}$$

Дробно-дифференциальная модификация модели динамики популяции

Мальтуса имеет вид [28]: $\frac{d^\alpha u}{dt^\alpha} = \mu \cdot u, \quad 1 \leq \alpha < 2$ [3].

2.4.2 Приложение дробного дифференцирования в экономике и финансах

Предметом исследования в магистерской диссертации являются дробно-дифференциальные модели финансовых систем. Данный класс динамических систем представляет интересный объект для исследования, поскольку подобные системы при определенном наборе начальных условий и параметров способны демонстрировать хаотическое поведение. Одной из широко цитируемых в литературе является математическая модель финансовой системы, задаваемая с помощью системы нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка [32]:

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = Z + (Y - a)X, \\ \frac{dY}{dt} = 1 - bY - X^2, \\ \frac{dZ}{dt} = -X - cZ, \end{cases}$$

где X – ставка процентов,

Y – спрос на капитальные вложения,

Z – индекс цен,

a, b, c – неотрицательные коэффициенты.

Дробно-дифференциальная модификация данной модели имеет вид [35]:

$$\begin{cases} \frac{d^{q_1} X}{dt^{q_1}} = Z + (Y - a)X, \\ \frac{d^{q_2} X}{dt^{q_2}} = 1 - bY - X^2, \\ \frac{d^{q_3} X}{dt^{q_3}} = -X - cZ. \end{cases}$$

Алгоритмическая и программная реализации данных моделей требует использования аналитических и численных подходов, развитых в теории дробно-дифференциального исчисления [32]. В целом можно заметить, что использование дробных производных позволяет строить концептуально новые математические модели процессов и явлений в широком спектре прикладных задач.

2.5 Аппроксимация формул дифференцирования и интегрирования нецелых порядков и численное решение дробно-дифференциальных уравнений

Рассмотрим формулы численного дифференцирования некоторой функции $f(t)$, задав на интервале изменения аргумента t сетку с шагом h [3]:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h}, \\ \frac{d^2}{dt^2} f(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)}{h^2}, \end{aligned} \tag{2.14}$$

...

$$\frac{d^n}{dt^n} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} f(t-jh),$$

где $\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!}$ – биномиальные коэффициенты.

Сделав аналогичные замены, получим формулу Грюнвальда – Летникова для определения дробной производной функции порядка α :

$$D_t^\alpha f(t) = \frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t}{h} \rfloor} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t-jh) =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{\left[\frac{t}{h} \right]} (-1)^j \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(j + 1)\Gamma(\alpha - j + 1)} f(t - jh), \quad (2.15)$$

где $[x]$ – целая часть x .

Функция $f(t)$ может быть приближенно проинтегрирована известным методом прямоугольников, если разбить интервал интегрирования на N участков длиной h

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \approx h(f(t) + f(t - h) + f(t - 2h) + \dots + f(t - nh)), \quad (2.16)$$

где $h = t / N$.

Аналогично для двойного интеграла формула численного интегрирования примет вид:

$$D_t^{-2} f(t) = \int_0^t \int_0^{t_1} f(t_2) dt_2 dt_1 \approx h^2 (f(t) + 2f(t - h) + 3f(t - 2h) + \dots + (n + 1)f(t - nh)),$$

где $h = t / N$.

Для n – кратного интегрирования можно получить [28]:

$$D_t^{-n} f(t) = \int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n-1}} f(t_1) dt_1 dt_2 \dots dt_{n-2} dt_{n-1} \approx h^n \sum_{j=0}^{\left[\frac{t}{h} \right]} (-1)^j \frac{(-n)!}{j!(-n-j)!} \times \\ \times f(t - jh) = h^n \sum_{j=0}^{\left[\frac{t}{h} \right]} \frac{(n+j-1)!}{j!(n-1)!} f(t - jh),$$

где $[x]$ – целая часть x .

Формула численной аппроксимации дробной производной может быть использована для построения сеточных алгоритмов приближенного решения дифференциальных уравнений нецелого порядка. Среди известных методов численного решения дифференциальных задач с дробной производной широкое развитие получили алгоритмы операционного исчисления. Кроме того, прямое использование формулы Грюнвальда-Летникова для аппроксимации производной позволяет строить эффективные явные и неявные конечно-разностные схемы решения дробно-дифференциальных задач [24].

Решение задачи Коши для ОДУ с дробной производной. Рассмотрим идею построения явной конечно-разностной схемы решения дифференциального уравнения нецелого порядка:

$$\frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} = g(x, t), \quad (2.17)$$

$$\text{с начальным условием } x(t_0) = x_0. \quad (2.18)$$

Формула Грюнвальда-Летникова для задачи (2.17)-(2.18) на сетке $\omega = \{t_i = t_0 + ih, i = \overline{0, T}\}$ может быть записана в следующей форме:

$$\frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{i=0}^T \frac{\Gamma(i-\alpha)}{\Gamma(i+1)} x(t-ih), \quad (2.19)$$

где h – шаг по времени.

Тогда последовательная аппроксимация производной для i -го узла $x(t_i) \approx x_i$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \frac{1}{h^\alpha} \left(\frac{\Gamma(-\alpha)}{\Gamma(1)} x_1 + \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(2)} x_0 \right) &= g(x_0, t_0), \quad i = 1; \\ \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \frac{1}{h^\alpha} \left(\frac{\Gamma(-\alpha)}{\Gamma(1)} x_2 + \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(2)} x_1 + \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\Gamma(3)} x_0 \right) &= g(x_1, t_1), \quad i = 2; \\ \dots \end{aligned}$$

позволяет сконструировать явную конечно-разностную схему:

$$x_{i+1} = \Gamma(1)(h^\alpha g(x_i, t_i) - \sum_{j=1}^{i+1} \gamma_j^\alpha x_{i-j+1}), \quad (2.20)$$

$$\text{где } i = \overline{0, k}; \quad \gamma_j^\alpha = \frac{\Gamma(j-\alpha)}{\Gamma(-\alpha) \cdot \Gamma(j+1)}. \quad (2.21)$$

Продемонстрируем результат работы программы на тест-примере. Программная реализация алгоритма явного конечно-разностного метода решения задачи вида (2.17) – (2.18) проведена в ППП Matlab.

$$\begin{cases} \frac{d^2 x(t)}{dt^2} - t^4 = 0, \quad 0 \leq t \leq 1 \\ x(1) = 0. \end{cases} \quad (2.22)$$

На рисунке 2.2а представлено сравнение численного решения уравнения с аналитическим:

$$x(t) = \frac{2^8}{315\sqrt{\pi}} t^{\frac{9}{2}}. \quad (2.23)$$

Абсолютная погрешность, возникающая при применении численной аппроксимации дробной производной, показана на рисунке 2.2б.

Полученный результат наглядно иллюстрирует хорошее согласование численного и аналитического решений.

Программная реализация численного решения дробно-дифференциального уравнения представлен в Приложении .

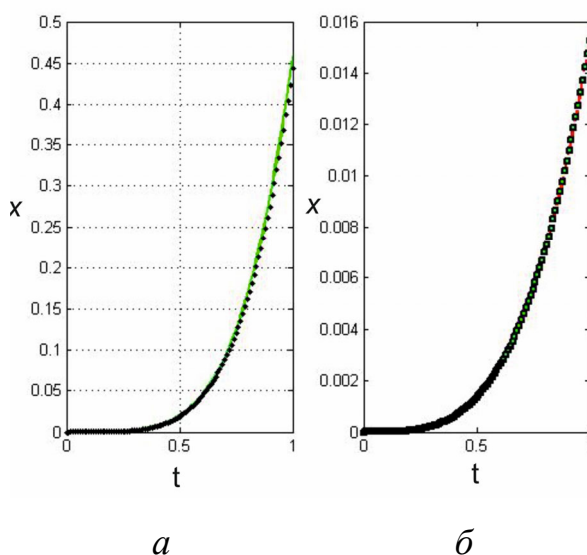


Рисунок 2.2 – Численное решение дробно-дифференциального уравнения – а;
Ошибка, возникающая при применении численного метода – б

Для общего нелинейного дифференциального уравнения дробного порядка численное решение является хорошим способом аппроксимации траектории. В статье [33] Xiao, Zhou и Zhang представили новый алгоритм численного решения дифференциальных уравнений дробного порядка, основанный на определении Грюнвальда-Летникова. Результаты численного решения с использованием нового метода и метода частотной области сравниваются и обсуждаются ограничения метода частотной области.

Петухов и Ревизников в [28] затронули вопрос численного решения дробно-дифференциальных уравнений, описывающих процессы аномальной диффузии. Проведен анализ устойчивости и порядка аппроксимации для построения явной и неявной разностных схем. Представлены вычислительные алгоритмы решения начально-краевых задач для уравнений, содержащих дробные производные по времени и пространству. Продемонстрировано хорошее согласование результатов численных решений с точным аналитическим.

Метод параметрической идентификации процесса аномальной диффузии рассматривается Овсиенко в работе [34]. Автор предлагает итерационную процедуру, которая позволяет свести задачу к среднеквадратичному оцениванию коэффициентов линейно-параметрической дискретной модели. Представлены результаты численных исследований, на основе которых можно сделать вывод об эффективности и высокой точности разработанного алгоритма.

В трудах [35] ученых Бондаренко и Иващенко представлены два метода численного решения краевых задач для уравнения дробной диффузии по времени.

В своей работе [32] Liu рассмотрел пространственное дробное уравнение Фоккера-Планка с мгновенным источником. Представлена численная схема реализации уравнения. Используя определения Римана-Лиувилля и Грюнвальда-Летникова для дробных производных, уравнение Фоккера-Планка преобразуется в систему обыкновенных дифференциальных уравнений, которая решается методом линий. Численные результаты для уравнений Фоккера-Планка с постоянным коэффициентом диффузии оценены для сравнения с известным аналитическим решением.

В статье [36] Благовидов и Лобанов предложили использовать многозначный метод для решения дифференциальных уравнений с дробной производной. Также в работе проведено исследование аппроксимации и устойчивости метода.

В [37] Мейланов, Магомедов и Рамазанова дают обобщение равновесной термодинамики на основе математического аппарата интегро-

дифференцирования дробного порядка. Традиционный подход является частным случаем предлагаемого обобщения. Также авторы предлагают «мультифрактальное» уравнение состояния.

В статье [38] Bhalekar Daftardar-Gejji алгоритм Адамса-Башфорта-Моултона был расширен для решения дифференциальных уравнений запаздывания. Численные иллюстрации представлены для демонстрации преимуществ метода. Хаотическое поведение наблюдается в одномерных систем запаздывания дробного порядка.

3 ФРАКТАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ ФИНАНСОВЫХ СИСТЕМ

3.1 Математическая постановка дробно-дифференциальной динамической модели финансовой системы

3.1.1 Фрактальная модель финансовой системы Ма и Чена

Как было показано в главе 1, математическая модель фрактальной динамики финансовой системы, предложенная авторами Ма и Ченом (Ma, Chen) [12-13], строится на базе детерминированной модели с учетом использования дробно-дифференциального подхода. Постановка задачи моделирования определяется задачей Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений дробного порядка. Динамическая модель, описывающая поведение финансовой системы, в математической постановке задается вариацией трех переменных состояния и имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} = z + (y - a) \cdot x, \\ \frac{d^\alpha y}{dt^\alpha} = 1 - b \cdot y - x^2, \\ \frac{d^\alpha z}{dt^\alpha} = -x - c \cdot z, \end{cases} \quad (3.1)$$

где x – ключевая ставка;

y – валовое накопление основного капитала;

z – индекс потребительских цен;

$a \geq 0$ – параметр (величина сбережений);

$b \geq 0$ – параметр (стоимость инвестиций);

$c \geq 0$ – параметр (эластичность спроса коммерческих рынков);

α – порядок дробной производной.

Для замыкания математической постановки дополним систему заданием начальных условий:

$$x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0, z(t_0) = z_0. \quad (3.2)$$

В целом, можно отметить, что данная модель является базовой, имеет большее теоретическое значение и представляет пример, демонстрирующий возникновение хаоса в прикладной задаче. Вместе с тем, модель финансовой системы (3.1)-(3.2), также как и модели Лоренца и Ресслера, относится к классу моделей в обобщенной постановке. Модель (3.1) – (3.2) формализована с помощью управляющих макроэкономических параметров, имеющих несогласованные размерности. Кроме того, отдельного рассмотрения требует согласование временного масштаба в связи с введением дробной производной для автономной системы.

3.1.2 Авторская модификация дробно-дифференциальной модели динамики финансовой системы

В рамках данной работы была предложена авторская модификация модели Ма и Чена. Концептуально модифицированная модель основана на следующих положениях:

- введение набора размерных параметров для согласования размерностей макроэкономических показателей, представляющих переменные и параметры системы;

- введение переменной ξ – безразмерного времени для согласования размерностей величин, характеризующих скорость протекания процесса:

$$\xi = \frac{t}{t^*}, \quad dt = t^* d\xi; \quad [\xi] = \left[\frac{t}{t^*} \right] = 1, \quad \text{с обратной заменой } t = t^* \cdot \xi;$$

- введение закона логистического роста для динамики валового накопления основного капитала;

- введение линейной зависимости динамики ВВП от ключевой ставки и введение коррелирующей зависимости между ключевой ставки и индексом потребительских цен (исходя из анализа реальных показателей).

Модифицируем модель (3.1)-(3.2) в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений дробного порядка с начальными условиями:

$$\begin{cases} \frac{d^\alpha x}{d\xi^\alpha} = (\alpha_1 z + \alpha_2 (y - a) \cdot x) t^* \\ \frac{d^\alpha y}{d\xi^\alpha} = \left(\beta_1 y \left(1 - \frac{y}{K} \right) - \beta_2 x \right) t^* , \quad x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0, z(t_0) = z_0 , \\ \frac{d^\alpha z}{d\xi^\alpha} = (\gamma_1 x - \gamma_2 c z) t^* \end{cases} \quad (3.3)$$

где переменные модели: x – ключевая ставка, % в долях от ед.; y – валовое накопление основного капитала, ден.ед.; z – индекс потребительских цен, индекс-очки; $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, K, \gamma_1, \gamma_2, c$ – параметры модели.

Описание переменных и параметров математической модели, единицы измерения представлены в таблице 3.1.

Таблица 3.1 – Переменные и параметры математической модели, характерные размерные значения и начальные условия

Обозначение	Описание	Ед. измерения	Значение
α_1	зависимая от индекса потребительских цен скорость роста ключевой ставки x	1/год	0.001
α_2	зависимая от GFCF скорость изменения ключевой ставки	1/(год*ден.ед)	0.002
β_1	скорость роста y (GFCF)	1/год	0.1
β_2	зависимая от ключевой ставки скорость уменьшения y	млрд.€/ (год*ден.ед)	1
γ_1	зависимая от ключевой ставки скорость роста z	1/год	1
γ_2	скорость уменьшения индекса потребительских цен z	1/год	0.001
K	равновесное значение для y (GFCF)	млрд.€	200
x_0	ключевая (процентная) ставка при t_0	доли от ед.	0.04=4%
y_0	валовое накопление основного капитала (GFCF) при t_0	млрд.€	116
z_0	индекс потребительских цен при t_0	индекс-очки/ 100=д.ед	0.98
a	величина сбережений	млрд.€	400
c	эластичность спроса коммерческих рынков	–	1

3.2 Исследование устойчивости динамической системы

Проведем качественный анализ модели (3.1) – (3.2) на устойчивость с использованием критерия Рауса-Гурвица. Для этого зафиксируем значения параметров $c=1$, $b=0.1$. Определим точки равновесия из решения стационарного уравнения:

$$\begin{cases} x(y-a) + z = 0, \\ 1 - by - x^2 = 0, \\ -x - cz = 0, \end{cases}$$

в зависимости от значения параметра a .

Выразим из последних двух алгебраических уравнений переменные y и z :

$$z = -\frac{x}{c},$$
$$y = -\frac{x^2}{b} + \frac{1}{b}.$$

Подставив z и y в первое уравнение системы, получим три решения в зависимости от значений параметров модели:

$$M_1\left(0, \frac{1}{b}, 0\right), M_{2,3}\left(\pm\sqrt{1 - ab - \frac{b}{c}}, \frac{1}{c} + a, \mp\frac{\sqrt{1 - ab - \frac{b}{c}}}{c}\right).$$

Запишем матрицу Якоби для системы линейных алгебраических уравнений в следующем виде:

$$J(x, y, z) = \begin{pmatrix} y - a & x & 1 \\ -2x & -b & 0 \\ -1 & 0 & -c \end{pmatrix}.$$

Составим характеристическое уравнение, используя условие:

$$\begin{vmatrix} y - a - \lambda & x & 1 \\ -2x & -b - \lambda & 0 \\ -1 & 0 & -c - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

где λ – собственные числа.

Имеем

$$(-c - \lambda)(-b - \lambda)\left(\frac{1}{b} - a - \lambda\right) - (b + \lambda) = 0.$$

Для определенности будем считать, что значения параметров b и c зафиксированы: $b=0.1$ и $c=1$, а значение параметра a варьируется. Определенность параметров b и c накладывает ограничения на значение параметра a для второй и третьей особых точек: $1 - ab - \frac{b}{c} \geq 0$. Откуда следует, что должно удовлетворять условию: $a \leq 9$.

Далее проведем исследование на устойчивость с использованием критерия Рауса-Гурвица. Рассмотрим частные случаи:

- Для точки $M_1\left(0, \frac{1}{b}, 0\right)$ параметры a , b , c могут принимать любые фиксированные значения, в нашем случае $b=0.1$ и $c=1$. Получим характеристическое уравнение в виде:

$$\lambda^3 + (a - 8.9)\lambda^2 + (1.1a - 9.9)\lambda + (0.1a - 0.9) = 0.$$

Согласно критерию Рауса-Гурвица, решение системы устойчиво, если одновременно справедливы следующие неравенства:

$$a - 8.9 > 0,$$

$$1.1a - 9.9 > 0,$$

$$0.1a - 0.9 > 0,$$

$$(a - 8.9)(1.1a - 9.9) - (0.1a - 0.9) > 0.$$

Получаем, что при $a > 9$ мы имеем асимптотически устойчивое решение, соответствующее особой точке M_1 (все неравенства верны одновременно).

- Для точек $M_{2,3}\left(\pm \sqrt{1 - ab - \frac{b}{c}}, \frac{1}{c} + a, \mp \frac{\sqrt{1 - ab - \frac{b}{c}}}{c}\right)$ параметры b , c

фиксированы, а параметр a определяется из условия неотрицательности подкоренного выражения, в нашем случае $b=0.1$, $c=1$ и $a \leq 9$.

Получим характеристическое алгебраическое уравнение третьего порядка:

$$\lambda^3 + 0.1\lambda^2 + (1.8 - 0.2a)\lambda + (1.8 - 0.2a) = 0.$$

Согласно критерию Рауса-Гурвица, решение системы устойчиво, если одновременно справедливы неравенства и для последнего уравнения:

$$1.8 - 0.2a > 0,$$

$$0.1(1.8 - 0.2a) - (1.8 - 0.2a) > 0.$$

В одном из неравенств Рауса-Гурвица требуем $a < 9$, в другом $a > 9$. Но одновременно это не может быть верно. Из этого следует, что при $b=0.1$, $c=1$ и $a \leq 9$ решения, соответствующие особым точкам M_2 и M_3 , будут асимптотически неустойчивы.

3.3 Конструирование вычислительной схемы для реализации модели финансовой системы

3.3.1 Явная конечно-разностная схема

Вычислительную схему для реализации модели (3.1), (3.3) будем строить с использованием формулы Грюнвальда-Летникова [14] для численной аппроксимации производной дробного порядка на временной сетке $\omega = \{t_i = ih, i = \overline{0, T}\}$:

$$\frac{d^\alpha X^k(t)}{dt^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{i=0}^T \frac{\Gamma(i-\alpha)}{\Gamma(i+1)} X^k(t-ih), \quad (3.4)$$

где h – шаг по времени;

$k = \overline{1, 3}$ – индекс переменной модели;

$\Gamma(\alpha)$ – гамма-функция Эйлера.

Для конструирования вычислительной схемы решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений дробного порядка рассмотрим сначала общий принцип решения одного дробно-дифференциального уравнения в следующей общей постановке:

$$\frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} = g(x, t), \quad (3.5)$$

где $x(t)$ – искомая функция;

α – порядок дробной производной.

$g(x,t)$ – функция правой части дифференциального уравнения с начальным условием

$$x(t_0) = x_0. \quad (3.6)$$

Формула Грюнвальда-Летникова для аппроксимации производной $\frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha}$ на сетке $\omega = \{t_i = t_0 + ih, i = \overline{0, T}\}$ может быть записана в следующей форме:

$$\frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{i=0}^T \frac{\Gamma(i-\alpha)}{\Gamma(i+1)} x(t-ih), \quad (3.7)$$

где h – шаг по времени.

Тогда последовательная аппроксимация производной для i -го узла $x(t_i) \approx x_i$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \frac{1}{h^\alpha} \left(\frac{\Gamma(-\alpha)}{\Gamma(1)} x_1 + \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(2)} x_0 \right) &= g(x_0, t_0), \quad i=1; \\ \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \frac{1}{h^\alpha} \left(\frac{\Gamma(-\alpha)}{\Gamma(1)} x_2 + \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(2)} x_1 + \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\Gamma(3)} x_0 \right) &= g(x_1, t_1), \quad i=2; \\ \dots \end{aligned}$$

и подстановка конечно-разностного аналога в уравнение (3.5) позволяет сконструировать явную конечно-разностную схему:

$$x_{i+1} = h^\alpha g(x_i, t_i) - \sum_{j=1}^{i+1} \lambda_j^\alpha x_{i-j+1}, \quad (3.8)$$

$$\text{где } \lambda_j^\alpha = \frac{\Gamma(j-\alpha)}{\Gamma(-\alpha) \cdot \Gamma(j+1)}.$$

Таким образом, обобщим схему численного решения задачи (3.5)-(3.6) на случай трех независимых переменных модели (3.1), (3.3) и запишем явную конечно-разностную схему решения задачи:

$$X_{GL}^p(t_{i+1}) = h^\alpha f(t_i, X_{GL}^c(t_i)) + \frac{X_0}{i^\alpha \Gamma(1-\alpha)} - \sum_{j=1}^{i+1} \Lambda_j^\alpha X_{GL}^c(t_{i-j+1}), \quad (3.9)$$

где $i = \overline{1, N-1}$, $\Lambda_j^\alpha = \frac{\Gamma(j-\alpha)}{\Gamma(-\alpha) \cdot \Gamma(j+1)}$; вектор X имеет k компонент:

$$X^{(k)}, k = \overline{1, 3}$$

Порядок аппроксимации производной в схеме (3.9) соответствует $O(h)$. В этом случае можно провести аналог с явными многошаговыми методами для решения задач Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений целого порядка [19], например с методом Адамса. При использовании последних, для расчета значения функции в i -ом узле используют p значений в предыдущих узлах в зависимости от порядка точности метода. В случае решения дробно-дифференциального уравнения используются значения во всех предыдущих узлах. Поэтому общая схема (3.9) отражает идейный смысл использования дробной производной для моделирования системы с памятью: каждое последующее значение рассчитывается через все предыдущие.

3.3.2 Модифицированная схема типа «предиктор-корректор»

Идея предиктор-корректорного метода заключается в совместном применении явного и неявного метода одинакового или смежного порядков. Для модификации вычислительной схемы (3.9) по явной формуле на первом шаге рассчитаем «пробное» приближение X_{GL}^p , а при помощи неявной схемы уточним это значение, подставив приближенное X_{GL}^c в правую часть:

$$X_{GL}^p(t_{i+1}) = h^\alpha F(t_i, X_{GL}^c(t_i)) + \frac{X_0}{i^\alpha \Gamma(1-\alpha)} - \sum_{j=1}^{i+1} \Lambda_j^\alpha X_{GL}^c(t_{i-j+1}), \quad (3.10)$$

где $i = \overline{1, N-1}$;

$$X_{GL}^c(t_{i+1}) = h^\alpha F(t_{i+1}, X_{GL}^p(t_{i+1})) + \frac{X_0}{i^\alpha \Gamma(1-\alpha)} - \sum_{j=1}^{i+1} \Lambda_j^\alpha X_{GL}^c(t_{i-j+1}), \quad (3.11)$$

где $i = \overline{1, N-1}$, вектор X задается k компонентами $X^{(k)}, k = \overline{1, 3}$ с учетом начальных условий.

В (3.9), (3.10), (3.11) мы учли индексацию массивов, начиная с первого номера (в соответствии с правилами Matlab).

3.4 Программная реализация и верификация работы прикладной программы

Приведем формальное представление алгоритма решения прикладной задачи – моделирования динамики финансовой системы в постановках (3.1) – (3.2) и (3.3) в виде блок-схемы, показанной на рисунке 3.1.

Программная реализация алгоритма явного конечно-разностного метода (3.9) и алгоритма схемы «предиктор-корректор» проведена в ППП Matlab. Прикладная программа предназначена для реализации математической модели любой динамической системы, которая может быть описана системой обыкновенных дробно-дифференциальных уравнений (произвольной размерности), дополненной начальными условиями.

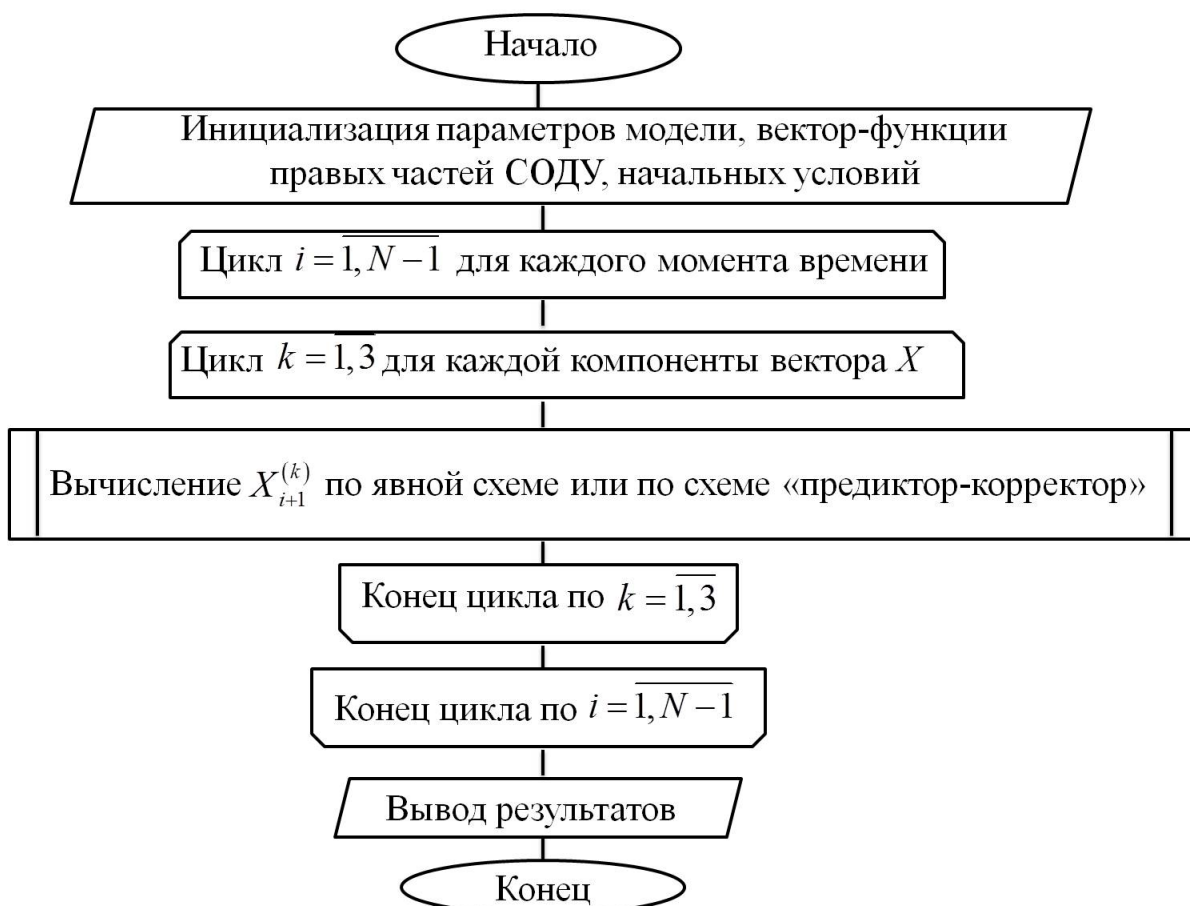


Рисунок 3.1 – Блок-схема алгоритма реализации модели

Matlab – это высокоуровневый язык и интерактивная среда для программирования, численных расчетов и визуализации результатов. С помощью

Matlab можно анализировать данные, разрабатывать алгоритмы, создавать модели и приложения [39]. Основные достоинства этого пакета заключаются в возможности совместного применения алгоритмических основ программирования, встроенного инструментария для решения частных математических задач и среды разработки графического интерфейса пользователя, что позволяет создавать, модифицировать и интегрировать в комплексы проблемно-ориентированных программ отдельные функциональные и системные модули, ориентированные на решение поставленных научных задач.

Сформулируем стандартную спецификацию на разработку прикладной программы.

Системные требования. Рекомендуемыми системными требованиями являются: операционная система Windows XP/Vista/7/8/10 Mac, Linux, процессор Intel или AMD, видеокарта с памятью 1 Гб, оперативная память 2 Гб, 4-6 Гб на диске, мышь, монитор.

Входные и выходные данные.

Входные данные:

-начальные условия – ключевая ставка, валовое накопление основного капитала и индекс цен в начальный момент времени;

-порядок дробного дифференцирования;

-параметры управления вычислительным процессом – шаг по времени, период наблюдения;

-параметры моделей – величина сбережений, стоимость инвестиций и эластичность спроса коммерческих рынков (для модели Ма и Чена) и параметры, указанные в таблице 3.1, для модифицированной модели;

Выходные данные: графическая визуализация решений – динамика ключевой ставки, валового накопления основного капитала и индекса цен.

Структура прикладной программы и назначение отдельных модулей.

Листинг прикладной программы представлен в Приложении [40]. Запуск программы осуществляется с помощью скрипт-файла `Mainfinance.m`. Программа включает блок инициализации параметров модели и параметров

управления вычислительным процессом. Параметры модели объявлены как глобальные. Основная процессорная часть включает реализацию явной схемы (3.9) или предиктор-корректорной схемы (3.10)-(3.11) (в листинге показан пример с реализацией предиктор-корректорной схемы). Программа вызывает функцию правой части системы обыкновенных дробно-дифференциальных уравнений (которая определяет конкретную модель). Для классической модели Чена и Ма предназначена функция `funod.m`. Заключительная часть программы содержит графический вывод результатов.

Верификация работы программы на тестовых задачах.

1 тест – сравнение численного и аналитического решений

Для проверки адекватности работы программы рассмотрим тест-пример и проведем сравнение аналитического решения и решения, найденного численным методом (с помощью предиктор-корректорной схемы).

Пусть требуется решить задачу Коши для системы обыкновенных дробно-дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} = -2x + y \\ \frac{d^\alpha y}{dt^\alpha} = x - 2y \end{cases} \quad (3.12)$$

с начальными условиями $x(0) = 2$, $y(0) = 0$.

Частное решение, полученное аналитически, записывается с помощью функции Миттаг – Леффера:

$$\begin{cases} x(t) = E_\alpha(-t^\alpha) + E_\alpha(-3t^\alpha) \\ y(t) = E_\alpha(-t^\alpha) - E_\alpha(-3t^\alpha) \end{cases}, \text{ где } E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(1 + \alpha k)}.$$

Для сравнения с численным решением положим порядок дробной производной $\alpha=0.75$. Решим систему (3.12) при помощи разработанной программы в ППП Matlab и приведем графическую визуализацию. Результаты сравнения точного и приближенного решения тест-задачи (3.12) приведены на

рисунке 3.2 для $x(t)$, на рисунке 3.3 для $y(t)$, где $x(t)$, $y(t)$ – приближенные решения, найденные по предиктор-корректорной схеме (3.10)-(3.11).

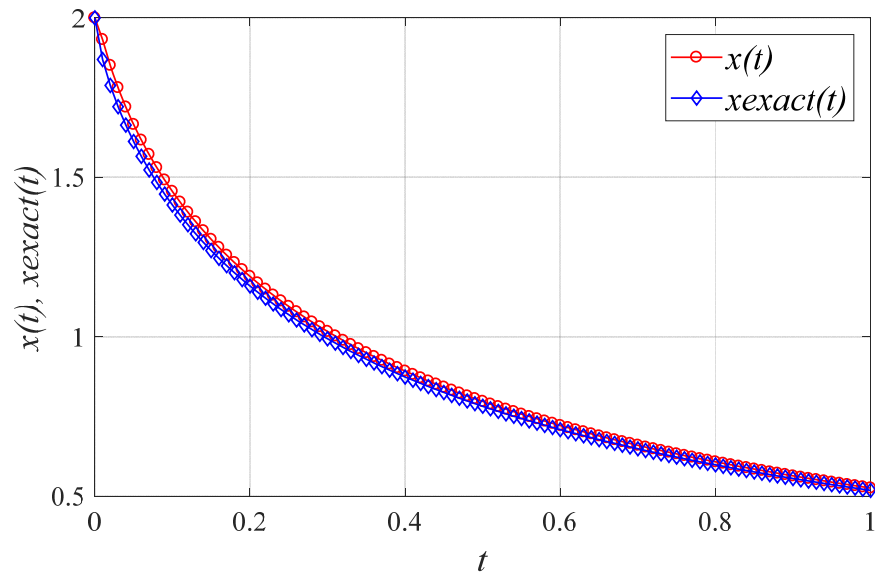


Рисунок 3.2 – Точное $x_{exact}(t)$ и приближенное $x(t)$ решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (3.12).

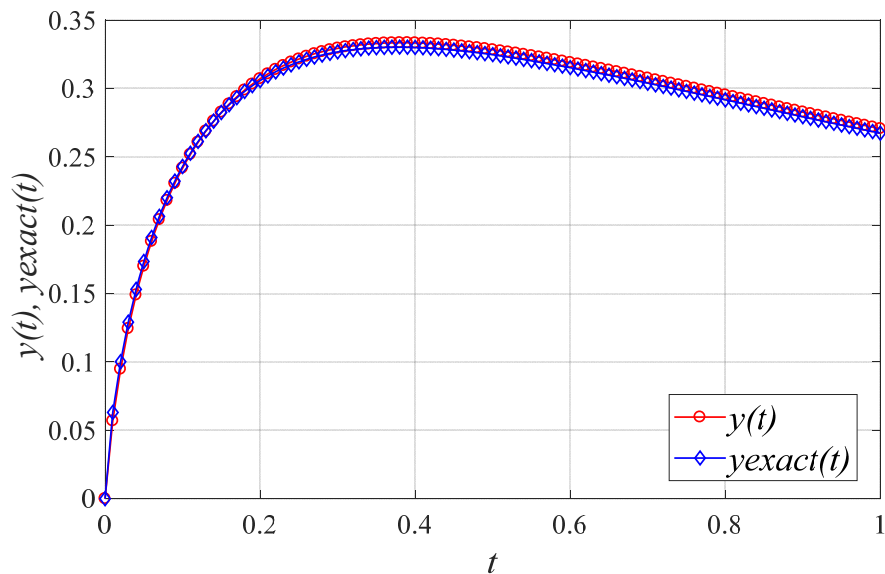


Рисунок 3.3 – Точное $y_{exact}(t)$ и приближенное $y(t)$ решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (3.12).

2 тест – сравнение решений, полученных на основе явного и предиктор-корректорного методов

Проведем сравнение численных решений, полученных на основе явного (3.9) метода и предиктор-корректорной схемы (3.10)-(3.11). Используем оценку погрешности численного решения на основе расчета невязок, вычисленных согласно выражениям:

$$\begin{cases} Rx = \frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} + 2x - y \\ Ry = \frac{d^\alpha y}{dt^\alpha} - x + 2y \end{cases}$$

Абсолютная погрешность оценивалась с помощью двух видов норм: нормы Евклида и нормы-максимум [41]. Значения расчетов практической оценки погрешности приведены в таблицах 3.2 и 3.3. Абсолютная погрешность результата, полученного на основе предиктор-корректорной схемы на порядок меньше по сравнению с результатом, полученным по явной схеме.

Таблица 3.2 – Практическая оценка погрешности, явный метод

Переменная	Оценка погрешности численного решения	
	Норма Евклида $\xi = \sqrt{\sum_i (X - \bar{X})^2}$	Норма-максимум $\xi = \max_i X - \bar{X} $
$\ Rx\ $	0.4330	0.1045
$\ Ry\ $	0.3117	0.0824

Таблица 3.3 – Практическая оценка погрешности, схема предиктор-корректор

Переменная	Оценка погрешности численного решения	
	Норма Евклида $\xi = \sqrt{\sum_i (X - \bar{X})^2}$	Норма-максимум $\xi = \max_i X - \bar{X} $
$\ Rx\ $	0.0120	0.0029
$\ Ry\ $	0.0107	0.0027

На рисунках 3.4 и 3.5 показаны графики невязок численного решения, полученных по предиктор-корректорной и явной схемам.

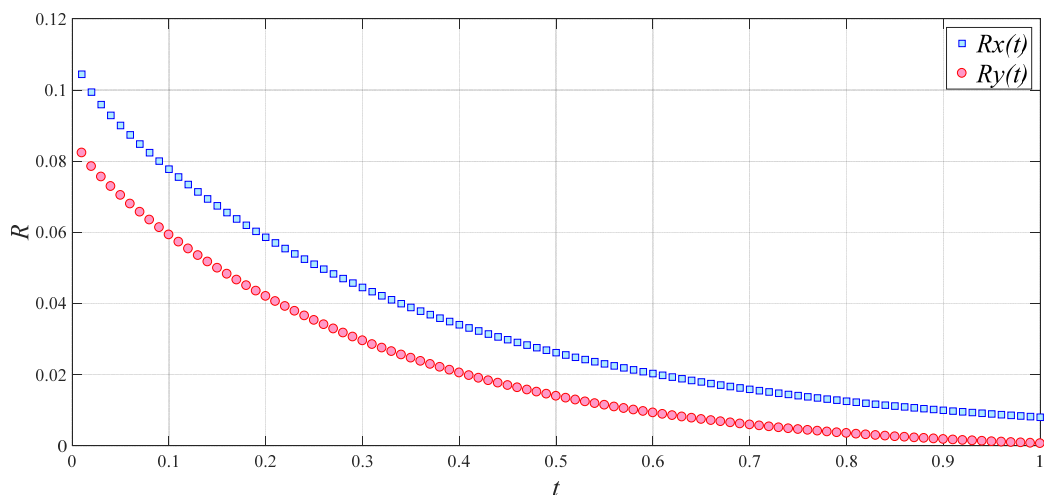


Рисунок 3.4 – Невязка численного решения, полученная явным методом

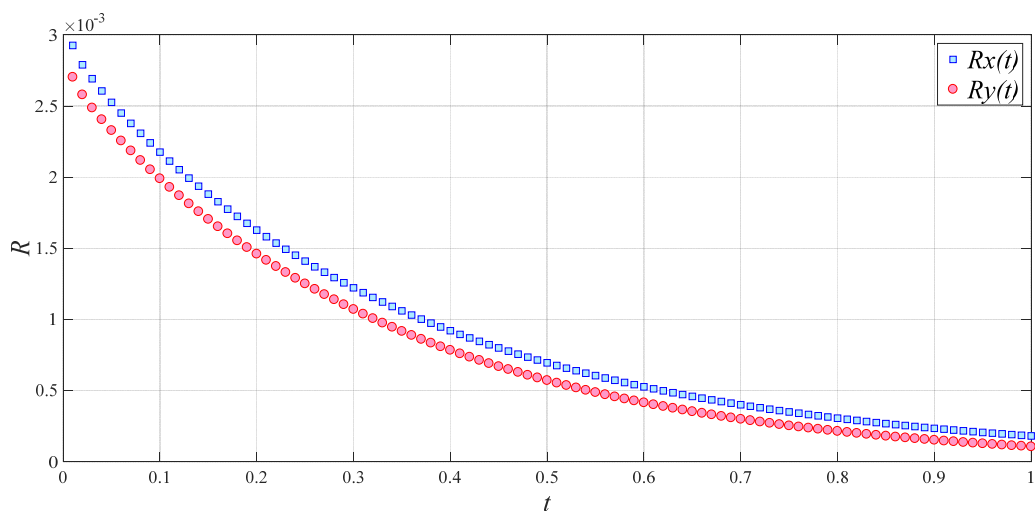


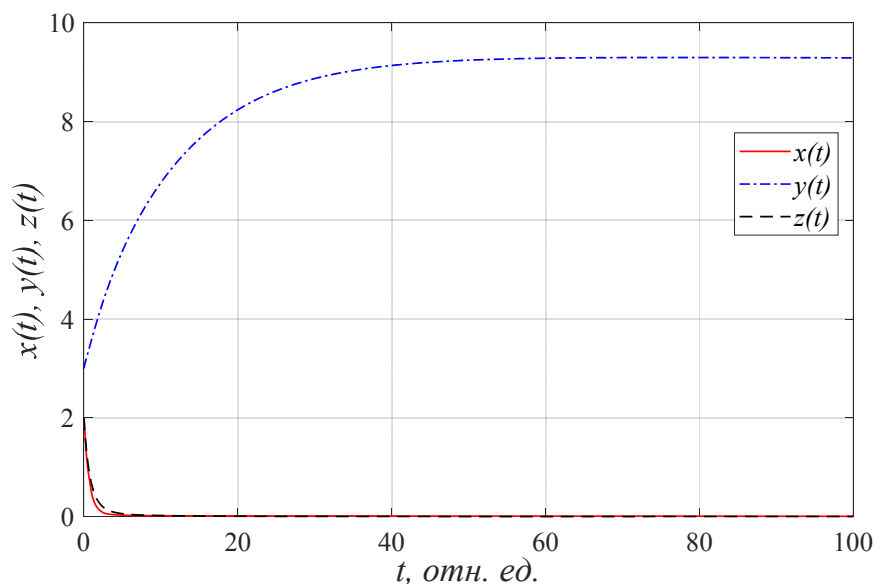
Рисунок 3.5 – Невязка численного решения, полученная по предиктор-корректорному методу

3.5 Вычислительный эксперимент

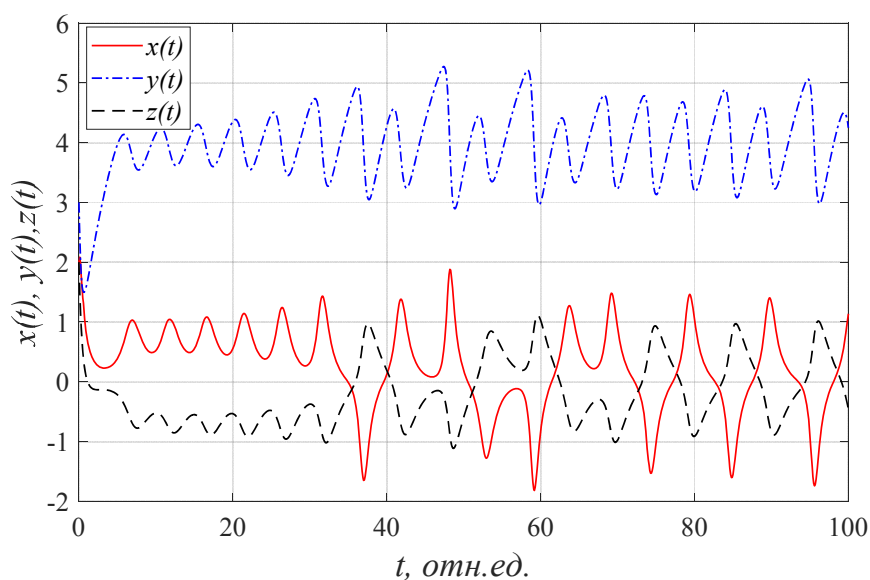
3.5.1 Вычислительный эксперимент в концепции реализации модели финансовой системы Ма и Чена

Проведем серию вычислительных экспериментов для реализации модели Ма и Чена в постановке (3.1) и (3.2). Моделирование будем проводить в нормированных величинах. Параметры модели будем варьировать. При рассмотрении результатов вычислительных экспериментов ограничимся качественным анализом [42].

Вычислительный эксперимент № 1. Продемонстрируем реализацию модели для двух режимов: устойчивого и неустойчивого. Установим значения параметров: стоимость инвестиций $b=0.1$, эластичность спроса коммерческих рынков $c=1$, порядок дробного дифференцирования $\alpha=0.9$.



a



б

Рисунок 3.6 – Динамические характеристики – ключевая ставка $x(t)$, валовое накопление основного капитала $y(t)$, индекс цен $z(t)$ (параметры моделирования:

$b=0.1, c=1, \alpha=0.9, x_0=2, y_0=3, z_0=2, T=15$): $a=10 - a$; $a=3 - б$

На рисунке 3.5 показана динамика изменения показателей финансовой системы при различных значениях параметра a – величины сбережений: $a=10$ (рисунок 3.6 а) и $a=3$ (рисунок 3.6 б).

В соответствии с теоретическим анализом устойчивости согласно критерию Рауса-Гурвица, можно наблюдать поведение характеристик модели в устойчивом режиме при $a=10$ (рисунок 3.6 а) и неустойчивом – при $a=3$ (рисунок 3.6 б).

Устойчивое решение характеризуется релаксацией системы к стационарному состоянию: ключевая ставка и индекс цен через 5 усл. ед. времени приближаются к нулевым значениям; валовое накопление основного капитала имеет на первом шаге небольшое снижение и далее более длительный период релаксации – через 100 усл. ед. времени стремятся к постоянному значению 10 усл. ед. Качественно такая экономическая ситуация может быть описана плавным ростом накопления основного капитала и резким снижением ключевой ставки и индекса цен, что характеризует благоприятный инвестиционный климат и стабильное развитие финансово-экономической системы [43]. Логистический рост основного капитала характерен для многих математических моделей макроэкономических систем. Переменные, описывающие поведение модели, переходят в состояние насыщения. Это объясняется ограниченностью ресурсов, ограниченностью спроса на определенные группы товаров и технологий, существованием внешних политико-экономических факторов, препятствующих независимому развитию экономик отдельных государств, и т.п. Понятно, что в реальных условиях, только для развитых экономик, ключевая ставка и индекс цен, дающий стоимость потребительской корзины, могут принимать нулевые значения. Так например, по данным сайта <https://ru.tradingeconomics.com> [23] финансово «благополучные» страны Еврозоны (Германия, Франция, Австрия, Люксембург и др.) имеют нулевую ключевую ставку, а в некоторых странах (Швейцария, Дания, Швеция) ключевая ставка принимает отрицательные значения. В России значение ключевой ставки 9.25%, это говорит о том, что в этом случае реализуемая экономико-

математическая модель может быть применена только для прогнозирования макроэкономических характеристик в краткосрочном периоде.

При преодолении параметром a (величины сбережений), порога, равного 9 усл. ед., система переходит в неустойчивый режим при фиксированных значениях параметров b и c (рисунок 3.6 б). В этом случае можно наблюдать хаотические колебания управляющих переменных модели: ключевой ставки $x(t)$, валового накопления основного капитала $y(t)$, индекса цен $z(t)$. Качественно такая картина соответствует неуправляемому, нестабильному поведению финансовой системы. Хаос в динамической системе наглядно демонстрирует трехмерная фазовая диаграмма состояния модели, построенная для фиксированного набора характерных параметров модели [44]. На рисунке 3.7 б показан аттрактор модели финансовой системы. Состояние системы, к которому она эволюционирует, имеет схожие черты с аттракторами систем Лоренца и Ресселера. На рисунке 3.7 а изображен трехмерный фазовый портрет финансовой системы в устойчивом режиме.

Результаты реализации компьютерной модели динамики фрактальной модели финансовой системы представлены в авторской работе [45].

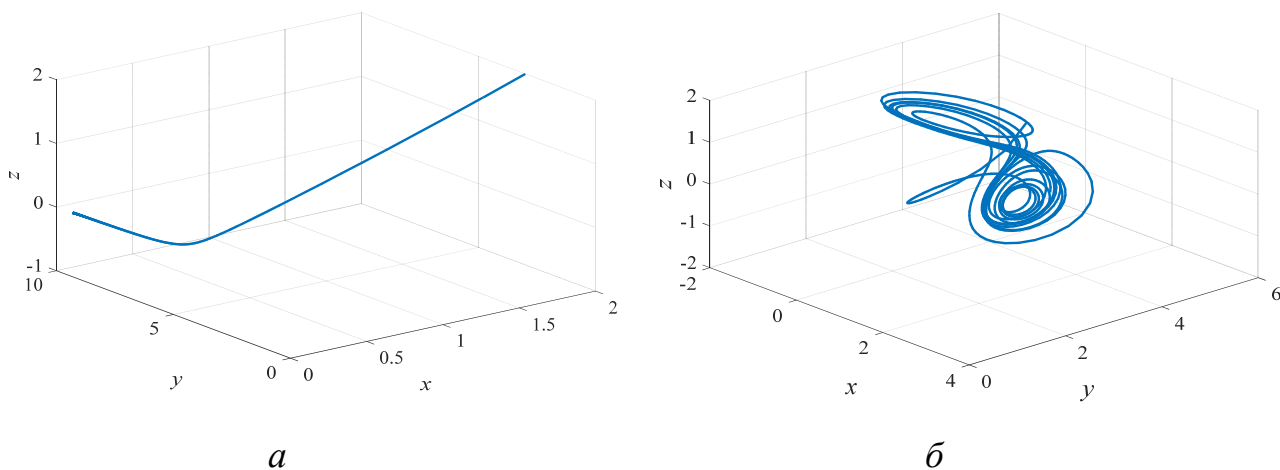


Рисунок 3.7 – Трехмерный фазовый портрет
 (значения параметров: $b=0.1$, $c=1$, $\alpha=0.9$, $x_0=2$, $y_0=3$, $z_0=2$, $T=100$)
a – устойчивый режим ($a=10$), *б* – неустойчивый режим ($a=3$)

Вычислительный эксперимент № 2. Исследуем поведение модельных характеристик при варьировании параметра дробного дифференцирования α . Остальные параметры модели зафиксируем: $b=0.1$, $c=1$, $a=10$, $x_0=2$, $y_0=3$, $z_0=2$, $T=40$.

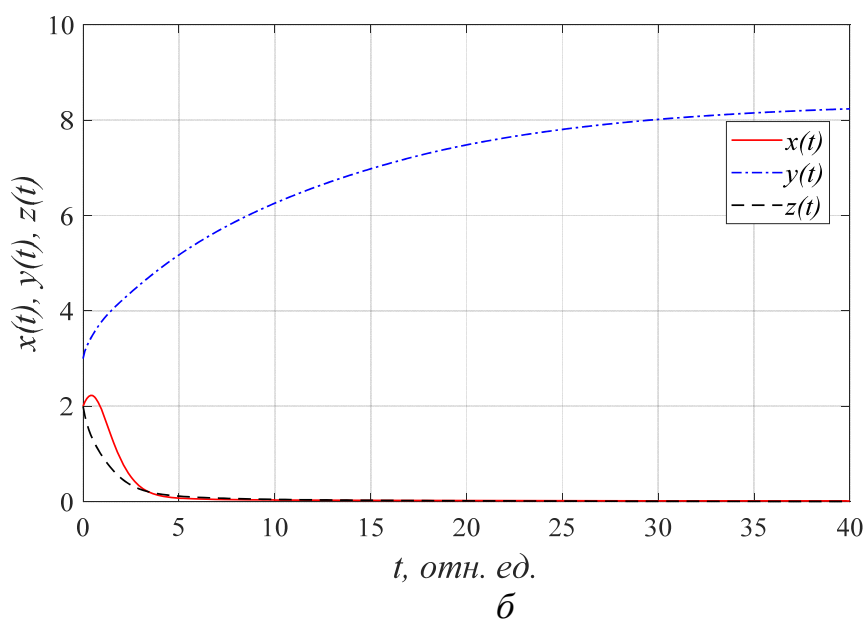
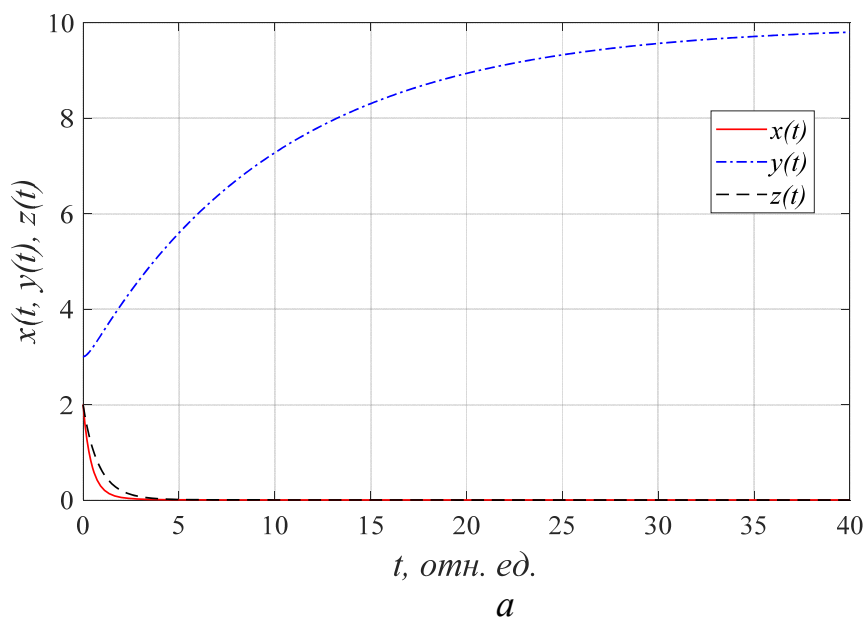


Рисунок 3.8 – Модельное представление динамических характеристик системы: ключевая ставка $x(t)$, валовое накопление основного капитала $y(t)$, индекс цен $z(t)$ при различных значениях параметра α : $\alpha=0.99$ – α ; $\alpha=0.8$ – β

Как было показано выше, параметр α отвечает за присутствие эффекта памяти в системе. Если полный интервал возможных значений α есть $(0,1)$, то его предельные крайние значения можно интерпретировать таким образом: при $\alpha=0$ как производная нулевого порядка, т.е. значение самой функции и при $\alpha=1$ – производная первого порядка. При анализе фрактальных систем, моделирующих реальные физические процессы, α , как правило, выбирают из диапазона $(0.5,1)$ [24-25]. При приближении к правой границе интервала $\alpha \rightarrow 1$ – поведение модели больше соответствует детерминированному случаю – реализации модели в целых производных [13]. Соответственно, случай модели с более выраженными фрактальными свойствами имеет место при приближении α к левой границе интервала: $\alpha \rightarrow 0.5$.

Установим для определенности два значения: $\alpha=0.99$ и $\alpha=0.8$ и исследуем модельные зависимости при реализации устойчивого режима. Результаты показаны на рисунке 3.8.

Можно заключить, что для устойчивого режима при переходе к фрактальной модели характер динамики индекса цен сохраняется, в то время как поведение других показателей меняется. Для валового накопления основного капитала график функции становится выпуклым, сохраняя возрастающий тренд. График функции ключевой ставки характеризуется возрастанием на малых временах и дальнейшая релаксация к нулевому уровню.

Таким образом, анализ экономического смысла данных математического моделирования позволяет заключить, что устойчивое состояние финансовой системы должно быть более предпочтительным и для перехода к устойчивой экономике и обеспечения роста валового накопления уставного капитала требуется снижение ключевой ставки и индекса цен «почти» до нулевого уровня. Так например, в период глобального экономического кризиса 2009 года многие европейские банки снизили ключевую ставку до нуля, что послужило мерой стабилизации экономик ряда государств. Понятно, что в условиях российской экономики (высокой ежегодной инфляции) такие меры трудно реализуемы.

Отметим, что в данной части работы приведен только качественный анализ результатов вычислительных экспериментов для исследуемой модели. Проведение количественного анализа требует дополнительного исследования математической формализации модели на предмет анализа размерностей параметров модели, а также придания им корректных численных значений, соответствующих реальным финансовым системам. Это составляет перспективы дальнейшего исследования и продолжения работы по изучению и модификации математической модели поведения финансовых систем.

3.5.2 Вычислительный эксперимент в концепции реализации модифицированной модели финансовой системы

Вычислительный эксперимент. Проведем реализацию модели в размерных параметрах на примере расчета макроэкономических показателей Германии. Результаты моделирования приведены в сравнении с данными, приведенными на сайте [tradingeconomics](https://tradingeconomics.com/) и в сравнении с данными модели Ма и Чена и изображены на рисунках 3.9-3.11.

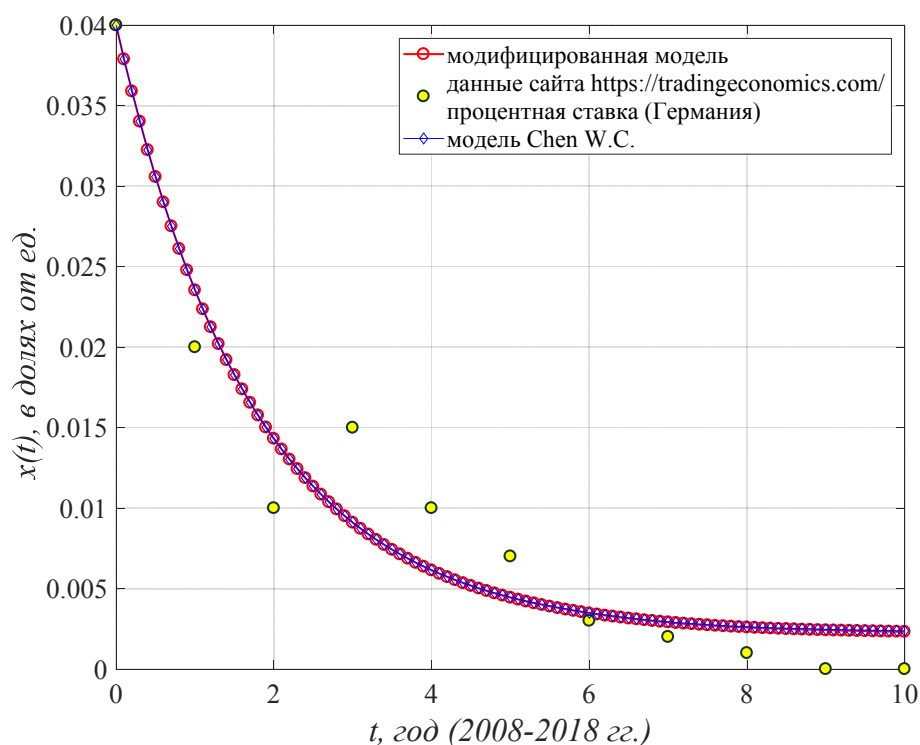


Рисунок 3.9 – Результаты моделирования ключевой ставки и сравнение с данными сайта [tradingeconomics](https://tradingeconomics.com/) и моделью Ма и Чена.

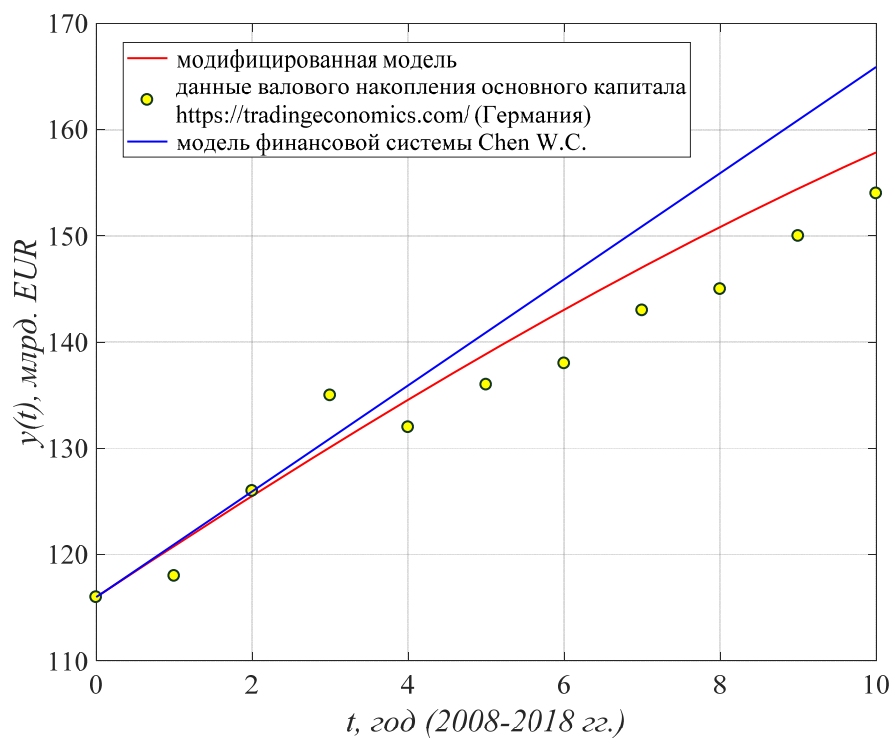


Рисунок 3.10 – Результаты моделирования валого накопления основного капитала и сравнение с данными сайта tradingeconomics и моделью Ма и Чена.

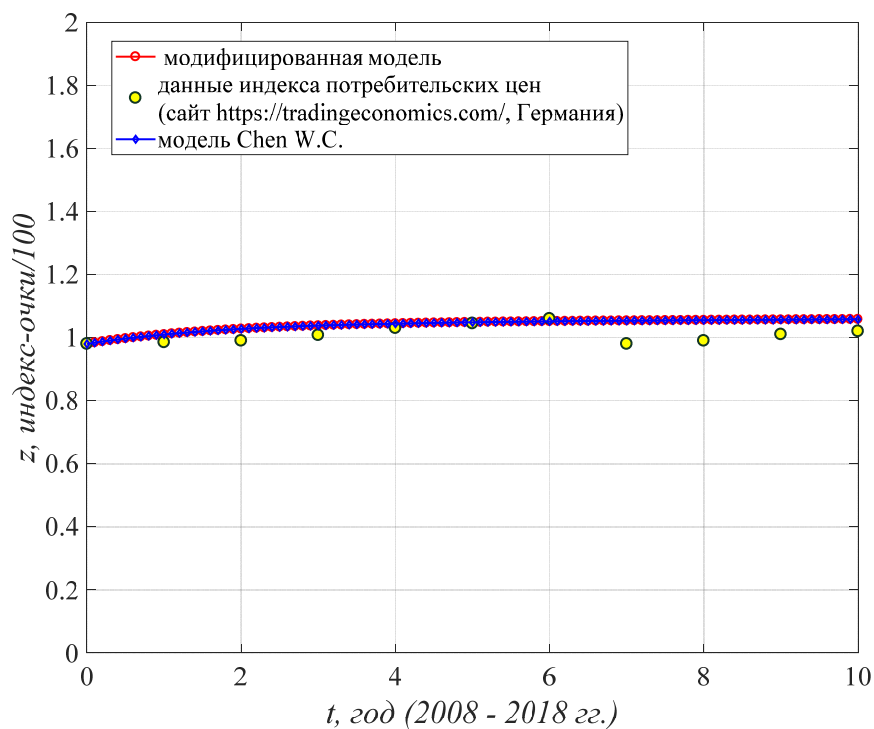


Рисунок 3.11 – Результаты моделирования индекса потребительских цен и сравнение с данными сайта tradingeconomics и моделью Ма и Чена.

Как авторская модель, так и модель Ма и Чена применима только для стран с растущей экономикой (в устойчивом режиме). Результаты графического изображения модифицированной модели сохраняют тенденцию реальных значений сайта tradingeconomics для макроэкономических показателей ключевая ставка, валовое накопление основного капитала и индекс потребительских цен Германии. Таким образом, можно сделать вывод, что модифицированная модель позволяет адекватно описать зависимые параметры модели.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе работы над магистерской диссертацией проведен обзор динамических моделей финансовых систем и анализ устойчивости исследуемой модели. Установлены значения переменных модели, при которых модель переходит в устойчивый или хаотический режимы.

Предложена авторская модификация математической модели финансовой системы в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений дробного порядка с начальными условиями.

Сконструирована новая эффективная вычислительная схема на основе предиктор-корректорного метода с использованием формулы Грюнвальда – Летникова. Точность данной схемы оказалась выше на два порядка по сравнению с классической схемой Грюнвальда – Летникова за счет комбинации в себе явного и неявного метода.

В ППП Matlab разработана прикладная программа для реализации моделей в постановке начальных задач для системы дробно-дифференциальных уравнений, проведена ее верификация. Данная программа может быть использована для решения прикладных задач из различных предметных областей.

Выполнена серия вычислительных экспериментов в нормированных единицах при варьировании значений управляющих параметров модели. Проведена реализация модели в размерных параметрах на примере расчета макроэкономических показателей Германии. Модифицированная модель позволяет адекватно описать зависимые параметры модели и применима только для описания стран с растущими экономиками.

На основе разработанных математических и алгоритмических средств можно проводить макроэкономическое моделирование финансовых систем отдельных государств и прогнозирование показателей: ключевая ставка, валовое накопление основного капитала и индекс цен в устойчивом режиме.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

- 1 Эрроусмит, Д. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями: пер. с англ./ Д. Эрроусмит, К. Плейс. – М.: ПЛАТОН. – 1997. – 243 с.
- 2 Карташев, А.П. Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления: Учеб. пособие для вузов / А.П. Карташев, Б.Л. Рождественский. – 3-е изд., перераб. и доп. – М: Наука. – 1986. – 272 с.
- 3 Самко, С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения: моногр. / С.Г. Самко, А.А. Килбас. – Минск: Наука и техника. – 1987. – С. 9-16.
- 4 Божокин, С.В. Фракталы и мультифракталы / С.В. Божокин, Д.А. Паршин. – Ижевск: РХД. – 2001. – 128 с.
- 5 Тарасевич, Ю.Ю. Математическое и компьютерное моделирование Вводный курс: Учебное пособие / Ю.Ю. Тарасевич. – Изд. 4-е, испр. – М.:Едиториал УРСС. – 2004. – 152 с.
- 6 Malthus, T.R. An Essay on the Principle of Population / T.R. Malthus – London. Printed for J.Johnson, In St. Paul’s Church-Yard. – 1798. – P. 1-45.
- 7 Мальтус, Т.Р. Опыт о законе народонаселения или изложение прошедшего и настоящего действия этого закона на благоденствие человеческого рода, с приложением нескольких исследований о надежде на отстранение или смягчение причиняемого им зла. 2 т. / Т.Р. Мальтус – СПб.: Типография И.И. Глазунова. – 1868. – 468 с.
- 8 Понтрягин, Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Л.С. Понтрягин. – 3-е изд. – М.: Наука. – 1970 – 331 с.
- 9 Verhulst, P.-F. Recherches mathématiques sur la loi d'accroissement de la population / P.-F. Verhulst // Nouveaux mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles, – V. 18. – Art.1. – 1845. – P. 1–45.
- 10 Лебедев, В.В. Математическое моделирование нестационарных экономических процессов / В.В. Лебедев, К.В. Лебедев – М.:ООО «еТест». – 2011. – 336 с.
- 11 Пезенти, А. Очерки политической экономики капитализма. – М.: Прогресс. – 1976 – 840 с.

12 Ma, J. Study for the bifurcation topological structure and the global complicated character of a kind of non-linear finance system (I) / J. Ma, Y. Chen // *Applied Mathematics and Mechanics* – 2001. – V. 22. – №. 11. – P. 1240-1251.

13 Ma, J. Study for the bifurcation topological structure and the global complicated character of a kind of non-linear finance system (II) / J. Ma, Y. Chen // *Applied Mathematics and Mechanics*. – 2001. – V. 22. – №. 11. – P. 1375-1382.

14 Chen, W.C. Nonlinear dynamics and chaos in a fractional-order financial system / W.C. Chen // *Chaos, Solutions & Fractals*. – 2008. – V. 36. – P. 1305-1314.

15 Juma'a, A.H. Stability of Chaotic and Hyperchaotic Finance System / A.H. Juma'a, A.A.-R. Hammodat // *Journal of Education and Science*. – 2013. – V. 26. – №. 4. – P. 97-106.

16 Volos, C.K., Nonlinear Financial Dynamics from an Engineer's Point of View / I.M. Kyprianidis, S.G. Stavrinos, I.N. Stouboulos, L. Magafas, A.N. Anagnostopoulos // *Journal of Engineering Science and Technology Review*. – 2011. – №. 4 – P. 281-285.

17 Jabbari, A. Anti-Synchronization of a Modified Three-Dimensional Chaotic Finance System with Uncertain Parameters via Adaptive Control / A. Jabbari H. Kheiri // *International Journal of Nonlinear Science*. – 2012. – V. 14 – №. 2, – P. 178-185.

18 Kai, G. Chaotic dynamics Analysis for a class of delay nonlinear finance system / G. Kai, W. Zhang // *MATEC Web of Conferences*. – 2016. – №. 45 – P. 7-15.

19 Tacha, O.I. Analysis, adaptive control and circuit simulation of a novel finance system with dissaving / O.I. Tacha, C.K. Volos, I.N. Stouboulos, I.M. Kyprianidis // *Archives of control sciences*. – 2016. – V. 26. – №. 1. – P. 95-115.

20 Kocamaz, U.E., Synchronization of chaos in nonlinear finance system by means of sliding mode and passive control methods: a comparative study / U.E. Kocamaz A. Göksu, H. Taşkın, Y. Uyaroğlu // *Information technology and control*. – 2015. – V. 44, – №. 2, – P. 172-181.

21 Chen, C., Inverse optimal control of hyperchaotic finance system / C. Chen, T. Fan, B. Wang // *World Journal of modeling and simulation*. – 2014. – V. 10. – №. 2. – P. 83-91.

22 Novotna, V. Parameter estimation for dynamic model of the financial system / V. Novotna, V. Stepankova // Acta universitatis agriculturae et silviculturae mendelianae brunensis. – 2015. – V. 63. – P. 2051-2055.

23 Trading economics[Электронный ресурс]: офиц. Сайт.– Режим доступа: <https://ru.tradingeconomics.com/>. – 12.06.2019.

24 Васильев В.В., Дробное исчисление и аппроксимационные методы в моделировании динамических систем / В.В. Васильев, Л.А. Симак. – Киев. – 2008. – 249 с.

25 Учайкин, В.В. Метод дробных производных. / В.В. Учайкин. - Ульяновск: Изд-во: Артишок. – 2008. – 512 с.

26 Fatuzzo, E Asymmetric polarization switching in triglycine sulfate crystals with free surface / E.Fatuzzo, Phys.Rev. – 1962. – 1999 p.

27 Стиган, И. Справочник по специальным функциям / И. Стиган – М.: Наука. – 1979. – С. 321-352.

28 Петухов, А.А. Алгоритмы численного решения дробно-дифференциальных уравнений / А.А. Петухов, Д.Л. Ревизников// Вестник МАИ. – 2009. – С. 228-234..

29 Шур, В.Я. Математическое моделирование кинетики фазовых превращений / В.Я. Шур: Методическое пособие для студентов 5 курса. – 2005. – 12 с.

30 Барфут, Д. Полярные диэлектрики и их применения / Дж. Барфут, Дж.Тейлор –М.: Мир. – 1981, – 526 с.

31 Олемской, А.И. Использование концепции фрактала в физике конденсированной среды / А.И. Олемской, А.Я. Флат. – УФН. – 1993. – 256 с.

32 Liu W. Chaotic behavior in a new fractional-order love triangle system with competition / W. Liu, K. Chen // Journal of Applied Analysis and Computation. – 2015. – V.5. – №. 1 – P. 103-113.

33 Xiao K. Numerical solution for fractional-order differential system with time-domain and frequency-domain methods / K. Xiao, S-B. Zhou, W-W. Zhang // Journal of electronic science and technology of China. – 2008. – V. 6. №. 3 – P. 294-298.

34 Овсиенко А.С. Идентификация параметров процесса аномальной диффузии на основе разностных уравнений / А. С. Овсиенко // Вычислительные технологии. – 2013. – Том 18: – С. 65-73.

35 Бондаренко А.Н. Методы численного решения краевых задач теории аномальной диффузии / А.Н. Бондаренко, Д.С. Иващенко // Сибирские электронные математические известия. – 2008. – С. 581-594.

36 Благовидов В.В. Многозадачный метод решения дифференциальных уравнений с дробными производными / В.В. Благовидов, А.И. Лобанов // Вестник Российского государственного университета им. И. Канта. – 2010. – Вып 10. – С. 59-68.

37 Мейланов Р.П. Метод дифференциальных уравнений дробного порядка в равновесной термодинамике / Мейланов Р.П., Магомедов Р.А., Рамазанова А.Э // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. – 2008. Т. 10., №1, С. 35-39.

38 Bhalekar S. A predictor-corrector scheme for solving nonlinear delay differential equations of fractional order / S. Bhalekar, V. Daftardar-Gejji // Journal of fractional calculus and applications. – 2011. – V.1. – P. 1-9.

39 Моделирование в системе MATLAB: Учебное пособие / Кемеровский государственный университет. – Новокузнецк: Кузбассвузиздат. – 2004. – 376с.

40 Биссенова, К. В. Применение аппарата дробного дифференцирования для численного моделирования финансовых систем / К.В. Биссенова // В книге: Материалы XIII региональной научно-практической конференции «Молодежь XXI века: шаг в будущее» – Благовещенск: Изд-во БГПУ. – 2017. – С. 1004-1005.

41 Биссенова, К. В. Математическое моделирование фрактальной динамики финансовых систем / К.В. Биссенова, А.Г. Масловская // Сборник научных статей по материалам III Международной научно-практической конференции «Математическое моделирование в экономике, управлении и образовании» – М: Изд-во ООО «ТРП». – 2017. – С. 6-12.

42 Биссенова, К.В. Использование концепций дробно-дифференциального исчисления для математического моделирования динамических характеристик финансовых систем // В кн.: Материалы XIX региональной научно-практической конференции «Молодежь XXI века: шаг в будущее» – Благовещенск: Изд-во ДальГАУ. – 2018. – С. 19-20.

43 Биссенова, К. В. Предиктор-корректорная схема и численная реализация фрактальной модели динамики финансовых систем / К. В. Биссенова, А. Г. Масловская // Вестник Амурского государственного университета. – 2018. – Вып. 81: Сер. Естеств. и экон. науки. – С. 11-18.

44 Биссенова, К.В., Масловская А.Г. Численное моделирование динамики финансовых систем на основе дробно-дифференциального подхода // В кн.: «Фундаментальные исследования, методы и алгоритмы прикладной математики в технике, медицине и экономике»: сборник материалов 17-ая Международной молодежной научно-практической конференции, Новочеркасск: Изд-во «Лик». – 2018. – С. 272-277.

45 Биссенова, К.В., Мороз Л.И. Использование аппарата дробного дифференцирования для численного моделирования динамических систем // В кн.: «Математическое и компьютерное моделирование»: сборник материалов VI Международной научной конференции, Омск: Изд-во Омского государственного ун-та. – 2018. – С. 36-39.

46 Биссенова, К.В. Система компьютерного моделирования макроэкономических показателей: фрактальный подход // В кн.: Материалы XX региональной научно-практической конференции «Молодежь XXI века: шаг в будущее» – Благовещенск: Изд-во АмГУ. – 2019. – С. 144-146.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Листинг программы численного решения
задачи Коши для системы дробно-дифференциальных уравнений

```
% Mainfinance.m

clc;
clear all;
close all;
tau=0.1; %шаг по времени
st=0.8; %порядок дробной производной
A=tau.^st; % константа в схеме предиктор-корректор
t=0:tau:15; %интервал времени
N=length(t);

% инициализация параметров модели Чена
global a b c
a=10;
b=0.1;
c=1;

%инициализация массивов решений (по компонентам)
Gpr=zeros(3,N);
G=zeros(3,N);

%инициализация начальных условий
G(:,1)=[2 3 2];

for i=1:N-1
    S=zeros(3,1);
    AA=0;

    for j=1:i
        F=S;
        AA=(gamma(j-st))./(gamma(-st)*gamma(j+1));
        S=F+AA.*G(:,i-j+1);
    end

    % схема предиктор-корректор
    Mpr=funod(G(:,i));
    Gpr(:,i+1)=G(:,1)./(((i).^st).*gamma(1-st))+A.*Mpr-S;

    M=funod(Gpr(:,i+1));
end
```

```

        G(:,i+1)=G(:,1)./(((i).^st).*gamma(1-st))+A.*M-S;

end

figure (1)
plot(t,G(1,:), 'r',t,G(2,:), 'b',t,G(3,:), 'k') ;
grid on

%вектор-функция правых частей системы ОДУ
function z=funod(y)
global a b c
%ver 02/05/2019
z=[y(3)+(y(2)-a)*y(1); 1-b*y(2)-(y(1)).^2; -y(1)-c*y(3)];

```