Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
(ФГБОУВО «АмГУ»)

Факультет математики и информатики
Кафедра математического анализа и моделирования
Направление подготовки 01.04.02 Прикладная математика и информатика
Направленность (профиль) образовательной программы Математическое и программное обеспечение вычислительных систем

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ
И.о. зав. кафедрой
_____________ Н.Н. Максимова
«15» 06 2018 г.

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

на тему: Математическое моделирование нелинейных волновых процессов

Исполнитель студент группы 652ом	07.06.2018 (подпись, дата)	Му Цзинюй
Руководитель доцент, канд. техн. наук	13.06.2018 (подпись, дата)	Т.В. Труфанова
Руководитель научного содержания программы магистратуры	14.06.2018 (подпись, дата)	А.Г.Масловская
Нормоконтроль доцент, канд. техн. наук	06.06.2018г (подпись, дата)	А.В. Рыженко
Рецензент доцент, канд. техн. наук	13.06.2018 (подпись, дата)	Л.В. Чепак

Благовещенск 2018

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
(ФГБОУ ВО «АмГУ»)

Факультет математики и информатики
Кафедра математического анализа и моделирования

УТВЕРЖДАЮ
И.о. зав. кафедрой
_____________ Н.Н. Максимова
«26» 02 2018 г.

З А Д А Н И Е

К магистерской диссертации студента МуЦзинюй.

1. Тема магистерской диссертации: Математическое моделирование нелинейных волновых процессов(утверждена приказом от 13.02.2018 № 319-уч).

2. Срок сдачи студентом законченной работы: 14.06.2018 г.

3. Исходные данные к магистерской диссертации: отчет о прохождении преддипломной практики, учебные и периодические научные издания, монографии.

4. Содержание магистерской диссертации (перечень подлежащих разработке вопросов):отыскание точных решений математических моделей нелинейных волновых процессов солитонного типа методами математического анализа и операторным методом.

5. Перечень материалов приложения: нет.

6. Консультанты по магистерской диссертации: рецензент – Чепак Л.В., канд. техн. наук, доцент; нормоконтроль – Рыженко А.В., канд. техн. наук, доцент.

7. Дата выдачи задания:26.02.2018 г.

Руководитель магистерской диссертации: Труфанова Татьяна Вениаминовна, доцент, канд. техн. наук, доцент.

Задание принял к исполнению (26.02.2018): 牟景宇 _____________ Му Цзинюй

РЕФЕРАТ

Магистерская диссертация содержит 55 с., 4 рисунка, 27 источников.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ, НЕЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ, ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ, УРАВНЕНИЕ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРИЗА, УРАВНЕНИЕ БУССИНЕСКА, МОДИФИЦИРОВАННОЕ УРАВНЕНИЕ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРИЗА, УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА-ГОРДОНА, УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА, БИЛИНЕЙНЫЙ ОПЕРАТОР ХИРОТЫ, АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

Целью магистерской диссертации является отыскание точных решений математических моделей нелинейных волновых процессов солитонного типа.

Солитоны описывают решения нелинейных уравнений гидродинамики, физики плазмы, магнетизма, квантовой теории поля, биофизики и др. Все это показывает, что теория нелинейных волновых процессов, является актуальной.

Новизна данной работы заключается в следующем:

– разработан специальный подход к решению модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза в виде бегущей волны со стационарным профилем;

– методом медленно меняющегося профиля, получено уравнение Кортевега-де Фриза из уравнения Буссинеска;

– построены солитонные решения нелинейного уравнения Шредингера.

Научная и практическая значимость магистерской диссертации состоит в том, что ее можно использовать в учебном процессе АмГУ по дисциплинам: «Линейные и нелинейные модели математической физики (специальные главы)», «Линейные и нелинейные уравнения физики». Кроме этого, полученные результаты могут послужить основой для написания других выпускных квалификационных работ, использующих нелинейные математические модели, теорию солитонов.

Результаты проделанной работы были апробированы на 3 конференциях. Опубликованы две научные статьи в журнале «Вестник АмГУ».

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Нелинейные волновые процессы различной физической природы имеют большое значение для развития науки и техники. При помощи таких уравнений можно описать процессы в гидродинамике, в физике твердого тела, в физике плазмы и т.д. Исследование закономерностей распространения волн различной физической природы является актуальной задачей, т.к. волновые процессы являются эффективным средством передачи энергии и информации [8].

В линейных математических моделях, которые являются приближениями при описании различных процессов, существуют общие аналитические методы решений уравнений в частных производных [16, 17, 18]. Для нелинейных моделей общих методов решения задач до начала 1970-х годов было невелико. В настоящее время ситуация изменилась. Некоторые нелинейные задачи удается решить точными аналитическими методами при помощи различных замен и преобразований переменных, причем их число постоянно возрастает [6, 12, 15].

Данная работа посвящена изучению нелинейных волн в диспергирующих средах, где основное внимание уделено уединенным волнам, или солитонам.

Солитоны играют важную роль в современной науке. Область приложения солитонов: гидродинамика, физика плазмы, магнетизм, квантовая теория поля, биофизика и т.д. Впервые наблюдал уединенную волну британский ученый и инженер-кораблестроитель Джон Скотт Расселл на одном из каналов в 1834 г. [12, 10, 15].

Подтверждение результатов Расселла получили в 1870-е годы в работах Буссинеска и Рэлея, которые независимо нашли решение для профиля свободной поверхности на воде в виде квадрата гиперболического секанса. Буссинеск получил уравнение, носящее его имя. Оно описывает распространение волн, как в прямом, так и во встречном направлении. А в 1895 г. Д.И. Кортевег и его ученик Г. де Фриз вывели уравнение одноволнового приближения [6, 8, 10, 15].

Уравнения Буссинеска и Кортевега-де Фриза играют в теории нелинейных волн особую роль.

Нелинейные волновые процессы различной физической природы имеют большое значение в задачах квантовой теории поля, биофизики. Устойчивость солитонов по отношению к изменению формы позволила использовать нелинейные эффекты для подавления дисперсии волн и получения коротких солитонных импульсов в оптических линиях связи. Расчеты показали, что это позволяет увеличить скорость передачи информации по линиям оптической связи на несколько порядков. Решения в виде уединенных волн были обнаружены и для нелинейного уравнения Шредингера. Это уравнение описывает распространение модулированных волн в кристаллах и оптических волокнах, ленгмюровских волн в плазме, тепловых волн в твердых телах и другие процессы [6, 8, 15].

Математические объекты исследования – это точные аналитические решения нелинейных волновых процессов в виде солитонов.

Целью работы является отыскание точных решений математических моделей нелинейных волновых процессов солитонного типа.

Задачи исследования:

1. Рассмотреть наиболее популярные нелинейные дифференциальные уравнения: уравнение Кортевега-де Фриза, модифицированное уравнение Кортевега-де Фриза, нелинейное волновое уравнение Буссинеска, нелинейное уравнение Шредингера, уравнение Клейна-Гордона.

2. Рассмотреть и изучить имеющиеся аналитические методы решения этих уравнений.

3. Преобразовать нелинейное волновое уравнение Буссинеска в уравнение Кортевега-де Фриза.

4. Построить солитонные решения для модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза и нелинейного уравнения Шредингера.

Методы исследования – точные аналитические методы решения интегрируемых уравнений. В магистерской диссертации рассматривается метод отыскания решения в переменных бегущей волны и метод Хироты для нахождения солитонных решений.

Новизна данной работы заключается в следующем:

- разработан специальный подход к решению модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза в виде бегущей волны со стационарным профилем;

- методом медленно меняющегося профиля, получено уравнение Кортевега-де Фриза из уравнения Буссинеска;

- построены солитонные решения нелинейного уравнения Шредингера.

Научная и практическая значимость магистерской диссертации состоит в том, что ее можно использовать в учебном процессе АмГУ по дисциплинам: «Линейные и нелинейные модели математической физики (специальные главы)», «Линейные и нелинейные уравнения физики». Кроме этого, полученные результаты могут послужить основой для написания других выпускных квалификационных работ, использующих нелинейные математические модели, теорию солитонов.

Результаты проделанной работы были апробированы на 3 конференциях. Опубликованы две научные статьи в журнале «Вестник АмГУ».

В данной научно-исследовательской работе в первом разделе получено аналитическое решение уравнения Кортевега-де Фриза в виде уединенной волны и в виде двух бегущих волн. Аналитически решено модифицированное уравнение Кортевега-де Фриза. Эти уравнения решены двумя точными аналитическими методами.

Проводится преобразование нелинейного уравнения Буссинеска в частных производных четвертого порядка в уравнение Кортевега-де Фриза. Для этого был использован метод медленно меняющегося профиля и преобразование проведено двумя эквивалентными заменами переменных.

Во второй главе диссертации использован метод Хироты для нахождения солитонных решений нелинейных волновых уравнений. Этот метод назван в честь японского физика R.Hirota, предложившего его в 1971году в работе [9]. Этот метод подробно демонстрируется на примере уравнения Кортевега-де Фриза и для построения солитонных решений модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза. Применен метод Хироты и для нелинейного уравнения

Шредингера для построения одно и двухсолитонных решений. Проделаны подробные выкладки для отыскания точного решения этого уравнения. В заключении этого раздела, разработан специальный подход для точного метода решения уравнения Клейна-Гордона.

1 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ

1.1 Аналитический метод решения нелинейного волнового уравнения Кортевега-де Фриза в виде бегущей волны

Впервые уравнение Кортевега-де Фриза (КдФ) было получено Жозефом Буссинеском (Boussinesg J.) в 1877 г., но подробный анализ был проведён уже голландским ученым Кортевегом (D.J. Korteweg) и его учеником де Фризом (de Vries G.) в 1895 г. при описании распространения длинных волн на воде в прямоугольном канале со свободной поверхностью. В такой гидродинамической модели u – смещение поверхности жидкости от равновесного уровня [2, 6, 13, 26].

В настоящее время уравнение КдФ стало универсальным уравнением математической физики при моделировании волновых процессов различной физической природы с учетом дисперсии и слабой нелинейности.

Рассмотрим волновое уравнение Кортевега-де Фриза с учетом дисперсии и нелинейности:

$$u_t + uu_x + \beta u_{xxx} = 0, \tag{1.1}$$

решение, которого, будем искать в виде бегущей волны.

Сделаем подстановку Коула-Хопфа:

$$u(x,t) = 12\beta \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2}(ln F). \tag{1.2}$$

Пересчитаем все производные, входящие в уравнение (1.1):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 12\beta \cdot \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t}(ln F),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 12\beta \cdot \frac{\partial^3}{\partial x^3}(ln F),$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 12\beta \cdot \frac{\partial^5}{\partial x^5}(ln F).$$

Подставляя в (1.1), получаем:

$$12\beta \cdot \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t}(ln F) + 12\beta \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2}(ln F) \cdot 12\beta \cdot \frac{\partial^3}{\partial x^3}(ln F) + \beta \cdot 12\beta \cdot \frac{\partial^5}{\partial x^5}(ln F) = 0.$$

Нетрудно заметить, что это уравнение можно представить в виде, удобном для интегрирования:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}(ln F)\right)+6\beta\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}(ln F)\right)^2+\beta\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4}(ln F)\right)=0.$$

Интегрируя по *x*, получаем

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}(ln F)+6\beta\cdot\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}(ln F)\right)^2+\beta\cdot\frac{\partial^4}{\partial x^4}(ln F)=C(t), \tag{1.3}$$

где $C(t)$ – произвольная функция.

Предположим сначала, что $C(t)=0$ [5].

Пересчитаем все производные, входящие в уравнение (1.3):

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}(lnF)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{F}\cdot\frac{\partial F}{\partial x}\right)=-\frac{1}{F^2}\frac{\partial F}{\partial t}\cdot\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{1}{F}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial t};$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(ln F)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{F}\cdot\frac{\partial F}{\partial x}\right)=-\frac{1}{F^2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{F}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial x^2};$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3}(ln F)=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{F^2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{F}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)=\frac{2}{F^3}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^3-\frac{3}{F^2}\cdot\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{1}{F}\cdot\frac{\partial^3 F}{\partial x^3};$$

$$\frac{\partial^4}{\partial x^4}(ln F)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2}{F^3}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^3-\frac{3}{F^2}\cdot\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{1}{F}\cdot\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}\right)=$$

$$=-\frac{6}{F^4}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^4+\frac{12}{F^3}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}-\frac{3}{F^2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)^2-\frac{4}{F^2}\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}+\frac{1}{F}\frac{\partial^4 F}{\partial x^4}.$$

Подставляя найденные производные в (1.3), получаем уравнение:

$$-\frac{1}{F^2}\frac{\partial F}{\partial t}\cdot\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{1}{F}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial t}+6\beta\left(\frac{1}{F^4}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^4-\frac{2}{F^3}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{1}{F^2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)^2\right)+$$

$$+\beta\left(-\frac{6}{F^4}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^4+\frac{12}{F^3}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}-\frac{3}{F^2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)^2-\frac{4}{F^2}\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}+\frac{1}{F}\frac{\partial^4 F}{\partial x^4}\right)=0.$$

Проделав простейшие преобразования, запишем это уравнение в виде:

$$F\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial t}-\frac{\partial F}{\partial t}\cdot\frac{\partial F}{\partial x}+3\beta\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)^2-3\beta\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}-\beta\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}+\beta F\frac{\partial^4 F}{\partial x^4}=0.$$

Для функции $F(x,t)$ получаем уравнение в частных производных четвертого порядка:

$$F\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial t}+\beta\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}\right)-\frac{\partial F}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial t}+\beta\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}\right)+3\beta\left(\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)^2-\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}\right)=0 \qquad (1.4)$$

Допустим, что

$$\frac{\partial F}{\partial t}+\beta\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}=0;\ \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)^2-\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}=0;$$

второе уравнение соответствует:

$$\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^3 F}{\partial x^3}\end{vmatrix}=0.$$

Обозначим:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,t)=y_t(x),$$

где t – параметр, тогда

$$\begin{vmatrix}y_t & y_t'\\ y_t' & y_t''\end{vmatrix}=0.$$

Это значит, что y_t' и y_t функционально зависимы.

Следовательно, $y_t'=Cy_t$, где C – функция от t.

Решим это уравнение и получим:

$$y_t=\frac{\partial F}{\partial x}(x,t)=\tilde{C}e^{Cx},$$

где $\tilde{C}$ и C не зависят от x.

Интегрируя второй раз, получаем:

$$F(x,t)=e^{C_1(t)x+C_2(t)}+C_3(t). \qquad (1.5)$$

Допустим, что

$$C_3(t)\equiv 1,\ C_1(t)=-\alpha,\ C_2(t)=\alpha s+\alpha^3\beta t.$$

Подставим в (1.5), находим:

$$F(x,t)=1+e^{-\alpha(x-s)+\alpha^3\beta t}=1+f, \qquad (1.6)$$

где $f = e^{-\theta}$, $\theta = \theta(x,t) = \alpha(x-s) - \alpha^3 \beta t$.

Таким образом, функция (1.6) является решением уравнения (1.4).

Вычисляя производные,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = (-\alpha) e^{-\alpha(x-s)+\alpha^3\beta t} = -\alpha f, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \alpha^2 f,$$

и подставляя в (1.2), находим решение уравнения КдФ:

$$u(x,t) = 12\beta\left(-\frac{1}{F^2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{F}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right) = \frac{12\beta}{F^2}\left(-(-\alpha f)^2 + (1+f)\alpha^2 f\right) =$$

$$= \frac{12\beta\alpha^2 f}{(1+f)^2} = 3\beta\alpha^2\left(\frac{2e^{-\frac{\theta}{2}}}{1+e^{-\theta}}\right)^2 = 3\beta\alpha^2\left(\frac{e^{\frac{\theta}{2}} + e^{-\frac{\theta}{2}}}{2}\right)^{-2} =$$

$$= 3\beta\alpha^2 ch^{-2}\left(\frac{\theta}{2}\right) = 3\beta\alpha^2 ch^{-2}\left(\frac{\alpha(x-s) - \alpha^3\beta t}{2}\right),$$

или

$$u = Ach^{-2}\left(\frac{x-s-vt}{\Delta}\right), \tag{1.7}$$

где $A = 3\beta\alpha^2$ – амплитуда волны;

$v = \beta\alpha^2$ – скорость волны;

$\Delta = 2/\alpha$ – параметр, характеризующий эффективный размер области возмущения.

Это решение уравнения (1) называют уединенной волной, или солитоном. Вообще говоря, солитоном называется нелинейная уединенная волна, которая сохраняет свою форму и скорость при движении и при столкновении с любыми другими уединенными волнами. Единственным результатом взаимодействия солитонов может быть некоторый сдвиг фаз [6, 10, 11, 21, 23].

1.2 Метод решения преобразованного уравнения Кортевега-де Фриза

Теория нелинейных волновых процессов, рассматривающая взаимодействие волн различной природы, является актуальным направлением математической физики. При помощи таких процессов происходит передача энергии и информации.

Преобразуем уравнение Кортевега-де Фриза,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0,$$

путем масштабных преобразований независимых переменных к модифицированному виду. Для этого произведем замену переменных:

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{6\beta}}x,\ \ \tau = \frac{1}{6\sqrt{6\beta}}t,$$

получаем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{1}{\sqrt{6\beta}};\ \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 u}{\partial \eta^3}\frac{1}{\sqrt{6\beta}}\frac{1}{6\beta};\ \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \tau}\frac{1}{6\sqrt{6\beta}},$$

и уравнение (1.1) принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + 6u\frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial^3 u}{\partial \eta^3} = 0. \qquad (1.8)$$

Будем искать решение уравнения (1.8) в виде бегущей волны со стационарным профилем. Запишем его в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \qquad (1.9)$$

Произведем замену переменного $\xi = x - \nu t$ и преобразуем уравнение (1.8) в уравнение

$$-\nu\frac{du}{d\xi} + 6u\frac{du}{d\xi} + \frac{d^3 u}{d\xi^3} = 0.$$

В результате интегрирования этого уравнения получим

$$-\nu u + 3u^2 + \frac{d^2 u}{d\xi^2} = a,\ a = const.$$

Умножая на $\dfrac{du}{d\xi}$ и интегрируя полученное соотношение, находим:

$$-\frac{\nu}{2}u^2 + u^3 + \frac{1}{2}\left(\frac{du}{d\xi}\right)^2 = au + b,\ b = \text{const}. \qquad (1.10)$$

Сначала предположим в (1.10), что $a = b = 0$, тогда

$$\frac{du}{d\xi} = \sqrt{-2u^3 + vu^2}\,,\ \frac{d\xi}{du} = \frac{1}{\sqrt{u^2(v-2u)}} = \frac{1}{u\sqrt{(v-2u)}}\,,$$

откуда, интегрируя, находим

$$\xi = \int \frac{du}{u\sqrt{v-2u}} = \frac{1}{\sqrt{v}} ln\left|\frac{\sqrt{v-2u}-\sqrt{v}}{\sqrt{v-2u}+\sqrt{v}}\right| = \frac{2}{\sqrt{v}} ln\left(\frac{1+\sqrt{1-\frac{2}{\sqrt{v}}u}}{1-\sqrt{1-\frac{2}{\sqrt{v}}u}}\right)^{-1} = \tag{1.11}$$
$$= -\frac{2}{\sqrt{v}} arcth\left(\sqrt{1-\frac{2}{\sqrt{v}}u}\right).$$

Разрешая (1.11) относительно $u(\xi)$ и возвращаясь к x и t, запишем решение уравнения (1.9)

$$u = \frac{v}{2}\left(1-\text{th}^2\left(-\frac{\sqrt{v}}{2}\xi\right)\right) = \frac{v}{2} - \frac{v}{2}\text{th}^2\left(-\frac{\sqrt{v}}{2}(x-vt)\right) = \tag{1.12}$$
$$= \frac{v}{2}\text{ch}^{-2}\left(\frac{\sqrt{v}}{2}(x-vt)\right).$$

Решение (1.12) уравнения (1.9) представляет уединенную волну, или солитон. Профиль уединенной волны изображен на рисунке 1.1.

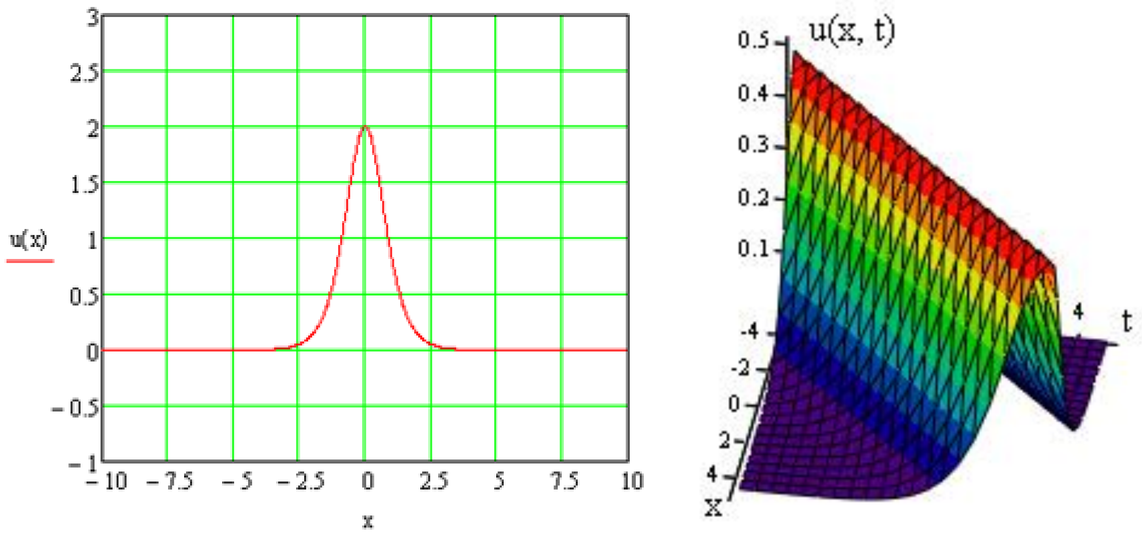

Рисунок 1.1 – Профиль уединенной волны (солитон)

Таким образом, проведено преобразование стандартного уравнения Кортевега-де Фриза к виду (1.9) и получено его решение в виде бегущей волны со стационарным профилем. Такое решения нелинейных уравнений устойчиво по отношению к изменению формы и используется во многих задачах гидродинамики, квантовой теории поля, физики плазмы и твердого тела.

1.3 Решение уравнения Кортевега-де Фриза в виде взаимодействие двух солитонов

Найдем более сложное решение уравнения КдФ. Рассмотрим взаимодействие двух солитонов. Воспользуемся методом возмущений в теории взаимодействия [6, 12, 8, 15]. Для этого представим функцию F в виде разложения в ряд

$$F = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k F^{(k)} \tag{1.13}$$

по параметру ε, который после преобразования можно положить равным единице.

Подставим (1.13) в (1.4), получаем:

$$\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k F^{(k)}\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F^{(k)}}{\partial t} + \beta \frac{\partial^3 F^{(k)}}{\partial x^3}\right)\right) -$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \frac{\partial F^{(k)}}{\partial t} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F^{(k)}}{\partial t} + \beta \frac{\partial^3 F^{(k)}}{\partial x^3}\right) +$$

$$+3\beta\left(\left(\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \left(\frac{\partial^2 F^{(k)}}{\partial x^2}\right)\right)^2 - \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \frac{\partial F^{(k)}}{\partial x} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \frac{\partial^3 F^{(k)}}{\partial x^3}\right) = 0\,.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε к нулю, получаем систему уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F^{(1)}}{\partial t} + \beta \frac{\partial^3 F^{(1)}}{\partial x^3}\right) = 0; \tag{1.14}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F^{(2)}}{\partial t} + \beta \frac{\partial^3 F^{(2)}}{\partial x^3}\right) + F^{(1)} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F^{(1)}}{\partial t} + \beta \frac{\partial^3 F^{(1)}}{\partial x^3}\right) - \\ -\frac{\partial F^{(1)}}{\partial t}\left(\frac{\partial F^{(1)}}{\partial t} + \beta \frac{\partial^3 F^{(1)}}{\partial x^3}\right) + 3\beta\left(\left(\frac{\partial^2 F^{(1)}}{\partial x^2}\right)^2 - \frac{\partial F^{(1)}}{\partial x} \cdot \frac{\partial^3 F^{(1)}}{\partial x^3}\right) = 0.\end{gathered} \tag{1.15}$$

и т.д.

Пусть

$F^{(1)} = f_1 + f_2,$

где $f = e^{-\alpha_i(x-s_i)+\alpha_i^3\beta t}$, $i = 1,2$ т.е. сумма двух экспонент, порождающих солитон.

Вычисляем производные, входящие в уравнение (1.14):

$$\frac{\partial F^{(1)}}{\partial t} = \alpha_1^3\beta f_1 + \alpha_2^3\beta f_2,\ \frac{\partial F^{(1)}}{\partial x} = -\alpha_1 f_1 - \alpha_2 f_2,$$
$$\frac{\partial^2 F^{(1)}}{\partial x^2} = \alpha_1^2 f_1 + \alpha_2^2 f_2,\ \frac{\partial^3 F^{(1)}}{\partial x^3} = -\alpha_1^3 f_1 - \alpha_2^3 f_2.$$

Аналогично для уравнения (1.15):

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F^{(2)}}{\partial t} + \beta\frac{\partial^3 F^{(2)}}{\partial x^3}\right) = -3\beta\left(\left(\frac{\partial^2 F^{(1)}}{\partial x^2}\right)^2 - \frac{\partial F^{(1)}}{\partial x}\cdot\frac{\partial^3 F^{(1)}}{\partial x^3}\right) =$$
$$3\beta\left(-\left(\alpha_1^2 f_1 + \alpha_2^2 f_2\right)^2 + \left(-\alpha_1 f_1 - \alpha_2 f_2\right)\cdot\left(-\alpha_1^3 f_1 - 3 f_2\right)\right) = \tag{1.16}$$
$$3\beta\alpha_1\alpha_2\left(\alpha_1 - \alpha_2\right)^2 f_1 f_2$$

Решение уравнения (1.16) будем искать в виде $F^{(2)} = Bf_1 f_2$, где B – некоторая постоянная, которую надо найти.

Дифференцируя, находим:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial F^{(2)}}{\partial t} = B(\alpha_2^3\beta f_1 f_2 + f_1\cdot\alpha_2^3\beta f_2) = B(\alpha_1^3 + \alpha_2^3)\beta f_1 f_2;\\
&\frac{\partial F^{(2)}}{\partial x} = -B(\alpha_1 + \alpha_2) f_1 f_2; \frac{\partial^2 F^{(2)}}{\partial x^2} = B(\alpha_1 + \alpha_2)^2 f_1 f_2;\\
&\frac{\partial^3 F^{(2)}}{\partial x^3} = -B(\alpha_1 + \alpha_2)^3 f_1 f_2;\\
&\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F^{(2)}}{\partial t} + \beta\frac{\partial^3 F^{(2)}}{\partial x^3}\right) = 3B\beta\alpha_1\alpha_2(\alpha_1 + \alpha_2)^2 f_1 f_2.
\end{aligned} \tag{1.17}$$

Сравнивая (1.16) и (1.17), получаем:

$$B = \frac{\left(\alpha_1 - \alpha_2\right)^2}{\left(\alpha_1 + \alpha_2\right)^2}.$$

Допустим, $F^{(k)} = 0,\ k \geq 3,$ т.е. $F^{(k)} = 1 + \varepsilon F^{(1)} + \varepsilon^2 F^{(2)}.$

Подставляя F в (1.4), получаем:

$$\left(1+\varepsilon F^{(1)}+\varepsilon^2 F^{(2)}\right)\cdot \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F^{(2)}}{\partial t}+\beta\frac{\partial^3 F^{(2)}}{\partial x^3}\right)-$$

$$-\left(\varepsilon\frac{\partial F^{(1)}}{\partial x}+\varepsilon^2\frac{\partial F^{(2)}}{\partial x}\right)\cdot\varepsilon^2\left(\frac{\partial F^{(2)}}{\partial t}+\beta\frac{\partial^3 F^{(2)}}{\partial x^3}\right)+$$

$$+3\beta\left(\left(\varepsilon\frac{\partial^2 F^{(1)}}{\partial x^2}+\varepsilon^2\frac{\partial^2 F^{(2)}}{\partial x^2}\right)^2-\left(\varepsilon\frac{\partial F^{(1)}}{\partial x}+\varepsilon^2\frac{\partial F^{(2)}}{\partial x}\right)\left(\varepsilon\frac{\partial^3 F^{(1)}}{\partial x^3}+\varepsilon^2\frac{\partial^3 F^{(2)}}{\partial x^3}\right)\right)=0;$$

$$\left(\frac{\partial F^{(1)}}{\partial t}+\beta\varepsilon^2\frac{\partial^3 F^{(1)}}{\partial x^3}=0\right).$$

После вычисления коэффициентов заметим, что при ε^3:

$$F^{(1)}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F^{(2)}}{\partial t}+\beta\frac{\partial^3 F^{(2)}}{\partial x^3}\right)-\frac{\partial F^{(1)}}{\partial x}\left(\frac{\partial F^{(2)}}{\partial t}+\beta\frac{\partial^3 F^{(2)}}{\partial x^3}\right)+$$

$$+3\beta\left(2\frac{\partial^2 F^{(1)}}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 F^{(2)}}{\partial x^2}-\left(\frac{\partial F^{(1)}}{\partial x}\cdot\frac{\partial^3 F^{(2)}}{\partial x^3}+\frac{\partial F^{(2)}}{\partial x}\cdot\frac{\partial^3 F^{(1)}}{\partial x^3}\right)\right)=$$

$$=\left(f_1+f_2\right)\left(3B\beta\alpha_1\alpha_2\left(\alpha_1+\alpha_2\right)^2 f_1 f_2\right)-\left(-\alpha_1 f_1-\alpha_2 f_2\right)\times$$

$$\times\left(-3B\beta\alpha_1\alpha_2\left(\alpha_1+\alpha_2\right) f_1 f_2\right)+$$

$$+3\beta\left(2\left(\alpha_1^2 f_1+\alpha_2^2 f_2\right)\cdot B\left(\alpha_1+\alpha_2\right)^2 f_1 f_2-\left(-\alpha_1 f_1-\alpha_2 f_2\right)\left(-B\left(\alpha_1+\alpha_2\right)^3\right) f_1 f_2\right)-$$

$$-\left(-B\left(\alpha_1+\alpha_2\right) f_1 f_2\right)\left(-\alpha_1^3 f_1-\alpha_2^3 f_2\right)=0.$$

При ε^4:

$$F^{(2)}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F^{(2)}}{\partial t}+\beta\frac{\partial^3 F^{(2)}}{\partial x^3}\right)-\frac{\partial F^{(2)}}{\partial x}\left(\frac{\partial F^{(2)}}{\partial t}+\beta\frac{\partial^3 F^{(2)}}{\partial x^3}\right)+$$

$$+3\beta\left(\left(\frac{\partial^2 F^{(2)}}{\partial x^3}\right)^2-\frac{\partial F^{(2)}}{\partial x}\frac{\partial^3 F^{(2)}}{\partial x^3}\right)=$$

$$=\left(F^{(2)}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial F^{(2)}}{\partial x}\right)\left(-B\alpha_1\alpha_2\left(\alpha_1+\alpha_2\right) f_1 f_2\right)=0.$$

Когда $k\geq 5$, коэффициенты содержат множители $F^{(3)}$, $F^{(4)}$ и т.д., поэтому все равны 0. Таким образом, мы доказали, что ряд (1.13) содержит только функции $F^{(1)}$ и $F^{(2)}$. Следовательно, остаются только уравнения (1.14) и (1.15).

Поэтому функция

$$F = 1 + \varepsilon F^{(1)} + \varepsilon^2 F^{(2)},$$

где $\quad F^{(1)} = f_1 + f_2 = e^{-\alpha_1(x-s_1)+\alpha_1^3\beta t} + e^{-\alpha_2(x-s_2)+\alpha_2^3\beta t}$, $F^{(2)} = \dfrac{(\alpha_1-\alpha_2)^2}{(\alpha_1+\alpha_2)^2} f_1 f_2$;

ε – любое число, действительно является решением уравнения (1.4).

Подставляя F в преобразование Коула-Хопфа (1.2), получаем точное решение уравнения КдФ.

Таким образом, подробно изложен аналитический метод нахождения решения нелинейного волнового уравнения в виде взаимодействие двух солитонов.

1.4 Преобразование нелинейного волнового уравнения Буссинеска к уравнению Кортевега-де Фриза

Уравнение Буссинеска является двухволновой версией уравнения КдФ, допускающей распространение волн, как в прямом, так и во встречном направлениях [15].

Постановка задачи: пользуясь методом медленно меняющегося профиля, получить уравнение Кортевега-де Фриза из уравнения Буссинеска.

Первый способ. Запишем уравнение Буссинеска в виде:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)^2\right] - \frac{\varepsilon k_0}{3}\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial t^2} = 0.$$

Метод медленно меняющегося профиля. Сделаем замену переменных: $\sigma = x - t$, $\theta = \varepsilon t$. Так как безразмерный масштаб медленного времени принадлежит промежутку $(1, \varepsilon)$, то операторы производных в этих переменных (σ, θ) принимают вид

$$\partial / \partial x \to \partial / \partial \sigma, \qquad \frac{\partial}{\partial t} \to \varepsilon \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial \sigma}.$$

Подставляя их в уравнение для $F(t, x)$, получаем следующее уравнение для функции $F\left(\dfrac{\theta}{\varepsilon}, \sigma + t\right) = f(\theta, \sigma)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \sigma \partial \theta} + \frac{3}{4}\frac{\partial}{\partial \sigma}\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)^2 + \frac{k_0}{6}\frac{\partial^4 f}{\partial \sigma^4} = O(\varepsilon),$$

вводя замену переменных $\frac{\partial f}{\partial \sigma} = \zeta$ и $O(\varepsilon) = 0$, получим:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \theta} + \frac{3}{2}\zeta\frac{\partial \zeta}{\partial \sigma} + \frac{k_0}{6}\frac{\partial^3 \zeta}{\partial \sigma^3} = 0,$$

а это и есть уравнение Кортевега-де Фриза.

1.5 Второй способ преобразования уравнения Буссинеска

Пользуясь методом медленно меняющегося профиля, получить уравнение Кортевега-де Фриза из уравнения Буссинеска. Запишем это уравнение в виде:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} - (uu_x)_x - \beta u_{xxxx} = 0. \tag{1.18}$$

Сделаем замену $\xi = px - qt,\ \tau = rt,$ тогда операторы имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial t} = -q\frac{\partial}{\partial \xi} + r\frac{\partial}{\partial \tau},\ \frac{\partial}{\partial x} = p\frac{\partial}{\partial \xi}.$$

Пересчитаем все производные, входящие в уравнение (1.18)

$$u_{tt} = \frac{\partial}{\partial t}(-qu_\xi + ru_\tau) = -q(-qu_{\xi\xi} + ru_{\xi\tau}) + r(-qu_{\tau\xi} + ru_{\tau\tau}) =$$

$$= q^2 u_{\xi\xi} - 2qru_{\xi\tau} + r^2 u_{\tau\tau}.$$

$$u_{xx} = p^2 u_{\xi\xi},\ (uu_x)_x = \frac{\partial}{\partial x}(u \cdot pu_\xi) = p^2(uu_\xi)_\xi,\ u_{xxxx} = p^4 u_{\xi\xi\xi\xi}.$$

Подставим все эти выражения в исходное уравнение, получаем:

$$(q^2 - c^2p^2)u_{\xi\xi} - 2qru_{\xi\tau} + r^2u_{\tau\tau} - p^2(uu_\xi)_\xi - \beta p^4 u_{\xi\xi\xi\xi} = 0. \tag{1.19}$$

Полагаем, что $q^2 - c^2p^2 = 0,\ 2qr = p^2 = \frac{1}{6}\beta p^4$, отсюда:

$$p = \sqrt{\frac{6}{\beta}},\ q = cp = c\cdot\sqrt{\frac{6}{\beta}},\ r = \frac{1}{2c}\sqrt{\frac{6}{\beta}}.$$

Поэтому уравнение (1.19) примет вид:

$$-\frac{6}{\beta}u_{\xi\tau} + \frac{1}{4c^2}\frac{6}{\beta}u_{\tau\tau} - \frac{6}{\beta}(uu_\xi)_\xi - \frac{36}{\beta}u_{\xi\xi\xi\xi} = 0,$$

т. е.:

$$u_{\xi\tau} + (uu_\xi)_\xi + 6u_{\xi\xi\xi\xi} = \frac{1}{4c^2}u_{\tau\tau}, \tag{1.20}$$

где c – скорость света, очень большая константа, поэтому $\frac{1}{4c^2} << 1$.

Уравнение (1.20) с учетом малости правой части перепишется в виде

$$u_{\xi\tau} + \left(uu_{\xi}\right)_{\xi} + 6u_{\xi\xi\xi\xi} = 0. \tag{1.21}$$

Интегрируя (1.21) по ξ и полагая, что константа интегрирования равна 0, получаем уравнением Кортевега-де Фриза.

$$u_{\tau} + uu_{\xi} + 6u_{\xi\xi\xi} = 0.$$

Таким образом, в данном подразделе подробно изложены методы, позволяющие при помощи введения нового пространственного и временного масштабов устанавливать связь между уравнениями, имеющими свойства, аналогичные уравнению Кортевега-де Фриза [25].

1.6 Точный метод решения модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза

$$u_t + u^2 u_x + u_{xxx} = 0.$$

Произведём замену переменного $\xi = x - ct$, получим:

$$-c\frac{du}{d\xi} + u^2\frac{du}{d\xi} + \frac{d^3u}{d\xi^3} = 0.$$

Используя подобный метод, получаем:

$$\left(\frac{du}{d\xi}\right)^2 = \frac{c}{2}u^2 - \frac{1}{6}u^4 + 2au + b.$$

И дальше, предположим $a = b = 0$, отсюда $\frac{d\xi}{du} = \frac{\sqrt{6}}{u\sqrt{6c - u^2}}$.

$$\Rightarrow \xi = \int \frac{\sqrt{6}du}{u\sqrt{6c - u^2}} = \sqrt{6}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{6c}}\ln\left|\frac{\sqrt{6c} + \sqrt{6c - u^2}}{u}\right|\right)$$

$$\Rightarrow u = \frac{2\sqrt{6c}e^{-\sqrt{c}\xi}}{1 + e^{-\sqrt{c}\xi}} = \sqrt{6c}\cdot\frac{2}{e^{\sqrt{c}\xi} + e^{-\sqrt{c}\xi}} = \sqrt{6c}ch^{-1}(\sqrt{c}(x - ct)).$$

График этого решения приведен на рисунке 1.2.

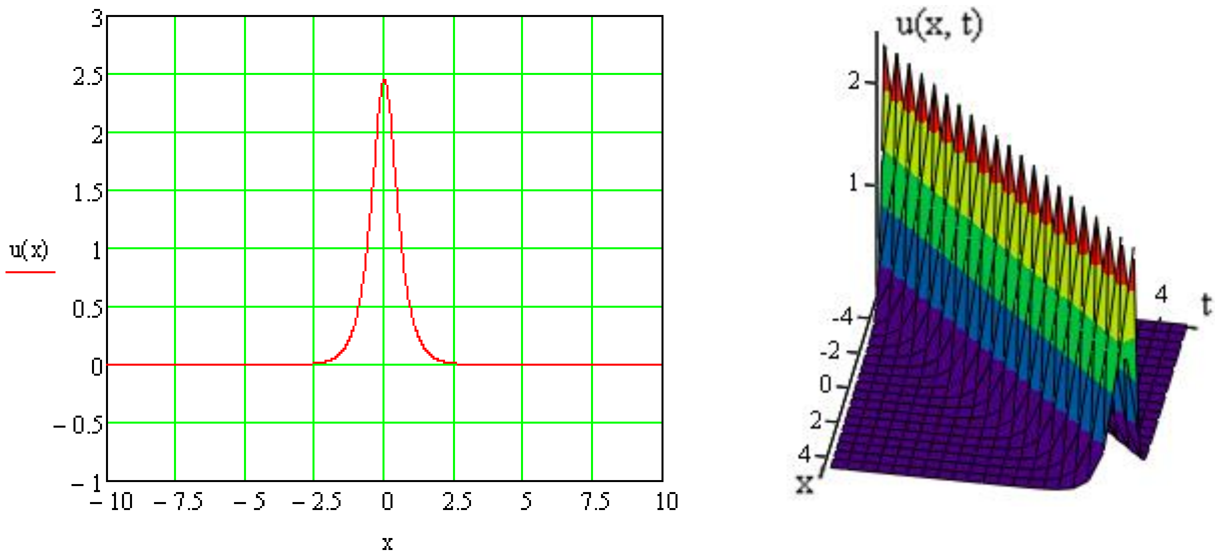

Рисунок 1.2 – Решение модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза

1.7 Точный метод решения уравнения Клейна-Гордона

Найдём решение в виде кинков нелинейного уравнения Клейна-Гордона с кубической нелинейностью:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = \omega_0^2 u - \beta u^3, \tag{1.22}$$

которое, как и уравнения Кортевега-де Фриза и нелинейное уравнение Шредингера, широко используется в физике [12, 15].

Используя переменные бегущей волны:

$$\xi = x - vt,$$

тогда

$$u_t = \frac{du}{d\xi}\xi_t = -v\frac{du}{d\xi},\ u_{tt} = v^2\frac{d^2u}{d\xi^2},\ u_{xx} = \frac{d^2u}{d\xi^2}.$$

Подставляя в уравнение (2.20), приходим к уравнению

$$\frac{d^2u}{d\xi^2} = \frac{1}{v^2 - c^2}(\omega_0^2 u - \beta u^3). \tag{2.21}$$

Пусть

$$\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{c^2 - v^2} = \frac{\gamma^2}{c^2},$$

подставим это в уравнение (2.21) и, умножая на $\frac{du}{d\xi}$, получаем

$$\frac{du}{d\xi}\cdot\frac{d^2u}{d\xi^2}=\frac{\gamma^2}{c^2}\left(\beta u^3-\omega_0^2 u\right)\frac{du}{d\xi}.$$

Проинтегрируем по ξ:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{du}{d\xi}\right)^2=\frac{\gamma^2}{c^2}\left(\beta\cdot\frac{1}{4}u^4-\omega_0^2\frac{1}{2}u^2\right)+C.$$

Пусть

$$C=\frac{\gamma^2\omega_0^4}{2c^2\beta},$$

с учетом этого получаем:

$$\left(\frac{du}{d\xi}\right)^2=\frac{\gamma^2}{2c^2}\left(\beta u^4-2\omega_0^2u^2+\frac{\omega_0^4}{\beta}\right)=\frac{\gamma^2\beta}{2c^2}\left(u^2-\frac{\omega_0^2}{\beta}\right)^2=\frac{\gamma^2\beta}{2c^2}\left(u^2-a^2\right)^2.$$

Отсюда находим:

$$\frac{du}{d\xi}=\pm\frac{\gamma\sqrt{\beta}}{\sqrt{2}c}\left(u^2-a^2\right),$$

или

$$\pm\frac{\gamma\sqrt{\beta}}{\sqrt{2}c}d\xi=\frac{du}{u^2-a^2}.$$

Проинтегрируем последнее соотношение, находим решение уравнения Клейна-Гордона:

$$\pm\frac{\gamma\sqrt{\beta}}{\sqrt{2}c}\xi=\int_0^u\frac{du}{u^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right|,$$

или

$$\frac{a-u}{a+u}=e^{\pm\frac{2a\gamma\sqrt{\beta}}{\sqrt{2}c}\xi}=e^{\pm\frac{2\omega_0\gamma}{\sqrt{2}c}\xi}.$$

Допустим что $u\le a$, окончательно получаем

$$u=a\cdot\frac{1-e^{\pm\frac{2\omega_0\gamma}{\sqrt{2}c}\xi}}{1+e^{\pm\frac{2\omega_0\gamma}{\sqrt{2}c}\xi}}=\pm a\cdot th\left(\frac{\omega_0\gamma}{\sqrt{2}c}\xi\right).$$

Это решение часто называют кинком, если в формуле берется положительный знак, а при выборе отрицательного знака, решение становится антикинком.

Кинк и антикинк являются примерами топологических солитонов, поскольку производная от решения имеет форму уединенной волны [12, 15].

2 ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ ОПЕРАТОРНЫМ МЕТОДОМ

2.1 Теория билинейного оператора Хироты

В начале 70-х гг. XX в. японским математиком Р. Хиротой (R. Hirota) был разработан прямой метод отыскания солитонных решений. Алгоритм этого метода состоит в том, что подбирается замена зависимой переменной, которая приводит исходное уравнение к так называемой билинейной форме. Затем ищется в виде формального ряда теории возмущений решение уравнения, записанного в билинейной форме. Для точно решаемых уравнений эти ряды обрываются. Затем делается предположение о виде солитонного решения уравнения и находится формула для солитонного решения [12, 15, 20, 22, 24].

Сначала введем оператор Хироты $\hat{D}_x$, действующий на упорядоченную пару функций $f(x),\ g(x)$ [20, 24]:

$$\hat{D}_x f\cdot g=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\partial\big(f(x+\varepsilon)g(x-\varepsilon)\big)}{\partial\varepsilon}=f_x g-fg_x.$$

Аналогично можно ввести оператор $\hat{D}_t$ и операторы более высокого порядка, например:

$$\hat{D}_x\hat{D}_t f\cdot g=\lim_{\varepsilon,\tau\to 0}\frac{\partial^2\big(f(x+\varepsilon,t+\tau)g(x-\varepsilon,t-\tau)\big)}{\partial\varepsilon\partial\tau}=f_{xt}g-f_t g_x-f_x g_t+fg_{xt},$$

$$\hat{D}_x^4 f\cdot g=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\partial^4\big(f(x+\varepsilon)g(x-\varepsilon)\big)}{\partial\varepsilon^4}=f_{xxxx}g-4f_{xxx}g_x+6f_{xx}g_{xx}-4f_x g_{xxx}+fg_{xxxx}$$

и т.д.

Вообще, пусть $P(x,y)$ – полином двух переменных, тогда можно определить оператор $\hat{P}^*=P\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)$, действующий на одинарную (дифференцируемую) функцию, и оператор $\hat{P}=P\big(\hat{D}_x,\hat{D}_t\big)$, действующий на упорядоченную пару функций $f(x)$ и $g(x)$ в соответствии с выражением

$$\hat{P}f\cdot g=\lim_{\varepsilon,\tau\to 0}P\left(\frac{\partial}{\partial\varepsilon},\frac{\partial}{\partial\tau}\right)\big(f(x+\varepsilon,t+\tau)g(x-\varepsilon,t-\tau)\big).$$

Заметим, $\hat{P} = P(\hat{D}_x, \hat{D}_t)$ – билинейный оператор, а $\hat{P}^* = P\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)$ – обычный оператор, оба формируются на основе многочлена $P(x, y)$.

Определим

$$\hat{P}(f_1 g_1 + f_2 g_2) = \hat{P} f_1 \cdot g_1 + \hat{P} f_2 \cdot g_2 .$$

Можно доказать, что билинейный оператор имеет следующие свойства:

1) $\hat{P}(\lambda f) \cdot g = \hat{P} f \cdot (\lambda g) = \lambda \hat{P} f \cdot g$;

2) $\hat{P}(f_1 + f_2) \cdot g = \hat{P} f_1 \cdot g + \hat{P} f_2 \cdot g$.

Эти два свойства указывают на то, что $\hat{P}$ действительно имеет билинейность.

3) $\hat{P} f \cdot 1 = \hat{P}^* f$;

4) $\hat{D}_x^m \hat{D}_t^n f \cdot g = \left(\partial_x - \partial_{x'}\right)^m \left(\partial_t - \partial_{t'}\right)^n \left(f(x,t) \cdot g(x',t') \right)\Big|_{x'=x,\ t'=t}$;

5) $\hat{D}_x^m \hat{D}_t^n f \cdot g = (-1)^{m+n} \hat{D}_x^m \hat{D}_t^n g \cdot f$.

Более того, если $m+n$ – четное число, то

$$\hat{D}_x^m \hat{D}_t^n f \cdot g = \hat{D}_x^m \hat{D}_t^n g \cdot f ,$$

если $m + n$ – нечетное, то

$$\hat{D}_x^m \hat{D}_t^n f \cdot f = 0 .$$

Это объясняет то, что билинейный оператор обычно не подчиняется коммутативному и ассоциативному законам.

6) $\hat{D}_x^n e^{k_1 x} \cdot e^{k_2 x} = (k_1 - k_2)^n e^{(k_1 + k_2)x}$,

в частности,

$$\hat{D}_x^n e^{kx} \cdot e^{kx} = 0 .$$

7) $\hat{P} e^{\theta_1} \cdot e^{\theta_2} = P(k_1 - k_2, \omega_1 - \omega_2) e^{\theta_1 + \theta_2}$,

где $\theta_i = k_i x + \omega_i t$.

8) $\hat{P}^* e^{kx+\omega t} = P(k, \omega) e^{kx+\omega t}$.

Доказательства свойств 1) и 2).

Для любого полинома $P(x, y)$, очевидно $\hat{P}^{*}=P\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)$ является линейным оператором.

Отсюда,

$$\hat{P}(\lambda f)\cdot g=\lim_{\varepsilon,\tau\to 0}P\left(\frac{\partial}{\partial\varepsilon},\frac{\partial}{\partial\tau}\right)\left(\lambda f(x+\varepsilon,t+\tau)g(x-\varepsilon,t-\tau)\right)=$$

$$=\lambda\lim_{\varepsilon,\tau\to 0}P\left(\frac{\partial}{\partial\varepsilon},\frac{\partial}{\partial\tau}\right)\left(f(x+\varepsilon,t+\tau)g(x-\varepsilon,t-\tau)\right)=\lambda\hat{P}f\cdot g\ ;$$

$$\hat{P}(f_1+f_2)\cdot g=$$

$$=\lim_{\varepsilon,\tau\to 0}P\left(\frac{\partial}{\partial\varepsilon},\frac{\partial}{\partial\tau}\right)\left(\left(f_1(x+\varepsilon,t+\tau)+f_2(x+\varepsilon,t+\tau)\right)g(x-\varepsilon,t-\tau)\right)=$$

$$=\lim_{\varepsilon,\tau\to 0}P\left(\frac{\partial}{\partial\varepsilon},\frac{\partial}{\partial\tau}\right)\left(f_1(x+\varepsilon,t+\tau)g(x-\varepsilon,t-\tau)\right)+$$

$$+\lim_{\varepsilon,\tau\to 0}P\left(\frac{\partial}{\partial\varepsilon},\frac{\partial}{\partial\tau}\right)\left(f_2(x+\varepsilon,t+\tau)g(x-\varepsilon,t-\tau)\right)=\hat{P}f_1\cdot g+\hat{P}f_2\cdot g\ .$$

Свойство 3) очевидно:

$$\hat{P}f\cdot 1=\lim_{\varepsilon,\tau\to 0}P\left(\frac{\partial}{\partial\varepsilon},\frac{\partial}{\partial\tau}\right)\left(f(x+\varepsilon,t+\tau)\cdot 1\right)=P\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial t}\right)f=\hat{P}^{*}f\ .$$

Докажем свойство 4).

Для любого произведения функций

$$F(x,x',t,t',\varepsilon,\tau)=f(x+\varepsilon,t+\tau)\cdot g(x'-\varepsilon,t'-\tau)$$

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(f(x+\varepsilon,t+\tau)\cdot g(x'-\varepsilon,t'-\tau)\right)=f_x(x+\varepsilon,t+\tau)\cdot g(x'-\varepsilon,t'-\tau)+$$
$$+f(x+\varepsilon,t+\tau)\cdot g(x'-\varepsilon,t'-\tau)(-1)=(\partial_x-\partial_{x'})\left(f(x+\varepsilon,t+\tau)\cdot g(x'-\varepsilon,t'-\tau)\right)$$

Это значит, что оператор $\frac{\partial}{\partial\varepsilon}$ совпадает с оператором $(\partial_x-\partial_{x'})$, когда действует на произведение функций

$$f(x+\varepsilon,t+\tau)\cdot g(x'-\varepsilon,t'-\tau),$$

так как

$$(\partial_x-\partial_{x'})\left(f(x+\varepsilon,t+\tau)\cdot g(x'-\varepsilon,t'-\tau)\right)$$

тоже является суммой произведений функций.

Ещё раз действуем оператором $\dfrac{\partial}{\partial\varepsilon}$:

$$\frac{\partial^2}{\partial\varepsilon^2}\Big(f\left(x+\varepsilon,t+\tau\right)\cdot g\left(x'-\varepsilon,t'-\tau\right)\Big)=\left(\partial_x-\partial_{x'}\right)^2\Big(f\left(x+\varepsilon,t+\tau\right)\cdot g\left(x'-\varepsilon,t'-\tau\right)\Big)$$

и так далее, можем заметить, что:

– действие оператора $\dfrac{\partial^m}{\partial\varepsilon^m}$ эквивалентно действию$\left(\partial_x-\partial_{x'}\right)^m$;

– действие оператора $\dfrac{\partial^n}{\partial\tau^n}$эквивалентно действию $\left(\partial_t-\partial_{t'}\right)^n$;

–действие оператора $\dfrac{\partial^m}{\partial\varepsilon^m}\dfrac{\partial^n}{\partial\tau^n}$эквивалентно $\left(\partial_x-\partial_{x'}\right)^m\left(\partial_t-\partial_{t'}\right)^n$.

Отсюда

$$\hat{D}_x^m\hat{D}_t^n f\cdot g=\lim_{\varepsilon,\tau\to 0}P\frac{\partial^m}{\partial\varepsilon^m}\frac{\partial^n}{\partial\tau^n}\Big(f\left(x+\varepsilon,t+\tau\right)\cdot g\left(x-\varepsilon,t-\tau\right)\Big)=$$

$$\lim_{\varepsilon,\tau\to 0}\left(\partial_x-\partial_{x'}\right)^m\left(\partial_t-\partial_{t'}\right)^n\Big(f\left(x+\varepsilon,t+\tau\right)\cdot g\left(x-\varepsilon,t-\tau\right)\Big)\Big|_{x'=x,t'=t}=$$

$$=\left(\partial_x-\partial_{x'}\right)^m\left(\partial_t-\partial_{t'}\right)^n\Big(f\left(x,t\right)\cdot g\left(x',t'\right)\Big)\Big|_{x'=x,t'=t}.$$

Переходим к свойству 5) .

$$\hat{D}_x^m\hat{D}_t^n f\cdot g=\left(\partial_x-\partial_{x'}\right)^m\left(\partial_t-\partial_{t'}\right)^n\Big(f\left(x,t\right)\cdot g\left(x',t'\right)\Big)\Big|_{\substack{x'=x\\ t'=t}}=$$

$$=\left(\partial_{x'}-\partial_x\right)^m\left(\partial_{t'}-\partial_t\right)^n\Big(g\left(x,t\right)\cdot f\left(x',t'\right)\Big)\Big|_{x'=x,t'=t}=$$

(поменяем x и x', t и t').

$$=\left(-1\right)^m\cdot\left(\partial_x-\partial_{x'}\right)^m\cdot\left(-1\right)^n\cdot\left(\partial_t-\partial_{t'}\right)^n\Big(g\left(x,t\right)\cdot f\left(x',t'\right)\Big)\Big|_{x'=x,t'=t}=$$

$$=\left(-1\right)^{m+n}\hat{D}_x^m\hat{D}_t^n g\cdot f,$$

что и требовалось доказать.

Из свойства 6) очевидно, что

$$\hat{D}_x^n e^{k_1x}\cdot e^{k_2x}=\left(\partial_x-\partial_{x'}\right)^n e^{k_1x}\cdot e^{k_2x}\Big|_{\substack{x'=x\\ t'=t}}=\left(k_1-k_2\right)^n e^{\left(k_1+k_2\right)x}.$$

Покажем свойство 7).

Если $P(x,y)$ – моном, то есть $P(x,y)=x^m y^n$, то

$$\hat{P}e^{\theta_1}\cdot e^{\theta_2}=\hat{D}_x^m\hat{D}_t^n e^{k_1x+\omega_1 t}\cdot e^{k_2x+\omega_2 t}=\left(\partial_x-\partial_{x'}\right)^m\left(\partial_t-\partial_{t'}\right)^n\left(e^{k_1x+\omega_1 t}\cdot e^{k_2x'+\omega_2 t'}\right)\Big|_{\substack{x'=x\\ t'=t}}=$$

$$=\left(k_1-k_2\right)^m\left(\omega_1-\omega_2\right)^n e^{k_1x+\omega_1 t}\cdot e^{k_2x+\omega_2 t}=P\left(k_1-k_2,\,\omega_1-\omega_2\right)e^{\theta_1}\cdot e^{\theta_2},$$

и 7) выполняется. Так как полином является суммой мономов, то для любого полинома 7) тоже выполняется.

8) Если $P(x,y)$ моном, то есть $P(x,y)=x^m y^n$, то

$$\hat{P}^{*}e^{kx+\omega t}=\frac{\partial^m}{\partial x^m}\frac{\partial^n}{\partial t^n}e^{kx+\omega t}=k^m\omega^n e^{kx+\omega t}=P(k,\omega)e^{kx+\omega t}.$$

Аналогично свойство 8) можно распространить на случай произвольных полиномов.

Будем использовать билинейный оператор и его свойства для решения уравнения Кортевега-де Фриза и уравнения Шредингера, которое имеет важное значение в квантовой физике.

2.2 Одно и двухсолитонные решения уравнения Кортевега-де Фриза

Метод Хироты применим для всех точно решаемых уравнений. Проиллюстрируем этот метод на уравнениях, рассмотренных в первой главе. Начнем с уравнения Кортевега-де Фриза.

Вернемся к задаче, рассмотренной в первой главе пункт 1.1, где уравнение Кортевега-де Фриза

$$u_t+uu_x+\beta u_{xxx}=0,$$

было приведено путем замены Коула-Хопфа

$$u(x,t)=12\beta\cdot\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(ln F\right)$$

к виду:

$$F\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial t}-\frac{\partial F}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial x}+3\beta\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)^2-3\beta\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}-\beta\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}+F\cdot\beta\frac{\partial^4 F}{\partial x^4}=0.$$

Будем искать решение полученного уравнения операторным методом Хироты. Для этого умножим на 2 и проделав несложные преобразования, получаем такой вид:

$$2F_{xt}F-2F_xF_t+\beta(F_{xxxx}F-4F_{xxx}F_x+6F_{xx}^2-4F_xF_{xxx}+FF_{xxxx})=0\,.$$

Хирота назвал это уравнение билинейной формой уравнения Кортевега-де Фриза.

Используя оператор Хироты, последнее уравнение перепишем в виде:

$$\left(\hat{D}_x\hat{D}_t+\beta\hat{D}_x^4\right)F\cdot F\overset{\Delta}{=}\hat{P}F\cdot F=0\,, \qquad (2.1)$$

где $\quad P\left(x,y\right)=xy+\beta x^4\,.$

По-прежнему будем искать решение в виде формального разложения:

$$F=1+F^{(1)}\varepsilon+F^{(2)}\varepsilon^2+F^{(3)}\varepsilon^3\ldots\,.$$

Подставляя это разложение в (2.1) и группируя члены с одинаковыми степенями ε, получаем:

$$\hat{P}F\cdot F=\hat{P}\Big(1+2F^{(1)}\varepsilon+\Big(2F^{(1)}+\left(F^{(1)}\right)^2\Big)\varepsilon^2+\Big(2F^{(3)}+2F^{(1)}F^{(2)}\Big)\varepsilon^3+\ldots\Big)=$$

$$=\varepsilon\Big(\hat{P}^*F^{(1)}\Big)+\varepsilon^2\Big(2\hat{P}^*F^{(2)}+\hat{P}F^{(1)}\cdot F^{(1)}\Big)+\varepsilon^3\cdot 2\Big(\hat{P}^*F^{(3)}+\hat{P}F^{(1)}\cdot F^{(2)}\Big)+\ldots$$

Отсюда получим уравнения:

$$\hat{P}^*F^{(1)}=\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x}+\beta\frac{\partial^4}{\partial x^4}\right)F^{(1)}=0\,, \qquad (2.2)$$

$$2\hat{P}^*F^{(2)}=-\hat{P}F^{(1)}\cdot F^{(1)}, \qquad (2.3)$$

$$\hat{P}^*F^{(3)}=-\hat{P}F^{(1)}\cdot F^{(2)}. \qquad (2.4)$$

Из уравнений (2.2)-(2.4) можно найти решение уравнения Кортевега-де Фриза в виде солитонов.

Будем искать односолитонное решение, допустим

$$F^{(1)}=e^{\theta}=e^{\omega t+kx}\,.$$

Подставляя последнее выражение в (2.2) и используя свойства оператора Хироты, получаем:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x}+\beta\frac{\partial^4}{\partial x^4}\right)F^{(1)}=\left(\omega k+\beta k^4\right)e^{\omega t+kx}=0.$$

Отсюда $\omega=-\beta k^3$ и $F^{(1)}=e^{\theta}=e^{kx-\beta k^3 t}\,.$

Учитывая, что $\hat{P}F^{(1)}\cdot F^{(1)}=P\big(0,0\big)=0$, из уравнений (2.3) и (2.4) следует, что функции $F^{(2)} \equiv 0,\ F^{(3)} \equiv 0 ...$ и т.д. Следовательно, уравнения (2.2)-(2.4) – будут верны.

Поэтому

$$F = 1 + F^{(1)}\varepsilon = 1 + \varepsilon e^{kx - \beta k^3 t} = 1 + e^{kx - \beta k^3 t + \varphi},$$

где $\varphi = \ln \varepsilon$ является решением уравнения (2.1).

Теперь будем искать двухсолитонное решение уравнения (2.1). Допустим, что

$$F^{(1)} = e^{\theta_1} + e^{\theta_2},$$

где $\theta_i = kx_i - \beta k_i^3 t$ и $F^{(2)} = Ae^{\theta_1 + \theta_2}$.

Уравнение (2.3) в этом случае запишется в виде

$$2AP\left(k_1 + k_2, -\beta k_1^3 - \beta k_2^3\right)e^{\theta_1+\theta_2} = -\left(\hat{P}e^{\theta_1} \cdot e^{\theta_1} + 2\hat{P}e^{\theta_1} \cdot e^{\theta_2} + \hat{P}e^{\theta_2} \cdot e^{\theta_2}\right) =$$

$$= -2P\left(k_1 - k_2, -\beta k_1^3 + \beta k_2^3\right)e^{\theta_1+\theta_2}.$$

Отсюда находим, что

$$A = -\frac{P\left(k_1 - k_2, -\beta k_1^3 + \beta k_2^3\right)}{P\left(k_1 + k_2, -\beta k_1^3 - \beta k_2^3\right)} = -\frac{\left(-\beta k_1^3 + \beta k_2^3\right)\left(k_1 - k_2\right) + \beta\left(k_1 - k_2\right)^4}{\left(-\beta k_1^3 - \beta k_2^3\right)\left(k_1 + k_2\right) + \beta\left(k_1 + k_2\right)^4} =$$

$$= \frac{\left(k_1 - k_2\right)^2}{\left(k_1 + k_2\right)^2}.$$

Учитывая основные соотношения оператора Хироты

$$\hat{P}\left(F^{(1)} \cdot F^{(2)}\right) = A\hat{P}\left(e^{\theta_1} + e^{\theta_2}\right) \cdot e^{\theta_1+\theta_2} = A\left(\hat{P}e^{\theta_1} \cdot e^{\theta_1+\theta_2} + \hat{P}e^{\theta_2} \cdot e^{\theta_1+\theta_2}\right)$$

$$= A\left(P\left(k_2, -\beta k_2^3\right)e^{2\theta_1+\theta_2} + P\left(k_1, -\beta k_1^3\right)e^{2\theta_2+\theta_1}\right) = 0,$$

из (2.4) следует, что $F^{(3)} = 0$.

Отсюда

$$F = 1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + Ae^{\theta_1+\theta_2}.$$

Подставляя найденное выражение для F в подстановку Коула-Хопфа, находим двухсолитонное решение уравнения (1.1).

Это решение описывает процесс распространения и взаимодействия двух солитонов уравнения Кортевега-де Фриза. На рисунке 2.1 иллюстрируется процесс взаимодействия двух солитонов уравнения КдФ.

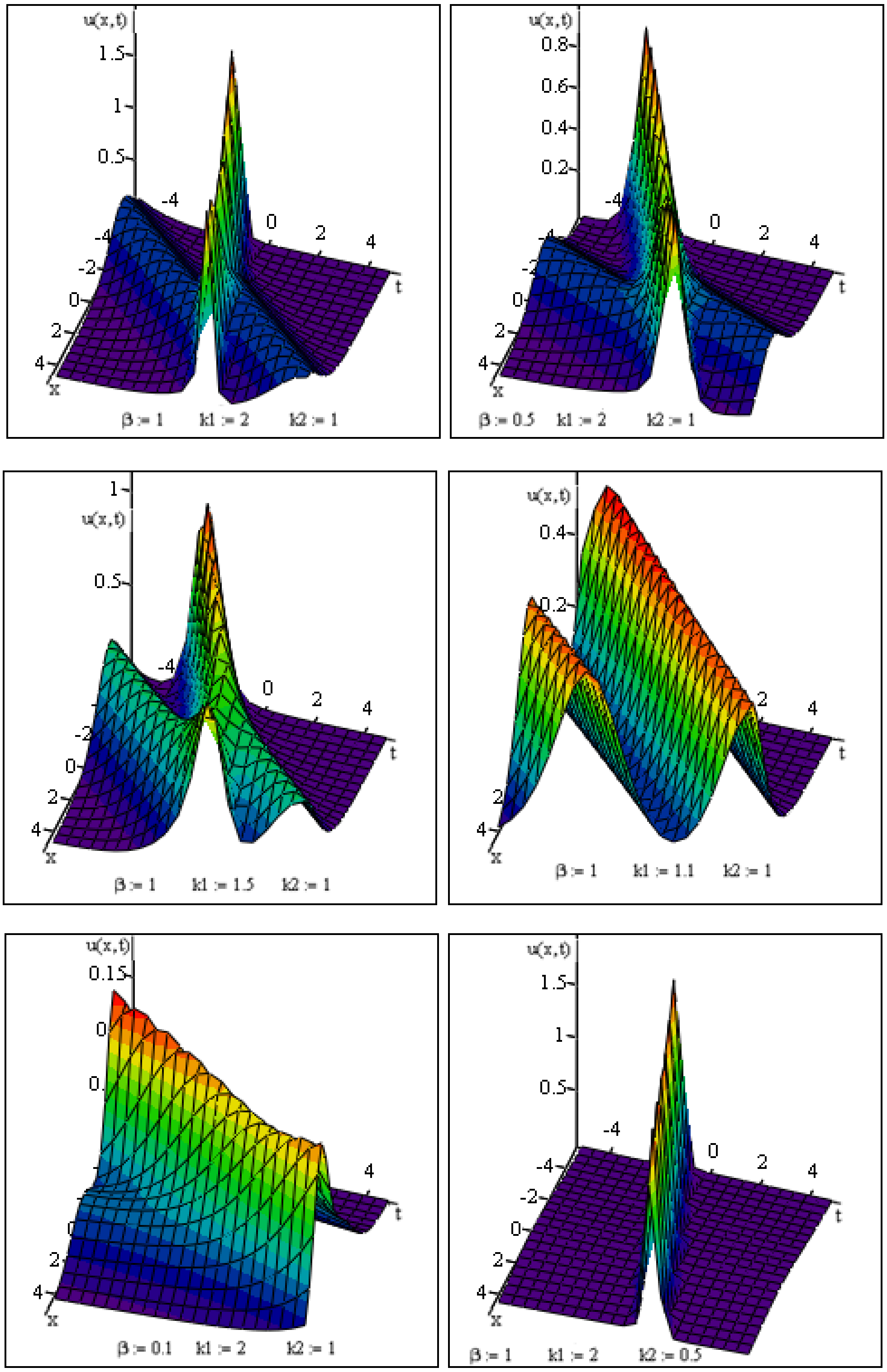

Рисунок 2.1 – Взаимодействия двух солитонов уравнения КдФ

$$F = 1 + e^{\theta_1} + e^{\theta_2} + A \cdot e^{\theta_1 + \theta_2};$$

$$A = \frac{(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2}; \ \theta_i = k_i x - \beta \cdot k_i^3 t, \ (i = 1, 2);$$

$$u(x,t)=12\beta\cdot\frac{\partial^2}{\partial x^2}(lnF).$$

Такое построение можно продолжить и построить трехсолитонное решение и для любого целого *n*.

2.3 Решения операторным методом модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза

При помощи метода Хироты можно исследовать многие другие уравнения. В частности, модифицированное уравнение КдФ

$$u_t+6u^2u_x+u_{xxx}=0. \qquad (2.5)$$

Сделаем замену $u=\frac{g}{f}$, пересчитаем все производные, входящие в уравнение (2.5):

$$u_t=\left(\frac{g}{f}\right)_t=\frac{g_tf-gf_t}{f^2}, \qquad u_x=\left(\frac{g}{f}\right)_x=\frac{g_xf-gf_x}{f^2},$$

$$u_{xx}=\frac{\left((g_{xx}f+g_xf_x)-(g_xf_x+gf_{xx})\right)f^2-(g_xf-gf_x)\cdot 2ff_x}{f^4}=$$

$$=\frac{f^2g_{xx}-fgf_{xx}-2ff_xg_x+2gf_x^2}{f^3},$$

$$u_{xxx}=\frac{g_{xxx}f-3g_{xx}f_x-3g_xf_{xx}-gf_{xxx}}{f^2}+\frac{6f_x\left(g_xff_x+gff_{xx}-gf_x^2\right)}{f^4}.$$

Подставляя в (2.5), получаем:

$$\frac{g_tf-gf_t}{f^2}+6\frac{g^2}{f^2}\cdot\frac{g_xf-gf_x}{f^2}+\frac{g_{xxx}f-3g_{xx}f_x-3g_xf_{xx}-gf_{xxx}}{f^2}+$$

$$+\frac{6f_x\left(g_xff_x+gff_{xx}-gf_x^2\right)}{f^4}=0.$$

Проделав простейшие преобразования

$$f^2\left(g_tf-gf_t+g_{xxx}f-3g_{xx}f_x+3g_xf_{xx}-gf_{xxx}\right)+$$

$$+6\left(g_xf-gf_x\right)\left(g^2-ff_{xx}+f_x^2\right)=0,$$

приводим уравнение (2.5) к системе билинейных уравнений

$$g^2 - ff_{xx} + f_x^2 = 0;\; g_t f - g f_t + g_{xxx} f - 3g_{xx} f_x + 3g_x f_{xx} - g f_{xxx} = 0,$$

или, вводя оператор Хироты,

$$g^2 = f\, f_{xx} - f_x^2 = \frac{1}{2}\hat{D}_x^2 f \cdot f \qquad (2.6)$$

и

$$\left(\hat{D}_t + \hat{D}_x^3\right) g \cdot f \stackrel{\Delta}{=} \hat{P} g \cdot f = 0, \qquad (2.7)$$

где $P(x, y) = y + x^3$.

Представим функции g и f в виде

$$g = g^{(1)}\varepsilon + g^{(3)}\varepsilon^3 + \ldots$$

$$f = 1 + f^{(2)}\varepsilon^2 + f^{(4)}\varepsilon^4 + \ldots,$$

получаем

$$g^2 = \left(g^{(1)}\varepsilon + g^{(3)}\varepsilon^3 + \ldots\right)\cdot\left(g^{(1)}\varepsilon + g^{(3)}\varepsilon^3 + \ldots\right) = \left(g^{(1)}\right)^2 \varepsilon^2 + 2g^{(1)}g^{(3)}\varepsilon^4 + \ldots,$$

$$\frac{1}{2}\hat{D}_x^2 f \cdot f = \frac{1}{2}\hat{D}_x^2\left(1 + 2f^{(2)}\varepsilon^2 + (2f^{(4)} + (f^{(2)})^2)\varepsilon^4 + \ldots\right)$$

$$= \varepsilon^2 f_{xx}^{(2)} + \varepsilon^4\left(f_{xx}^{(4)} + \frac{1}{2}\hat{D}_x^2 f^{(2)} f^{(2)}\right) + \ldots,$$

$$\hat{P} g \cdot f = \hat{P}(g^{(1)}\varepsilon + (g^{(3)} + g^{(1)} f^{(2)})\varepsilon^3 + (g^{(5)} + g^{(3)} f^{(2)} + g^{(1)} f^{(4)})\varepsilon^5 + \ldots) =$$

$$\varepsilon \hat{P}^* g^{(1)} + \varepsilon^3\left(\hat{P}^* g^{(3)} + \hat{P} g^{(1)} f^{(2)}\right) + \varepsilon^5\left(\hat{P}^* g^{(5)} + \hat{P} g^{(3)} f^{(2)} + \hat{P} g^{(1)} f^{(4)}\right) + \ldots .$$

Сравнивая коэффициенты при $\varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^4 \ldots,$ получаем:

$$\hat{P}^* g^{(1)} = g_t^{(1)} + g_{xxx}^{(1)} = 0$$

$$\left(g^{(1)}\right)^2 = f_{xx}^{(2)} \qquad (2.8)$$

$$\hat{P}^* g^{(3)} = -\hat{P} g^{(1)} f^{(2)} \qquad (2.9)$$

$$2g^{(1)} g^{(3)} = f_{xx}^{(4)} + \frac{1}{2}\hat{D}_x^2 f^{(2)} f^{(2)} \qquad (2.10)$$

$$\hat{P}^* g^{(5)} = -\hat{P} g^{(3)} f^{(2)} - \hat{P} g^{(1)} f^{(4)} \qquad (2.11)$$

......

По аналогии с прошлой задачей, начнём с односолитонного решения.

Пусть

$$g^{(1)} = Be^{\theta} = Be^{\omega t + kx} \quad ,$$

и

$$\hat{P}^{*} g^{(1)} = AP(k,\omega)e^{\theta} = A(k^3 + \omega)e^{\theta} = 0 .$$

Отсюда следует $\omega = -k^3$.

И пусть $f^{(2)} = e^{2\theta}$, подставим в (2.8), получаем:

$$B^2 e^{2\theta} = \left(2k\right)^2 e^{2\theta},$$

отсюда следует, что

$$B = 2kg^{(1)} = 2ke^{kx - k^3 t} .$$

Учитывая это, находим

$$\hat{P} g^{(1)} f^{(2)} = \hat{P}(2ke^{\theta}) \cdot e^{2\theta} = 2kP(k - k^3)e^{\theta} = 0 .$$

Поэтому можно допустить $g^{(3)} \equiv 0$, используя (2.8) и получить односолитонное решение

$$g = 2ke^{\theta} = 2ke^{kx - k^3 t}, \; f = 1 + e^{2\theta}$$

$$u = \frac{g}{f} = 2k \frac{e^{\theta}}{1 + e^{2\theta}} = \frac{k}{ch\theta} .$$

Аналогично, полагая

$$g^{(1)} = C_1 e^{\theta_1} + C_2 e^{\theta_2},$$

где $\theta_i = k_i x - k_i^3 t \; , i = 1,2$, можно после некоторых вычислений получить двухсолитонное решение:

$$\left(g^{(1)}\right)^2 = C_1^2 e^{2\theta_1} + C_2^2 e^{2\theta_2} + 2C_1 C_2 e^{\theta_1 + \theta_2} .$$

Полагая

$$f^{(2)} = e^{2\theta_1} + e^{2\theta_2} + De^{\theta_1 + \theta_2},$$

тогда

$$f_{xx}^{(2)} = 2k_1^2 e^{2\theta_1} + 2k_2^2 e^{2\theta_2} + D\left(k_1 + k_2\right)^2 e^{\theta_1 + \theta_2} .$$

Подставим найденные выражения в (2.8) и сравним коэффициенты, находим:

$$C_1 = 2k_1, C_2 = 2k_2, D = \frac{2 \cdot 2k_1 \cdot 2k_2}{(k_1 + k_2)^2} = 2(1 - A),$$

где $A = \dfrac{\left(k_1 - k_2\right)^2}{\left(k_1 + k_2\right)^2}$, как и в предыдущем пункте.

Таким образом,

$$g^{(1)} = 2k_1 e^{\theta_1} + 2k_2 e^{\theta_2},$$

$$f^{(2)} = e^{2\theta_1} + e^{2\theta_2} + De^{\theta_1+\theta_2} = e^{2\theta_1} + e^{2\theta_2} + 2\left(1 - A\right)e^{\theta_1+\theta_2}.$$

Продолжаем вычисления, используя формулу (2.10), имеем

$$\hat{P}g^{(1)} f^{(2)} = \hat{P}\left(2k_1 e^{\theta_1} + 2k_2 e^{\theta_2}\right) \cdot \left(e^{2\theta_1} + e^{2\theta_2} + De^{\theta_1+\theta_2}\right) = \hat{P}(2k_1 e^{\theta_1} \cdot e^{2\theta_1}$$
$$+ 2k_1 e^{\theta_1} \cdot e^{2\theta_1} + 2k_1 De^{\theta_1} \cdot e^{\theta_1+\theta_2} + 2k_2 e^{\theta_2} \cdot e^{2\theta_1} + 2k_2 De^{\theta_2} \cdot e^{\theta_1+\theta_2})$$
$$= 2k_1 P(k_1, -k_1^3)e^{3\theta_1} + 2k_1 P(k_1 - 2k_2, -k_1^3 + 2k_2^3)e^{\theta_1+2\theta_2} + 2k_1 DP(k_2, -k_2^3)e^{2\theta_1+\theta_2}$$
$$+ 2k_2 P(k_2 - 2k_1, -k_2^3 + 2k_1^3)e^{2\theta_1+\theta_2} + 2k_2 P(k_2, -k_2^3)e^{3\theta_2} + 2k_2 DP(k_1, -k_1^3)e^{\theta_1+2\theta_2}$$
$$= 2k_2 P(k_2 - 2k_1, -k_2^3 + 2k_1^3)e^{2\theta_1+\theta_2} + 2k_1 P(k_1 - 2k_2, -k_1^3 + 2k_2^3)e^{\theta_1+2\theta_2}$$

Следует заметить, что

$$P\left(k_i, -k_i^3\right) = k_i^3 - k_i^3 = 0.$$

Полагая

$$g^{(3)} = E_1 e^{2\theta_1+\theta_2} + E_2 e^{\theta_1+2\theta_2},$$

тогда

$$\hat{P}^* g^{(3)} = E_1 P(2k_1 + k_2, -2k_1^3 - k_2^3)e^{2\theta_1+\theta_2} + E_2 P(k_1 + 2k_2, -k_1^3 - 2k_2^3)e^{\theta_1+2\theta_2}.$$

Отсюда находим

$$E_1 = \frac{-2k_2 P\left(k_2 - 2k_1, -k_2^3 + 2k_1^3\right)}{P\left(2k_1 + k_2, -2k_1^3 - k_2^3\right)} = -2k_2 \frac{\left(k_2 - 2k_1\right)^3 + \left(-k_2^3 + 2k_1^3\right)}{\left(2k_1 + k_2\right)^3 + \left(-2k_1^3 - k_2^3\right)} =$$

$$= 2k_2 \frac{\left(k_1 - k_2\right)^2}{\left(k_1 + k_2\right)^2} = 2k_2 A.$$

Аналогично найдем $E_2 = 2k_1 A$.

Таким образом, получаем

$$g^{(3)} = 2A\left(k_2 e^{2\theta_1+\theta_2} + k_1 e^{\theta_1+2\theta_2}\right).$$

Дальше вычисляем, используя соотношение (2.10)

$$g^{(1)}g^{(3)} = \left(2k_1 e^{\theta_1} + 2k_2 e^{\theta_2}\right)\cdot 2A\left(k_2 e^{2\theta_1+\theta_2} + k_1 e^{\theta_1+2\theta_2}\right) =$$

$$= 4A\left(k_1 k_2\left(e^{3\theta_1+\theta_2} + e^{\theta_1+3\theta_2}\right) + \left(k_1^2 + k_2^2\right)e^{2\theta_1+2\theta_2}\right),$$

$$\hat{D}_x^2 f^{(2)} f^{(2)} = \hat{D}_x^2\left(e^{2\theta_1} + e^{2\theta_2} + 2(1-A)e^{\theta_1+\theta_2}\right)\cdot\left(e^{2\theta_1} + e^{2\theta_2} + 2(1-A)e^{\theta_1+\theta_2}\right) =$$

$$= \hat{D}_x^2\left(e^{2\theta_1}\cdot e^{2\theta_1} + e^{2\theta_1}\cdot e^{2\theta_2} + e^{2\theta_1}\cdot 2(1-A)e^{\theta_1+\theta_2} + e^{2\theta_2}\cdot e^{2\theta_1} + e^{2\theta_2}\cdot e^{2\theta_2} +\right.$$

$$+ e^{2\theta_2}\cdot 2(1-A)e^{\theta_1+\theta_2} + 2(1-A)e^{\theta_1+\theta_2}\cdot e^{2\theta_1} + 2(1-A)e^{\theta_1+\theta_2}\cdot e^{2\theta_2} +$$

$$\left. + 4(1-A)^2 e^{\theta_1+\theta_2}\cdot e^{\theta_1+\theta_2}\right) =$$

$$= \hat{D}_x^2\left(2e^{2\theta_1}\cdot e^{2\theta_2} + 4(1-A)e^{2\theta_1}\cdot e^{\theta_1+\theta_2} + 4(1-A)e^{2\theta_2}\cdot e^{\theta_1+\theta_2}\right) =$$

$$= 2\cdot\left(2k_1 - 2k_2\right)^2 e^{2\theta_1+2\theta_2} + 4(1-A)\left(k_1 - k_2\right)^2 e^{3\theta_1+\theta_2} + 4(1-A)\left(k_1 - k_2\right)^2 e^{\theta_1+3\theta_2}.$$

Все подставляем в (2.10):

$$8A\left(k_1 k_2\left(e^{3\theta_1+\theta_2} + e^{\theta_1+3\theta_2}\right) + \left(k_1^2 + k_2^2\right)e^{2\theta_1+2\theta_2}\right) = f_{xx}^{(4)} + 4\left(k_1 - k_2\right)^2 e^{2\theta_1+2\theta_2} +$$

$$+2\cdot\frac{4k_1k_2}{\left(k_1+k_2\right)^2}\cdot\left(k_1 - k_2\right)^2 e^{3\theta_1+\theta_2} + 2\cdot\frac{4k_1k_2}{\left(k_1+k_2\right)^2}\cdot\left(k_1 - k_2\right)^2 e^{\theta_1+3\theta_2}.$$

Выберем решение этого уравнения следующим образом:

$$f^{(4)} = Fe^{2\theta_1+2\theta_2},$$

тогда

$$f_{xx}^{(4)} = F\left(2k_1 + 2k_2\right)^2 e^{2\theta_1+2\theta_2}$$

и, используя соотношение, полученное из уравнения (2.10), находим

$$F = \frac{8\dfrac{\left(k_1-k_2\right)^2}{\left(k_1+k_2\right)^2}\cdot\left(k_1^2+k_2^2\right) - 4\left(k_1-k_2\right)^2}{4\left(k_1+k_2\right)^2} = \frac{\left(k_1-k_2\right)^4}{\left(k_1+k_2\right)^4} = A^2.$$

Таким образом,

$$f^{(4)} = A^2 e^{2\theta_1+2\theta_2}.$$

Продолжая применение оператора Хироты и используя его свойства в выражении (2.11), получаем

$$\hat{P}\left(g^{(3)}f^{(2)}+g^{(1)}f^{(4)}\right)$$
$$=\hat{P}\Big(2A\left(k_2e^{2\theta_1+\theta_2}+k_1e^{\theta_1+2\theta_2}\right)\left(e^{2\theta_1}+e^{2\theta_2}+2(1-A)e^{\theta_1+\theta_2}\right)$$
$$+\left(2k_1e^{\theta_1}+2k_2e^{\theta_2}\right)\cdot A^2e^{2\theta_1+2\theta_2}\Big)=$$
$$2A\hat{P}\Big(k_2e^{2\theta_1+\theta_2}\cdot e^{2\theta_1}+k_2e^{2\theta_1+\theta_2}\cdot e^{2\theta_2}+2k_2(1-A)e^{2\theta_1+2\theta_2}\cdot e^{\theta_1+\theta_2}$$
$$+k_1e^{\theta_1+2\theta_2}\cdot e^{2\theta_1}+k_1e^{\theta_1+2\theta_2}\cdot e^{2\theta_2}+2k_1(1-A)e^{2\theta_1+2\theta_2}\cdot e^{\theta_1+\theta_2}$$
$$+Ak_1e^{\theta_1}\cdot e^{2\theta_1+2\theta_2}+Ak_2e^{\theta_2}\cdot e^{2\theta_1+2\theta_2}\Big)=$$
$$2A\Big(P(k_2,-k_2^3)e^{4\theta_1+\theta_2}+k_2P(2k_1-k_2,-2k_1^3+k_2^3)e^{2\theta_1+3\theta_2}+$$
$$2k_2(1-A)P(k_1,-k_1^3)e^{3\theta_1+2\theta_2}+k_1P(2k_2-k_1,-2k_2^3+k_1^3)e^{3\theta_1+2\theta_2}$$
$$+k_1P(k_1,-k_1^3)e^{\theta_1+4\theta_2}+2k_1(1-A)P(k_2,-k_2^3)e^{2\theta_1+3\theta_2}$$
$$+Ak_1P(-k_1-2k_2,k_1^3+2k_2^3)e^{3\theta_1+2\theta_2}+Ak_2P(-2k_1-k_2,2k_1^3+k_2^3)e^{2\theta_1+3\theta_2}\Big)$$
$$=k_2\left((2k_1-k_2)^3+(-2k_1^3+k_2^3)+\frac{(k_1-k_2)^2}{(k_1+k_2)^2}\left((-2k_1-k_2)^3+2k_1^3+k_2^3\right)\right)e^{2\theta_1+3\theta_2}.$$
$$k_1\left((2k_2-k_1)^3+(-2k_2^3+k_1^3)+\frac{(k_1-k_2)^2}{(k_1+k_2)^2}\left((-k_1-2k_2)^3+k_1^3+2k_2^3\right)\right)e^{3\theta_1+2\theta_2}=0$$

Сопоставляем с (2.11), можно положить $g^{(5)}\equiv 0$, и так далее $f^{(6)},f^{(8)}\ldots g^{(7)},g^{(9)}\ldots=0$ и получить двухсолитонное решение:

$$g=2k_1e^{\theta_1}+2k_2e^{\theta_2}+2A\left(k_2e^{2\theta_1+\theta_2}+k_1e^{\theta_1+2\theta_2}\right), \tag{2.12}$$
$$f=1+e^{2\theta_1}+e^{2\theta_2}+2(1-A)e^{\theta_1+\theta_2}+A^2e^{2(\theta_1+\theta_2)},$$

где $A=\dfrac{(k_1-k_2)^2}{(k_1+k_2)^2},\theta_i=k_ix-k_i^3t\ ,i=1,2,$

k_1,k_2 – любые действительные или комплексные числа.

Положим в формулах, описывающих двухсолитонное взаимодействие, k_1 и k_2 комплексно сопряженными, то есть пусть $k_1=k_r+ik_i$, $k_2=k_r-ik_i$, где k_r,k_i – вещественные.

Тогда находим

$$\theta_1=(k_r+ik_i)x-(k_r+ik_i)^3t=k_rx-\left(k_r^3-3k_rk_i^2\right)t+i\left(k_ix+\left(k_i^3--3k_r^2k_i\right)t\right),$$

$$\theta_2=(k_r-ik_i)x-(k_r-ik_i)^3t = k_rx-\left(k_r^3-3k_rk_i^2\right)t-i\left(k_ix+\left(k_i^3-3k_r^2k_i\right)t\right),$$

$$A=\frac{(k_1-k_2)^2}{(k_1+k_2)^2}=\frac{(2ik_i)^2}{(2k_r)^2}=-\frac{k_i^2}{k_r^2}.$$

Величина A определяет фазовый сдвиг, который приобретают солитоны в результате взаимодействия.

Нетрудно найти, что

$$k_rx-\left(k_r^3-3k_rk_i^3\right)t\overset{\Delta}{=}\theta_r,\ \ k_ix+\left(k_i^3-3k_r^2k_i\right)t\overset{\Delta}{=}\theta_i.$$

Проделав некоторые вычисления из формул (2.11), получаем

$$g=2(k_r+ik_i)e^{\theta_r+i\theta_i}+2(k_r-ik_i)e^{\theta_r-i\theta_i}-2\frac{k_i^2}{k_r^2}\Big((k_r-ik_i)e^{3\theta_r+i\theta_i}+$$

$$+(k_r+ik_i)e^{3\theta_r-i\theta_i}\Big)=4k_re^{\theta_r}\left(\left(1-\frac{k_i^2}{k_r^2}e^{2\theta_r}\right)\cos\theta_i-\frac{k_i}{k_r}\left(1+\frac{k_i^2}{k_r^2}e^{2\theta_r}\right)\sin\theta_i\right)=$$

$$=-4k_re^{\theta_r}\left(1+\frac{k_i^2}{k_r^2}e^{2\theta_r}\right)\left(\cos\theta_i th(\theta_r+\varphi)+\frac{k_i}{k_r}\sin\theta_i\right),$$

где $\varphi=ln\dfrac{k_i}{k_r}$,

и

$$f=1+e^{2\theta_r}(2\cos2\theta_i)+2\left(1+\frac{k_i^2}{k_r^2}\right)e^{2\theta_r}+\frac{k_i^4}{k_r^4}e^{4\theta_r}=\left(1+\frac{k_i^2}{k_r^2}e^{2\theta_r}\right)^2+2e^{2\theta_r}\cdot2\cos^2\theta_i=$$

$$=\left(1+\frac{k_i^2}{k_r^2}e^{2\theta_r}\right)^2\left(1+\frac{k_i^2}{k_r^2}\cdot\frac{\left(2\cdot\frac{k_i}{k_r}e^{\theta_r}\right)^2}{\left(1+\frac{k_i^2}{k_r^2}e^{2\theta_r}\right)^2}\cdot\cos^2\theta_i\right)=$$

$$=\left(1+\frac{k_i^2}{k_r^2}e^{2\theta_r}\right)^2\left(1+\frac{k_i^2}{k_r^2}\cdot\frac{\cos^2\theta_i}{ch^2(\theta_r+\varphi)}\right).$$

Таким образом, решение имеет вид:

$$u = \frac{g}{f} = \frac{-4k_r e^{\theta_r}}{1 + \dfrac{k_i^2}{k_r^2} e^{2\theta_r}} \cdot \frac{\left(\cos\theta_i th\left(\theta_r + \varphi\right) + \dfrac{k_i}{k_r} \sin\theta_i \right)}{\left(1 + \dfrac{k_i^2}{k_r^2} \cdot \dfrac{\cos^2\theta_i}{ch^2\left(\theta_r + \varphi\right)} \right)} =$$

$$= -2k_r \cdot \frac{\left(\dfrac{k_r}{k_i} \cos\theta_i th\left(\theta_r + \varphi\right) + \sin\theta_i \right)}{\left(ch\left(\theta_r + \varphi\right) + \dfrac{k_i^2}{k_r^2} \cdot \dfrac{\cos^2\theta_i}{ch\left(\theta_r + \varphi\right)} \right)}.$$

Оно представляет собой бризерное решение модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза. Это новый тип солитонов, которого не было у уравнения КдФ. Бризеры можно интерпретировать как связанное состояние двух разнополярных солитонов, осциллирующих друг относительно друга [15]. Распространение бризера иллюстрирует рисунок 2.2.

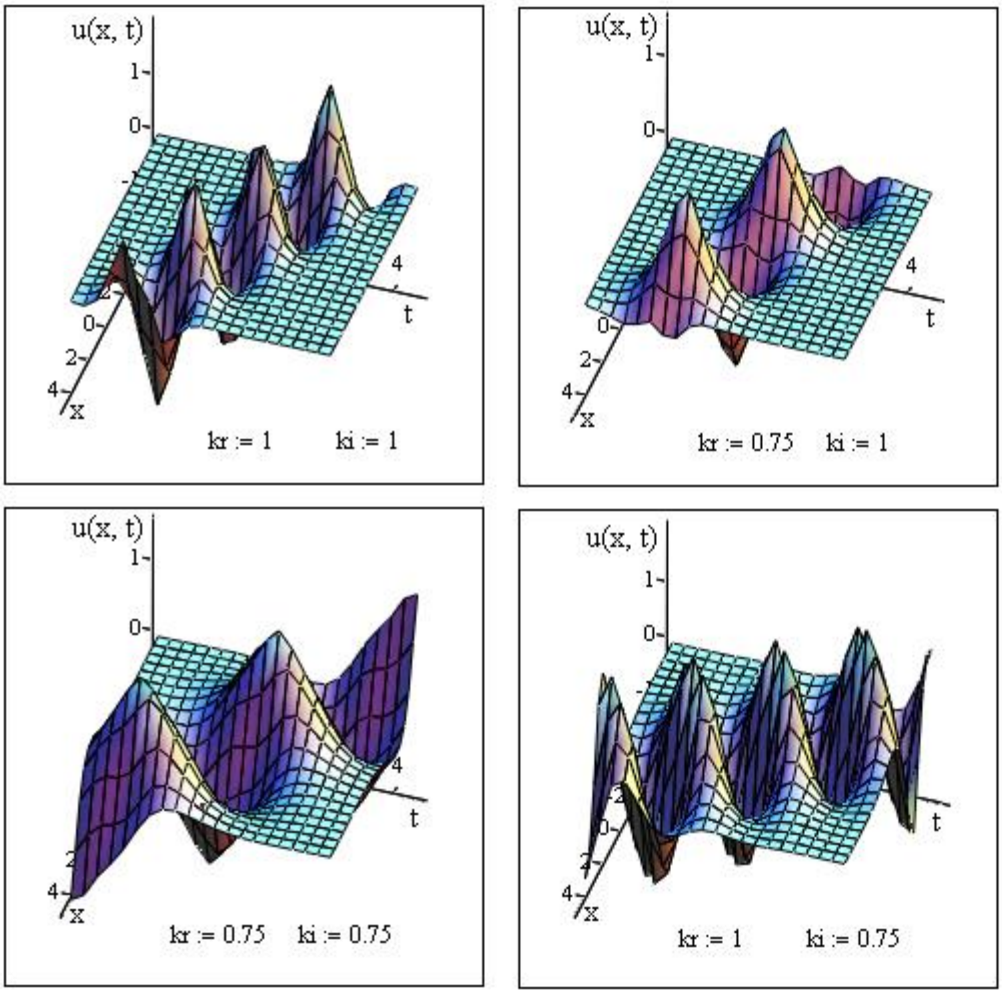

Рисунок 2.2 – Бризерное решение модифицированного уравнения КдФ

2.4 Решение уравнения Шредингера методом Хироты

Решения в виде уединенных волн были обнаружены и для нелинейного уравнения Шредингера. Это уравнение описывает распространение модулированных волн в кристаллах и оптических волокнах, ленгмюровских волн в плазме, тепловых волн в твердых телах и другие процессы [6, 15, 24].

Сначала приведём уравнение Шредингера, которое в безразмерной форме имеет вид

$$iu_t + u_{xx} + \beta |u|^2 u = 0, \tag{2.13}$$

к билинейной форме, сделав замену переменной $u = \dfrac{g}{f}$, где g – комплексная функция, f – действительная функция.

Пересчитаем все производные входящие в уравнение (2.13):

$$u_t = \left(\frac{g}{f}\right)_t = \frac{g_t f - g f_t}{f^2},$$

$$u_x = \left(\frac{g}{f}\right)_x = \frac{g_x f - g f_x}{f^2},$$

$$u_{xx} = \frac{\left((g_{xx} f + g_x f_x) - (g_x f_x + g f_{xx})\right) f^2 - (g_x f - g f_x)\cdot 2 f f_x}{f^4} =$$

$$= \frac{f^2 g_{xx} - f g f_{xx} - 2 f f_x g_x + 2 g f_x^2}{f^3},$$

$$|u|^2 = \bar{u}u = \frac{\bar{g}}{f}\cdot\frac{g}{f} = \frac{\bar{g}g}{f^2}.$$

Подставляем полученные выражения в (2.13), уравнение Шредингера принимает вид:

$$f(i(g_t f - g f_t) + f^2 g_{xx} - f g f_{xx} - 2 f f_x g_x + 2 g f_x^2 + \beta \bar{g} g g = 0,$$

или:

$$f\left(i(g_t f - g f_t) + f_{xx} g - 2 f_x g_x + g f_{xx}\right) + g\left(\beta \bar{g} g - 2 f f_{xx} + 2 f_x^2\right) = 0.$$

Можем допустить, что

$$i\left(g_t f - gf_t\right) + f_{xx}g - 2f_x g_x + gf_{xx} = 0,$$

$$\bar{g}g = \frac{2}{\beta}\left(ff_{xx} - f_x^2\right).$$

Мы получили систему билинейных уравнений.

Перепишем эти уравнения в операторной форме:

$$\left(i\hat{D}_t + \hat{D}_x^2\right)g \cdot f \overset{\Delta}{=} \hat{P}g \cdot f = 0,\ \bar{g}g = \frac{1}{\beta}\hat{D}_x^2 f \cdot f\ , \tag{2.14}$$

где многочлен $P(x,y) = iy + x^2$.

Будем искать решение в виде рядов:

$$g = g^{(1)}\varepsilon + g^{(3)}\varepsilon^3 + \ldots$$

$$f = 1 + f^{(2)}\varepsilon^2 + f^{(4)}\varepsilon^4 + \ldots.$$

Подставляя эти выражения в уравнения (2.14), получим:

$$\bar{g}g = (\bar{g}^{(1)}\varepsilon + \bar{g}^{(3)}\varepsilon^3 + \ldots)(g^{(1)}\varepsilon + g^{(3)}\varepsilon^3 + \ldots) = \bar{g}^{(1)}g^{(1)}\varepsilon^2 + \\ + \left(\bar{g}^{(1)}g^{(3)} + \bar{g}^{(3)}g^{(1)}\right)\varepsilon^4 + \ldots$$

$$\frac{1}{\beta}\hat{D}_x^2 f \cdot f = \frac{1}{\beta}\hat{D}_x^2\left(1 + 2f^{(2)}\varepsilon^2 + \left(2f^{(4)} + \left(f^{(2)}\right)^2\right)\varepsilon^4 + \ldots\right) =$$

$$= \varepsilon^2\frac{2}{\beta}f_{xx}^{(2)} + \varepsilon^4\frac{1}{\beta}\left(2f_{xx}^{(4)} + \hat{D}_x^2 f^{(2)} f^{(2)}\right) + \ldots.$$

$$\hat{P}g \cdot f = \hat{P}\left(g^{(1)}\varepsilon + \left(g^{(3)} + g^{(1)}f^{(2)}\right)\varepsilon^3 + \left(g^{(5)} + g^{(3)}f^{(2)} + g^{(1)}f^{(4)}\right)\varepsilon^5 + \ldots\right) =$$
$$= \varepsilon\hat{P}^* g^{(1)} + \varepsilon^3\left(\hat{P}^* g^{(3)} + \hat{P}g^{(1)}f^{(2)}\right) + \varepsilon^5\left(\hat{P}^* g^{(5)} + \hat{P}g^{(3)}f^{(2)} + \hat{P}g^{(1)}f^{(4)}\right) + \ldots.$$

Сравним коэффициенты при ε, ε^2, ε^3, ε^4, $\varepsilon^5\ldots$, получаем:

$$\hat{P}^* g^{(1)} = ig_t^{(1)} + g_{xx}^{(1)} = 0; \tag{2.15}$$

$$\bar{g}^{(1)}g^{(1)} = \frac{2}{\beta}f_{xx}^{(2)}; \tag{2.16}$$

$$\hat{P}^* g^{(3)} = -\hat{P}g^{(1)}f^{(2)}; \tag{2.17}$$

$$\bar{g}^{(1)}g^{(3)} + \bar{g}^{(3)}g^{(1)} = \frac{1}{\beta}\left(2f_{xx}^{(4)} + \hat{D}_x^2 f^{(2)} f^{(2)}\right); \tag{2.18}$$

$$\hat{P}^* g^{(5)} + \hat{P}g^{(3)}f^{(2)} + \hat{P}g^{(1)}f^{(4)} = 0. \tag{2.19}$$

Ищем односолитонное решение уравнения (2.13).

Пусть $g^{(1)} = e^{kx+\omega t}$. Подставляем в (2.15), получим:

$$ig_t^{(1)} + g_{xx}^{(1)} = \left(i\omega + k^2\right)e^{kx+\omega t} = 0.$$

Отсюда

$$\omega = \frac{-k^2}{i} = ik^2,\, g^{(1)} = e^{kx+ik^2t}.$$

И затем

$$\bar{g}^{(1)}g^{(1)} = e^{kx+ik^2t}\cdot e^{kx-ik^2t} = e^{2kx}.$$

Пусть $f^{(2)} = Be^{2kx}$, подставляем в (2.16):

$$e^{2kx} = \frac{2}{\beta}B\left(2k\right)^2 e^{2kx}.$$

Отсюда

$$B = \frac{\beta}{8k^2}, u \;\; f^{(2)} = \frac{\beta}{8k^2}e^{2kx}.$$

Таким образом:

$$\hat{P}g^{(1)}f^{(2)} = \hat{P}e^{kx+ik^2t}\cdot\frac{\beta}{8k^2}e^{2kx} = \frac{\beta}{8k^2}P(-k,ik^2)\cdot e^{3kx+ik^2t} = 0.$$

Поэтому можем допустить, что $g^{(3)}, g^{(5)}\ldots u\, f^{(4)}, f^{(6)} \equiv 0$.

Следовательно, мы получили односолитонное решение уравнения Шредингера, где

$$g = \varepsilon g^{(1)} = \varepsilon e^{kx+ik^2t},\;\; f = 1 + \varepsilon^2 f^{(2)} = 1 + \frac{\beta\varepsilon^2}{8k^2}e^{2kx}$$

– решения системы уравнений (2.14).

А решение уравнения (2.13), принимает вид:

$$u = \frac{g}{f} = \frac{\varepsilon e^{kx+ik^2t}}{1 + \frac{\beta\varepsilon^2}{8k^2}e^{2kx}},$$

или

$$u = \frac{g}{f} = \frac{\varepsilon e^{kx+ik^2t}}{1 + \frac{\beta\varepsilon^2}{8k^2}e^{2kx}} = \sqrt{\frac{2}{\beta}}k\cdot\frac{e^{ik^2t}}{ch\left(kx+\varphi\right)},$$

где $\varphi = \ln\sqrt{\dfrac{\beta\varepsilon^2}{8k^2}}$.

Аналогично найдем двухсолитонное решение уравнения Шредингера.

Пусть

$$g^{(1)} = C_1 e^{\theta_1} + C_2 e^{\theta_2} = C_1 e^{k_1 x + ik_1^2 t} + C_2 e^{k_2 x + ik_2^2 t},$$

где $\theta_i = k_i x + ik_i^2 t\,, i = 1,2$, тогда

$$\bar{g}^{(1)} g^{(1)} = (C_1 e^{k_1 x - ik_1^2 t} + C_2 e^{k_2 x - ik_2^2 t})\left(C_1 e^{k_1 x + ik_1^2 t} + C_2 e^{k_2 x + ik_2^2 t}\right) =$$

$$= C_1^2 e^{2k_1 x} + C_2^2 e^{2k_2 x} + C_1 C_2 e^{(k_1+k_2)x}\left(e^{i\left(k_2^2 - k_1^2\right)t} + e^{i\left(k_1^2 - k_2^2\right)t}\right).$$

Пусть

$$f^{(2)} = e^{2k_1 x} + e^{2k_1 x} + De^{(k_1+k_2)x}\left(e^{i\left(k_2^2 - k_1^2\right)t} + e^{i\left(k_1^2 - k_2^2\right)t}\right),$$

тогда:

$$\frac{2}{\beta} f_{xx}^{(2)} = \frac{2}{\beta}\left(\left(2k_1\right)^2 e^{2k_1 x} + \left(2k_2\right)^2 e^{2k_2 x} + D\left(k_1 + k_2\right)^2 e^{(k_1+k_2)x}\left(e^{i\left(k_2^2 - k_1^2\right)t} + e^{i\left(k_1^2 - k_2^2\right)t}\right)\right).$$

Сравним коэффициенты:

$$C_1 = \sqrt{\frac{8}{\beta}}k_1 \;\; C_2 = \sqrt{\frac{8}{\beta}}k_2 \;\;\; D = \frac{4k_1 k_2}{\left(k_1 + k_2\right)^2} = 1 - A,$$

где $A = \dfrac{\left(k_1 - k_2\right)^2}{\left(k_1 + k_2\right)^2}$.

Следовательно,

$$g^{(1)} = \sqrt{\frac{8}{\beta}}\left(k_1 e^{k_1 x + ik_1^2 t} + k_2 e^{k_2 x + ik_2^2 t}\right),$$

$$f^{(2)} = e^{2k_1 x} + e^{2k_1 x} + \left(1 - A\right)e^{(k_1+k_2)x}\left(e^{i\left(k_2^2 - k_1^2\right)t} + e^{i\left(k_1^2 - k_2^2\right)t}\right).$$

Проделав несложные вычисления, находим:

$$\hat{P}g^{(1)} f^{(2)} = -\sqrt{\frac{8}{\beta}}E_1 \cdot 4k_1 k_2 \frac{\left(k_1 - k_2\right)^2}{k_1 + k_2} e^{(k_1+2k_2)x + ik_1^2 t} + e^{(k_2+2k_1)x + ik_2^2 t}.$$

Поэтому можно положить, что

$$g^{(3)}=E_1e^{(k_1+2k_2)x+ik_1^2t}+E_2e^{(k_2+2k_1)x+ik_2^2t}.$$

Отсюда

$$\hat{P}^*g^{(3)}=E_1(4k_1k_2+4k_2^2)e^{(k_1+2k_2)x+ik_1^2t}+E_2(4k_1k_2+4k_1^2)e^{(k_2+2k_1)x+ik_2^2t}.$$

Сравним коэффициенты в (2.17), находим, что:

$$E_1=\frac{\sqrt{\frac{8}{\beta}}\cdot 4k_1k_2\cdot\frac{(k_1-k_2)^2}{k_1+k_2}}{4k_2(k_1+k_2)}=\sqrt{\frac{8}{\beta}}k_1A\,;E_2=\sqrt{\frac{8}{\beta}}k_2A.$$

Следовательно

$$g^{(3)}=\sqrt{\frac{8}{\beta}}A\left(k_1e^{(k_1+2k_2)x+ik_1^2t}+k_2e^{(k_2+2k_1)x+ik_2^2t}\right).$$

Проделав вычисления в (2.18), находим

$$\bar{g}^{(1)}g^{(3)}+\bar{g}^{(3)}g^{(1)}=\frac{8A}{\beta}\Big(2\left(k_1^2+k_2^2\right)e^{(2k_1+2k_2)x}+k_1k_2(e^{(3k_1+k_2)x}+$$

$$+e^{(k_1+3k_2)x})\left(e^{i\left(k_2^2-k_1^2\right)t}+e^{i\left(k_1^2-k_2^2\right)t}\right)\Big);$$

$$\hat{D}_x^2f^{(2)}f^{(2)}=8\left(k_1-k_2\right)^2e^{(2k_1+2k_2)x}+$$

$$+8Ak_1k_2\left(e^{(3k_1+k_2)x}+e^{(k_1+3k_2)x}\right)(e^{i\left(k_2^2-k_1^2\right)t}+e^{i\left(k_1^2-k_2^2\right)t}).$$

Всё подставляя в (2.18), производя преобразования можем допустить, что $f^{(4)}=Fe^{(2k_1+2k_2)x}$, а $f_{xx}^{(4)}=F\cdot\left(2k_1+2k_2\right)^2e^{(2k_1+2k_2)x}$.

Учитывая (2.18), получаем

$$F=\frac{16A\left(k_1^2+k_2^2\right)-8\left(k_1-k_2\right)^2}{8\left(k_1+k_2\right)^2}=A^2.$$

То есть $f^{(4)}=A^2e^{(2k_1+2k_2)x}$.

Посредством несложных вычислений, находим:

$$\hat{P}(g^{(3)}f^{(2)}+g^{(1)}f^{(4)})=0.$$

Следовательно, можно положить $g^{(5)},g^{(7)}\ldots f^{(6)},f^{(8)}\ldots$ равными нулю и получить двухсолитонное решение

$$g=\sqrt{\frac{8}{\beta}}\left(k_1e^{k_1x+ik_1^2t}+k_2e^{k_2x+ik_2^2t}+A\left(k_1e^{(k_1+2k_2)x+ik_1^2t}+k_2e^{(k_2+2k_1)x+ik_2^2t}\right)\right)$$

$$f=1+e^{2k_1x}+e^{2k_1x}+(1-A)e^{(k_1+k_2)x}\left(e^{i\left(k_2^2-k_1^2\right)t}+e^{i\left(k_1^2-k_2^2\right)t}\right)+A^2e^{2(k_1+k_2)x}$$

где по-прежнему

$$A=\frac{(k_1-k_2)^2}{(k_1+k_2)^2}.$$

Таким образом, метод Хироты позволяет находить в явном виде точные одно- и двухсолитонные решения уравнения Шредингера [24].

3 ИСПОЛЬЗОВАНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ МАГИСТЕРСКОЙ ДИССЕРТАЦИИ В ПРЕПОДАВАТЕЛЬСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Нелинейные математические модели описывающие процессы распространения волн различной физической природы, являются сложными объектами исследования. Однако, для большинства эталонных уравнений, таких как уравнения Кортевега-де Фриза, модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза, Буссинеска, синус-Гордона, нелинейного уравнения Шредингера и др., разработаны различные аналитические методы, позволяющие получить точные решения при произвольных начальных условиях. В настоящее время известно достаточно много точно решаемых нелинейных уравнений. Но есть класс уравнений, которые называют частично интегрируемыми уравнения. Задача Коши для таких уравнений может быть решена для конкретного начального условия, которое заранее не известно [6, 12]. При поиске точных решений таких уравнений часто используют переменные бегущей волны. Изложение методов решения нелинейных уравнений в литературе довольно кратко и даются конспективно.

В магистерской диссертации рассмотрены два точных метода построения солитонных решений для наиболее популярных нелинейных уравнений в частных производных. Используем метод классического анализа и метод оператора Хироты. Для сравнения решаем одни и те же эталонные уравнения и получаем одинаковые результаты.

Результаты данной магистерской работы могут быть использованы для чтения лекций и проведения практических занятий направление подготовки 01.04.02 – «Прикладная математика и информатика», направление подготовки 03.03.02 – «Физика».

Краткий конспект лекции решения операторным методом Хироты модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза.

Сначала введем оператор Хироты $\hat{D}_x$, действующий на упорядоченную пару функций $f(x)$, $g(x)$:

$$\hat{D}_x f \cdot g = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\partial \left(f(x+\varepsilon) g(x-\varepsilon) \right)}{\partial \varepsilon} = f_x g - f g_x.$$

Запишем основные свойства оператора Хироты:

1) $\hat{P}(\lambda f) \cdot g = \hat{P} f \cdot (\lambda g) = \lambda \hat{P} f \cdot g$;

2) $\hat{P}(f_1 + f_2) \cdot g = \hat{P} f_1 \cdot g + \hat{P} f_2 \cdot g$;

3) $\hat{P} f \cdot 1 = \hat{P}^* f$;

4) $\hat{D}_x^m \hat{D}_t^n f \cdot g = (\partial_x - \partial_{x'})^m (\partial_t - \partial_{t'})^n \left(f(x,t) \cdot g(x',t') \right) \Big|_{x'=x,\ t'=t}$;

5) $\hat{D}_x^m \hat{D}_t^n f \cdot g = (-1)^{m+n} \hat{D}_x^m \hat{D}_t^n g \cdot f$.

Более того, если $m+n$ четное число, то

$$\hat{D}_x^m \hat{D}_t^n f \cdot g = \hat{D}_x^m \hat{D}_t^n g \cdot f \ ;$$

если $m+n$ нечетное, то

$$\hat{D}_x^m \hat{D}_t^n f \cdot f = 0.$$

6) $\hat{D}_x^n e^{k_1 x} \cdot e^{k_2 x} = (k_1 - k_2)^n e^{(k_1 + k_2)x}$,

в частности,

$$\hat{D}_x^n e^{kx} \cdot e^{kx} = 0.$$

7) $\hat{P} e^{\theta_1} \cdot e^{\theta_2} = P(k_1 - k_2, \omega_1 - \omega_2) e^{\theta_1 + \theta_2}$,

где $\theta_i = k_i x + \omega_i t$.

8) $\hat{P}^* e^{kx + \omega t} = P(k, \omega) e^{kx + \omega t}$.

Сначала приведём уравнение Шредингера, которое в безразмерной форме имеет вид

$$i u_t + u_{xx} + \beta |u|^2 u = 0, \qquad (3.1)$$

к билинейной форме, сделав замену переменной $u = \dfrac{g}{f}$, где g – комплексная функция, f – действительная функция.

Пересчитаем все производные входящие в уравнение (3.1), после чего уравнение Шредингера принимает вид:

$$f \left(i (g_t f - g f_t) + f_{xx} g - 2 f_x g_x + g f_{xx} \right) + g \left(\beta \bar{g} g - 2 f f_{xx} + 2 f_x^2 \right) = 0.$$

Мы получили систему билинейных уравнений.

$$i\left(g_t f - gf_t\right) + f_{xx}g - 2f_x g_x + gf_{xx} = 0,$$

$$\bar{g}g = \frac{2}{\beta}\left(ff_{xx} - f_x^2\right).$$

Перепишем эти уравнения в операторной форме:

$$\left(i\hat{D}_t + \hat{D}_x^2\right)g \cdot f \overset{\Delta}{=} \hat{P}g \cdot f = 0,\ \bar{g}g = \frac{1}{\beta}\hat{D}_x^2 f \cdot f\,, \tag{3.2}$$

где многочлен $P(x, y) = iy + x^2$.

Будем искать решение в виде рядов:

$$g = g^{(1)}\varepsilon + g^{(3)}\varepsilon^3 + \ldots$$

$$f = 1 + f^{(2)}\varepsilon^2 + f^{(4)}\varepsilon^4 + \ldots.$$

Подставляя эти выражения в уравнения (3.2), получим:

$$\bar{g}g = (\bar{g}^{(1)}\varepsilon + \bar{g}^{(3)}\varepsilon^3 + \ldots)(g^{(1)}\varepsilon + g^{(3)}\varepsilon^3 + \ldots) = \bar{g}^{(1)}g^{(1)}\varepsilon^2 + \\ + \left(\bar{g}^{(1)}g^{(3)} + \bar{g}^{(3)}g^{(1)}\right)\varepsilon^4 + \ldots.$$

$$\frac{1}{\beta}\hat{D}_x^2 f \cdot f = \frac{1}{\beta}\hat{D}_x^2\left(1 + 2f^{(2)}\varepsilon^2 + \left(2f^{(4)} + \left(f^{(2)}\right)^2\right)\varepsilon^4 + \ldots\right) =$$

$$= \varepsilon^2 \frac{2}{\beta} f_{xx}^{(2)} + \varepsilon^4 \frac{1}{\beta}\left(2f_{xx}^{(4)} + \hat{D}_x^2 f^{(2)} f^{(2)}\right) + \ldots$$

$$\hat{P}g \cdot f = \hat{P}\left(g^{(1)}\varepsilon + \left(g^{(3)} + g^{(1)}f^{(2)}\right)\varepsilon^3 + \left(g^{(5)} + g^{(3)}f^{(2)} + g^{(1)}f^{(4)}\right)\varepsilon^5 + \ldots\right) =$$

$$= \varepsilon\hat{P}^* g^{(1)} + \varepsilon^3\left(\hat{P}^* g^{(3)} + \hat{P}g^{(1)}f^{(2)}\right) + \varepsilon^5\left(\hat{P}^* g^{(5)} + \hat{P}g^{(3)}f^{(2)} + \hat{P}g^{(1)}f^{(4)}\right) + \ldots$$

Сравним коэффициенты при $\varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^4, \varepsilon^5 \ldots$, получаем:

$$\hat{P}^* g^{(1)} = ig_t^{(1)} + g_{xx}^{(1)} = 0; \tag{3.3}$$

$$\bar{g}^{(1)}g^{(1)} = \frac{2}{\beta} f_{xx}^{(2)}; \tag{3.4}$$

$$\hat{P}^* g^{(3)} = -\hat{P}g^{(1)}f^{(2)};$$

$$g^{(1)}g^{(3)} + \bar{g}^{(3)}g^{(1)} = \frac{1}{\beta}\left(2f_{xx}^{(4)} + \hat{D}_x^2 f^{(2)} \cdot f^{(2)}\right);$$

$$\hat{P}^* g^{(5)} + \hat{P}g^{(3)}f^{(2)} + \hat{P}g^{(1)}f^{(4)} = 0.$$

Ищем односолитонное решение уравнения (3.1).

Пусть $g^{(1)} = e^{kx+\omega t}$.Подставляем в (3.3), получим:

$$ig_t^{(1)} + g_{xx}^{(1)} = \left(i\omega + k^2\right)e^{kx+\omega t} = 0.$$

Отсюда

$$\omega = \frac{-k^2}{i} = ik^2, g^{(1)} = e^{kx+ik^2t}.$$

И затем

$$\bar{g}^{(1)}g^{(1)} = e^{kx+ik^2t} \cdot e^{kx-ik^2t} = e^{2kx}.$$

Пусть $f^{(2)} = Be^{2kx}$, подставляем в (3.4):

$$e^{2kx} = \frac{2}{\beta}B\left(2k\right)^2 e^{2kx}.$$

Отсюда

$$B = \frac{\beta}{8k^2}, \text{и } f^{(2)} = \frac{\beta}{8k^2}e^{2kx}.$$

Таким образом:

$$\hat{P}g^{(1)}f^{(2)} = \hat{P}e^{kx+ik^2t} \cdot \frac{\beta}{8k^2}e^{2kx} = \frac{\beta}{8k^2}P\left(-k, ik^2\right)e^{3kx+ik^2t} = 0.$$

Поэтому можем допустить, что $g^{(3)}, g^{(5)} \ldots u\, f^{(4)}, f^{(6)} \equiv 0$.

Следовательно, мы получили односолитонное решение уравнения Шредингера, где

$$g = \varepsilon g^{(1)} = \varepsilon e^{kx+ik^2t}, \;\; f = 1 + \varepsilon^2 f^{(2)} = 1 + \frac{\beta\varepsilon^2}{8k^2}e^{2kx}$$

– решения системы уравнений (3.2).

А решение уравнения (3.1), принимает вид:

$$u = \frac{g}{f} = \frac{\varepsilon e^{kx+ik^2t}}{1 + \dfrac{\beta\varepsilon^2}{8k^2}e^{2kx}},$$

или

$$u=\frac{g}{f}=\frac{\varepsilon e^{kx+ik^2t}}{1+\frac{\beta\varepsilon^2}{8k^2}e^{2kx}}=\sqrt{\frac{2}{\beta}}k\cdot\frac{e^{ik^2t}}{ch\left(kx+\varphi\right)}\ ,$$

где $\varphi=\ln\sqrt{\frac{\beta\varepsilon^2}{8k^2}}.$

Аналогично можно построить двухсолитонное решение уравнения Шредингера [24].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной магистерской работе основное внимание уделено изучению нелинейных математических моделей волновых процессов и методам построения аналитических решений уравнений в частных производных.

Были исследованы известные математические модели нелинейных волновых процессов: уравнение Кортевега-де Фриза, модифицированное уравнение Кортевега-де Фриза, нелинейное волновое уравнение Буссинеска, нелинейное уравнение Шредингера, уравнение Клейна-Гордона. На примерах этих уравнений проведено построение солитонных решений двумя точными аналитическими методами. Первый метод отыскания решения заключается в переходе к обыкновенным дифференциальным уравнениям с использованием переменных бегущей волны. Второй прямой метод использует оператор Хироты для нахождения солитонных решений.

Уравнение Кортевега-де Фриза, модифицированное уравнение Кортевега-де Фриза решены двумя методами. Следует отметить, что метод оператора Хироты эффективней, так как упрощает выкладки и показывает отчетливо структуру уравнений.

Операторным методом подробно решено нелинейное уравнение Шредингера. Для этого уравнения построено одно и двухсолитонное решения. Найдено бризерное решение модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза.

Кроме того, в работе была установлена прямая зависимость между уравнением Кортевега-де Фриза и нелинейным волновым уравнение Буссинеска.

Новизна данной работы заключается в следующем:

- разработан специальный подход к решению модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза в виде бегущей волны со стационарным профилем;

- методом медленно меняющегося профиля, получено уравнение Кортевега-де Фриза из уравнения Буссинеска;

- построены солитонные решения нелинейного уравнения Шредингера.

Научная и практическая значимость магистерской диссертации состоит в том, что ее можно использовать в учебном процессе АмГУ по дисциплинам: «Линейные и нелинейные модели математической физики (специальные главы)», «Линейные и нелинейные уравнения физики». Кроме этого, полученные результаты могут послужить основой для написания других выпускных квалификационных работ, использующих нелинейные математические модели, теорию солитонов.

Результаты проделанной работы были апробированы на 3 конференциях. Опубликованы две научные статьи в журнале «Вестник АмГУ».

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1 Абловиц, М. Солитоны и метод обратной задачи рассеяния / М. Абловиц, Х. Сигур. – М.: Мир, 1987. – 480 с.

2 Агошков, В.И. Методы решения задач математической физики: учебное пособие / В.И. Агошков, П.Б. Дубовский, В.П. Шутяев; под ред. Г.И. Марчука. – М.: Физматлит, 2002. – 320 с.

3 Березин, Ю.А. Моделирование нелинейных волновых процессов / Ю.А. Березин; ред. Н. Н. Яненко. - Новосибирск: Наука, 1982. – 160 с.

4 Вайнберг, Б. Р. Асимптотические методы в уравнениях математической физики: монография / Б. Р. Вайнберг. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1982. – 295 с.

5 Заславский, Г.М. Введение в нелинейную физику: От маятника до турбулентности и хаоса / Г.М. Заславский, Р.З. Сагдеев. – М.: Наука, 1988. – 368 с.

6 Кудряшов, Н.А. Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений / Н.А. Кудряшов. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. – 360 с.

7 Кудряшов, Н.А. Методы нелинейной математической физик: учебное пособие / Н. А. Кудряшов. – Долгопрудный: Интеллект, 2010. – 368 с.

8 Мартинсон, Л.К. Дифференциальные уравнения математической физики: учебник для втузов / Л.К. Мартинсон, Ю.И. Малов. – М.: Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2011. – 368 с.

9 Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики: учебное пособие: доп. УМО / А.Д. Полянин [и др.]. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 255 с.

10 Новокшенов, В. Ю. Введение в теорию солитонов: учебное пособие / В.Ю. Новокшенов. – М. ; Ижевск : Ин-т компьютер. исслед., 2002. – 96 с.

11 Ньюэлл, А. Солитоны в математике и физике / А. Ньюэлл. – М.: Мир, 1989. – 326 с.

12 Павлов, М.В. Уравнение Буссинеска и преобразования типа Миуры / М.В. Павлов // Фундаментальная и прикладная математика. 2004. Т. 10. Вып. 1.

С. 175-182 [Электронный ресурс] // Фундаментальная и прикладная математика: офиц. сайт. – Режим доступа: http://mech.math.msu.su/~fpm/rus. – 22.04.2018.

13 Полянин, А. Д. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: Точные решения / А.Д. Полянин, В.Ф. Зайцев. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 432 с.

14 Полянин, А.Д. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики: учебное пособие: доп. УМО / А.Д. Полянин, А.Д. Зайцев, А.И. Журов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 255 с.

15 Рыскин, Н.М. Нелинейные волны. Серия: Синергетика От прошлого к будущему / Н.М. Рыскин, Д.И. Трубецков. – М.: URSS 2017. – 312 с.

16 Свешников, А.Г. Лекции по математической физике: учебное пособие: доп. Мин. обр. РФ / А. Г. Свешников, А.Н. Боголюбов, В.В. Кравцов. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Изд-во Моск. гос. ун-та : Наука, 2004. – 415 с.

17 Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики: учебник: рек. Мин. обр. РФ / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М.: Наука, 2004. – 798 с.

18 Труфанова, Т.В. Методы решения уравнений математической физики: учебное пособие / Т.В. Труфанова, А.Г. Масловская, Е. М. Веселова. – Благовещенск: Изд-во Амур. гос. ун-та, 2015. – 196 с.

19 Филлипов, А.Т. Многоликий солитон / А.Т. Филлипов. – М.: Наука, 1990. – 288 с.

20 Хирота Р. Прямые методы в теории солитонов / Р. Хирота // Солитоны: сборник / под ред. С. П. Новиков. – М.: Мир, 1983. – 408 с.

21 Цзинюй, Му. Аналитические методы решения нелинейных уравнений волновых процессов/ Му Цзинюй // Молодёжь XXI века: шаг в будущее материалы XVIII региональной научно-практической конференции. – 2017. – С. 1040-1041.

22 Цзинюй, Му. Операторный метод Хирота решение уравнения Шредингера/ Му Цзинюй, А.А. Загрузин // Молодёжь XXI века: шаг в будущее материалы XVIII региональной научно-практической конференции. – Т. 3. – 2018. – С. 49-50.

23 Цзинюй, Му. Аналитический метод решения нелинейного волнового уравнения / Му Цзинюй, Т.В. Труфанова // Вестник Амурского государственного университета. Серия: Естественные и экономические науки. – 2017. – № 79. – С. 12-16.

24 Цзинюй, Му. Аналитический метод решения нелинейного волнового уравнения Шредингера / Му Цзинюй, Т.В. Труфанова // Вестник Амурского государственного университета. Серия: Естественные и экономические науки. – 2018. – № 81. – С. 3-7.

25 Цзинюй, Му. Преобразование уравнения Буссинеска в уравнение Кортевега-де Фриза / Му Цзинюй, Т.В. Труфанова // Современные проблемы науки материалы Российской национальной научной конференции с международным участием. – 2017. – С. 24-27.

26 Daripa P. A Class of Model Equations for Bi-directional Propagation of Capillary-Gravity Waves Department of Mathematics / P. Daripa, Dash K. Ranjan. – Texas : A&M University, College Station, TX-77843 [Электронный ресурс]. Режим доступа:https://pdfs.semanticscholar.org/0606/182d2a00bdec791c04e0ad04cdff5ea0091f.pdf. – 22.04.2018.

27 Korteweg, D.J. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves / D.J. Korteweg, G. de Vries // Phil. Mag. – 1895. – № (5) 39. – P. 422-443.