

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
(ФГБОУ ВО «АмГУ»)

Факультет математики и информатики
Кафедра математического анализа и моделирования
Направление подготовки 01.03.02 – Прикладная математика и информатика
Профиль: Математическое и информационное обеспечение экономической деятельности

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ
Зав. кафедрой
_____ Н.Н. Максимова
«_____» _____ 2017 г.

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

на тему: Нелинейные модели диффузионных процессов переноса

Исполнитель
студент группы 352 об

(подпись, дата)

А.А. Сысолятин

Руководитель
доцент, канд. техн. наук

(подпись, дата)

Т.В. Труфанова

Нормоконтроль
доцент, канд. техн. наук

(подпись, дата)

А.В. Рыженко

Благовещенск 2017

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
(ФГБОУ ВПО «АмГУ»)

Факультет математики и информатики
Кафедра математического анализа и моделирования

УТВЕРЖДАЮ
Зав. кафедрой
_____ Н.Н. Максимова
« _____ » _____ 2017 г.

ЗАДАНИЕ

К бакалаврской работе студента Сысолятина Алексея Александровича.

1. Тема бакалаврской работы: Нелинейные модели диффузионных процессов переноса (утверждена приказом от 10.04.2017 № 770-уч.).

2. Срок сдачи студента законченной работы: 13 июня 2017 г.

3. Исходные данные к бакалаврской работе: отчет о прохождении преддипломной практики, учебные и научные издания.

4. Содержание бакалаврской работы: теоретическое представление нелинейных моделей диффузионных процессов на основе уравнений в частных производных, численные методы решения одномерных квазилинейных уравнений математической физики.

5. Перечень материалов приложения: листинги вычислительных программ.

6. Консультанты по бакалаврской работе – нормоконтроль: Рыженко А.В., канд. техн. наук, доцент.

7. Дата выдачи задания 24.04.2017 г.

Руководитель бакалаврской работы: Труфанова Татьяна Вениаминовна, доцент, канд. техн. наук.

Задание принял к исполнению 24.04.2017 г. _____ А.А. Сысолятин

РЕФЕРАТ

Работа содержит 46 с., 8 рисунков, 1 приложение, 21 источник.

НЕЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ, ПАРАБОЛИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ, ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ, ДИФФУЗИОННЫЙ ПРОЦЕСС, КВАЗИЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ, МЕТОД ПРЯМЫХ, МЕТОД РОТЕ, КРАЕВАЯ ЗАДАЧА, ОДНОМЕРНЫЙ ПРОЦЕСС, МГНОВЕННЫЙ СОСРЕДОТОЧЕННЫЙ ТЕПЛОВОЙ ИСТОЧНИК, НЕЛИНЕЙНАЯ СРЕДА, ТЕПЛОВЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ.

Целью данной выпускной квалификационной работы является аналитическое и численное решение системы одномерных квазилинейных уравнений с учетом начальных и граничных условий.

Результатом является реализация алгоритма нахождения коэффициентов Фурье в ППП Matlab для ПЭВМ.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	5
1 Нелинейные модели теплопроводности	8
1.1 Распространение тепловых возмущений в нелинейных средах	8
1.2 Решение уравнения теплопроводности для одномерного процесса с мгновенным сосредоточенным тепловым источником	10
1.2.1 Физическая постановка задачи	10
1.3 Пространственное ограничение температурных возмущений	18
2 Аналитические решения уравнений параболического типа	24
2.1 Преимущества аналитического решения	24
2.2 Уравнение типа «реакция-диффузия»	24
2.3 Решение задачи нелинейной теплопроводности с объемным поглощением	27
3 Численные методы решения уравнений диффузионного типа	31
3.1 Метод прямых для решения уравнения теплопроводности	31
3.2 Решение краевой задачи для системы одномерных квазилинейных уравнений	32
3.3 Использование возможностей ППП Matlab для решения краевой задачи одномерных квазилинейных уравнений	37
3.3.1 Задание	37
Заключение	42
Библиографический список	43
Приложение А Листинг реализации алгоритма	45

ВВЕДЕНИЕ

Актуальным направлением современной математической физики является изучение нелинейных математических моделей различных физических, химических, биологических, экономических и многих других явлений и процессов в природе и обществе. А частные производные появляются в уравнениях, потому, что они описывают важнейшие физические величины, такие, как скорость, ускорение, сила, трение, поток, ток и т.д. В линейных математических моделях дифференциальные уравнения математической физики и граничные условия содержат только линейные соотношения между искомыми функциями и ее производными. При моделировании широкого класса явлений и процессов приходится решать задачи, в которых уравнения или краевые условия являются нелинейными. Решение нелинейных задач математической физики значительно сложнее чем решение линейных уравнений.

Общих методов решения нелинейных задач в настоящее время не разработано. Для ряда нелинейных задач математической физики удается найти точные аналитические решения, анализ свойств которых позволяет выявить качественно новые нелинейные эффекты в исследуемых процессах. В работах Г.И. Баренблатта, Я.Б. Зельдовича, С.П. Курдюмова, Л.К. Мартинсона, А.А. Самарского и других найдены точные аналитические решения некоторых задач нелинейной теплопроводности. Анализ свойств этих решений позволяет обнаружить ряд важных нелинейных эффектов при распространении тепловых возмущений в средах, коэффициент теплопроводности которых зависит от температуры. При исследовании высокотемпературных тепловых процессов, необходимо учитывать зависимость плотности ρ , удельной теплоемкости c и коэффициента теплопроводности среды k от температуры [13, с. 265].

В выпускной квалификационной работе рассмотрены нелинейные модели диффузионных процессов переноса.

В первой главе рассмотрена следующая задача: распространение тепловых возмущений в нелинейных средах, изучено и построено решение нелиней-

ного уравнения теплопроводности с учетом начального условия для одномерного процесса с мгновенным сосредоточенным тепловым источником. Здесь же, была рассмотрена математическая модель процесса распространения тепловых возмущений в нелинейных средах с объемным поглощением теплоты. В этой же главе рассмотрена краевая задача первого рода нелинейной теплопроводности в полупространстве.

Во второй главе выпускной квалификационной работы были рассмотрены аналитические методы решения нелинейных уравнений диффузионного типа. Также рассмотрена система нелинейных уравнений диффузионного типа и найдено точное аналитическое решение, соответствующие волнам концентрации со стационарными профилями, распространяющиеся с одинаковой скоростью. В этой же главе рассмотрено и изучено решение задачи Коши для квазилинейного уравнения теплопроводности с объемным поглощением.

В третьей главе изложено численное решение одномерной краевой задачи для квазилинейного уравнения, методом прямых. Был реализован алгоритм поиска коэффициентов Фурье для двухкомпонентной среды в ППП Matlab. Также проведено тестирование программы с варьированием параметров и анализ полученных результатов.

Целью данной выпускной квалификационной работы является аналитическое и численное решение системы одномерных квазилинейных уравнений с учетом начальных и граничных условий.

Для достижения поставленной цели, выполнялись следующие действия:

- 1) аналитический обзор литературных источников по математическому моделированию нелинейных уравнений диффузионных процессов, анализ и сравнение между собой научных фактов о поведении, структурных свойствах или характеристиках данного объекта;

- 2) обзор имеющихся аналитических методов диффузионных процессов, формулировка математической постановки задачи исследования, отвечающая требованиям корректности;

3) разработка алгоритма решения поставленной прикладной задачи и проектирование структуры программного комплекса.

1 НЕЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

1.1 Распространение тепловых возмущений в нелинейных средах

Уравнение теплопроводности, учитывающее зависимость свойств среды от температуры и нелинейную зависимость от температуры мощности распределенных в объеме тепловых источников, является квазилинейным параболическим уравнением вида:

$$\rho(u)c(u)\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(k(u)\operatorname{grad}u) + F(u, x, y, z, t). \quad (1.1)$$

Нелинейность задачи теплопроводности может быть также обусловлена нелинейностью граничного условия. Такие задачи, в отличие от задач с внутренней нелинейностью, обусловленной нелинейностью уравнения, часто называют задачами с внешней нелинейностью.

Нелинейное граничное условие на поверхности S тела может иметь вид:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \theta(u, P, t), P \in S, \quad (1.2)$$

где $\theta(u, P, t)$ – функция нелинейным образом зависит от температуры.

Задача теплопроводности становится нелинейной, если учитывать фазовые переходы в среде, такие, как плавление, испарение, конденсация, кристаллизация, происходящие при определенной температуре и сопровождающиеся выделением или поглощением теплоты.

Нелинейности изменяют не только количественные характеристики тепловых процессов, но и качественную картину их протекания. Они значительно усложняют математические модели тепловых процессов, причем во многом эти трудности связаны с невозможностью применения для нелинейных задач принципа суперпозиции решений. Число найденных точных аналитических решений таких нелинейных задач теплопроводности крайне ограничено, но именно анализ этих решений позволяет выявить качественно новые нелинейные эффекты при распространении теплоты.

Квазилинейные параболические уравнения второго порядка лежат в основе математических моделей разнообразных явлений и процессов в механике, физике, биологии, экологии, технологии и других отраслей знаний. В частности, уравнение нелинейной теплопроводности (1.1) при определенных условиях описывает фильтрацию жидкостей и газов в пористых материалах, диффузию нейтронов, нелинейный скин-эффект при проникновении магнитного поля в проводящие среды. Это уравнение применимо при математическом описании процессов горения и детонации, химической кинетики, процесса роста и миграции биологических популяций, распространении загрязнений в окружающей среде. Такой диапазон приложений уравнения (1.1) обусловлен тем, что в его основе лежат фундаментальные законы сохранения энергии, массы или числа частиц.

Рассмотрим среду, коэффициент теплопроводности k которой изменяется в зависимости от температуры u по степенному закону:

$$k = k_0 u^\sigma, \quad (1.3)$$

где $\sigma = const > 0$ – параметр нелинейности среды.

Плотность среды ρ и ее теплоемкость будем считать постоянным, не зависящими от температуры. Такую среду, в отличие от среды с постоянным коэффициентом теплопроводности ($\sigma = 0$), назовем нелинейной, так как процесс теплопроводности в такой среде в отсутствие объемных тепловых источников описывается нелинейным, точнее, квазилинейным параболическим уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \operatorname{div}(u^\sigma \operatorname{grad} u), \quad (1.4)$$

где $a^2 = \frac{k_0}{\rho c}$ – коэффициент температуропроводности.

При моделировании тепловых процессов в нелинейной среде необходимо использовать такие решения уравнения (1.4), которые удовлетворяют условиям непрерывности температуры и теплового потока. Но так как плотность теплового потока $\vec{q} = -k_0 u^\sigma \operatorname{grad} u$ в такой среде зависят не только от градиента температуры, но и от значения самой температуры, то решения уравнения нелиней-

ной теплопроводности (1.4) следует искать в классе обобщенных функций, допускающих разрывы производных по пространственным переменным там, где функция u обращается в нуль и уравнение (1.4) вырождается.

1.2 Решение уравнения теплопроводности для одномерного процесса с мгновенным сосредоточенным тепловым источником

Требуется найти решение уравнения:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(u^\sigma \frac{\partial u}{\partial x} \right), t > 0, x \in \mathfrak{R}^1; \quad (1.5)$$

удовлетворяющее начальным условиям:

$$u(x, 0) = Q\delta(x). \quad (1.6)$$

где $Q = \frac{Q_0}{\rho c}$, а одномерная дельта функция $\delta(x)$ характеризует температурное

влияние плоского сосредоточенного источника.

Сходимость $u(x, t)$ при $t \rightarrow 0$ к первоначальному распределению следует воспринимать как слабую сходимость [3], т.е. для любой непрерывной функции $f(x)$ требуется выполнение интегрального соотношения:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)u(x, t)dx = Qf(0), \quad (1.7)$$

1.2.1 Физическая постановка задачи. Из физической постановки задачи следует, что

$$u \rightarrow 0 \text{ при } |x| \rightarrow \infty. \quad (1.8)$$

Следовательно,

$$u^\sigma \frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow 0. \quad (1.9)$$

Соотношение (1.9) интегрируем в (1.5) по переменному x в пределах от $-\infty$ до $+\infty$, получим

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t)dx = a^2 \left\{ u^\sigma \frac{\partial u}{\partial t} - u^\sigma \frac{\partial u}{\partial t} \right\} = 0, x = +\infty, x = -\infty. \quad (1.10)$$

В результате, с учетом начального условия

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t)dx = Q = const, \forall t \geq 0. \quad (1.11)$$

Выражение (1.11) отражает физический закон сохранения полной тепловой (внутренней) энергии среды в любой момент времени.

Единицы измерения главных параметров Q и a^2 задачи (1.5) в СИ определяются как $K \cdot m$ и $m^2 \cdot c^{-1} \cdot k^{-\sigma}$ соответственно.

Из текущих параметров и переменных x и t можно сформировать только одну безразмерную комбинацию, определяющую автомодельную переменную задачи,

$$\eta = \frac{x}{(Q^\sigma a^2 t)^\nu}, \nu = \frac{1}{\sigma + 2},$$

и комбинацию, с размерностью температуры,

$$T = \left(\frac{Q^2}{a^2 t}\right)^\nu.$$

Искомое решение задачи (1.5) нужно искать в виде

$$u(x, t) = \left(\frac{Q^2}{a^2 t}\right)^\nu \theta(\eta). \quad (1.12)$$

Преобразуем выражение (1.12) в

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\nu \left(\frac{Q^2}{a^2}\right)^\nu t^{-\nu-1} \theta(\eta) + \left(\frac{Q^2}{a^2 t}\right)^\nu \frac{d\theta}{d\eta} \frac{d\eta}{dt}, \quad (1.13)$$

где $\frac{d\eta}{dt} = \frac{X}{Q^{\sigma\nu} a^{2\nu}} (-\nu) t^{-\nu-1}$.

Далее преобразуем выражение (1.13)

$$\frac{du}{dx} = \left(\frac{Q^2}{a^2 t}\right)^\nu \frac{d\theta}{d\eta} \frac{d\eta}{dx}, \quad (1.14)$$

где $\frac{d\eta}{dx} = \frac{1}{(Q^\sigma a^2 t)^\nu}$.

Отсюда

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\nu \left(\frac{Q^2}{a^2}\right)^\nu t^{-\nu-1} \theta(\eta) + \left(\frac{Q^2}{a^2 t}\right)^\nu \frac{d\theta}{d\eta} \frac{x(-\nu)}{Q^{\sigma\nu} a^{2\nu}} t^{-\nu-1}, \quad (1.15)$$

и $\frac{du}{dx} = \left(\frac{Q^2}{a^2 t}\right)^\nu \frac{d\theta}{d\eta} \frac{1}{(Q^\sigma a^2 t)^\nu}$.

Далее выражение (1.15) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (u^\sigma \frac{\partial u}{\partial x}) &= \frac{\partial}{\partial x} [(\frac{Q^2}{a^2 t})^\nu \theta(\eta)] \frac{\partial u}{\partial x} = (\frac{Q^2}{a^2 t})^\nu [\frac{d\theta}{d\eta} \frac{d\eta}{dx} (\frac{Q^2}{a^2 t})^\nu \frac{d\theta}{d\eta} \frac{1}{(Q^\sigma a^2 t)^\nu} + \\ &+ (\frac{Q^2}{a^2 t})^\nu \theta(\eta) (\frac{Q^2}{a^2 t})^\nu \frac{1}{(Q^\sigma a^2 t)^\nu} \frac{d^2 \theta}{d\eta} \frac{d\eta}{dx}]. \end{aligned}$$

Приведем подобные

$$\begin{aligned} -\nu (\frac{Q^2}{a^2 t})^\nu \frac{\theta(\eta)}{t^{\nu+1}} + (\frac{Q^2}{a^2 t})^\nu \frac{d\theta}{d\eta} \frac{x(-\nu)}{Q^{\sigma\nu} a^{2\nu} t^{\nu+1}} &= a^2 [(\frac{Q^2}{a^2 t})^\nu \frac{d^2 \theta}{d\eta} \frac{1}{(Q^\sigma a^2 t)^\nu} (\frac{Q^2}{a^2 t})^{2\nu} \times \\ &\times \frac{1}{(Q^\sigma a^2 t)^\nu} + (\frac{Q^2}{a^2 t})^{2\nu} \frac{\theta(\eta)}{(Q^\sigma a^2 t)^\nu} \frac{d^2 \theta}{d\eta^2} \frac{1}{(Q^\sigma a^2 t)^\nu}]. \end{aligned}$$

Преобразуем

$$\begin{aligned} -\nu \frac{\theta(\eta)}{t} \frac{d\theta}{d\eta} \frac{x(-\nu)}{Q^{\sigma\nu} a^{2\nu} t^{\nu+1}} &= a^2 [(\frac{d\theta}{d\eta})^2 \frac{t}{(Q^\sigma a^2 t)^\nu} \frac{(Q^2)^\nu}{(a^2 t)^\nu} \frac{1}{(Q^\sigma a^2 t)^\nu} + \\ &+ (\frac{Q^2}{a^2 t})^\nu \frac{\theta(\eta)}{(Q^\sigma a^2 t)^\nu} \frac{d^2 \theta}{d\eta^2} \frac{t}{(Q^\sigma a^2 t)^\nu}. \end{aligned}$$

Делаем замену переменных:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (\frac{Q^2}{a^2 t})^\nu \frac{d\theta}{d\eta} \frac{1}{(Q^\sigma a^2 t)^\nu}, \quad (1.16)$$

подставляя выражение (1.16) в (1.5), получаем

$$\frac{\partial}{\partial x} (u^\sigma \frac{\partial u}{\partial x}) = \frac{d}{dx} ((\frac{Q^2}{a^2 t})^{\sigma\nu} \theta^\sigma (\frac{Q^2}{a^2 t}) \frac{d\theta}{d\eta} \frac{1}{(Q^\sigma a^2 t)^\nu}). \quad (1.17)$$

Пояснение

$$\nu = (\frac{Q^2}{a^2 t})^{\nu(\sigma+1)} \frac{1}{(Q^\sigma a^2 t)^\nu} \frac{d}{d\eta} (Q^\sigma(\eta) \frac{\partial \theta}{\partial \eta}).$$

Делим (1.17) на $(\frac{Q^2}{a^2 t})^\nu$

$$-\nu (\frac{Q^2}{a^2 t})^\nu \theta(\eta) + (\frac{Q^2}{a^2 t})^\nu \frac{d\theta}{d\eta} \frac{x(-\nu)}{Q^{\sigma\nu} a^{2\nu} t} t^{-\nu-1} = (\frac{Q^2}{a^2 t})^{\nu(\sigma+1)} \frac{1}{(Q^\sigma a^2 t)^\nu} \frac{\partial}{\partial \eta} (\theta^\sigma(\eta)),$$

где
$$\eta = \frac{x}{Q^{\sigma\nu} t^\nu a^{2\nu}}.$$

Тогда

$$-v\theta - v\eta \frac{d\theta}{d\eta} = \left(\frac{Q^2}{a^2 t}\right)^{\sigma v} (Q^\sigma + a^2 t)^{-v} a^2 t \frac{d}{d\eta} (Q^\sigma(\eta) \frac{d\theta}{d\eta}) \frac{1}{(Q^\sigma a^2 t)^v},$$

с учетом преобразований

$$-v\theta - v\eta \frac{d\theta}{d\eta} = \frac{d}{d\eta} (Q^\sigma(\eta) \frac{d\theta}{d\eta}) Q^{2v\sigma - \sigma\eta - \sigma\eta} a^{-2v\sigma - 2v + 2 - 2v} t^{-v\sigma - v + 1 - v}.$$

Функцию u в виде (1.12) подставляем в уравнение (1.5), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $\theta(\eta)$:

$$-v\theta - v\eta \frac{d\theta}{d\eta} = \frac{d}{d\eta} (Q^\sigma(\eta) \frac{d\theta}{d\eta}). \quad (1.18)$$

Уравнение (1.18) преобразуем к виду

$$-v \frac{d}{d\eta} (\eta\theta) = \frac{d}{d\eta} (Q^\sigma \frac{d\theta}{d\eta}). \quad (1.19)$$

Далее, в формуле (1.19) разделяем переменные

$$\int \theta^{\sigma-1} d\theta = -v \int \eta d\eta,$$

интегрируем

$$\frac{\theta^\sigma}{\sigma} = -v \frac{\eta^2}{2} + C,$$

и
$$\frac{\theta^2}{\sigma} = \frac{\eta^2}{2(\sigma+2)}.$$

Отсюда

$$\frac{\theta^\sigma}{\sigma} = -v \frac{\eta^2}{2} + C.$$

После этого, дифференцируем и получаем

$$\frac{d\theta^\sigma}{d\eta} = -\frac{2\sigma\eta}{2(\sigma+2)}.$$

Таким образом, получаем

$$\int d\theta^\sigma = - \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{\sigma}{\sigma+2} \eta d\eta + C. \quad (1.20)$$

Интегрируя один раз (1.20), получим решение уравнения (1.12) в виде

$$\theta^\sigma = -\frac{\sigma}{\sigma+2} \frac{\eta^2}{2} + C, \quad (1.21)$$

при этом константу интегрирования берем равной нулю в виду условий (1.8) и (1.9).

Уже после интегрирования (1.21), принимая во внимание, что уравнение (1.18) имеет особое решение $\theta \equiv 0$, решение уравнения (1.18), удовлетворяющее условиям (1.8) и (1.9), запишем в следующем виде:

$$\theta(\eta) = \begin{cases} \left[\frac{\sigma}{2(\sigma+2)} (\eta_0 - \eta^2) \right]^{\frac{1}{\sigma}}, & |\eta| < \eta_0; \\ 0, & |\eta| > \eta_0. \end{cases} \quad (1.22)$$

где $\eta_0 > 0$ – некоторая постоянная, к тому же в области $|\eta| > \eta_0$ функция $\theta(\eta)$ тождественно равна нулю.

Постоянную η_0 найдем используя условия (1.10), с учетом выражений (1.12) и (1.22) запишем в виде

$$\int_{-\eta_0}^{+\eta_0} \left(\frac{Q^2}{a^2 t} \right)^\nu \left[\frac{\sigma}{2(\sigma+2)} (\eta_0^2 - \eta^2) \right] dx = 2 \left[\frac{\sigma}{2(\sigma+2)} \right]^{\frac{1}{\sigma}} \int_0^{\eta_0} (\eta_0^2 - \eta^2)^{\frac{1}{\sigma}} d\eta = 1.$$

Пояснение

$$\frac{Q^{\nu\sigma} (a^2 t)^\nu}{(a^2 t)^\nu} Q^{2\nu} d\theta = Q^{\nu(\sigma+2)} = 1.$$

Получаем

$$\int_0^{\eta_0} (\eta_0^2 - \eta^2)^{\frac{1}{\sigma}} d\eta = 2 \left[\frac{\sigma}{2(\sigma+2)} \right]^{\frac{1}{\sigma}} \int (1 - \xi^2)^{\frac{1}{\sigma}} \left(\frac{1}{\eta_0^2} \right)^{\frac{1}{\sigma}} \eta_0 d\xi. \quad (1.23)$$

Сделав замену:

$$\xi = \frac{\eta}{\eta_0}; d\xi = \frac{\eta_0 d\eta - \eta d\eta}{\eta_0^2} = \frac{d\eta}{\eta_0} \Rightarrow d\eta = \eta_0 d\xi$$

в интеграле, запишем соотношение (1.23) в следующем виде

$$\left[\frac{\sigma}{2(\sigma+2)} \right]^{\frac{1}{\sigma}} \eta_0^{\frac{\sigma+2}{\sigma}} I(\sigma) = 1, \quad (1.24)$$

где
$$I(\sigma) = \int_0^1 (1 - \xi^2)^{1/\sigma} d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma(1 + \frac{1}{\sigma})}{\Gamma(\frac{3}{2} + \frac{1}{\sigma})}; \quad (1.25)$$

$\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера [9].

Теперь находим постоянную из выражения (1.24)

$$\eta_0 = (2I(\sigma) [\frac{\sigma}{2(\sigma+2)}]^{1/\sigma})^{-\frac{\sigma}{\sigma+2}}. \quad (1.26)$$

Возвращаясь к переменным x и t , с учетом соотношений (1.12) и (1.22) решение исходной задачи (1.5) запишем в виде

$$u(x, t) = \begin{cases} U(t) [1 - (\frac{x}{x_0(t)})^2]^{1/\sigma}, & |x| < x_0(t); \\ 0, & |x| \geq x_0(t) \end{cases} \quad (1.27)$$

где

$$U(t) = \eta_0^{\frac{2}{\sigma}} Q^{\frac{2}{\sigma+2}} [\frac{\sigma}{2(\sigma+2)}]^{1/\sigma} (a^2 t)^{-\frac{1}{\sigma+2}}; \quad (1.28)$$

$$x_0(t) = \eta_0 Q^{\frac{2}{\sigma+2}} (a^2 t)^{\frac{1}{\sigma+2}}. \quad (1.29)$$

Решение (1.27) называется фронтовым решением, описывающим распространение тепловой волны от мгновенного сосредоточенного теплового источника, расположенного в плоскости $x = 0$. Качественный вид температурного профиля такой тепловой волны в различные моменты времени приведен на рисунке 1.

Фронты тепловой волны, положения которых определяются равенствами $x = \pm x_0(t)$ в любой момент времени, отделяют в пространстве область возмущений, где $u > 0$, от невозмущенной области $|x| > x_0(t)$ куда тепловые возмущения от источника еще не проникли и где $u = 0$. Фронты тепловой волны движутся с конечной скоростью

$$v(t) = \frac{dx_0}{dt} = \frac{a^2 \eta_0}{\sigma + 2} Q^{\frac{2}{\sigma+2}} (a^2 t)^{-\frac{\sigma+1}{\sigma+2}} \approx t^{-\frac{\sigma+1}{\sigma+2}}. \quad (1.30)$$

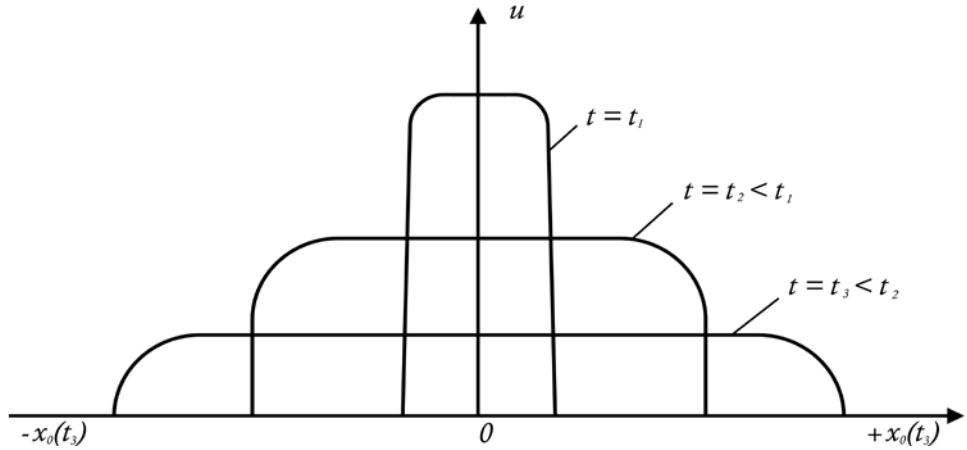


Рисунок 1 – Качественный вид температурного профиля тепловой волны

Скорость движения фронтов с течением времени уменьшается, но тепловые возмущения проникают в нелинейную среду неограниченно далеко, так как $x_0(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$.

Скажем, что если $\sigma > 1$, то фронты тепловой волны крутые, т.е. $|\partial u / \partial x| \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \mp x_0 \neq 0$. Но все же, несмотря на неограниченный рост градиента температуры на крутом фронте тепловой волны, плотность теплового потока $q = -k_0 u^\sigma \frac{\partial u}{\partial x}$ при приближении к фронту из области возмущений стремится к нулю, обеспечивая выполнение на фронте физического условия непрерывности теплового потока при любых значениях параметра нелинейности $\sigma > 0$. Формулу (1.27) можно рассматривать как обобщенное решение задачи (1.5).

Соотношения (1.22), (1.26) и (1.27) допускают предельный переход $\sigma \rightarrow 0$, соответствующий переходу к среде с постоянным коэффициентом теплопроводности, равным k_0 . При $\eta_0 \rightarrow \infty$ и из решения (1.27) при $\sigma \rightarrow 0$ можем определить распределение температуры

$$u(x, t) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{Q}{2\sqrt{\pi a^2 t}} \left(1 - \sigma \frac{x^2}{4a^2 t}\right)^{\frac{1}{\sigma}} = \frac{Q}{2\sqrt{\pi a^2 t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}, \sigma \rightarrow 0, \quad (1.31)$$

совпадающее с температурным нестационарным полем в задаче о влиянии мгновенного сосредоточенного теплового источника в линейной теории теплопроводности.

В результате, в нелинейной среде, тепловые возмущения с коэффициентом теплопроводности, изменяющимся от температуры по степенному закону, распространяются с конечной скоростью по нулевому невозмущенному фону, в отличие от среды с постоянным коэффициентом теплопроводности, где скорость распространения тепловых возмущений бесконечна.

Подтверждением этого вывода является еще одно точное решение задачи нелинейной теплопроводности. Положим, что не нагретая нелинейная среда занимает полупространство $x > 0$ и с момента времени $t = 0$ температура на границе $x = 0$ начнет возрастать по степенному закону с показателем степени, связанным с параметром нелинейности среды σ . Процесс нагрева среды в таком случае описывается следующей нелинейной задачей:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 (u^\sigma \frac{\partial u}{\partial x}), t > 0, x > 0; \\ u(x, 0) = 0, u(0, t) = u_0 t^{\frac{1}{\sigma}}. \end{cases} \quad (1.32)$$

Проверив, можно убедиться, что задача (1.32) имеет фронтовое решение

$$u(x, t) = \begin{cases} u_0 t^{\frac{1}{\sigma}} \left(1 - \frac{x}{x_0(t)}\right)^{\frac{1}{\sigma}}, 0 \leq x \leq x_0(t); \\ 0, |x| \geq x_0(t). \end{cases} \quad (1.33)$$

где $x_0(t) = v_0(t); v_0(t) = \left(\frac{a^2 u_0^\sigma}{\sigma}\right)^{1/2}$.

Проанализировав решение системы (1.33), мы видим, что от нагретой границы в глубь до среды по невозмущенному нулевому фону распространяется тепловая (температурная) волна, фронт которой движется с постоянной скоростью v_0 , которая зависит от «амплитуды» u_0 теплового возмущения на стенке.

Качественный вид температурного поля тепловой волны (1.33) для $0 < \sigma < 1$ изображен на рисунке 2.

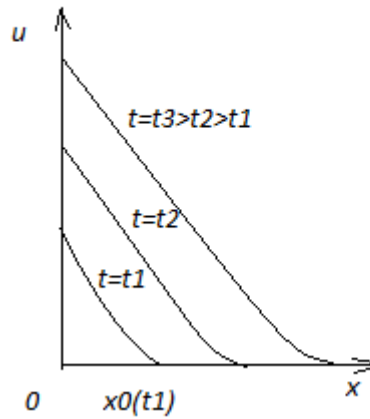


Рисунок 2 – Температурное поле в тепловой волне

Таким образом, аналогично предыдущей задаче, при значениях параметра нелинейности $\sigma > 1$ фронт тепловой волны (1.33) является крутым, т.е. $|\partial u / \partial x \rightarrow \infty|$ при $x \rightarrow x_0 - 0$. Но можно убедиться, что тепловой поток непрерывен во всех точках пространства и обращается в нуль при приближении к фронтовой точке $x = x_0(t)$ из области возмущений. На самом деле, вычисляя плотность теплового потока

$$q(x,t) = k_0 u^\sigma \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{k_0 u_0^{\sigma+1}}{\sigma v_0} \left(t - \frac{x}{v_0}\right)^\sigma, \quad (1.34)$$

и подставив сюда $x = v_0 t$ получим, что $q(x_0(t), t) = 0$ для любого $\sigma > 0$.

В итоге, тепловые возмущения распространяются с конечной скоростью и указывают в нелинейных средах на возникновение свойства «инерции» тепловых процессов, которое при этом качественно меняет характер протекания тепловых процессов в нелинейных средах по сравнению с аналогичными процессами в средах с постоянным коэффициентом теплопроводности, где тепловые возмущения распространяются без промедления.

1.3 Пространственное ограничение температурных возмущений

Дополнительный нелинейный эффект можно выявить при исследовании процесса распространения тепловых возмущений в нелинейных средах с объемным поглощением теплоты.

Требуется решить задачу о влиянии мгновенного сосредоточенного плоского теплового источника в нелинейной среде с коэффициентом теплопроводности, изменяющимся от температуры по степенному закону. Математическая модель такого процесса запишется в следующем виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(u^\sigma \frac{\partial u}{\partial x} \right) - pu, t > 0, \quad (1.35)$$

удовлетворяющая следующим начальным условиям

$$u(x,0) = Q\delta(x), \quad (1.36)$$

где $p = const \geq 0$ – коэффициент поглощения. При $p=0$ задача (1.35), (1.36) переходит в решенную задачу (1.5).

Энергия в объеме нелинейной среды поглощается, что приводит к уменьшению интегральной тепловой (внутренней) энергии среды. Следовательно, при интегрировании (1.35) по пространственному переменному x в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ получим

$$\frac{dJ}{dt} = -pJ, \quad (1.37)$$

где $J(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t) dx.$

Так как

$$J(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,0) dx = Q \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = Q,$$

то, интегрируя выражение (1.37), получаем

$$\int \frac{dJ}{J} = -p \int dt + C,$$

разделяя переменные

$$\ln J(t) = -pt + C.$$

Отсюда

$$J(t) = Ce^{-pt},$$

где $C=Q.$

Далее $J(t) = Qe^{-pt}.$

Для решения задачи (1.36) перейдем с помощью преобразования

$$u(x,t) = v(x,t)e^{-pt} \quad (1.38)$$

к новой функции $v(x,t)$. Для начала возьмем производные по x и по t

$$u_t = -pe^{-pt}v + v_t e^{-pt},$$

$$u_x = v_x e^{-pt}.$$

Далее подставим в соотношение (1.35)

$$v_t e^{-pt} - pe^{-pt}v = a^2 \frac{\partial}{\partial x} (v^\sigma e^{-pt} \frac{\partial v}{\partial x} e^{-pt}) - pve^{-pt}.$$

После этого, уравнение для v примет вид

$$e^{\sigma pt} v_t = a^2 \frac{\partial}{\partial x} (v^\sigma \frac{\partial v}{\partial x}), t > 0. \quad (1.39)$$

Вводя новое независимое переменное (преобразованное время) по правилу

$$r = r(t) \equiv \frac{1 - e^{-\sigma pt}}{p\sigma}, r \in [0, \frac{1}{p\sigma}), \quad (1.40)$$

$$\frac{\partial r}{\partial t} = -\frac{e^{-\sigma pt}}{p\sigma} (-p\sigma),$$

получим для функции $v(x, r)$ задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial r} = a^2 \frac{\partial}{\partial r} (v^\sigma \frac{\partial v}{\partial x}), 0 < r < \frac{1}{p\sigma}, \\ u(x,0) = Q\delta(x), \end{cases} \quad (1.41)$$

где $\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial r} e^{-\sigma pt}.$

Задача (1.41) соответствует решенной выше задаче (1.5) о влиянии мгновенного сосредоточенного теплового источника в нелинейной среде без объемного поглощения. Отличие состоит в том, что задача (1.41) определена на конечном «временном» интервале. Вот почему, используя соотношение (1.33) и проведя обратное преобразование переменных, запишем решение данной задачи (1.35) в следующем виде

$$u(x,t) = v(x, r(t))e^{-pt}, \quad (1.42)$$

где

$$v(x, r) = \begin{cases} U(r) \left[1 - \left(\frac{x}{x_0(r)} \right)^2 \right]^{\frac{1}{\sigma}}, & |x| < x_0(r); \\ 0, & |x| \geq x_0(r). \end{cases} \quad (1.43)$$

Зависимости $U(r)$ и $x_0(r)$ в (1.43) определены соотношениями (1.28) и (1.29), в которых время t можно заменить на r , понимая под $r=r(t)$ преобразованное по закону

$$r(t) = r_m \left(1 - e^{-\frac{t}{r_m}} \right), r_m = \frac{1}{p\sigma}, \quad (1.44)$$

временное переменное.

Решение (1.42) задачи (1.35), (1.36) представляет собой фронтовое решение, описывающее распространение тепловой волны от мгновенного сосредоточенного источника с конечной скоростью перемещения фронтов $x = \pm x_0(r(t))$. При этом главное свойство этого решения можно выявить, если проанализировать законы движения фронтов тепловой волны. Следует, что функция $u(x, t)$ в любой момент времени $t > 0$ равна нулю вне области $|x| < L(t)$, где

$$L(t) = L_m \left(1 - e^{-\frac{t}{r_m}} \right)^{\frac{1}{\sigma+2}}; \quad (1.45)$$

$$L_m = \eta_0 (Q^\sigma a^2 r_m)^{\frac{1}{\sigma+2}}. \quad (1.46)$$

Т.е. $L(t) \rightarrow L_m < \infty$ при $t \rightarrow \infty$, тогда тепловые возмущения от источника попадают в нелинейную среду с объемным поглощением лишь только на конечную глубину даже за бесконечный промежуток времени. Тепловые возмущения являются локализованными в ограниченной пространственной области.

Эффект пространственного ограничения тепловых возмущений в исследуемой задаче обусловлен объемным поглощением тепловой энергии. Если $p \rightarrow \infty$, то $r_m \rightarrow \infty$ и, из соотношения (1.46), следует, что $L_m \rightarrow \infty$, так как в среду без объемного поглощения тепловые возмущения проникают неограниченно далеко.

Удержание нагретой среды в ограниченной области пространства возможно осуществить за счет внутренних механизмов нелинейного процесса теплопроводности. Реализация этих условий является одной из практически важных задач в проблеме управляемого термоядерного синтеза.

Заметим, что своеобразный режим метастабильной локализации тепловых возмущений может наблюдаться и в отсутствие в среде объемного поглощения теплоты. В этом режиме локализации фронт тепловой волны остается неподвижным в течение некоторого конечного промежутка времени. Такая локализация тепловых возмущений наблюдается при нагреве нелинейной среды в режиме с «обострением», когда температура граничной поверхности растет неограниченно за конечный промежуток времени. Такую локализацию теплового воздействия в режиме с «обострением» иллюстрирует следующая краевая задача нелинейной теплопроводности в полупространстве:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial}{\partial x} (u^\sigma \frac{\partial u}{\partial x}), 0 < t < T, x > 0; \\ u(x, 0) = A_0 T^{-\frac{1}{\sigma}} (1 - \frac{x}{x_0})^{\frac{2}{\sigma}}, x > 0; \\ u(0, t) = A_0 (T - t)^{-\frac{1}{\sigma}}, 0 < t < T. \end{cases} \quad (1.47)$$

где $A_0 = const > 0; x_0 = [\frac{2A_0^\sigma a^2 (\sigma + 2)}{\sigma}]^{1/2}$.

Параметр T в задаче (1.47) можно назвать временем обострения процесса нагрева нелинейной среды, при том, что $u(0, t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow T$.

Задача (1.47) имеет простое решение в разделяющихся переменных:

$$u(x, t) = \begin{cases} A_0 (T - t)^{-\frac{1}{\sigma}} (1 - \frac{x}{x_0})^{\frac{2}{\sigma}}, \\ 0 \leq x \leq x_0, 0 \leq t \leq T; \\ 0, x \geq x_0, 0 \leq t < T. \end{cases} \quad (1.48)$$

Т.е. $u(x, t) = 0$ при всех $t \in [0, T)$ для любого $x \geq x_0$, то фронт теплового возмущения $x = x_0$, на котором равны нулю температура и тепловой поток, от-

деляет нагретую среду от холодной. Фронт неподвижен, несмотря на неограниченный рост температуры в области тепловых возмущений при $t \rightarrow T$. В течение промежутка времени $[0, T)$ тепловые возмущения от нагретой стенки локализованы в пространственной области $0 < x < x_0$ конечных размеров.

2 АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

2.1 Преимущества аналитического решения

Аналитическое решение в любой момент позволяет вычислить значения решений в одной точке (x, t) , не прибегая к вычислению значений решений в других точках, как это бывает при решении задач явными или неявными разностными схемами [2, с. 289].

Аналитическое решение позволяет найти решение в любой точке, а не только в узлах сетки.

Самым важным преимуществом аналитического решения является возможность проследить влияние физических параметров, начальных и граничных условий на характер решения.

2.2 Уравнение типа «реакция-диффузия»

Моделирование ряда процессов в физических, химических и биологических системах приводит к решению краевых задач для системы квазилинейных [13, с. 152] уравнений вида

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \operatorname{div}\left(\sum_{j=1}^n \operatorname{grad} u_j\right) + f_i(u_1, u_2, \dots, u_n, M, t), \quad (2.1)$$

где $i = 1, 2, \dots, n; t > 0; M \in \mathbb{R}^N; N = 1, 2, 3$.

Уравнение такого типа описывают нестационарные диффузионно-кинетические процессы в многокомпонентных распределенных системах, т.е. эволюцию широкого класса нелинейных активных систем с диффузией. Математические модели, в основе которых лежат уравнения вида (2.1), широко используются в биологии, экологии и экономике.

Особенно широко системы уравнений вида (2.1) используют в химической кинетике при описании процессов типа «реакция-диффузия». Младшие члены уравнений описывают кинетические процессы в системе, т.е. взаимодействие (реакции) всех n компонентов такой системы со скоростью, зависящей от

концентрации компонентов. Простейшим примером функций f_i , описывающих кинетику процессов, являются

$$f_i = k_i u_1^{\alpha_{i1}} u_2^{\alpha_{i2}} \dots u_n^{\alpha_{in}}, a_{ij} = \text{const} > 0. \quad (2.2)$$

где a_{ij} – стехиометрический коэффициент ($\alpha_{11} = \alpha_{12} = \alpha_{21} = \alpha_{22}$).

Именно таким образом выражаются скорости химических реакций через концентрации реагирующих веществ по закону действующих масс.

Точные решения задач для уравнений вида (2.1) в общем случае найти не удастся из-за нелинейности, обусловленных младшими членами уравнений. Требуется найти решение нелинейной системы уравнений вида

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + k u_1 u_2; \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - k u_1 u_2, \end{cases} \quad (2.3)$$

где D_{ij} – коэффициент диффузии ($D_1 = D_2 = D > 0$);

k_j – скорость химической реакции ($k_1 = -k_2 = k > 0$);

u_i – нестационарное поле объемной концентрации диффундирующего вещества.

Можно найти точное аналитическое решение в области $\mathfrak{R}_+^2 = \{(x, t) : -\infty < x < +\infty, t > 0\}$. Это решение соответствует волнам концентраций со стационарными профилями, распространяющимися с одинаковой скоростью.

Действительно, будем искать решение системы (2.3) в виде $u_1 = u_1(\xi)$ и $u_2 = u_2(\xi)$, где $\xi = x + vt, v = \text{const} > 0$. Тогда система (2.3) преобразуется к виду

$$\begin{cases} v \frac{du_1}{d\xi} - D \frac{d^2 u_1}{d\xi^2} = k u_1 u_2; \\ v \frac{du_2}{d\xi} - D \frac{d^2 u_2}{d\xi^2} = -k u_1 u_2. \end{cases} \quad (2.4)$$

В области $-\infty < \xi < +\infty$ рассмотрим функцию

$$\gamma(\xi) = \left(\frac{e^{\alpha\xi}}{1 + e^{\alpha\xi}} \right)^2 \equiv \left(\frac{1 + th \frac{\alpha\xi}{2}}{2} \right)^2, \quad (2.5)$$

зависящую от параметра $\alpha = const > 0$. Дифференцируя эту функцию, находим, что

$$\frac{d\gamma}{d\xi} = -2\alpha\gamma(\gamma^{\frac{1}{2}} - 1) \quad (2.6)$$

и

$$\frac{d^2\gamma}{d\xi^2} = 6\alpha^2\gamma(\gamma^{\frac{1}{2}} - 1)\left(\gamma^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}\right). \quad (2.7)$$

Следовательно,

$$v \frac{d\gamma}{d\xi} - D \frac{d^2\gamma}{d\xi^2} = 6\alpha^2 D \gamma (1 - \gamma^{\frac{1}{2}}) (A + \gamma^{\frac{1}{2}}), \quad (2.8)$$

где $A = \frac{v}{3\alpha D} - \frac{2}{3}$.

Если теперь параметр v , определяющий скорость волн, выбрать равным $v = 5\alpha D$, то при этом получим $A=1$ и

$$v \frac{d\gamma}{d\xi} - D \frac{d^2\gamma}{d\xi^2} = 6\alpha^2 D \gamma (1 - \gamma). \quad (2.9)$$

Из этого соотношения следует, что если параметр α выбрать из условия $6\alpha^2 D = k$, т.е. считать, что $\alpha = \sqrt{k/(6D)}$ и $v = 5\sqrt{kD/6}$, то система (2.4) имеет решение $u_1 = \gamma(\xi)$ и $u_2 = 1 - \gamma(\xi)$.

Возвращаясь к переменным x и t , запишем найденное решение системы уравнений «реакция-диффузия» (2.3) в виде

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= \frac{1}{4} \left[1 + th \sqrt{\frac{k}{24D}} \left(x + 5 \sqrt{\frac{kD}{6}} t \right) \right]^2; \\ u_2(x, t) &= 1 - u_1(x, t). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Это решение описывает стационарные волны концентраций компонентов, распространяющиеся с постоянной скоростью $v = 5\sqrt{kD/6}$. При этом пространственная область, занятая первым веществом, увеличивается, а область, занятая

вторым веществом, – уменьшается. Это согласуется с физической моделью процесса (2.3), ибо кинетика процесса такова, что происходит рождение первой компоненты и уничтожение второй при их взаимодействии.

2.3 Решение задачи нелинейной теплопроводности с объемным поглощением

Требуется найти решение следующего квазилинейного уравнения описывающее нестационарный процесс теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \operatorname{div}(u^\sigma \operatorname{grad} u) - pu^v, t > 0, M \in \mathfrak{R}^N, \quad (2.11)$$

где $u(M, t)$ – температура; $p = \text{const} > 0$ – параметр поглощения, $N=1,2,3$ – размерность пространства.

Отсюда можно сформулировать следующую задачу Коши для квазилинейного уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r^{N-1}} \frac{\partial}{\partial r} (r^{N-1} u^\sigma \frac{\partial u}{\partial r}) - pu^{1-\sigma}, t > 0, r \geq 0; \\ u(r, 0) = Q \delta_N(M), \end{cases} \quad (2.12)$$

где радиальная пространственная координата $r \geq 0$ для $N=2,3$ и $r = |x|$ для $N=1$. Положим, что $a^2 = 1$.

Решение задачи Коши для квазилинейного уравнения теплопроводности будем искать в виде фронтового решения

$$u(r, t) = \begin{cases} A(t)[l(t) - r^2]^{\frac{1}{\sigma}}, r^2 < l(t); \\ 0, r^2 \geq l(t). \end{cases} \quad (2.13)$$

где $A(t), l(t)$ – функции, подлежащие определению.

Подставляя соотношение (2.13) в уравнение (2.12), получим

$$\begin{aligned} & -2 \frac{\partial}{\partial r} (r^N A^{\sigma+1} \frac{1}{\sigma} [l(t) - r^2]^{\frac{1}{\sigma}}) - 2Nr^{N-1} \frac{A^{\sigma+1}}{\sigma} [l(t) - r^2]^{\frac{1}{\sigma}} - \\ & - 2r^N A^{\sigma+1} \frac{1}{\sigma^2} [l(t) - r^2]^{\frac{1}{\sigma}-1} (-2r), \end{aligned} \quad (2.14)$$

С учетом всех преобразований

$$\begin{aligned} & \left(\frac{dA}{dt} + 2NA^{\sigma+1}\sigma^{-1} \right) [l(t) - r^2]^{\frac{1}{\sigma}} + (\sigma^{-1}A(t) \frac{dl}{dt} - 4\sigma^{-2}A^{\sigma+1}r^2 + \\ & + pA^{\sigma-1}) [l(t) - r^2]^{\frac{1}{\sigma}-1}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Соотношение (2.15) приводится к следующему виду

$$S(t)[l(t) - r^2]^{\frac{1}{\sigma}} = 0, \quad (2.16)$$

если

$$(\sigma^{-1}A(t) \frac{dl}{dt} - 4\sigma^{-2}A^{\sigma+1}r^2 + pA^{\sigma-1}) = 4\sigma^{-2}A^{\sigma+1}[l(t) - r^2], \quad (2.17)$$

так как

$$\sigma^{-1}A(t) \frac{dl}{dt} + pA^{\sigma-1} = 4\sigma^{-2}A^{\sigma+1}l(t). \quad (2.18)$$

Тогда

$$S(t) = \frac{dA}{dt} + 2\sigma^{-2}(N\sigma + 2)A^{\sigma+1}. \quad (2.19)$$

С учетом соотношения (2.19), условие (2.16) приводит к дифференциальному уравнению для определения функции $A(t)$:

$$\frac{dA}{dt} + 2\sigma^{-2}(N\sigma + 2)A^{\sigma+1} = 0. \quad (2.20)$$

Далее разделяем переменные в выражении (2.20), интегрируя, находим решение

$$A(t) = \left[\frac{\sigma}{2(N\sigma + 2)} \right]^{\frac{1}{\sigma}} t^{-\frac{1}{\sigma}}. \quad (2.21)$$

Используя формулу (2.18), для функции $l(t)$ перейдем к следующему дифференциальному уравнению

$$\frac{dl}{dt} - 2(N\sigma + 2)^{-1}t^{-1}l = -2p(N\sigma + 2)l. \quad (2.22)$$

Решение уравнения (2.22) будет иметь вид

$$l(t) = Ct^{\frac{2}{N\sigma+2}} - \frac{(N\sigma + 2)^2}{N\sigma + 1} pt^2, C = const. \quad (2.23)$$

В результате, учитывая соотношения (2.13), (2.21) и (2.23) решение исходной задачи запишем в виде

$$u(r,t) = \begin{cases} U(t) \left[1 - \left(\frac{r}{r_+(t)} \right)^2 \right]^{\frac{1}{\sigma}}, & 0 \leq r < r_+(t); \\ 0, & r \geq r_+(t). \end{cases} \quad (2.24)$$

где

$$U(t) = \left[\frac{\sigma}{2(N\sigma + 2)t} \right]^{\frac{1}{\sigma}} r_+^{\frac{2}{\sigma}}(t); \quad (2.25)$$

$$r_+^2(t) = Ct^{\frac{2}{N\sigma+2}} \frac{(N\sigma + 2)^2}{N\sigma + 1} pt^2. \quad (2.26)$$

Константу C из формулы (2.26) будем искать из соотношения

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^{r_+(t)} u(r,t) K(N) r^{N-1} dr = Q, \quad (2.27)$$

$$\begin{cases} 2, N = 1; \\ 2\pi, N = 2; \\ 4\pi, N = 3. \end{cases}$$

Далее с учетом формул (2.24)–(2.26) выражение (2.27) примет следующий вид

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^{-\frac{1}{\sigma}} r_+^{\frac{N\sigma+2}{\sigma}}(t) \left[\frac{\sigma}{2(N\sigma + 2)} \right]^{\frac{1}{\sigma}} \times K(N) \int_0^1 (1 - \xi^2)^{\frac{1}{\sigma}} \xi^{N-1} d\xi = Q, \quad (2.28)$$

Так как

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^{-\frac{1}{\sigma}} r_+^{\frac{N\sigma+2}{\sigma}}(t) = C^{\frac{N\sigma+2}{2\sigma}}, \quad (2.29)$$

а значение интеграла

$$\int_0^1 (1 - \xi^2)^{\frac{1}{\sigma}} \xi^{N-1} d\xi = \frac{1}{2} B\left(\frac{N}{2}, \frac{\sigma+1}{\sigma}\right) \quad (2.30)$$

выражается через бета-функцию

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)},$$

находим значение C из выражения (2.28)

$$C = Q^{\frac{2\sigma}{N\sigma+2}} \left\{ \left[\frac{\sigma}{2(N\sigma+2)} \right]^{\frac{1}{\sigma}} \frac{K(N)}{2} B\left(\frac{N}{2}, \frac{\sigma+1}{\sigma}\right) \right\}^{\frac{2\sigma}{N\sigma+2}}. \quad (2.31)$$

Итак, точное решение задачи (2.12) имеет вид (2.24). Полученное решение допускает предельный переход $p \rightarrow 0$. Положим, что $p=0$ в уравнении (2.26), тогда получим решение задачи о влиянии мгновенного сосредоточенного теплового источника в нелинейной среде без объемного поглощения.

3.1 Метод прямых для решения уравнения теплопроводности

Рассмотрим для начала метод прямых для простейшего уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), \quad (3.1)$$

$$\begin{cases} u = \varphi(x), t = 0; 0 \leq x \leq l, u(0, t) = \psi_1(t); \\ u(l, t) = \psi_2(t), 0 \leq t < \infty, \end{cases} \quad (3.2)$$

заменяя разностным отношением производную по x . При

$$x = x_k = kh, k = 0, 1, 2, \dots, n+1; h = \frac{l}{n+1},$$

используя приближенное равенство

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u(x_{k+1}, t) - 2u(x_k, t) + u(x_{k-1}, t))}{h^2}. \quad (3.3)$$

Отсюда получим две системы уравнений

$$\begin{cases} U_k(t) - \frac{1}{h^2}[U_{k+1}(t) - 2U_k(t) + U_{k-1}(t)] = f_k(t); \\ U_0(t) = \psi_1(t), U_{n+1}(t) = \psi_2(t); \\ k = 1, 2, \dots, n, \end{cases} \quad (3.4)$$

и

$$\begin{cases} \frac{5}{6}f_k + \frac{1}{12}[U_{k+1}(t) + U_{k-1}(t)]; \\ U_0(t) = \psi_1(t), U_{n+1}(t) = \psi_2(t); \\ k = 1, 2, \dots, n, \end{cases} \quad (3.5)$$

из которых первая система дает аппроксимацию уравнения с точностью h^2 , а вторая система h^4 .

Получим условия для $U_k(t)$ из начальных условий $u(x, t)$

$$U_k(0) = \varphi(x_k) = \varphi_k, k = 1, 2, \dots, n.$$

Таким образом, решение однородной системы (3.4) имеет вид

$$U_k(t) = \sum_{s=1}^n C_s \sin \frac{\pi s x_k}{l} e^{-\sigma_s^2(t)}, k = 1, 2, \dots, n. \quad (3.6)$$

где

$$\sigma_s^2 = \frac{4 \sin^2 \frac{\pi x_s}{2l}}{h^2}, s = 1, 2, \dots, n. \quad (3.7)$$

А общее решение системы (3.5), запишется в следующей форме

$$U_k(t) = \sum_{s=1}^n D_s \sin \frac{\pi s x_k}{l} e^{-\sigma_s^2(t)}, k = 1, 2, \dots, n. \quad (3.8)$$

где

$$\sigma_s'^2 = \frac{24 \sin^2 \frac{\pi x_s}{2l}}{h^2 [5 + \cos \frac{\pi x_s}{l}]}, s = 1, 2, \dots, n. \quad (3.9)$$

3.2 Решение краевой задачи для системы одномерных квазилинейных уравнений

Требуется найти решение системы n одномерных квазилинейных уравнений (3.10):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} &= D_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + f_1(u_1, u_2, \dots, u_n, x, t); \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} &= D_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + f_2(u_1, u_2, \dots, u_n, x, t); \\ \frac{\partial u_n}{\partial t} &= D_n \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} + f_n(u_1, u_2, \dots, u_n, x, t), \end{aligned} \quad (3.10)$$

удовлетворяющие начальным условиям:

$$u_i(x, 0) = U_i(x), 0 \leq x \leq l, i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.11)$$

и граничным условиям:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x} &= \frac{\partial u_2}{\partial x} = \dots = \frac{\partial u_n}{\partial x} = 0, x = 0; \\ \frac{\partial u_1}{\partial x} &= \frac{\partial u_2}{\partial x} = \dots = \frac{\partial u_n}{\partial x} = 0, x = l. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Соотношения (3.10)–(3.12) следует рассматривать как задачу, имитирующую нестационарный процесс в химическом реакторе с непроницаемыми стенками [15]. Найдем приближенное решение этой задачи, проведя дискретизацию уравнений (3.10) по временному переменному. Переход к конечным разностям в уравнении по одному переменному называют *методом Рунге* [2], или *методом прямых* (см. пункт 3.1).

Пренебрегая оценкой погрешности метода и не учитывая доказательство сходимости, выразим схему построения алгоритма приближенного аналитического решения задачи (3.10)–(3.12). Реализация *метода прямых* заключается в следующем: нужно провести замену оператора дифференцирования разностным отношением, по временному переменному, считая, что

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial u_1}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = v \frac{\partial u_1}{\partial \xi},$$

и

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial^2 x} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi^2}.$$

Тогда

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{u(x, t_k) - u(x, t_{k-1})}{\tau} + O(\tau); t = t_k. \quad (3.13)$$

Далее подставляем (3.13) в систему (3.10) и не учитывая члены более высокого порядка малости, получаем полу дискретное подобие задачи (3.10)–(3.12) в виде последовательности ($k=1, 2, \dots$) уравнений, связывающих искомую функцию, аргументы и ее производные для $i=1, 2, \dots, n$:

$$\frac{u(x, t_k) - u(x, t_{k-1})}{\tau} + O(\tau) = D_1 \frac{du_1}{dx^2} + f_1(u_1, u_2, \dots, u_n, x, t).$$

В общем случае

$$D_i \frac{d^2 u_i^{(k)}}{dx^2} - \tau^{-1} u_i^{(k)}(x) = \tau^{-1} u_i^{(k-1)}(x) - F_i^{(k)}(x), \quad (3.14)$$

с граничными условиями

$$\frac{du_i^{(k)}}{dx} = \frac{du_i^{(k)}}{dx} = 0, x = 0, x = l. \quad (3.15)$$

Значения функций u_1, u_2, \dots, u_n , на каждом временном слое в младших членах f_i в формуле (3.10), взяты с предыдущего временного слоя, т.е.

$$F_i^{(k)}(x) = f_i(u_1^{(k-1)}(x), u_2^{(k-1)}(x), \dots, u_n^{(k-1)}(x), x, t_{k-1}).$$

Следовательно, можно последовательно определить функции $u_i^{(k)}(x)$ для $k=1, 2, \dots$, с помощью соотношения (3.14) с учетом условия (3.15). Эти функции являются приближениями искомых решений $u_i(x, t)$ задачи (3.10)–(3.12) на временных слоях $t = t_k$. Однако, для значения i задачу (3.14), (3.15) следует решать независимо. При вычислении $F_i^{(1)}(x)$ на первом шаге, в качестве $u_i^0(x)$ можно взять начальные распределения $U_i(x)$.

Для любого значения i решение задачи (3.14), удовлетворяющей граничным условиям (3.15), будем исследовать в форме разложения в тригонометрический ряд Фурье по системе ортогональных функций на интервале $0 < x < l$

$$Z_n(x) = \cos \frac{n\pi x}{l}, n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.16)$$

Данное разложение можно записать в следующем виде

$$u_i^{(k)}(x) = \frac{a_{i0}^{(k)}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{in}^{(k)} \cos \frac{n\pi x}{l}. \quad (3.17)$$

Требуется указать способ нахождения коэффициентов $a_{in}^{(k)}$. Чтобы указать нужный способ, возьмем функцию $F_i^{(k)}(x)$ входящую в уравнение (3.14), и разложим ее в тригонометрический ряд Фурье [5, с. 25]

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \\ 0 &= \cos \sqrt{\lambda} x \sin \sqrt{\lambda} x. \end{aligned} \quad (3.18)$$

В соответствии методу Фурье, будем искать нетривиальные решения уравнения (3.17), удовлетворяющие граничным условиям (3.15) в виде

$$u = X(x)T(t). \quad (3.19)$$

Соотношение (3.19) подставляем в соотношение (3.18)

$$X(x)T'(t) = a^2 X''(x)T(t),$$

делим выражение на $a^2 X(x)T(t)$,

$$\frac{T'(t)}{a^2 t} = \frac{X''}{X} = -\lambda; k^2 + \lambda = 0.$$

Получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0,$$

общий вид решения:

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda} x + C_2 \sin \sqrt{\lambda} x. \quad (3.20)$$

Так как мы ищем только нетривиальные решения, $0 = C_2$ нам не подходит. Далее,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -C_1 \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} x + C_2 \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} x. \quad (3.21)$$

Следовательно,

$$\sqrt{\lambda} e = \pi n, x_n = \left(\frac{\pi n}{e}\right)^2; C_1 \neq 0.$$

Отсюда

$$X(x) = \cos \frac{\pi n}{e} x.$$

В итоге получаем функцию $F_i^{(k)}(x)$, разложенную в тригонометрический ряд Фурье

$$F_i^{(k)}(x) = \frac{\varphi_{i0}^{(k)}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{in}^{(k)} \cos \frac{n\pi x}{l} \quad (3.22)$$

с коэффициентами, найденными по формуле Эйлера-Фурье [5, с. 34],

$$\varphi_{in}^{(k)} = \frac{2}{l} \int_0^l F_i^{(k)}(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, n = 0, 1, 2, \dots$$

Подставляя соотношения (3.17) и (3.22) в формулу (3.14), получаем

$$D_i \left(\frac{\pi n}{e}\right)^2 a_n^{(k)} + \tau^{-1} a_{in}^{(k)} = \frac{1}{\tau} a_{in}^{(k-1)} + \varphi_{in}^{(k)},$$

делим и находим упомянутые коэффициенты

$$a_{in}^{(k)} = \frac{a_{in}^{(k-1)}}{\tau D_i \frac{\pi^2 n^2}{l^2} + 1} + \frac{\tau \varphi_{in}^{(k)}}{\tau D_i \frac{\pi^2 n^2}{l^2} + 1}. \quad (3.23)$$

В результате, найдено приближенное решение задачи (3.10)-(3.12) на временных слоях $t = t_k = k\tau, k = 1, 2, \dots$, в виде разложения функций $u_i^{(k)}(x) \cong u_i(x, t_k)$ в тригонометрические ряды Фурье (3.17) с коэффициентами $a_{in}^{(k)}$.

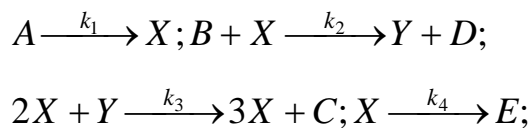
Реализация алгоритма (3.17)–(3.23) связана с нахождением коэффициентов Фурье функций $F_i^{(k)}(x)$, пересчитываемых на каждом шаге по k .

Благодаря этому алгоритму, можно провести расчет и проанализировать многие свойства решения задачи (3.10)–(3.12) для $n=2$, если

$$\begin{aligned} f_1 &= f_1(u_1, u_2) = A - (B + 1)u_1 + u_1^2 u_2; \\ f_2 &= f_2(u_1, u_2) = B u_1 - u_1^2 u_2. \end{aligned} \quad (3.24)$$

где A и B – некоторые положительные константы.

Искомая диффузионно-кинетическая модель получила название «брюсселятор» [6]. «Брюсселятор» описывает процесс превращения двух компонентов X и Y в химическом реакторе с непроницаемыми стенками, при условии, что рождение и уничтожение компонентов в реакторе происходит по следующей схеме:



где k_1, k_2, k_3, k_4 значения констант скоростей реакций. Считается, что концентрации веществ A и B в реакторе поддерживаются постоянными, а вещества D , C и E удаляются. Также, предполагается, что скорости обратных реакций намного меньше скоростей прямых. Тогда кинетические процессы в системе описываются соотношением (3.15), где u_1 и u_2 – концентрация веществ X и Y .

Покажем полученные результаты расчетов нестационарных процессов с использованием модели «брюсселятора» и анализируем их. Так как, значение

константы B , пропорциональное концентрации вещества, не слишком большое, тогда по истечении этого времени система выходит на пространственно однородные, но не зависящие от пространственной координаты, стационарные решения $u_1 = \bar{u}_1 = A$ и $u_2 = \bar{u}_2 = B/A$, для которых $f_1(\bar{u}_1, \bar{u}_2) = f_2(\bar{u}_1, \bar{u}_2) = 0$.

При этом, начиная с некоторого критического значения $B = B_k$ пространственно однородные решения \bar{u}_1 и \bar{u}_2 становятся неустойчивыми. Следовательно, если $B > B_k$, то по истечении определенного времени релаксации система выходит на немонотонные пространственно-периодические стационарные структуры, которые называются диссипативными структурами [7].

3.3 Использование возможностей ППП Matlab для решения краевой задачи одномерных квазилинейных уравнений

3.3.1 Задание. Требуется составить программу для ПЭВМ, реализующую алгоритм (3.17)–(3.23) для двухкомпонентной среды ($i=1,2$).

Результаты расчетов по алгоритму (3.8)–(3.14) (см. Приложение А) для следующих параметров: $D_1 = 4,4 \cdot 10^{-3}$; $D_2 = 2,2 \cdot 10^{-3}$; $l = 1$; $A = 2,1$; $B = 5,2$. В качестве начальных распределений были выбраны пространственно однородные решения $U_1 = 2$ и $U_2 = 2,3$. При расчетах удерживалось $N=21$ членов ряда (3.23). Для временного шага $\tau = 0,1$ выход на стационарное решение в виде диссипативных структур [15] наблюдался при $k > 120$. Пример таких диссипативных структур приведен на рисунке 3.

Проведем тестирование полученного алгоритма с варьированием параметров. Увеличивая положительные константы A и B , амплитуда волн уменьшается и колебания, изображенные на рисунке 4, становятся более симметричными относительно друг друга. Далее уменьшим концентрацию диффундирующего вещества U_1 и U_2 . Мы видим на рисунках 5 и 6, что с уменьшением концентрации, уменьшается амплитуда и процесс стабилизируется. С увеличением концентрации диффундирующего вещества, амплитуда колебаний, изображенных на рисунке 7, увеличивается и виден сильный разброс волн. Далее

увеличим коэффициент диффузии D_1 и D_2 . На рисунке 8 мы видим, что колебания становятся повторяющимися и приблизительно с одной амплитудой.

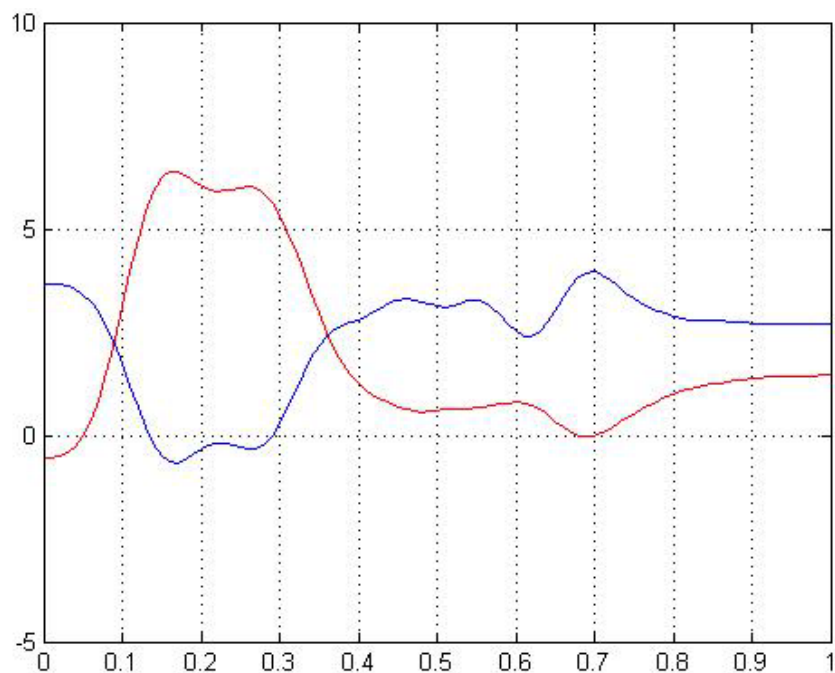


Рисунок 3 – Диссипативные структуры

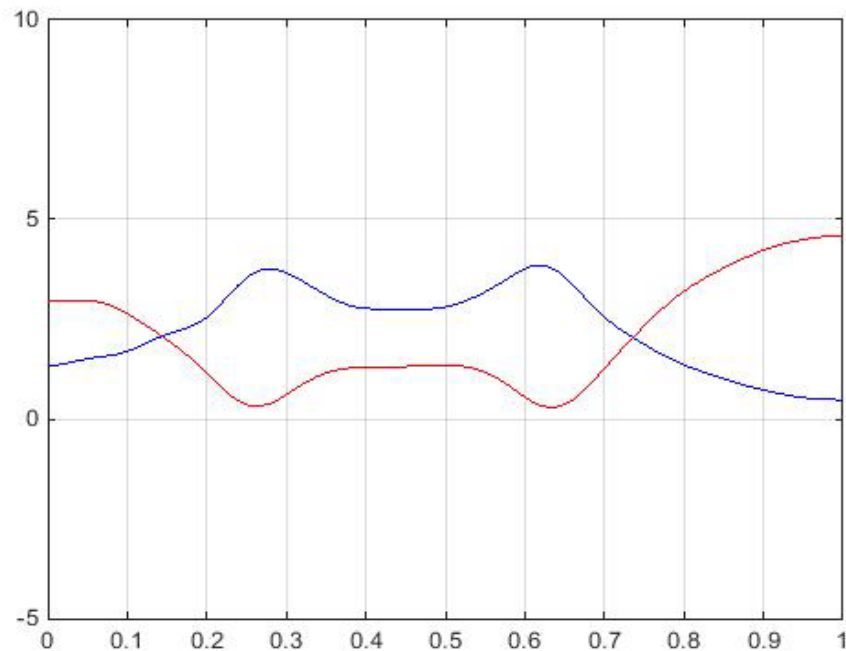


Рисунок 4 – Увеличение положительных констант A и B

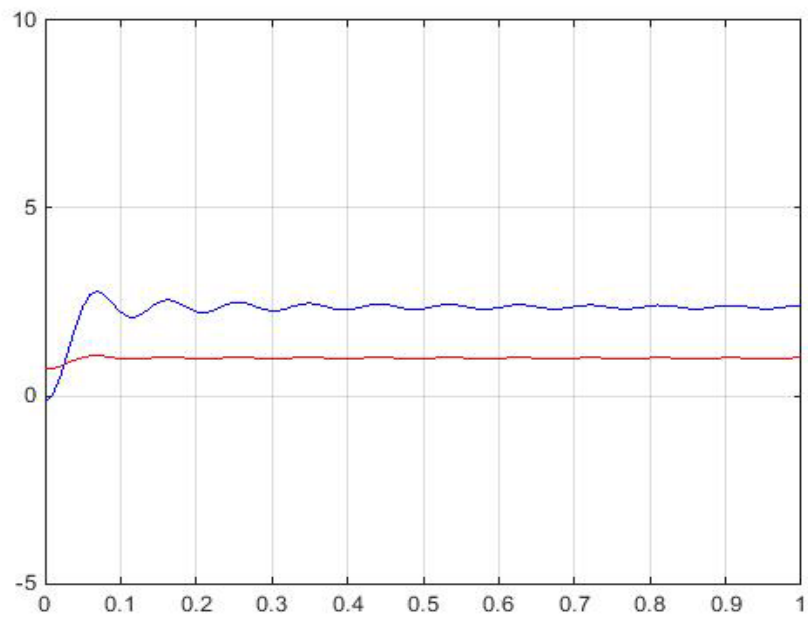


Рисунок 5 – Уменьшение концентрации диффундирующего вещества U_1

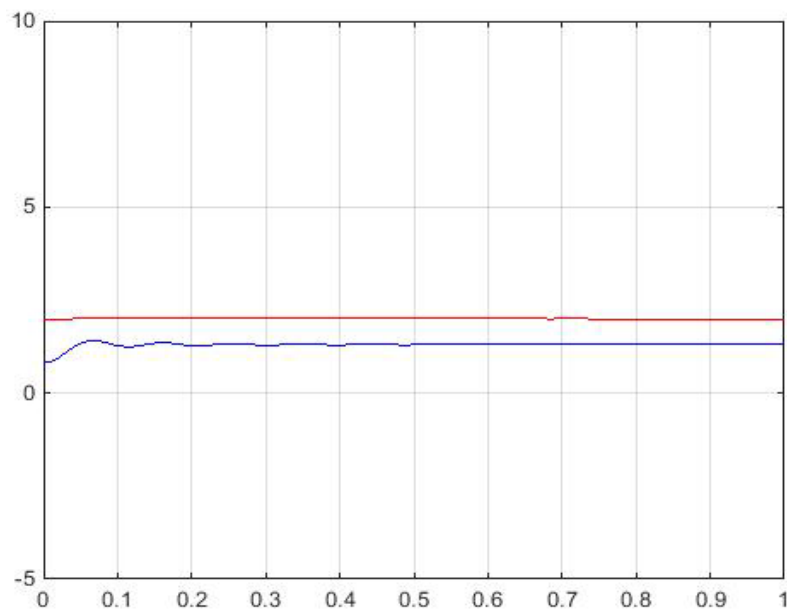


Рисунок 6 – Уменьшение концентрации диффундирующего вещества U_2

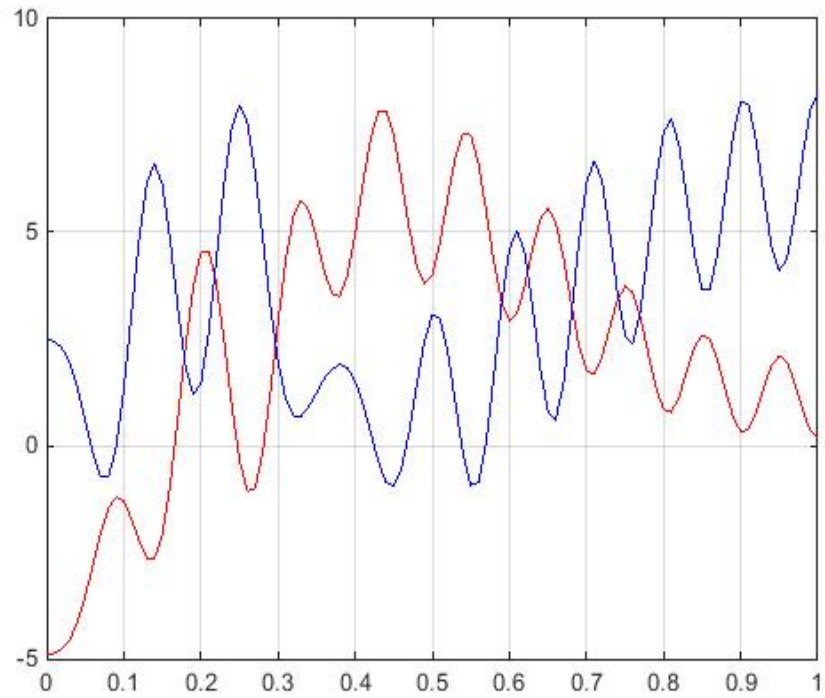


Рисунок 7 – Увеличение концентрации диффундирующего вещества

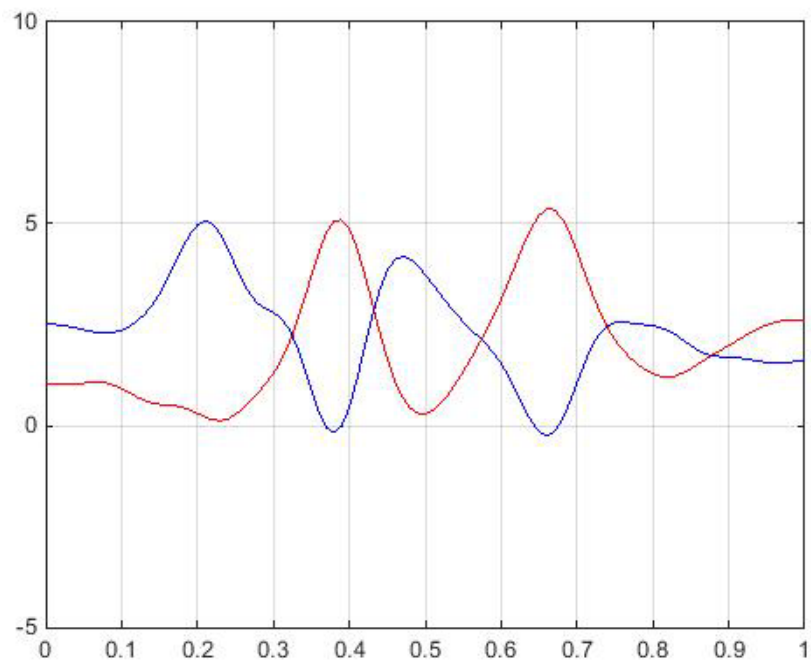


Рисунок 8 – Увеличение коэффициента диффузии D_1 и D_2

Особенность модели (3.10)–(3.12) заключается в возможности возникновения периодических колебаний концентраций веществ. Данные автоколебания наблюдаются экспериментально в химических системах. Одну из первых авто-

колебательных химических реакций называют реакцией Белоусова-Жаботинского [7], которые наблюдали и объясняли периодическое изменение окраски раствора протеканием в нем химических реакций.

Исследования математических моделей диффузионно-кинетических процессов показывают, что из-за нелинейности в многокомпонентных системах реагирующих веществ могут появляться упорядоченные, структурно-организационные состояния, а также состояния, изменяющиеся с определенной закономерностью и периодичностью. Эти состояния являются неравновесными и лежат вне термодинамической ветви, для которой характерны лишь стационарные бесструктурные состояния «тепловой смерти», соответствующие максимуму энтропии системы. Образование диссипативных структур относится к процессам упорядоченности и самоорганизации в неравновесных открытых физико-химических системах, которые представляют собой предмет изучения теории самоорганизации, или синергетики.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной выпускной квалификационной работе изучены нелинейные модели диффузионных процессов математической физики. Рассмотрено несколько видов уравнений описывающих диффузионные и тепловые процессы различной физической природы.

Была рассмотрена и решена задача Коши распространения тепловых возмущений в нелинейных средах с коэффициентом теплопроводности зависящим от температуры по степенному закону. Выяснилось, что тепловые возмущения в отличие от среды с постоянным коэффициентом теплопроводности распространяются с конечной скоростью. Также рассмотрена краевая задача нелинейной теплопроводности в полупространстве. Проведен обзор аналитических методов решения нелинейных уравнений диффузионного типа. Изучено построения точного аналитического решения системы нелинейных уравнений при описании процесса типа реакция-диффузия. Решение описывает стационарные волны концентраций компонентов, распространяющиеся с постоянной скоростью. Далее было рассмотрено и изучено решение задачи Коши для квазилинейного уравнения теплопроводности с объемным поглощением.

В работе рассмотрена и решена краевая задача для системы одномерных квазилинейных уравнений с начальными и граничными условиями. Эта задача была решена как приближенным аналитическим методом, так и численным методом прямых. Реализован алгоритм поиска коэффициентов Фурье для двухкомпонентной среды в ППП Matlab. Проведено тестирование программы с варьированием параметров и анализ полученных результатов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

- 1 Агошков, И.Н. Методы решения задач математической физики: учебное пособие для студентов, специализирующихся в области вычислительной математики / И.Н. Агошков. – 2002 г. – 320 с.
- 2 Басараб, М.А. Численно-аналитический метод решения двумерных задач естественной конвекции в замкнутых полостях / М.А. Басараб. – М.: Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2009. – 790 с.
- 3 Биллингсли, П. Сходимость вероятностных мер / П. Биллингсли. – М. Наука, 1977. – 265 с.
- 4 Бухгольц, Н.Н. Основной курс теоретической механики / Н.Н. Бухгольц. – Издательство 7, Ч. 2, 2009. – 336 с.
- 5 Виленкин, Н.Я. Теория представления групп и специальных функций. Т. 3 / Н.Я. Виленкин. – М.: Наука, 1964. – 718 с.
- 6 Жаботинский, А.М. Концентратные колебания / А.М. Жаботинский. – М.: Наука, 1974. – 179 с.
- 7 Жаботинский, А.М. Концентрационные автоколебания / А.М. Жаботинский. – М., 1974. – 169 с.
- 8 Зельдович, Я.Б. Элементы математической физики / Я.Б. Зельдович, А.Д. Мышкис. – М.: Наука, 2014. – 360 с.
- 9 Зорич, В.А. Математический анализ: Ч. 2 / В.А. Зорич. – Издательство 4-е, испр. – М.: МЦНМО, 2002. – 794 с.
- 10 Курдюмов, С.Н. Автомодельные решения квазилинейного уравнения теплопроводности с распределенной плотностью и нелинейными объемными источниками / Дифференциальные уравнения / С.Н. Курдюмов, М.И. Гуревич, О.В. Гельковская. – 1995. – 30 с.
- 11 Ладыженская, О.А. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа / О.А. Ладыженская, Н.Н. Уралцева. – М.: Наука, 1973. – 341 с.

- 12 Латыпова, Н.В. Ряды Фурье: учеб.-метод. пособие / Н.В. Латыпова, Л.И. Тучинский. – Ижевск: Издательство «Удмуртский университет», 2011. – 80 с.
- 13 Мартинсон, Л.К. Дифференциальные уравнения математической физики: учебник для вузов / Л.К. Мартинсон, Ю.И. Малов. – М.: Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2011. – 368с.
- 14 Полянин, А.Д. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики. Точные решения / А.Д. Полянин. – М.: Физико-математическая литература, 2002. – 431 с.
- 15 Поль, Р.В. Механика, акустика и учение о теплоте / Р.В. Поль. – М.: Наука, 1971. – 480 с.
- 16 Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики /А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 2004. – 798 с.
- 17 Русак, В.Н. Математическая физика / В.Н. Русак. – Минск: Издательство «Дизайн про», 1998. – 207 с.
- 18 Самарский, А.А. Аддитивные схемы для задач математической физики / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич. – М.: Наука, 2001.
- 19 Самарский, А.А. Численные методы решения задач конвекции-диффузии / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич. – М.: Эдиториал УРСС, 1999. – 248 с
- 20 Самарский, А.А. Теория разностных схем / А.А. Самарский. – М.: Наука, 1983. – 355 с.
- 21 Спевак, Л.Ф. Решение нелинейного уравнения теплопроводности методом граничных элементов с использованием метода двойственной взаимности / Л.Ф. Спевак, О.А. Нефедова // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2015. – № 12-1. – 55 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ А
Листинг реализации алгоритма

Листинг программы:

```
function two_waves
clc; clear all; clf;
% начальные данные
A=2.1; B=5.2;
u1=2; u2=2.3;
L=1; % длина интервала
step=0.01;
x=0.:step:L;
% функции
f1=@(u1,u2)(A-(B+1)*u1+u1.^2.*u2);
f2=@(u1,u2)(B*u1-u1.^2.*u2);
% начальные значения
F1=zeros(1,L/step+1);
F2=zeros(1,L/step+1);
F1(1)=f1(u1,u2); F2(1)=f2(u1,u2);
K=500; N=21;
a1=zeros(K,N); a2=zeros(K,N);
for k=2:K
    [u1, u2,a1,a2]=uuu(k,L, a1, a2,F1, F2,u1,u2, x);
    F1=f1(u1,u2); F2=f2(u1,u2);
    F1(1)=a1(1)/2; F2(1)=a2(1)/2;
    plot(x,u1,'r', x,u2,'b'); grid on;
    ylim([-5 10]);
    pause(0.02)
% drawnow
end
```

Продолжение ПРИЛОЖЕНИЯ А
Листинг реализации алгоритма

```
disp('finish')
function [u1,u2,a1,a2]=uuu(k,L,a1,a2,F1, F2, u1,u2,xL)
N=21; tau=0.1; D1=4.4e-3; D2=2.2e-3;
phi1=zeros(1,N); phi2=zeros(1,N);
for n=1:N % расчет гармоник
    phi1(n) = 2/L*trapz(xL,F1.*cos(n*pi*xL./L));
    phi2(n) = 2/L*trapz(xL,F2.*cos(n*pi*xL./L));
end
sum_a1=0; sum_a2=0;
for n=1:N
    znam1=tau*D1*(pi*n/L)^2+1;
    znam2=tau*D2*(pi*n/L)^2+1;
    a1(k,n)=(a1(k-1,n)+tau*phi1(n))/znam1;
    a2(k,n)=(a2(k-1,n)+tau*phi2(n))/znam2;
    sum_a1=sum_a1+a1(k,n)*cos(n*pi*xL/L);
    sum_a2=sum_a2+a2(k,n)*cos(n*pi*xL/L);
end
u1=u1+sum_a1;
u2=u2+sum_a2;
```