Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
(ФГБОУ ВО «АмГУ»)

Факультет математики и информатики
Кафедра математического анализа и моделирования
Направление подготовки 01.03.02 – Прикладная математика и информатика
Профиль: Математическое и информационное обеспечение экономической деятельности

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ
Зав. кафедрой
_____________ Н.Н. Максимова
«______»________________2017 г.

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

на тему: Имитационное моделирование для анализа рисков в страховании

Исполнитель
студент группы 352об ______________________ Д.В. Тихонков
(подпись, дата)

Руководитель
доцент ______________________ В.А. Труфанов
(подпись, дата)

Нормоконтроль
доцент, канд. техн. наук ______________________ А.В. Рыженко
(подпись, дата)

Благовещенск 2017

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
(ФГБОУ ВО «АмГУ»)

Факультет математики и информатики
Кафедра математического анализа и моделирования

УТВЕРЖДАЮ
Зав. кафедрой
_____________ Н.Н. Максимова
«______»_______________2017 г.

ЗАДАНИЕ

К бакалаврской работе студента Тихонкова Дениса Валерьевича.

1. Тема бакалаврской работы: Имитационное моделирование для анализа рисков в страховании (утверждена приказом от 10.04.2017 № 770. уч).

2. Срок сдачи студента законченной работы:13.06.2017.

3. Исходные данные к выпускной квалификационной работе: сведения из литературных источников, диссертаций, монографий, справочные данные, определяющую предметную область.

4. Содержание выпускной квалификационной работы: анализ и формализация сведений о предметной области – описание модели индивидуального и коллективного риска; адаптация данных и методов анализа к рабочей программного приложения; описание этапов реализации алгоритмов в программной среде PascalABC.NET; проведение вычислительных экспериментов, анализ результатов имитационного моделирования.

5. Перечень материалов приложения, листинги вычислительных программ.

6. Консультанты по бакалаврской работе – нормоконтроль: Рыженко А.В., канд. техн. наук, доцент.

7. Дата выдачи задания 24.04.2017 г.

Руководитель бакалаврской работы: Труфанов В.А., доцент.

Задание принял к исполнению: __________________ Д.В. Тихонков
(подпись, дата)

РЕФЕРАТ

Бакалаврская работа содержит 67 с., 5 рисунков, 2 таблицы, 23 источника.

МОДЕЛЬ ИНДИВИДУАЛЬНОГО РИСКА, МОДЕЛЬ КОЛЛЕКТИВНОГО РИСКА, АКТУАРНАЯ МАТЕМАТИКА, ГАУССОВСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ, ВЕРОЯТНОСТЬ РАЗОРЕНИЯ, ПУАССОНОВСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ.

Целью данной работы является рассмотрение, освоение и изложение основных понятий и модели теории риска, которая позволяет объективно оценивать финансовые риски в деятельности страховой компании.

В ходе данной работы проводится исследования различных видов риска в страховании, этапов построение модели, изучение различных типов приближения и разорения.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Целью данной работы является рассмотрение, освоение и изложение основных понятий и модели теории риска, которая позволяет объективно оценивать финансовые риски в деятельности страховой компании.

Задачами является использование методов имитационного моделирования для стохастической системы – анализа рисков в страховании и разработать алгоритмы моделей индивидуального и коллективного рисков и реализовать их.

Структурой бакалаврской работы является изучение различных моделей рисков страхования и их программная реализация.

Актуарная математика – область познаний, включающая совокупность математических методов, средств математического моделирования и компьютерных технологий, нацеленных на непосредственное использование в финансовых и экономических учреждениях.

Актуарная математика конкретно связана с деятельностью, которая носит названия страхования. Страхование как система разработки специальных фондов для компенсации вреда от случайных утрат появилось довольно давно [14]. Для заключения страхового договора необходимы три условия:

1) потенциальный клиент должен осознавать, что наступление страхового случая нанесет ему и его семье серьезный материальный урон;

2) клиент должен быть уверен, что при наличии договора страховая компания выполнит свои обязательства перед ним, и тем самым материальные потери будут компенсированы (полностью или в значительной мере);

3) клиент должен иметь материальные возможности для оплаты страховой защиты [21].

Договора страхования заключаются для того, чтобы освободится от валютных утрат. До заключения договора страхования клиент имел некий риск, который мог привести к случайным потерям X. После заключения договора страхования, оплатив некую неслучайную сумму p клиент избавился от этого риска. Другими словами, клиент идет на маленькие детерминированные расходы с тем, чтобы избавиться от случайных потерь, которые хоть и маловероятны, но могут быть катастрофически большими для него [20]. Но, сам риск не исчез – его приняла на себя страховая компания. Поэтому финансовый риск и связанная с ним опасность разорения объективно присутствуют в деятельности любой страховой компании. Оценка этого риска представляет фундаментальный интерес для компании и служат основой для принятия важнейших решений.

Страхование жизни имеет старинную историю. Еще в 1693 году Эдмунд Галлей в первый раз в мире составил таблицу длительности жизни, которая охватывает главную статистическую информацию, необходимую в актуарной математике для следующих расчетов. Обширно было поставлено страхование жизни в дореволюционной России. Происходило подготовка соответствующих специалистов, издавались монографии и учебники по актуарной математике. После революции 1917 г. по последнее время актуарное образование и актуарная наука фактически отсутствовали. В передовых же странах Америки и Европы с развитой рыночной экономикой подготовка актуариев осуществляется во многих университетах, издаются журналы, учебная и научная литература, создаются различные профессиональные объединения актуариев. С переходом России к новым экономическим отношениям создано более тысячи страховых компаний, множество банков, негосударственных пенсионных фондов, огромное число коммерческих структур, которые остро нуждаются в актуариях. В связи с этим чрезвычайно актуальной стала организация актуарного образования. Работа в этом направлении начата в ряде университетах. Так, в МГУ им. М.В. Ломоносова на базе факультетов экономического, вычислительной техники, механико-математического создан центр, который по программе Общества Актуариев (США) начал подготовку специалистов. В России под руководством А.Н. Ширяева создано Общество актуариев России, одной из задач которого является организация актуарного образования.

1 МОДЕЛЬ ИНДИВИДУАЛЬНОГО РИСКА

1.1 Описание модели индивидуального риска

Модель индивидуального риска – это модель функционирования страховой компании, предназначенная для расчета вероятности банкротства. Она опирается на следующих упрощающих предположениях:

1) анализируется сконцентрированный короткий (так что можно пренебречь инфляцией и не учитывать доход от инвестирования) промежуток времени – обычно это один год;

2) число договоров страхования N сконцентрировано и неслучайно;

3) платеж за страховку целиком вносится в начале исследуемого периода; никаких поступлений в течение этого периода нет;

4) наблюдается каждый отдельный договор страхования и знаем статистические свойства связанного с ним индивидуального иска X (поскольку не все договора приводят к иску, некоторые из случайных величин X_1,..., X_N, где X_i – иск от i-го договора, равны нулю).

В рамках этой модели разорение определяется суммарным иском к страховой организации $S = X_i + \ldots + X_N$. Если этот суммарный иск больше, чем резервы организации, то организация не сможет выполнить все свои обязательства и разорится. Поэтому вероятность банкротства компании равна

$$R=P(X_1+\ldots+X_N > u). \qquad (1)$$

Другими словами, вероятность разорения – это дополнительная функция распределения величины суммарного иска к компании за рассматриваемый промежуток времени.

Допустим, что в модели (1) случайные величины X_1,..., X_N – независимы (таким образом, исключаем катастрофические несчастные случаи, влекущие иски сразу по нескольким договорам) [22].

1.2 Точный расчет вероятности разорения

Суммарный иск представляет собой сумму независимых случайных величин, его распределение может быть подсчитано с помощью классических теорем и методов теории вероятностей [7].

Прежде всего использованием сверток. Если η_1 и η_2 – две независимые неотрицательные случайные величины с функциями распределения $F_1(x)$ и $F_2(x)$ соответственно, то функция распределения их суммы $\eta_1+\eta_2$.

Может быть подсчитана по формуле:

$$F(x)=\int_0^x F_1(x-y)\,f_2(y)dy\,. \tag{2}$$

Используя формулу (2) несколько раз, можно подсчитать функцию распределения суммы любого числа слагаемых.

Если случайные величины η_1 и η_2 – непрерывны, то обычно работают с плотностями $f_1(x),\ f_2(x)$. Плотность суммы может быть подсчитана по формуле:

$$f(x)=\int_0^x f_1(x-y)\,f_2(y)dy\,. \tag{3}$$

Если случайные величины η_1 и η_2 – целочисленные, то вместо функций распределения обычно работают с распределениями

$$p_1(n)=P(\eta_1=n),\, p_2(n)=P(\eta_2=n)\,.$$

Распределение суммы $p(n)=P(\eta_1+\eta_2=n)$ может быть определено по формуле:

$$p(n)=\sum_{k=0}^{n} p_1(k)\cdot p_2(n-k)\,. \tag{4}$$

Применим теперь эти всеобщие формулы для точного расчета вероятности разорения.

Анализируем дискретные модели индивидуальных исков. В этом случае для подсчета свертки последовательностей $p_1(n)$ и $p_2(n)$ удобно образовать матрицу вида:

$$\begin{pmatrix} p_1(0)p_2(0) & p_1(0)p_2(1) & p_1(0)p_2(2) & \dots \\ p_1(1)p_2(0) & p_1(1)p_2(1) & p_1(1)p_2(2) & \dots \\ p_1(2)p_2(0) & p_1(2)p_2(1) & p_1(2)p_2(2) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Таким образом, элемент (i, j) этой матрицы равен произведению $p_1(i)$ $p_2(j)$ (для формирования этой матрицы удобно написать слева столбец из вероятностей $p_1(i)$, а сверху строку из вероятностей $p_2(j)$, а затем перемножить их поэлементно) [1].

Суммируя по линиям $i + j = k$, параллельным главной диагонали, получим:

$$p_1(k)p_2(0) + p_1(k-1)p_2(1) + \ldots + p_1(0)p_2(k),$$

т.е. в точности $p(k)$.

Произведем расчеты с числовыми данными:

Задача: Портфель состоит из четырех схожих договоров страхования жизни, учитывающих погибель от несчастного случая: если смерть застрахованного наступила от несчастного случая, то его наследникам выплачивается 500000 руб.; в случае погибели от «естественных» причин страховая выплата равна 250000 руб. Для каждого из застрахованных вероятность погибели от несчастного случая равна 0.1, вероятность смерти от естественных причин равна 0.1 и, следовательно, вероятность дожития равна 0.8.

Следует определить зависимость вероятности банкротства R от величины капитала организации.

Решение: Для расчетов удобно принять 250000 руб. в качестве единицы измерения денежных сумм. Тогда каждая из случайных величин X_1, X_2, X_3, X_4 имеет распределение, задаваемое в виде:

n	0	1	2
$p(n)$	0.8	0.1	0.1

Для подсчета распределения суммы $X_1 + X_2$ образуем матрицу из трех строк и трех столбцов с элементами $p_1(i)p_2(j)$:

$$\begin{pmatrix} 0.64 & 0.08 & 0.08 \\ 0.08 & 0.01 & 0.01 \\ 0.08 & 0.01 & 0.01 \end{pmatrix}.$$

Поэтому для распределения $q(n) = P(X_1 + X_2 = n)$ имеет вид:

n	0	1	2	3	4
$q(n)$	0.64	0.16	0.17	0.02	0.01

(поскольку $X_1, X_2 \le 2$, их сумма не превосходит 4).

Для подсчета $r(n)$=$P(X_1$+X_2+X_3=$n)$=$P((X_1$+$X_2)$+X_3=$n)$ образуем матрицу из трех строк и пяти столбцов с элементами $p_3(i) \cdot q(j)$

$$\begin{pmatrix} 0.512 & 0.128 & 0.136 & 0.016 & 0.008 \\ 0.064 & 0.016 & 0.017 & 0.002 & 0.001 \\ 0.064 & 0.016 & 0.017 & 0.002 & 0.001 \end{pmatrix}.$$

Поэтому для распределения $X_1 + X_2 + X_3$ получаем,

n	0	1	2	3	4	5	6
$r(n)$	0.512	0.192	0.216	0.049	0.027	0.003	0.001

Наконец для подсчета $p(n) = P(X_1$+X_2+X_3+X_4=$n)$ образуем матрицу из трех строк и семи столбцов с элементами $p_3(i) \cdot q(j)$

$$\begin{pmatrix} 0.4096 & 0.1536 & 0.1728 & 0.0392 & 0.0216 & 0.0024 & 0.0008 \\ 0.0512 & 0.0192 & 0.0216 & 0.0049 & 0.0027 & 0.0003 & 0.0001 \\ 0.0512 & 0.0192 & 0.0216 & 0.0049 & 0.0027 & 0.0003 & 0.0001 \end{pmatrix}.$$

Поэтому для распределения суммарного иска имеем вид:

0	1	2	3	4	5	6	7	8
0.4096	0.2048	0.2432	0.08	0.0481	0.01	0.0038	0.0004	0.0001

Для функции распределения $P(X_1$+X_2+X_3+$X_4 \le n)$ получим:

0	1	2	3	4	5	6	7	8
0.4096	0.6144	0.8576	0.9376	0.9857	0.9957	0.9995	0.9999	1

Таким образом, зависимость вероятности банкротства R=$P(X_1$+X_2+X_3+X_4>$n)$ от величины имеющегося капитала n имеет вид:

капитал	0	1	2	3	4	5	6	7	8
вероятность разорения	0,5905	0,3856	0,1424	0,0624	0,0143	0,0043	0,0005	0,0001	.1

В случае непрерывно распределенных исков вероятность банкротства также может быть совершенно точно подсчитана с помощью сверток типа (2) или (3) (если значение действительно предъявленного иска имеет плотность).

1.3 Приближенные методы расчета вероятности разорения

Естественно количество застрахованных в страховой организации чрезвычайно велико. Потому подсчет вероятности банкротства подразумевает расчет функции распределения суммы большего числа слагаемых. В этом случае использование ЭВМ может привести к проблемам, связанным с малостью вероятностей. Но обстоятельство, затрудняющее точный расчет, раскрывает возможность быстрого и простого приближенного расчета [18]. Это связано с тем, что при росте N вероятность $P(X_1+\ldots+X_N \le x)$ часто имеет определенный предел (обычно нужно, чтобы x определенным образом менялось вместе с N), который можно принять в качестве приближенного значения этой вероятности. Пунктуальность схожих приближений традиционно чрезвычайна велика и удовлетворяет практические потребности. Главным является нормальное (или гауссовское) приближение.[15].

Гауссовское приближение основано на центральной предельной теореме теории вероятностей. В простейшей формулировке данная теорема выглядит последующим образом:

Если случайные величины $X_1,\ldots,X_N$ независимы и одинаково распределены со средним α и дисперсией σ^2, то при $N \to \infty$ функция распределения центрированной и нормированной суммы:

$$S_N = \frac{X_1+\ldots+X_N - N_\alpha}{\sigma\sqrt{N}} = \frac{S_N - ES_N}{}$$

имеет предел, равный

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt .$$

Естественно, это утверждение очень расплывчато, однако и классическая центральная предельная теорема без точных оценок погрешности не дает ясного указания на сферу применения.

Функция $\Phi(x)$ при росте x от $-\infty$ до $+\infty$ увеличивается от 0 до 1 и непрерывна. Поэтому она может рассматриваться как функция распределения некой случайной величины η . Это распределение именуется гауссовким или нормальным.

1.4 Принципы назначения страховых премий

Сумма *p*, за которую человек либо организация приобретает себе страховку, именует премией. Вопрос в том, какой платеж страховая организация обязана выплачивать за то, что принимает на себя тот или другой риск, крайне сложен. При его решении учитывается огромное число разнородных факторов: вероятность предъявления иска, его ожидаемая величина и возможные флуктуации, связь с другими рисками, которые уже приняты компанией, организационные расходы компании на введение дела, соотношение между спросом и предложением по данному виду рисков на рынке страховых услуг и т.д. В простейших видах страхования, платеж за страховку полностью вносится в момент заключения договора [16], обязательства застрахованного выражаются в уплате суммы *p*. Обязательства компании заключаются в оплате иска *X*. Однако не можем выразить принцип эквивалентности обязательств равенством *p*=*X*, поскольку *p* – детерминированная величина, а *X* – случайная.

Чтобы решить эту проблему, заменим случайную величину *X* ее средним значением *EX*, т.е. назначим в качестве платы за страховку ожидаемую величину иска.

Оценим последствия этого решения для вероятности выполнения компанией своих обязательств, т.е. подсчитаем вероятность разорения (в рамках рассматриваемой модели индивидуального риска).

Пусть, как определили ранее N – число договоров в портфеле компании, случайные величины $X_1, \ldots, X_N$ выражают иски от этих договоров, $S = X_1 + \ldots + X_N$ – величина суммарного иска. Поскольку было решено в качестве платы p_i за i–й договор взять EX_i, резервный фонд компании равен:

$$u = \sum_{i=1}^{N} EX_i = E\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = ES.$$

Поэтому вероятность разорения есть

$$R = P(S > ES).$$

Применяя гауссовское приближение, получим:

$$R = P(S - ES > 0) = P\left(\frac{S - ES}{\sqrt{VarS}} > 0\right) \approx 1 - \Phi(0) = \frac{1}{2}.$$

Естественно, это совсем неприемлемая величина вероятности разорения. Потому что равенство $p = EX$ на самом деле не выражает эквивалентности обязательств компании и застрахованного. Назначим в качестве платы за i-ю страховку сумму $p_i = EX_i + l_i$, где l_i – некоторая добавочная сумма. Теперь резервы компании:

$$u = \sum_{i=1}^{N} (EX_i + l_i) = ES + l,$$

где $\quad l = \sum_{i=1}^{N} l_i,$

соответственно, вероятность разорения компании равна

$$R = P(S > u) = P(S > ES + l).$$

Применяя гауссовское приближение, получим:

$$R = P\left(\frac{S - ES}{\sqrt{VarS}} > \frac{l}{\sqrt{VarS}}\right) \approx 1 - \Phi\left(\frac{l}{\sqrt{VarS}}\right).$$

Чтобы вероятность не разорения компании была α (α – некоторое число, близкое к 1), то $l/\sqrt{VarS}$ должно равняться квантилю x_α, т.е.

$$l = x_\alpha \cdot \sqrt{VarS}. \qquad (5)$$

Так как $VarS$ описывает величину случайных флуктуаций суммарного иска вокруг его среднего значения, добавочная сумма действительно в некотором смысле является компенсацией страховой компании за то, что она взяла на себя опасности, связанные с непредсказуемостью исков.

Уравнение (5) дает величину всеобщей добавочной суммы l. Теперь необходимо решить, каким справедливым образом разделить ее между всеми договорами.

Обыкновенно сумму l разделяют пропорционально ожидаемому иску EX_i, т.е. полагают

$$l_i = k \cdot EX_i \tag{6}$$

Поскольку известны $\sum l_i = l$ и $\sum EX_i = ES$ коэффициент пропорциональности k дается формулой:

$$k = x_\alpha \frac{\sqrt{VarS}}{ES}. \tag{7}$$

Соответственно для премии имеем:

$$p_i = (1+k) \cdot EX_i = EX_i \cdot \left(1 + x_\alpha \frac{\sqrt{VarS}}{ES}\right). \tag{8}$$

Первостепенный вклад в величину p_i обычно дает EX_i. Эту сумму именуют нетто-премией. Добавочную сумму $l_i = k \cdot EX_i$ называют страховой (либо защитной) надбавкой, а $\theta_i = l_i / EX_i$ – относительной страховой надбавкой. В рассматриваемом случае (6) относительная страховая надбавка одна и та же для всех договоров.

Но, назначение индивидуальных премий по правилу (8) не справедливо по отношению к договорам с мелкими флуктуациями возможного иска, т.е. малыми дисперсиями $VarX_i$ (если нетто-премия EX_i велика). Эти договора оплачивают случайности, связанные с иными договорами [3, 4].

Имея в виду то, что суммарная надбавка l связанна конкретно с суммарной дисперсией $VarS = \sum_{i=1}^{N} VarX_i$, было бы достоверно делить l на части l_i, пропорциональные дисперсиям $VarX_i$ либо средним квадратическим отклонениям $\sqrt{VarX_i}$, т.е. требовать, чтобы

$$l_i = k \cdot VarX_i \tag{9}$$

или

$$l_i = k \cdot \sqrt{VarX_i} \tag{10}$$

Суммируя по $i = 1, \dots, N$ и принимая во внимание (10), получим:

$$k = \frac{x_\alpha}{\sqrt{VarS}} \tag{11}$$

в первом случае и

$$k = x_\alpha \frac{\sqrt{VarS}}{\sum_{j=1}^{N} \sqrt{VarX_i}} \tag{12}$$

во втором.

Соответственно, для индивидуальных премий получим:

$$p_i = EX_i + \frac{x_\alpha}{\sqrt{VarS}} \cdot VarX_i \tag{13}$$

в первом случае и

$$p_i = EX_i + x_\alpha \frac{\sqrt{VarS}}{\sum_{j=1}^{N} \sqrt{VarX_i}} \cdot VarX_j \tag{14}$$

во втором.

Относительные страховые надбавки в этих случаях зависят от договоров и равны:

$$\theta_i = \frac{x_\alpha}{\sqrt{VarS}} \cdot \frac{VarX_i}{EX_i} \tag{15}$$

и

$$\theta_i = x_\alpha \frac{\sqrt{VarS}}{\sum_{j=1}^{N} \sqrt{VarX_j}} \cdot \frac{\sqrt{VarX_i}}{EX_i}. \tag{16}$$

Напомним, что величина $VarX/EX-1$ именуется коэффициентом рассеяния случайной величины *X*, а величина $\sqrt{VarX}/EX$ – коэффициентом вариации. Используя формулу (15), можно подметить, что правило (9) назначает относительные страховые надбавки в соответствии с величиной коэффициента рассеяния (в отличие от правила (6), которое назначает относительные страховые надбавки одними и теми же для всех договоров). Следственно, формула (16) говорит что правило (10) назначает относительные страховые надбавки соответственно коэффициентам вариации. Поэтому отличие между правилами (9) и (10) связано с тем, что считать количественной мерой «случайности» – коэффициент рассеяния либо коэффициент вариации. Вопрос в том, какое из данных правил является более объективным (естественно, с точки зрения застрахованных; компания во всяком случае получит одну и ту же требуемую сумму $l=x_\alpha\cdot\sqrt{VarS}$), в актуарной математике несомненно не решен. Конечно, если все договора статически однородны, то правила (6), (9) и (10) дают один и тот же исход [20]:

$$l_i=x_\alpha\sqrt{\frac{VarX_i}{N}}.$$

Отметим, кроме того, что переход от простейшего правила (6) к правилу (9) приводит к уменьшению страховой надбавки для *i*-го договора, если

$$\frac{VarX_i}{EX_i}<\frac{VarS}{ES},$$

т.е. если коэффициент рассеяния иска, связанного с этим договором, меньше, чем коэффициент рассеяния суммарного иска.

Переход от простейшего правила (6) к правилу (10) приводит к уменьшению страховой надбавки для i –го договора, если

$$\frac{\sqrt{VarX_i}}{EX_i}<\sum_{j=1}^{N}\frac{\sqrt{VarX_j}}{EXj}\cdot\frac{EXj}{ES},$$

т.е. если коэффициент вариации величины индивидуального иска от i-го договора меньше, чем средний коэффициент вариации, усредненный по всему портфелю с весами $EX_j \big/ ES$.

Рассмотрим эти общие рассуждения на конкретном примере.

Задача: Страховая компания заключила $N = 10000$ договоров страхования жизни сроком на один год на следующих условиях: в случае гибели застрахованного в течение года от несчастного случая компания выплачивает наследникам 1000000 руб., а в случае гибели в течение года от естественных причин компания выплачивает наследникам 250000 руб. Компания не платит ничего, если застрахованный не погибнет в течение года. Вероятность гибели от несчастного случая одна и та же для всех застрахованных и равна 0.0005. Вероятность гибели от естественных причин зависит от возраста. В первом приближении можно разбить N застрахованных на две возрастные группы, содержащие $N \quad = 4000$ и $N \quad = 6000$ человек с вероятность гибели в течение года $q_1 = 0.004$ и $q_1 = 0.002$ соответственно.

Подсчитать величину премии, обеспечивающую вероятность выполнения компанией своих обязательств, равную 95%.

Решение: Примем сумму 250000 руб. в качестве единицы измерения денежных сумм. Тогда для первой группы договоров индивидуальный иск принимает три значения: 0, 1 и 4 с вероятностями 0.9955, 0.004 и 0.0005 соответственно. Среднее значение и дисперсия величины индивидуального иска есть:

$$m_1 = 1 \cdot 0.0040 + 4 \cdot 0.0005 = 0.0060,$$

$$\sigma_1^2 = 1^2 \cdot 0.0040 + 4^2 - m_1^2 \approx 0.0120.$$

Для второй группы договоров индивидуальный иск принимает те же три значения 0, 1 и 4, но с другими вероятностями: 0.9975, 0.002 и 0.0005. В этой группе среднее значение и дисперсия индивидуального иска есть:

$$m_2 = 1 \cdot 0.0020 + 4 \cdot 0.0005 = 0.0040,$$

$$\sigma_2^2 = 1^2 \cdot 0.0020 + 4^2 \cdot 0.0005 - m_2^2 \approx 0.0100.$$

Среднее значение и дисперсия суммарного иска равны:

$$ES = N_1 \cdot m_1 + N_2 \cdot m_2 = 4000 \cdot 0.006 + 6000 \cdot 0.004 = 48,$$

$$VarS = N_1 \cdot \sigma_1^2 + N_2 \cdot \sigma_2^2 \approx 4000 \cdot 0.012 + 6000 \cdot 0.010 = 108.$$

Чтобы гарантировать 95% вероятность не разорения, резервный фонд компании должен быть $ES + l = 48 + l$, где добавочная сумма l в соответствии с формулой (5) равна:

$$l = \tau_{95\%} \cdot \sqrt{VarS} \approx 1.645 \cdot \sqrt{108 \approx 17.095}.$$

Рассмотрим теперь вопрос о назначении индивидуальных премий.

А) Если добавочная сумма l делится пропорционально нетто-премиям, то в соответствии с (7) относительная страховая надбавка θ одна и та же для всех договоров и равна [2, 8]:

$$\theta = \frac{l}{ES} \approx 36.5\%.$$

Поэтому для договоров из первой группы премия равна:

$$p_1 = m_1(1+\theta) \approx 0.00814 = 2034 \text{ руб.}$$

Для договоров из второй группы премия равна:

$$p_2 = m_2(1+\theta) \approx 0.00542 = 1356 \text{ руб.}$$

Б) Если добавочная сумма l делится пропорционально дисперсиям, то в соответствии с (11) коэффициент пропорциональности k есть:

$$k = \frac{l}{VarS} \approx 15.8\%.$$

Поэтому для договоров из первой группы страховая надбавка равна:

$$l_1 = k \cdot \sigma_1^2 \approx 0.001899,$$

так что премия есть

$$p_1 = m_1 + l_1 \approx 0.007899 = 1975 \text{ руб.},$$

а относительная страховая надбавка

$$\theta_1 = \frac{l_1}{m_1} \approx 31.7\%.$$

Для договоров из второй группы страховая надбавка равна:

$$l_2 = k \cdot \sigma_2^2 \approx 0.001583,$$

так что премия есть

$$p_2 = m_2 + l_2 \approx 0.005583 = 1396 \text{ руб.},$$

а относительная страховая надбавка

$$\theta_2 = \frac{l_2}{m_2} \approx 39.6\%.$$

В) Если добавочная сумма *l* делится пропорционально средним квадратическим отклонениям (они равны $\sigma_1 \approx 0.1095$ для договоров первой группы и $\sigma_2 \approx 0.1$ для договоров второй группы), то в соответствии с (12) коэффициент пропорциональности *k* есть:

$$k = \frac{l}{N_1\sigma_1 + N_2\sigma_2} \approx 0.0165.$$

Поэтому для договоров из первой группы страховая надбавка равна:

$$l_1 = k \cdot \sigma_1 \approx 0.001804,$$

так что премия есть

$$p_1 = m_1 + l_1 \approx 0.007804 = 1951 \text{ руб.},$$

а относительная страховая надбавка

$$\theta_1 = \frac{l_1}{m_1} \approx 30\%.$$

Для договоров из второй группы страховая надбавка равна:

$$l_2 = k \cdot \sigma_2 \approx 0.001647,$$

так что премия есть

$$p_2 = m_2 + l_2 \approx 0.005647 = 1412 \text{ руб.},$$

а относительная страховая надбавка

$$\theta_2 = \frac{l_2}{m_2} \approx 41\%.$$

Как видно, изменение принципа назначения индивидуальных премий приводит к уменьшению относительной страховой надбавки для договоров первой группы [1]: $\theta_1 = 35.6\%, 31.7\%, 30\%$.

Соответственно происходит увеличение относительной страховой надбавки для договоров второй группы: $\theta_2 = 35.6\%, 39.6\%, 41\%$. Это связанно с тем, что коэффициент рассеяния суммарного иска есть:

$$\frac{VarS}{ES} - 1 = 1.25,$$

в то время как для договоров первой (второй) группы он равен $\sigma_1^2 \big/ m_1 - 1 = 1$ соответственно, $\sigma_2^2 \big/ m_1 - 1 = 1.5$). Коэффициент вариации величины индивидуального иска для договоров первой группы есть $c_1 = \sigma_1 \big/ m_1 \approx 18.26$, а для договоров второй группы он равен $c_2 = \sigma_2 \big/ m_2 \approx 25$. Средний коэффициент вариации, усредненный по всему портфелю с весами $EX_j \big/ ES$, есть:

$$c = c_1 \cdot \frac{N_1 m_1}{ES} + c_2 \cdot \frac{N_2 m_2}{ES} = c_1 \cdot \frac{24}{48} + c_2 \cdot \frac{24}{48} = \frac{c_1 + c_2}{2} \approx 21.63.$$

Дисперсия величины индивидуального иска для договоров второй группы меньше, чем для договоров первой группы, флуктуации индивидуальных исков для договоров второй группы (измеренные как коэффициентом рассеяния, так и коэффициентом вариации) превосходят средние флуктуации по всему портфелю. Потому было бы справедливо взять один из принципов (9), (10) в качестве основы для назначения индивидуальных премий.

2 МОДЕЛЬ КОЛЛЕКТИВНОГО РИСКА

2.1 Описание модели коллективного риска

Модель коллективного риска – это модель функционирования страховой компании, предназначенная для расчета вероятности разорения. Она базируется на следующих упрощающих предположениях:

1)анализируется сконцентрированный, относительно короткий промежуток времени (так что можно пренебречь инфляцией и не учитывать доход от инвестирования);

2) платеж за страховку полностью вносится в начале исследуемого периода; новых поступлений в течение этого времени нет;

3) поступающие иски $Y_1, Y_2, \ldots$ не связываются с конкретными договорами, а рассматриваются как итог суммарного риска компании. Иными словами, Y_i – это не иск от i–го договора, а i–й по порядку реально поступивший иск; случайные величины Y_{i} – независимы и одинаково распределены без атома в нуле (т.е. строго положительны);

4) в качестве главной суммарной характеристики портфеля рассматривается не число заключенных договоров N, а всеобщее число исков ν за рассматриваемый период. Случайная величина ν и величины $Y_1, Y_2, \ldots$ – независимы [5].

Так же, как и в модели индивидуального риска, в модели коллективного риска разорение определяется суммарным иском

$S = Y_1 + \ldots + Y_\nu$ к страховой компании. Если этот суммарный иск больше, чем резервы компании u, то компания не сможет выполнить свои обязательства и разорится. Поэтому вероятность разорения компании равна:

$$R = P(Y_1 + \ldots + Y_\nu > u) \qquad (17)$$

Т.е. вероятность разорения – это дополнительная функция распределения величины суммарного иска к организации за рассматриваемый промежуток времени [1].

2.2 Точный расчет вероятности разорения

Поскольку вероятность разорения связана с суммой случайного числа слагаемых, применим формулу полной вероятности для того, чтобы свести дело к суммам с детерминированным числом слагаемых:

$$R = P\left(Y_1 + \ldots + Y_\nu > u\right) = \sum_{n=0}^{\infty} P\left(Y_1 + \ldots + Y_\nu > u \middle| \nu = n\right) \cdot P\left(\nu = n\right).$$

Обозначим $\pi_n = P(\nu = n)$ – распределение числа исков. Поскольку случайные величины $\nu,\ Y_1,\ Y_2$, независимы, а

$$P\left(Y_1 + \ldots + Y_\nu > u \middle| \nu = 0\right) = P(0 > u) = 0.$$

Получим

$$R = \sum_{n=1}^{\infty} P\left(Y_1 + \ldots + Y_\nu > u\right) \cdot \pi_n. \qquad (18)$$

Вероятности $P\left(Y_1 + \ldots + Y_n > u\right)$ являются дополнительными функциями распределения сумм независимых и одинаково распределенных величин. Поэтому они могут быть определены с помощью сверток (2).

Если величины Y_i – непрерывны, то

$$P\left(Y_1 + \ldots + Y_\nu > u\right) = \int_u^{\infty} f\,(Y_1 + \ldots + Y_n(x))dx,$$

где $f\,(Y_1 + \ldots + Y_n(x))$ – плотность суммы $Y_1 + \ldots + Y_n$.

В этом случае предпочтительнее использовать формулу (3) и записывать вероятность разорения в виде:

$$R = \int_u^{\infty} f_S(x)dx,$$

где $f_S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \pi_n f\,(Y_1 + \ldots + Y_n(x))$ – плотность суммарного иска.

Если величины Y_i – дискретные, то

$$P(Y_1 + \ldots + Y_n > u) = \sum_{k=u+1}^{\infty} P(Y_1 + \ldots + Y_n(k)),$$

где $P(Y_1 + \ldots + Y_n(k)) = P(Y_1 + \ldots + Y_n = k)$ – распределение суммы $Y_1 + \ldots + Y_n$.

В этом случае предпочтительнее использовать формулу (4) и записывать вероятность разорения в виде:

$$R = \sum_{k=u+1}^{\infty} p_S(k),$$

где $p_S(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \pi_n P(Y_1 + \ldots + Y_n(k)$ – распределение суммарного иска.

Чтобы проиллюстрировать эти всеобщие соображения, рассмотрим несколько конкретных примеров [12].

Задача Анализируемый промежуток времени портфель договоров может произвести 0, 1, 2 или 3 иска с вероятностями 0.2, 0.3, 0.4 и 0.1 соответственно (вероятность больше, чем трех исков пренебрежимо мала). В случае, если иск предъявляется, его величина равна 1, 2, или 3 с вероятностями 0.6, 0.3, и 0.1 соответственно. Определить зависимость вероятности разорения от капитала компании.

Решение. Для решения задачи необходимо подсчитать распределения величин $Y_1, Y_1 + Y_2, Y_1 + Y_2 + Y_3$. Будем использовать процедуру, описанную в разделе 1.2.

Прежде всего отметим, что каждая из величин Y_i имеет распределение:

n	1	2	3
$p(n)$	0.6	0.3	0.1

Для подсчета распределения суммы $Y_1 + Y_2$ образуем матрицу из трех строк и трех столбцов с элементами $p(i)p(j)$:

$$\begin{pmatrix} 0.36 & 0.18 & 0.06 \\ 0.18 & 0.09 & 0.03 \\ 0.06 & 0.03 & 0.01 \end{pmatrix}.$$

Поэтому для $q(n)=P(Y_1+Y_2=n)$ имеем

n	1	2	3	4	5	6
$q(n)$	0	0.36	0.36	0.21	0.06	0.01

Отметим, что поскольку $1 \le Y_1, Y_2 \le 3$, для их суммы верно неравенство $2 \le Y_1 + Y_2 \le 6$.

Для подсчета $r(n) = P(Y_1 + Y_2 + Y_3 = n) = P((Y_1 + Y_2) + Y_3 = n)$ образуем матрицу из трех строк и пяти столбцов с элементами $p(i) \cdot q(j)$:

$$\begin{pmatrix} 0.216 & 0.216 & 0.216 & 0.036 & 0.006 \\ 0.108 & 0.108 & 0.063 & 0.018 & 0.003 \\ 0.036 & 0.036 & 0.021 & 0.006 & 0.001 \end{pmatrix}.$$

Поэтому для распределения $Y_1 + Y_2 + Y_3$ имеем:

n	3	4	5	6	7	8	9
$r(n)$	0.216	0.324	0.270	0.135	0.045	0.009	0.001

Для подсчета распределения суммарного иска образуем матрицу, в строках которой укажем распределения величин 0 (она соответствует сумме $Y_1 + \ldots + Y_v$ при $v = 0$), $Y_1, Y_1 + Y_2, Y_1 + Y_2 + Y_3$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$P(Y_1 + \ldots + Y_0 = n)$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$P(Y_1 = n)$	0	0.6	0.3	0.1	0	0	0	0	0	0
$P(Y_1 + Y_2 = n)$	0	0	0.36	0.36	0.21	0.06	0.01	0	0	0
$P(Y_1 + Y_2 + Y_3 = n)$	0	0	0	0.216	0.324	0.270	0.135	0.045	0.009	0.001

умножая строку, содержащую распределение $P(Y_1 + \ldots + Y_k = n)$ на $\pi_k = P(v = k)$, складывая строки между собой, получим распределение величины суммарного иска $S = Y_1 + \ldots + Y_v$:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$P(S = n)$	0.2	0.18	0.234	0.1956	0.1164	0.051	0.0175	0.0042	0.0009	0.0001

Соответственно для вероятности разорения $R = P(S > n) = P(S = n+1) + \ldots$ получим:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$P(S > n)$	0.8	0.62	0.386	0.1904	0.074	0.023	0.0055	0.001	0.0001	0

2.3 Составное пуассоновское распределение

Предположим, что число исков v имеет распределение Пуассона со средним λ:

$$\pi_i = P(v = i) = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}, i = 0, 1, 2, \ldots.$$

В этой ситуации распределение величины суммарного иска $S = Y_1 + \ldots + Y_v$ (которое в соответствии с моделью коллективного риска (17) дает вероятность не разорения компании) называется составным пуассоновским распределением [8, 9].

Преобразование Лапласа величины S может быть получено из

$$\Phi(s) = Ee^{-s(Y_1+\ldots+Y_n)} = \sum_{n=0}^{\infty} E(e^{-s(Y_1+\ldots+Y_n)} \big| (\nu = n) P(\nu = n) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} Ee^{-s(Y_1+\ldots+Y_n)} \pi_n = \sum_{n=0}^{\infty} (\varphi(s))^n \pi_n = \pi(\varphi(s)),$$

при $\pi(z) = \exp(\lambda z - \lambda)$:

$$\Phi(s) = Ee^{-sS} = e^{\lambda\varphi(s)-\lambda} \qquad (19)$$

где $\varphi(s) = E \cdot e^{-sY}$ – преобразование Лапласа величины предъявленного индивидуального иска. Это позволяет дать иное определение составного пуассоновского распределения: неотрицательная случайная величина S имеет составное пуассоновское распределение, если ее преобразование Лапласа $\Phi(s)$ представимо в виде (19), где $\varphi(s)$ – преобразование Лапласа некоторой неотрицательной случайной величины Y.

Параметр λ исходного пуассоновского распределения π_i и распределение $F(x)$ индивидуального иска Y называются параметрами составного пуассоновского распределения.

Если индивидуальные иски Y_i имеют дискретное распределение p_n с производящей функцией $g(z)$, то составное пуассоновское распределение также является дискретным и его производящая функция $G(z)$ дается формулой:

$$G(z) = Ez^S = e^{\lambda g(z)-\lambda}. \qquad (20)$$

Для моментов составного пуассоновского распределения из общих формул $ES = EY \cdot E\nu, VarS = Var\nu \cdot (EY)^2 + VarY \cdot E\nu$ и $E\nu = Var\nu = \lambda$, и для пуассоновского распределения имеем:

$$ES = \lambda EY, \qquad (21)$$

$$VarS = \lambda EY^2. \qquad (22)$$

Кроме того, следующий результат для третьего центрального момента:

$$E(S - ES)^3 = \lambda \cdot EY^3. \qquad (23)$$

Для его доказательства отметим, что

$$E(S-ES)^3 = ES^3 - 3ES^2 \cdot ES + 3ES \cdot (ES)^2 - (ES)^3 =$$
$$= ES^3 - 3 \cdot ESVarS - (ES)^3. \tag{24}$$

Используя формулу (19), имеем:

$$ES^3 = -\Phi'''(0) = -\lambda\varphi'''(0) - 3\lambda^2\varphi'(0)\varphi''(0) - \left(\lambda\varphi'(0)\right)^3 =$$
$$= \lambda EY^3 + 3\lambda^2 EYEY^2 + \lambda^3 (EY)^3.$$

Поскольку ES и $VarS$ уже подсчитаны, получаем требуемое соотношение.

Как известно, третий нейтральный момент (точнее, $E(S-ES)^3 / (\sqrt{VarS})^3$) является количественной мерой асимметрии. Если он равен нулю, то распределение считают как симметричное; если он отрицателен (положителен), то плотность величины S имеет перекос на лево (на право) относительно центра. Положительная симметрия означает относительно огромную вероятность огромных значений иска.

Как указывает формула (24), суммарный иск в нашей модели всегда имеет положительную асимметрию (даже если индивидуальные иски имеют нулевую либо отрицательную асимметрию).

Составное пуассоновское распределение характеризуется несколькими особенными свойствами, которые допускают естественную интерпретацию в терминах модели коллективного риска и позволяют глубже понять статистические свойства этой модели [13].

Свойство 1. Предположим, что случайные величины $S_1, S_2, \ldots$ – независимы и имеют составное пуассоновское распределение с параметрами $\lambda_1, F_1(x); \lambda_2, F_2(x); \ldots$ соответственно. Предположим, что ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i$ – сходится; это условие заведомо выполнено, если число слагаемых конечно. Тогда их сумма $S = S_1 + S_2 + \ldots$ также имеет составное пуассоновское распределение и его параметры $\lambda, F(x)$ даются формулами:

$$\lambda = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \,, \tag{25}$$

$$F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i}{\lambda} F_i(x) \,. \tag{26}$$

Доказательство. Обозначим

$$\varphi_i(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dF_i(x)$$

преобразование Лапласа-Стилтьеса функции $F_i(x)$ и посчитаем преобразование Лапласа величины S:

$$\Phi(s) = E\exp\left(-s\sum_{i=1}^{\infty} S_i\right) = \prod_{i=1}^{\infty} E\exp(-sS_i) = \prod_{i=1}^{\infty} \exp(\lambda_i\varphi_i(s) - \lambda_i) =$$
$$= \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i\varphi_i(s) - \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i\right) = \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i}{\lambda}\varphi_i(s) - \lambda\right).$$

Для преобразования Лапласа-Стилтьеса функции распределения $F(x)$, задаваемой формулой (26), мы имеем:

$$\varphi(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dF(x) = \sum_{i=1}^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-sx} d\left(\frac{\lambda_i}{\lambda} F_i(x)\right) = \sum_0^{\infty} \frac{\lambda_i}{\lambda} \int_0^{\infty} e^{-sx} dF_i(x) = \sum_0^{\infty} \frac{\lambda_i}{\lambda} \varphi_i(s) \,.$$

Поэтому

$$\Phi(s) = \exp\{\lambda\varphi(s) - \lambda\}.$$

В силу (19) это и означает, что величина S имеет составное пуассоновское распределение с параметрами λ и $F(x)$.

Доказанное свойство последующим образом можно трактовать в терминах модели коллективного риска.

Предположим, что имеем некоторое количество независимых групп договоров страхования; поступление исков от i–й группы за анализируемый промежуток времени описывается пуассоновской величиной со средним λ_i, а величина предъявляемого иска имеет распределение $F_i(x)$. Тогда, если соединим все договора в одну большую группу, то поступление исков от этого суммарного портфеля будет характеризоваться распределением Пуассона со средним

$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots$, а размер предъявляемого иска будет иметь распределение $F(x)$, являющееся средним с весами λ_i / λ значением распределений $F_i(x)$.

В такой формулировке результат очевиден интуитивно:

1) i–й портфель за рассматриваемый период произведет в среднем λ_i исков; поэтому объединенный портфель произведет в среднем $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots = \lambda$ исков;

2) если поступил иск от объединенного портфеля, то с вероятностью λ_i / λ он порожден i–м составляющим портфелем и поэтому имеет распределение $F_i(x)$, по формуле полной вероятности для распределения иска от объединенного портфеля получим результат (26) [2, 6].

Следующее свойство является в определенном смысле обратным к свойству 1.

Свойство 2. Скажем, что случайная величина S имеет составное пуассоновское распределение с параметрами λ и $F(x)$. Допустим, что распределение величины предъявляемого иска представлено в виде смеси с весами $p_1, p_2, \ldots$ (величины p_i – неотрицательны и в сумме дают единицу) распределений $F_i(x)$:

$$F(x) \sum_{i=1}^{\infty} p_i F_i(x).$$

Тогда S совпадает по распределению с суммой независимых случайных величин $S_1, S_2, \ldots$, каждая из которых имеет составное пуассоновское распределение с параметрами $\lambda_i = \lambda p_i$ и $F_i(x), i = 1, 2, \ldots$.

Для доказательства введем набор независимых величин $S_1, S_2, \ldots$, имеющих составное пуассоновское распределение с параметрами:

$$\lambda_i = \lambda p_1, F_1(x); \lambda_2 = \lambda p_2, F_2(x); \ldots.$$

Поскольку ряд $\sum \lambda_i \sum \lambda p_i \lambda \sum p_i = \lambda$ – сходится, по уже доказанному свойству 1, сумма $S_1 + S_2 + \ldots$ имеет составное пуассоновское распределение с параметрами:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i = \lambda;$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\lambda_i}{\lambda}F_i(x)=\sum_{i=1}^{\infty}p_iF_i(x)=F(x),$$

т.е. совпадает по распределению с исходной величиной S.

Где не утверждаем сходство величин S и $S_1+S_2+\ldots$, а только совпадение их распределений. Это связано с тем, что не задаем величины S_i очевидно с помощью соответствующих величин $v_i, Y_1^{(i)}, Y_2^{(i)},\ldots$ на том же вероятностном пространстве, что и $S=Y_1+\ldots+Y_v$ Хотя в ряде случаев это можно сделать достаточно естественно, доказательство соответствующего утверждения гораздо сложнее. Но, так как для расчета вероятности разорения нам достаточно определить распределение суммарного иска, можно ограничиться приведенной наиболее простой формулировкой.

Свойство 2 разрешает разбивать портфель договоров со сложным распределением величин предъявляемых исков на некоторое количество независимых портфелей с более элементарными распределениями величин предъявляемых исков. Для этих более простых портфелей можно подсчитать распределение величины суммарного иска и затем с помощью сверток определить распределение величины суммарного иска (и значит, вероятности разорения) для исходного портфеля.

Этот прием чрезвычайно комфортен, когда иски в исходном портфеле принимают небольшое количество дискретных значений $y_1,\ldots,y_k$ с некоторыми вероятностями $p_1,\ldots,p_k$. На такое распределение можно смотреть как на смесь с весами $p_1,\ldots,p_k$ вырожденных распределений, сосредоточенных в точках $y_1,\ldots,y_k$.

Применяя свойство 2, можно рассматривать исходный суммарный иск S как сумму k суммарных исков $S_1,\ldots,S_k$ с параметрами $\lambda p_1,\ldots,\lambda p_k$ и детерминированными величинами исков. Поэтому на самом деле $S_i=y_iv_i$. Распределение такого иска определить очень легко – это распределение Пуассона с параметром λp_i, рассредоточенное по точкам, кратным y_i. Применяя $k-1$ сверток, теперь легко определить распределение суммарного иска [5,14].

2.4 Составное отрицательное биномиальное распределение

Предположим, что число исков v имеет отрицательное биномиальное распределение с параметрами p и α:

$$\pi_i = P(v = i) = \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+i-1)}{i!} q^i p^\alpha, i = 0,1,2,\ldots,$$

где $q = 1 - p$.

В этой ситуации распределения величины суммарного иска $S = Y_1 + \ldots + Y_v$ называется составным отрицательным биномиальным распределением.

Преобразование Лапласа величины S может быть получено из формул

$$\Phi(s) = Ee^{-s(Y_1+\ldots+Y_n)} = \sum_{n=0}^{\infty} E(e^{-s(Y_1+\ldots+Y_n)} \big| (v = n) P(v = n) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} Ee^{-s(Y_1+\ldots+Y_n)} \pi_n = \sum_{n=0}^{\infty} (\varphi(s))^n \pi_n = \pi(\varphi(s))$$

и $$\pi(z) = \left(\frac{p}{1 - zq}\right)^\alpha;$$

$$\Phi(s) = Ee^{-sS} = \left(\frac{p}{1 - q\varphi(s)}\right)^\alpha, \tag{27}$$

где $\Phi(s) = Ee^{-sY}$ – преобразование Лапласа величины предъявленного индивидуального иска. Это позволяет дать иное определение составного отрицательного биномиального распределения: неотрицательная случайная величина S имеет составное отрицательное биномиальное распределение, если ее преобразование Лапласа $\Phi(s)$ представимо в виде (27), где $\varphi(s)$ – преобразование Лапласа некоторой неотрицательной случайной величины Y.

Параметры p и α исходного отрицательного биномиального распределения π_i и распределения $F(x)$ индивидуального иска Y именуются параметрами составного отрицательного биномиального распределения.

Если индивидуальные иски Y_i имеют дискретное распределение p_n с производящей функцией $g(z)$, то составное отрицательное биномиальное распределение равным образом является дискретным и его производящая функция в силу $G(z)=\pi(g(z))$ дается формулой:

$$G(z)=Ez^{S}=\left(\frac{p}{1-qg(z)}\right)^{\alpha}. \tag{28}$$

Для моментов составного отрицательного биноминального распределения из формул $ES=EY\cdot Ev$, $Ev=\pi^{'}(1)=\frac{\alpha q}{p}$ и $Varv=\pi^{''}(1)+\pi^{'}(1)-(\pi^{'}(1))^{2}=\frac{\alpha q}{p^{2}}$ для Ev и $Varv$ имеем:

$$ES=\frac{\alpha q}{p}\cdot EY, \tag{29}$$

$$VaS=\frac{\alpha q}{p^{2}}\cdot(EY)^{2}+\frac{\alpha q}{p}\cdot Varv=\frac{\alpha q}{p}\cdot EY^{2}+\frac{\alpha q^{2}}{p^{2}}\cdot(EY)^{2}. \tag{30}$$

Отметим, кроме того, следующий результат для третьего центрального момента:

$$E(s-ES)^{3}=\frac{\alpha q}{p}\cdot EY^{3}+\frac{3\alpha q^{2}}{p^{2}}\cdot EY\cdot EY^{2}+\frac{2\alpha q^{2}}{p^{2}}\cdot(EY)^{3}. \tag{31}$$

Его доказательство дословно повторяет доказательство подобной формулы (23) для составного пуассоновского распределения.

Каждое составное отрицательное биноминальное распределение можно считать как составное пуассоновское распределение с определенным образом подобранными параметрами [20].

Итак, пусть величина S имеет составное отрицательное биноминальное распределение с параметрами p, α и $F(x)$.

Известно, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{n}}{n}=-\ln(1-q)$$

(для доказательства достаточно подметить, что обе части этого равенства совпадают в точке $q=0$ и имеют идентично равные производные). Другими словами, числа

$$p_n = \frac{q^n}{n\ln(1-q)}, n = 1, 2, \dots$$

в сумме дают единицу. Так как они неотрицательны, их можно рассматривать как распределение вероятностей некой целочисленной величины μ. Его производящая функция есть:

$$\pi_\mu(z) = \frac{\ln(1-qz)}{\ln(1-q)}.$$

Обозначим, далее, $F_n(x)$ – n-кратную свертку распределения $F(x)$ с собой (другими словами, $F(x)$ – это распределение суммы n исков) и рассмотрим взвешенную сумму функций распределения $F_n(x)$ с весами p_n:

$$H(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n F_n(x).$$

Разумеется, что *H(x)* опять же является функцией распределения. В определениях введенной выше случайной величины μ функцию $H(x)$ можно представить как функцию распределения величины $Z = Y_1 + \ldots + Y_\mu$.

Преобразование Лапласа-Стилтьеса функции $H(x)$ в силу

$$\Phi(s) = Ee^{-s(Y_1+\ldots+Y_n)} = \sum_{n=0}^{\infty} E(e^{-s(Y_1+\ldots+Y_n)} \mid \nu = n)P(\nu = n) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} Ee^{-s(Y_1+\ldots+Y_n)}\pi_n = \sum_{n=0}^{\infty}(\varphi(s))^n \pi_n = \pi(\varphi(s))$$

есть:

$$\varphi_H(s) = Ee^{-sZ} = \pi_\mu(\varphi(s)) = \frac{\ln(1-q\varphi(s))}{\ln(1-q)}.$$

Рассмотрим теперь составное пуассоновское распределение с параметрами $\lambda = \alpha\ln(1-q)$ и $H(x)$. Его преобразование Лапласа есть:

$$\Phi(s) = \exp(\lambda\varphi_H(s) - \lambda) = \exp\left(-\lambda\ln(1-q)\cdot\frac{\ln(1-q\varphi(s))}{\ln(1-q)} + \alpha\ln(1-q)\right) =$$

$$= \exp\left(\alpha\ln\frac{1-q}{1-q\varphi(s)}\right) = \left(\frac{1-q}{1-q\varphi(s)}\right)^\alpha = \left(\frac{p}{1-q\varphi(s)}\right)^\alpha.$$

Сравним правую часть с формулой (27), наблюдаем, что построенное составное пуассоновское распределение совпадает с исходным составным отрицательным биноминальным распределением.

Поэтому в принципе составное отрицательное биноминальное распределение обладает теми же особенными свойствами, что и составное пуассоновское распределение. Но, так как связь параметров обоих типов распределений чрезвычайно непростая, эти свойства не выглядят так же естественно, как и соответствующие свойства составного пуассоновского распределения. Единственным исключением является последующая рекуррентная формула для расчета распределения P_{n} суммарного иска, аналогичная формуле $P_n = \frac{\lambda}{n}\sum_{i=1}^{n} i p_i P_{n-1}$:

$$P_n = \sum_{i=1}^{\infty}\left(q + \frac{(\alpha-1)q}{n} i \right) p_i P_{n-i} \,, \tag{32}$$

где p_i – распределение величины предъявляемых исков.

Для доказательства этой формулы продифференцируем формулу (28):

$$G'(z) = \frac{q g'(z)}{1 - q g(z)} G(z)$$

и перепишем ее в виде:

$$z G'(z) - q g(z) z G'(z) = \alpha q z g'(z) G(z) \,.$$

Функция $zG'(z)$ является производящей функцией последовательности nP_n, а функция $zg'(z)$ – производящей функцией последовательности $np_{n.}$ Не считая того, произведение производящих функций любых последовательностей является производящей функцией свертки этих последовательностей. Поэтому, переходя от производящих функций к последовательностям, не имеем:

$$nP_n - q\sum_{i=0}^{n} p_i (n-i) P_{n-i} = \alpha q \sum_{i=0}^{n} q p_i P_{n-i}$$

или, что то же самое,

$$nP_n - q\sum_{i=0}^{n} (q(n-i) + \alpha q i) p_i P_{n-i} \,..$$

Так как $p_0 = 0$, отсюда не медленно имеем желаемую формулу (32).

2.5 Приближенные методы расчета вероятности разорения

Традиционно в модели коллективного риска ожидаемое количество исков от всего портфеля договоров $E\nu$ довольно велико. Для составного пуассоновского распределения это значит, что параметр λ довольно большой. Для составного отрицательного биноминального распределения это имеет место, если параметр α большой или параметр p очень мал. В этом случае точный расчет вероятности разорения с помощью методов, описанных в разделах 2.3 и 2.4, может привести к проблемам, связанным с малостью вероятностей. Но этот фактор, затрудняющий точный расчет, раскрывает возможность для быстрого и простого приближенного расчета.

2.5.1 Гауссовское приближение

Как и для модели индивидуального риска, основным является гауссовкое приближение [6].

Рассмотрим, что в модели коллективного риска (17) распределение $F(z)$ величины предъявляемого иска фиксировано и имеет конечные среднее m и дисперсию σ^2, а производящая функция распределения числа исков представима в виде:

$$\pi(z) = (g(z))^{\lambda}, \tag{33}$$

где $g(z)$ – производящая функция некоторого фиксированного распределения g_n со средним α и дисперсией b^2, а параметр $\lambda \to \infty$. Для дальнейшего удобно ввести случайную величину μ, имеющую распределение g_n.

Поскольку

$$\pi'(z) = \lambda \cdot (g(z))^{\lambda-1} \cdot g'(z),$$

$$\pi''(z) = \lambda \cdot (\lambda - 1) \cdot (g(z))^{\lambda-2} \cdot (g'(z))^2 + \lambda \cdot (g(z))^{\lambda-1} \cdot g''(z),$$

для среднего и дисперсии числа исков мы имеем:

$$E\nu = \pi'(1) = \lambda \cdot E\mu = \lambda\alpha,$$

$$\begin{aligned} Var\nu = \pi''(1) + \pi'(1) - (\pi'(1))^2 = \lambda(\lambda-1)\cdot(E\mu)^2 + \lambda \cdot E\mu(\mu-1) + \\ + \lambda \cdot E\mu - \lambda^2 \cdot (E\mu)^2 = \lambda \cdot Var\mu = \lambda b^2 \end{aligned}.$$

Поэтому предельный переход при $\lambda \to \infty$ означает, что среднее число исков Ev велико, а коэффициент рассеяния $Varv/Ev - 1$ – фиксирован.

Кроме того, для среднего значения и дисперсии суммарного иска получим:

$$ES = \lambda\alpha \cdot m,$$

$$VarS = \lambda b^2 \cdot m^2 + \sigma^2 \cdot \lambda\alpha = \lambda \cdot (b^2 m^2 + \alpha\sigma^2),$$

Основной результат заключается в том, что в описанной выше ситуации распределение центрированного и нормированного суммарного иска.

$$S^* = \frac{S - ES}{\sqrt{VarS}},$$

сходится к стандартному гауссовскому распределению (со средним 0 и дисперсией 1):

$$\lim_{\lambda\to\infty} P\left(\frac{S - ES}{\sqrt{VarS}} < x\right) = \Phi(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2} dt. \tag{34}$$

Подтверждение этого факта основывается на теореме непрерывности для характеристических функций. Напомним, что характеристической функцией произвольной случайной величины ξ с функцией распределения $F(x)$ называется комплексная функция $\psi(t)$ вспомогательного действительного аргумента t, определяемая формулой:

$$\psi(t) = Ee^{it\xi} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF(x),$$

где $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица.

Для стандартного гауссовского распределения характеристическая функция равна $\exp(-t^2/2)$.

Если величина ξ – неотрицательна, то, обычно работают с преобразованиями Лапласа $\varphi(s) = Ee^{-s\xi}$. Не трудно видеть, что для таких величин характеристическая функция равна $\varphi(-it)$.

2.5.2 Гамма-приближение

Аппроксимация распределения величины суммарного иска гамма-распределением гораздо менее комфортна для практических целей, чем гауссовское приближение. Но она обеспечивает большую точность и позволяет глубже понять свойства распределения величины суммарного иска; эти общие свойства полезны даже, если для расчета вероятности разорения применяют численные методы или имитационное моделирование.

Гамма-распределение появляется как предельное распределение для нормированной величины суммарного иска [17],

$$\frac{S}{ES} = \frac{pS}{\alpha qEY},$$

в составной отрицательной биноминальной модели, если параметр p отрицательного биноминального распределения стремится к нулю.

Рассмотрим следующую случайную величину:

$$S^* = 2\alpha \frac{S}{ES} = \frac{2pS}{qEY}. \tag{35}$$

Сейчас видно как, при $p \to 0$ распределение величины S^* устремляется к гамма-распределению с параметрами 0.5 и α.

Подтверждение этого факта базируется на теореме непрерывности; при этом, так как рассматриваемые случайные величины неотрицательны, можно работать с преобразованиями Лапласа, а не с характеристическими функциями.

Используя формулы (27) и (29) для преобразований Лапласа нормированного иска имеем:

$$Ee^{-sS^{\alpha}} = Ee^{-s\frac{2p}{qm}}S = \left(\frac{p}{1 - q\varphi\left(\frac{2sp}{qm}\right)} \right)^{\alpha},$$

где $m = EY$ – среднее значение величины предъявляемого иска.

Поскольку параметр $p \to 0$, разложим преобразование Лапласа $\varphi(u)$ величины иска в ряд Тэйлора:

$$\varphi(u) = \varphi(0) + u\varphi'(0) + o(u) = 1 - mu + o(u).$$

Отсюда

$$\varphi\left(\frac{2sp}{qm}\right)=1-\frac{2sp}{q}+o(p)$$

и, значит,

$$\frac{p}{1-q\varphi\left(\frac{2sp}{qm}\right)}=\frac{p}{1-(1-p)\left(1-\frac{2sp}{1-p}+o(p)\right)}= .$$

$$=\frac{p}{1-1+p+2sp+o(p)}=\frac{1}{1+2s+o(1)}$$

Поэтому

$$\lim_{p\to\infty} Ee^{sS^{\alpha}}=(1+2s)^{-\alpha} .$$

Справа стоит преобразование Лапласа гамма-распределения с параметрами 0.5 и $\alpha\cdot\left(\varphi(s)=\left(1+\frac{s}{\lambda}\right)^{-\alpha}\right)$, т.е. в силу формул $EY=\frac{\alpha}{\lambda}$ и $VarY=\frac{\alpha}{\lambda^2}$ со средним 2α и дисперсией 4α. Применяя теорему непрерывности для преобразования Лапласа, мы можем гарантировать, что

$$\lim_{p\to 0} P\left(\frac{2\alpha s}{ES}<x\right)=\frac{1}{2^{\alpha}\Gamma(\alpha)}\int_0^x t^{\alpha-1}e^{-t/2}dt .$$

Необычная на первый взгляд нормировка (35) удобна тем, что у предельного гамма-распределения коэффициент рассеяния $Var\xi/E\xi-1$ равен 1.

Если число $m=2\alpha$ – целое, то такое гамма-распределение известно в статистике под именем x^2 – распределения с m степенями свободы. Для краткости записей обозначим через $X^2(m)$ любую случайную величину, имеющую гамма распределение со средним m и дисперсией $2m$. Если число m – дробное, то распределение $X^2(m)$ можно приближенно подсчитать с помощью линейной интерполяции.

Коротко доказанную теорему можно записать:

$$\frac{2\alpha S}{ES}\approx X^2(2\alpha) . \tag{36}$$

Задача: Рассмотрим страховую компанию, занимающуюся страхованием автотранспортов. Предположим, что годовое число аварий среди застрахованных автотранспортов описывается отрицательным биноминальным распределением со средним значением 50 и средним квадратическим отклонением 20. Средняя стоимость ремонта поврежденного автотранспорта равна 500 руб. Оценить величину резервного фонда компании, достаточного, чтобы обеспечить 95% вероятность выполнения своих обязательств.

Решение: В соответствии с формулами $Ev = \frac{\alpha q}{p}$ и $Varv = \frac{\alpha q}{p^2}$ параметры α и p отрицательного биноминального распределения, описывающего число аварий, есть

$$p = \frac{Ev}{Varv} = \frac{20}{400} = \frac{1}{8},$$

$$\alpha = \frac{p \cdot Ev}{q} = \frac{50}{7} \approx 7.143.$$

Поскольку параметр p близок к нулю, будем использовать гамма-приближение.

В соответствии с формулой (36) случайная величина

$$\frac{2\alpha S}{ES},$$

имеет распределение $X^2(14.286)$.

Поэтому для вероятности не разорения компании имеем

$$P(S \le u) = P\left(\frac{2\alpha S}{ES} \le \frac{2\alpha u}{ES}\right) = p\left(X^2(14.286) \le \frac{2\alpha u}{ES}\right),$$

где u – резервы компании.

Используя таблицы X^2 – распределения, мы видим, что если m=14,то величина $\frac{2\alpha u}{ES}$ должна быть равна $x(14) = 23.685$, а если $m = 15$, то

$$\frac{2\alpha u}{ES} = x(15) = 24.996$$

Для $m = 14.286$ линейная интерполяция дает:

$$\frac{2\alpha u}{ES} = (15 - m) \cdot x(14) + (m - 14) \cdot x(15) =$$
$$= x(14) + (m - 14)\big(x(15) - x(14)\big) = 23.685 + 0.286 \cdot 1.311 = 240596,$$

т.е. $u = \dfrac{ES}{2\alpha} \cdot 24.0596$.

Поскольку $ES = Ev \cdot EY = 50 \cdot 500 = 25000$ (руб), мы окончательно получим: $u = 42104$ руб.

Обратим внимание на то что в рассматриваемом приближении вероятность разорения компании зависит лишь от среднего значения величины индивидуального иска. Этот результат о нечувствительности вероятности разорения к виду распределения величины индивидуального иска очень значим с практической точки зрения, т.к. нередко доступна всего лишь простейшая информация об этой случайной переменной в виде оценки ее среднего.

Чтобы подбавить смысл этому приближению, допустим, что индивидуальный иск неслучаен. Принимая его значение (т.е. 500 руб.) в качестве единицы измерения денежных сумм, получим, что величина суммарного иска имеет отрицательное биноминальное распределение. Потому величина резервного фонда, гарантирующая 95% вероятность не разорения должна быть 87(условных единиц). Наше приближение дает величину 84.2 (условных единиц) [11].

Допустим теперь, что индивидуальный иск принимает значение 250 руб. и 750 руб. с одинаковыми вероятностями 0.5 и 0.5. Введем новую условную денежную единицу, равную 250 руб. Тогда индивидуальный иск принимает значение 1 и 3 с вероятностями $p_1 = 0.5$ и $p_3 = 0.5$. Для расчета распределения суммарного иска будем применять рекуррентную формулу (31), которая в рассматриваемом случае примет вид:

$$P_n = 0.5_q\left(1 + \frac{\alpha - 1}{n}\right)P_{n-1} + 0.5_q\left(1 + \frac{2(\alpha - 1)}{n}\right)P_{n-3}, n \geq 3,$$

$$P_0 = p^{\alpha},$$

$$P_1 = 0.5_q \cdot \alpha \cdot P_0,$$

$$P_2 = 0.5_q \left(1 + \frac{\alpha - 1}{2}\right) P_1.$$

Точный числовой расчет говорит, что нужно обладать резервом в 174 (условных единиц в 250 руб.) = 87 (условных единиц в 500 руб.). Это же значение было получено и для детерминированной величины индивидуального иска. Итак, точность приближения равна 3.2%.

2.5.3 Метод эквивалентных замен

Различные определенные приближения дозволено получать как частные случаи определенной всеобщей схемы, общеизвестной в прикладной теории вероятностей как метод эквивалентных замен. При этом методе сложно устроенное распределение $F(x)$ некой случайной величины S заменяется наиболее простым распределением $H(x)$, подобранным так, чтобы некоторое количество первых моментов обоих распределений совпадали:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^i dH(x) = ES^i, i = 1, \ldots, k.$$

Число k совпадающих моментов называется порядком аппроксимации.

К примеру, гауссовское приближение (34) можно получить как приближение второго порядка, когда в качестве аппроксимирующего распределения $H(x)$ берется нормальное распределение $\Phi(x; ES, VarS)$, где

$$\Phi(x; a, b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi b}} \int_{-x}^{x} e^{\frac{(t-\alpha)^2}{2b}} dt.$$

Обозначим через ξ стандартную гауссовскую величину (со средним 0 и дисперсией 1). Понятно, что величина $\sqrt{b\xi} + a$ имеет гауссовское распределение со средним a и дисперсией b. Поэтому рассматриваемое приближение можно записать в виде:

$$S \approx \sqrt{VarS} \cdot \xi + ES. \tag{37}$$

Доказанные выше предельные теоремы о сходимости центрированного и нормированного суммарного иска $(S - ES)/\sqrt{VarS}$ к стандартному предельному закону можно рассматривать как описание ситуаций, когда оправдано применение этого варианта метода эквивалентных замен.

Рассмотрим теперь приближение второго порядка, когда в качестве аппроксимирующего распределения $H(x)$ берется гамма-распределение [19, 20]:

$$G(x;\lambda;\alpha) = \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x t^{\alpha-1} e^{\lambda t} dt .$$

Из формул $EY = \dfrac{\alpha}{\lambda}$ и $VarY = \dfrac{\alpha}{\lambda^2}$ вытекает, что параметры λ и α аппроксимирующего гамма-распределения должны выбираться следующим образом:

$$\lambda = \frac{ES}{VarS}, \alpha = \frac{(ES)^2}{VarS} .$$

Обозначим через $\gamma_{\lambda,\alpha}$ случайную величину, имеющую гамма-распределение с параметрами λ, α. Несложно проверить (например, с помощью преобразований Лапласа), что случайная величина $\alpha\gamma_{\lambda,\alpha}$ совпадает по распределению с величиной $\gamma_{\lambda/\alpha,\alpha}$.

Поскольку $X^2(m) = \gamma_{0.5,m/2}$, случайную величину $\gamma_{\lambda,\alpha}$ можно представлять как $\dfrac{1}{2\lambda} \cdot X^2(2\alpha)$.

Поэтому рассматриваемое приближение можно записать в виде:

$$\lambda = \frac{VarS}{2ES} \cdot x^2 \left(\frac{2(ES)^2}{VarS} \right). \tag{38}$$

Для составного отрицательного биноминального распределения с малым параметром p:

$$\frac{(ES)^2}{VarS} \approx \alpha ,$$

так что в этом случае приближение (37) полученное с помощью метода эквивалентных замен превратится в приближение (36), полученное с помощью предельной теоремы. Но, так как поскольку приближение (37) учитывает второй момент, оно предпочтительнее предельной аппроксимации (36).

Применим приближение (38) для решение условия задачи из пункта 2.5.2. Для определенности будем полагать, что величина иска детерминирована. Принимая 500 руб. в качестве единицы измерения денежных сумм, имеем:

$ES = 50, VarS = 400$.

Поэтому

$S \approx 4x^2(12.5)$.

Значит,

$$P(S \le u) \approx P\left(x^2(12.5) \le \frac{\pi}{4}\right),$$

т.е. $u/4$ должно быть 21.694.

Используя таблицы X^2 – распределения, видно, что если m=12, то величина $u/4$ должна быть $x(12) = 21.026$, а если $m = 13$, то $\frac{u}{4} = x(13) = 22.362$. Для $m = 12.5$ линейная интерполяция даст:

$$\frac{u}{4} = 21.694,$$

т.е. $u \approx 86.6$. Напомним, что точный численный расчет дает значение $u = 87$.

Известно, что при $m \to \infty$ случайная величина $X^2(m)$ асимптотически нормальна со средним m и дисперсией $2m$:

$$X^2(m) \approx \sqrt{2m} \cdot \xi + m,$$

где ξ – стандартная гауссовская переменная.

Поэтому, если

$$\frac{(ES)^2}{VarS} \to \infty, \tag{39}$$

то приближение (38) примет вид:

$$S \approx \sqrt{VarS} \cdot \xi + ES,$$

т.е. превратится в гауссовское приближение.

В модели (33) условие (39) значит, что $\lambda \to \infty$ – это в точности условие справедливости результата (34) о сходимости центрированного и нормированного иска к стандартному нормальному распределению.

Таким образом, гамма-приближение (37) является более всеобщим, чем гаусовское приближение (36).

Гамма-приближение (37) предпочтительнее гауссовского приближения по иным причинам.

1) Гауссовское приближение допускает (хоть и с маленькой вероятностью, равной $\Phi\left(ES/\sqrt{VarS}\right)$ отрицательные значения величины суммарного иска S, в то время как при гамма-приближении.

2) Вероятность огромных значений S (т.е. событий виде $S > x$) при гауссовском приближении ведет себя как $\frac{1}{x}\exp\left(-x^2/2\right)$, т.е. убывает чрезвычайно быстро. Потому часто гауссовское приближение недооценивает вероятность очень большого иска, что может быть очень рискованно для финансового положения компании.

3) Гауссовское распределение симметрично. Соответственно, гауссовское приближение дает нулевое значение для коэффициента симметрии:

$$\frac{E(S-ES)^2}{(\sqrt{VarS})^2}.$$

Но, как показывают формулы (23), (32), и для составного пуассоновского распределения, и для составного отрицательного биноминального распределения асимметрия постоянно положительна.

Гамма-приближение (37) в этом смысле предпочтительнее гауссовсого приближения (38), т.к. для гамма-распределения с параметрами λ и α в силу

$$\varphi(s) = \left(1+\frac{s}{\lambda}\right)^{-\alpha},$$

$$EY^3 = -\varphi'''(0) = \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\lambda^3}$$

и поэтому (см. (24), $EY = \frac{\alpha}{\lambda}$, $VarY = \frac{\alpha}{\lambda^2}$),

$$E(Y - EY)^3 = \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\lambda^2} - 3\frac{\alpha}{\lambda} \cdot \frac{\alpha}{\lambda^2} - \frac{\alpha^3}{\lambda^3} = \frac{2\alpha}{\lambda^3} > 0 .$$

Желание учесть в рассматриваемых приближениях асимметрию суммарного иска несомненно приводит к приближению третьего порядка. Дело в том, что приближение второго порядка зависят от двух параметров. Асимметрия определяется $E(S - ES)^3$ и, вообще, никак не связана с ES и $VarS$. Потому, чтоб учитывать величину асимметрии, необходимо приближать S распределением, зависящим от трех параметров. Традиционно в качестве такого распределения берут сдвинутое гамма-распределение $G(x - x_0; \lambda, \alpha)$, т.е. распределение случайной величины:

$$\eta = x_0 + \gamma_{\lambda,\alpha} = x_0 + \frac{1}{2\lambda} \cdot X^2(2\alpha).$$

Ее моменты даются формулами:

$$E\eta = Ex_0 + E\gamma_{\lambda,\alpha} = x_0 \frac{\alpha}{\lambda},$$

$$Var\eta = Varx_0 + Var\gamma_{\lambda,\alpha} = \frac{\alpha}{\lambda^2},$$

$$E(\eta - E\eta)^3 = E(x_0 + \gamma_{\lambda,\alpha} - x_0 - E\gamma_{\lambda,\alpha})^3 = E(\gamma_{\lambda,\alpha} - E\gamma_{\lambda,\alpha})^3 = \frac{2\alpha}{\lambda^2}.$$

Приравнивая моменты величины η и величины S, получим систему трех уравнений с тремя неизвестными x_0, α, λ:

$$\begin{cases} x_0 + \dfrac{\alpha}{\lambda} = ES, \\ \dfrac{\alpha}{\lambda^2} = VarS, \\ \dfrac{2\alpha}{\lambda^3} = E(S - ES)^3. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} \lambda = \dfrac{VarS}{E(S-ES)^2}, \\ \alpha = 4\dfrac{(VarS)^2}{(E(S-ES)^2)^2}, \\ x_0 = ES - 2\dfrac{(VarS)^2}{E(S-ES)^2}. \end{cases}$$

Итак, аппроксимация сдвинутым гамма-распределением выглядит следующим образом:

$$S \approx ES - 2\frac{(VarS)^2}{E(S-ES)^2} + \frac{E(S-ES)^2}{4VarS} \cdot X^4\left(8\frac{(VarS)^2}{(E(S-ES)^2)^2}\right). \tag{40}$$

Отметим, что приближение (40) лучше, чем приближения (37) в том смысле, что оно улавливает асимметрию, в некоторых случаях оно может быть хуже. Например, параметр x_0 может быть отрицателен, что означает возможность отрицательных значений величины S.

Для составного пуассоновского распределения с учетом формул (21), (22), (23) можно конкретизировать общую формулу (40):

$$S \approx \lambda EY - 2\frac{(EY^2)^2}{EY^2} + \frac{EY^2}{4EY^2} \cdot X^2\left(8\lambda\frac{(EY^2)^2}{(EY^2)^2}\right). \tag{41}$$

3 ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЛЯ АНАЛИЗА РИСКОВ В СТРАХОВАНИИ

Имитационное моделирование на ЭВМ является одним из наиболее мощных средств анализа всех стохастических моделей. Проанализируем использования этого метода для анализа рисков в страховании. Алгоритмы моделирования будем записывать на языке PascalABC.NET [23].

Этот язык включает средства для генерирования случайной величины Z, равномерно распределенной на промежутке (0,1); для этого применяется встроенная функция random. Для включения генератора случайных чисел необходимо применить процедуру randomize (она задает в качестве начального значения датчика случайных чисел сведения системных часов).

3.1 Моделирование дискретных случайных величин

Разберем пример страхования жизни на 1 год, когда страховая компания выплачивает конкретную сумму b_1 руб. в случае гибели застрахованного в течение года от несчастного случая (пусть $q^{(1)}$ – вероятность этого события) и сумму b_2 руб. в случае кончины застрахованного в течение года от естественных причин (пусть вероятность этого события). Компания не выплачивает страховку, если застрахованный доживет до конца года (вероятность этого события равна $p = 1 - q^{(1)} - q^{(2)}$. Следовательно, индивидуальный иск X, порожденный таким договором, принимает три значения: 0, b_1 и b_2 с вероятностями p, $q^{(1)}$ и $q^{(2)}$ соответственно.

Для того чтобы смоделировать величину этого иска, разобьем отрезок [0,1] на три части:

$$\Delta_0 = [0, p), \Delta_1 = [p, p + q^{(1)}), \Delta_2 = [p + q^{(1)}, 1]$$

длиной p, $q^{(1)}$, $q^{(2)}$ соответственно, и сформируем равномерно распределенную величину Z.

Определим новую случайную величину Y, положив

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{если}\, Z\in\Delta_0\\ b_1, & \text{если}\, Z\in\Delta_0\\ b_2, & \text{если}\, Z\in\Delta_0\end{cases}.$$

Поскольку событие $\{Y=0\}$ равносильно событию $\{\mathrm{Z}\in\Delta_0\}$, его вероятность равна длине промежутка Δ_0 , т.е. *p*. Подобным же образом, $P(Y=b_1)=q^{(1)}, P(Y=b_2)=q^{(2)}$. Итак, величина *Y* имеет то же распределение, что и величина *X*, т.е. может рассматриваться как ее стохастическое воспроизведение.

На языке PascalABC.NET эта процедура реализуется следующим составным оператором (далее b1= b_1, b2= b_2, ql= $q^{(1)}$, q2= $q^{(2)}$):

```
Begin
    randomize;
    z:=random;
    if z<p then Y:=0 else
    if z<p+ql then Y:=bl else Y:=b2;
End.
```

Теперь подлежащая моделированию случайная величина *X* принимает произвольное число дискретных значений $b_0,b_1,b_2,\dots$ с определенными вероятностями $p_0,p_1,p_2,\dots$. Разобьем отрезок [0,1] на части:

$$\Delta_0=[0,p_0),\Delta_1=[p_0,p_0+p_1),\dots\Delta_n=[p_0+\dots+p_{n-1},p_0+\dots+p_n),\dots$$

длиной $p_0,p_1,p_2,\dots$ соответственно и сгенерируем равномерно распределенную случайную величину *Z*.

Определим новую величину *Y*, положив $Y=b_i$, если $Z\in\Delta_i$, т.е. если

$$p_0+\dots+p_{i-1}\le Z<p_0+\dots+p_i$$

Эта величина принимает дискретные значения $b_0,b_1,\dots,b_n,\dots$. Поскольку событие $\{Y=b_i\}$ равносильно (по определению) событию $Z\in\Delta_i$, его вероятность равна длине промежутка Δ_i, т.е. p_i.

Рассмотрим построенную этим способом случайную величину *Y* как реализацию случайной величины *X*.

На языке PascalABC.NET эта процедура реализуется следующим составным оператором (ниже $p[i]= p_i$, $b[i] = b_i$):

```
Begin
    randomize;
    z:=random;
    a:=p[0];
    Y: =0;
    L2: if z<s then goto LI ;
    Y:=Y+1;
    a:=a+p[Y];
    goto L2;
    LI:Y:=b[Y]
End.
```

Программа может применяться для моделирования дискретных индивидуальных исков, и для моделирования числа исков ν за определенный промежуток времени. Для этих распределений необходимо дополнить операторами, которые бы вычисляли текущее значение вероятностей p_i.

Сначала разберем пуассоновскую случайную величину ν с параметром λ,

$$P(\nu = i) = \pi_i = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}.$$

Вероятности π_i, удобно вычислять по рекуррентной формуле:

$$\pi_i = \pi_{i-1} \cdot \frac{\lambda}{i}, i \geq 1,$$

с начальным условием:

$$\pi_0 = e^{-\lambda}.$$

Поэтому составной оператор, моделирующий пуассоновскую случайную величину ν с заданным параметром λ, выглядит следующим образом (nu= ν, lambda= λ):

```
Begin
    randomize;
```

```
    z:=random;
    pi:=exp(-lambda);
    s:=pi;
    nu:=0;
    L2:if z<s then goto LI ;
    nu:=nu+l;
    pi:=pi*lambda/nu;
    s:=s+pi;
    goto L2;
    L1;
End.
```

Пусть теперь v имеет отрицательное биномиальное распределение с параметрами p и α, т.е.

$$P(v = i) = \pi_i = \frac{\alpha(\alpha+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha+i-1)}{i!} p^{\alpha} q^{i}.$$

Вероятности π_i, удобно вычислять по рекуррентной формуле:

$$\pi_i = \pi_{i-1} \cdot \frac{\alpha + i - 1}{i} \cdot q, i \geq 1,$$

с начальным условием:

$$\pi_0 = p^0$$

Следовательно составной оператор, моделирующий отрицательную биномиальную случайную величину v с заданными параметрами p и α, выглядит следующим образом (nu= v, alpha=α):

```
Begin
    randomize;
     z:=random;
    pi:=exp(alpha*ln(p));
    s:=pi;
    nu:=0;
    L2:if z<s then goto LI ;
```

```
    nu:=nu+l;
    pi:=pi*(alpha+nu-l)*(l-p)/nu;
    s:=s+pi;
    goto L2;
    L1;
End.
```

3.2 Модель индивидуального риска

Проанализируем модель индивидуального риска, изучавшийся в разделе 1.

Если заданы число договоров страхования N и распределение случайных величин $X_1,\dots,X_N$, описывающих индивидуальные иски от договоров, то можно смоделировать эти величины и тем самым смоделировать величину суммарного иска к компании $S = X_1 + \ldots + X_N$.

Если фиксирована величина резервного фонда u, то с каждым отдельным циклом моделирования совокупности исков связана случайная величина p, равная 1 или 0 в соответствии с тем, $S > u$ или $S < u$ (т.е. в соответствии с тем, разорилась компания или нет).

Произведем большое число K циклов моделирования. Они приведут к определенным значениям $p_1, p_2, \ldots, p_k$ индикатора события ''компания разорилась". Для каждой из случайных величин p_i имеем:

$$Ep_i = P(p_i = 1) = R,$$

$$Varp_i = P(p_i = 1) \cdot P(p_i = 0) = R(1 - R).$$

Поэтому суммарное число «успехов» $p_1 + \ldots + p_k$ имеет среднее $K \cdot E_p = KR$ и дисперсию $K \cdot Varp = KR(1 - R)$. Соответственно, среднее арифметическое $\overline{R} = (p_1 + \ldots + p_k)/K$ имеет математическое ожидание R и дисперсию $R(1 - R)/K$. При больших значениях K дисперсия будет мала. Поэтому случайная величина $\overline{R}$ будет мало отличаться от своего среднего значения R и, значит, $\overline{R}$ можно рассматривать как приближенное значение безызвестной вероятности разорения R.

Задача: Портфель состоит из четырех одинаковых договоров страхования жизни, учитывающих смерть от несчастного случая: если кончина застрахованного наступила от несчастного случая, то его наследникам выплачивается 500000 руб.; в случае кончины от «естественных» причин страховая выплата равна 250000 руб. Для каждого из застрахованных вероятность кончины от несчастного случая равна 0.1, вероятность кончины от естественных причин равна 0.1 и, следовательно, вероятность дожития равна 0.8. Результат выполнения программы можно увидеть на таблице 1, а график этих значений можно видеть на рисунке 1.

Определить зависимость вероятности разорения R от величины капитала компании. Реализация программы на языке PascalABC.NET показано в приложении А, а пользовательский интерфейс программы можно видеть в приложении Г.

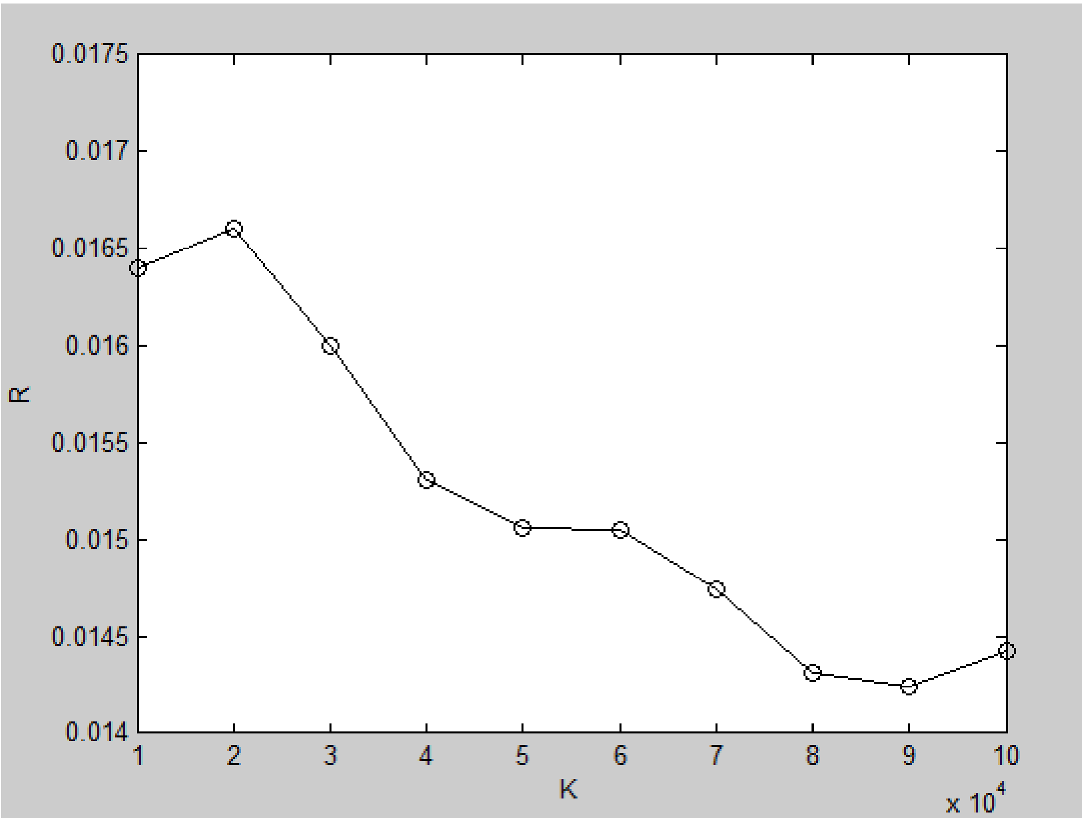

Рисунок 1 – График зависимости числа циклов от текущего значения оценки вероятности разорения

Каждый индивидуальный иск X_1, X_2, X_3, X_4 моделируется отдельно.

Программа осуществляет $K = 100000$ циклов моделирования. Чтобы показать устойчивость получаемой оценки, программа через каждые 10000 циклов печатает на экране число циклов и текущее значение оценки $\overline{R}$ неизвестной вероятности разорения *R*.

Таблица 1 – Результат выполнения программы

K	*R*
10000	0.0164
20000	0.0166
30000	0.016
40000	0.0153
50000	0.01506
60000	0.01505
70000	0.0147428571428571
80000	0.0143125
90000	0.0142444444444444
100000	0.01442

Напомним, что точное значение вероятности разорения (полученное в разделе 1.2 при решении этой задачи с помощью сверток) равно 0.0143=1.43E-2.

Как и следовало ожидать, по мере роста числа циклов моделирования, оценка $\overline{R}$ флуктуирует с затухающей амплитудой вокруг точного значения.

Простейший вывод о величине *R* можно получить следующим образом. В силу центральной предельной теоремы величина

$$\frac{p_1 + \ldots + p_K - KR}{\sqrt{KR(1-R)}} = \sqrt{K}\,\frac{\overline{R} - R}{\sqrt{R(1-R)}}$$

имеет стандартное нормальное распределение. Поэтому практически достоверно можно считать, что

$$-3.29 < \sqrt{K}\,\frac{\overline{R}-R}{\sqrt{R(1-R)}} < 3.29$$

(точнее говоря, вероятность этого события равна 99.9%).

Следовательно, практически достоверно неизвестное значение *R* лежит в интервале

$$(\overline{R}-3.29\cdot\sqrt{\frac{R(1-R)}{K}}, \overline{R}+3.29\cdot\sqrt{\frac{R(1-R)}{K}}.$$

Границы этого интервала выражены через неизвестную вероятность *R*, но на практике здесь можно заменить *R* ее оценкой *R*. У нас $\overline{R}\approx 1.5\%$, K=10^5. Поэтому

$$3.29\cdot\sqrt{\frac{R(1-R)}{K}}\approx 0.13\%,$$

т.е. базируясь на оценке $\overline{R}=1.43\%$ мы на самом деле можем утверждать лишь, что $1.3\% < R < 1.56\%$. Иными словами, относительная погрешность $\left|\overline{R}-R\right|\big/R$ при $K=100000$ циклах моделирования равна примерно

$$3.29\cdot\sqrt{\frac{1-R}{KR}}\approx 8.5\%.$$

Эти соображения показывают, что для уменьшения относительной погрешности в 10 раз (примерно до 1%) должны увеличить число циклов моделирования в 100 раз, т.е. примерно до 10 млн.

3.3 Модель коллективного риска

Проанализируем модель коллективного риска, изучавщуюся в разделе 2.

Если заданы распределение π_i, числа исков v и распределение $F(x)$ величин предъявляемых исков $Y_1, Y_2, \ldots$, то мы можем смоделировать эти величины и тем самым смоделировать величину суммарного иска к компании:

$$S = Y_1 + \ldots + Y_v.$$

Если фиксирована величина резервного фонда u, то с каждым отдельным циклом моделирования связана случайная величина p, равная 1 или 0 в соответствии с тем, $S > u$ или $S < u$ (т.е. в соответствии с тем, разорилась компания или нет).

Произведем большое число K циклов моделирования. Они приведут к определенным значениям $p_1, p_2, \ldots, p_k$ индикатора события «компания разорилась». Тогда среднее арифметическое $\overline{R} = (p_1 + \ldots + p_K)/K$ может быть принято в качестве оценки искомой вероятности разорения.

Задача: Ежемесячное число пожаров среди застрахованных объектов описывается пуассоновским распределением со средним $\lambda = 9$, а величина ущерба при пожаре имеет экспоненциальное распределение со средним 5000 руб. Следует оценить вероятность разорения, если резервный фонд равен 105000 руб. Реализация программы на языке PascalABC.NET показано в приложении Б, а пользовательский интерфейс программы можно видеть в приложении Д.

Решение: Примем среднюю величину индивидуального иска в качестве единицы измерения денежных сумм (так что резервный фонд равен 21 (условных единиц)).

Как следует из результатов экспоненциального распределения со средним $m = 1$:

$$EY = 1, EY^2 = 2, EY^3 = 6.$$

Поскольку имеем дело с составным пуассоновским распределением, будем применять формулу (41), что даст следующее приближение для величины суммарного иска:

$$S \approx -3 + \frac{3}{4} \cdot x^2(16).$$

Поэтому для вероятности разорения имеем:

$$R = P(S > 21) \approx P\left(-3 + \frac{3}{4}x^2(16) > 21\right) = P\left(x^2(16 > 32)\right) = 1\%.$$

Отметим, что гамма-приближение второго порядка в рассматриваемом случае дает:

$S \approx x^2(9)$.

Поэтому для вероятности разорения имеем:

$R = P(S > 21) \approx P(x^2(9) > 21)$.

Для распределения x^2 с 9 степенями свободы имеем:

$P(x^2(9) > 19.679) = 2\%, P(x^2(9) > 21.666) = 1\%$.

Применяя линейную интерполяцию, получаем для $R = P(x^2(9) > 21)$ значение 1.3%, что примерно на 30% превышает истинное значение.

По результатам K=10000000 циклов моделирования абсолютная погрешность в определении R (с доверительной вероятностью 99.9%) не превосходит.

$$3.29 \cdot \sqrt{\frac{R(1-R)}{K}} \approx 3.29 \cdot \sqrt{\frac{R(1-R)}{K}} \approx 3.29 \cdot 10^{-4}.$$

Поэтому можно утверждать, что $0.946\% < R < 1.012\%$. Результат выполнения программы можно увидеть на таблице 2, а график этих значений можно видеть на рисунке 2.

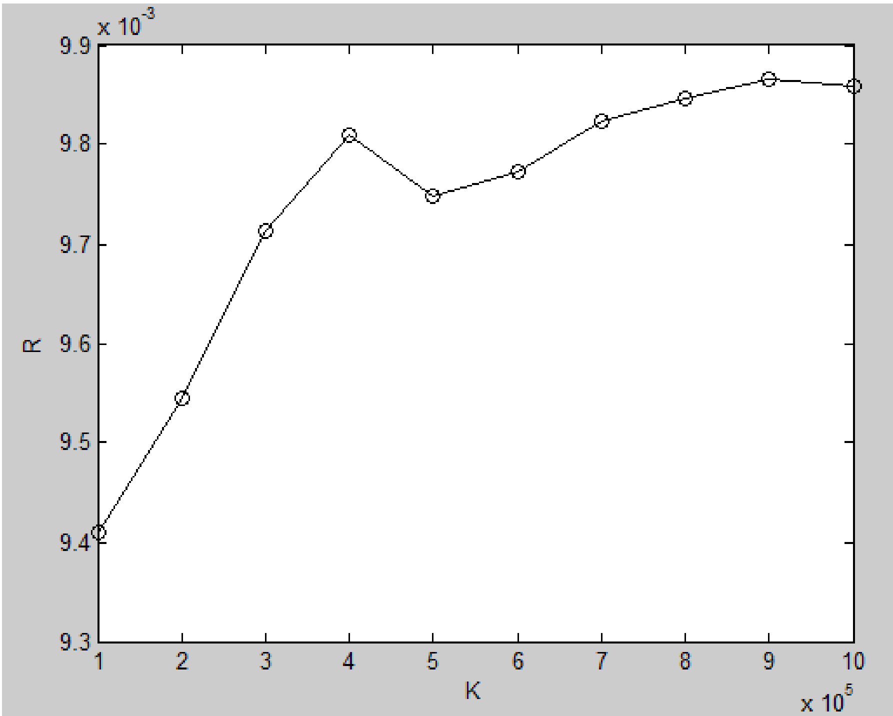

Рисунок 2 – График зависимости циклов от абсолютной погрешности

Таблица 2 – Результат выполнение программы

K	R
100000	0.00941
200000	0.009545
300000	0.00971333333333333
400000	0.00981
500000	0.009748
600000	0.00977333333333333
700000	0.00982285714285714
800000	0.00984625
900000	0.00986555555555556
1000000	0.009858

Задача: Страховая компания заключила $N = 10000$ договоров страхования жизни сроком на один год на следующих условиях: в случае кончины застрахованного в течение года от несчастного случая компания выплачивает наследникам 1000000 руб., а в случае кончины в течение года от естественных причин компания выплачивает наследникам 250000 руб. Компания не платит ничего, если застрахованный не погибнет в течение года. Вероятность кончины от несчастного случая одна и та же для всех застрахованных и равна 0.0005. Вероятность кончины от естественных причин зависит от возраста. В первом приближении можно разбить N застрахованных на две возрастные группы, содержащие $N_1 = 4000$ и $N_2 = 6000$ человек с вероятность кончины в течение года $q_1 = 0.004$ и $q_2 = 0.002$ соответственно. Определить зависимость вероятности разорения от величины резервов компании.

Решение: Примем сумму 250000 руб. в качестве единицы измерения денежных сумм. Для первой группы договоров число предъявленных исков можно приближенно считать распределенным по закону Пуассона с параметром

$$\lambda_1 = N_1(0.0005 + 0.0040) = 4000 \cdot 0.0045 = 18.$$

Действительно предъявленные иски принимают два значения: 1 и 4 с вероятностями $p_1^{'} = \frac{0.0040}{0.0045} = \frac{40}{50} = \frac{8}{9}$ и $p_4^{'} = \frac{0.0005}{0.0045} = \frac{1}{9}$ соответственно.

Для второй группы договоров число предъявленных исков можно приближенно считать распределенным по закону Пуассона с параметром:

$$\lambda_2 = N_2(0.0005 + 0.0020) = 6000 \cdot 0.0025 = 15.$$

Действительно предъявленные иски принимают два значения: 1 и 4 с вероятностями $p_1^{''} = \frac{0.0020}{0.0025} = \frac{4}{5}$ и $p_4^{''} = \frac{0.0005}{0.0025} = \frac{1}{5}$.

В силу свойства 1 суммарный иск от всего портфеля имеет составное пуассоновское распределение со средним числом предъявленных исков $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = 33$ и следующим распределением величины действительно предъявленных исков:

$$p_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda} p_1^{'} + \frac{\lambda_2}{\lambda} p_1^{''} = \frac{18}{33} \cdot \frac{8}{9} + \frac{15}{33} \cdot \frac{4}{5} = \frac{28}{33},$$

$$p_4 = \frac{\lambda_1}{\lambda} p_4^{'} + \frac{\lambda_2}{\lambda} p_4^{''} = \frac{18}{33} \cdot \frac{1}{9} + \frac{15}{33} \cdot \frac{1}{5} = \frac{5}{33}.$$

Этот иск, в свою очередь, в силу свойства 2 можно рассматривать как $1 \cdot v_1 + 4 \cdot v_4$, где величины v_1, v_4 независимы и имеют распределения Пуассона со средними $\lambda p_1 = 28$ и $\lambda p_4 = 5$ соответственно.

Поскольку распределение Пуассона $\pi_i(\lambda) = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}$ легко рассчитывается помощью рекуррентных формул Продолжение решения задачи можно видеть в приложении В и результат на рисунке 3).

$$\pi_0(\lambda) = e^{-\lambda}, \pi_i(\lambda) = \pi_{i-1}(\lambda) \cdot \frac{\lambda}{i}.$$

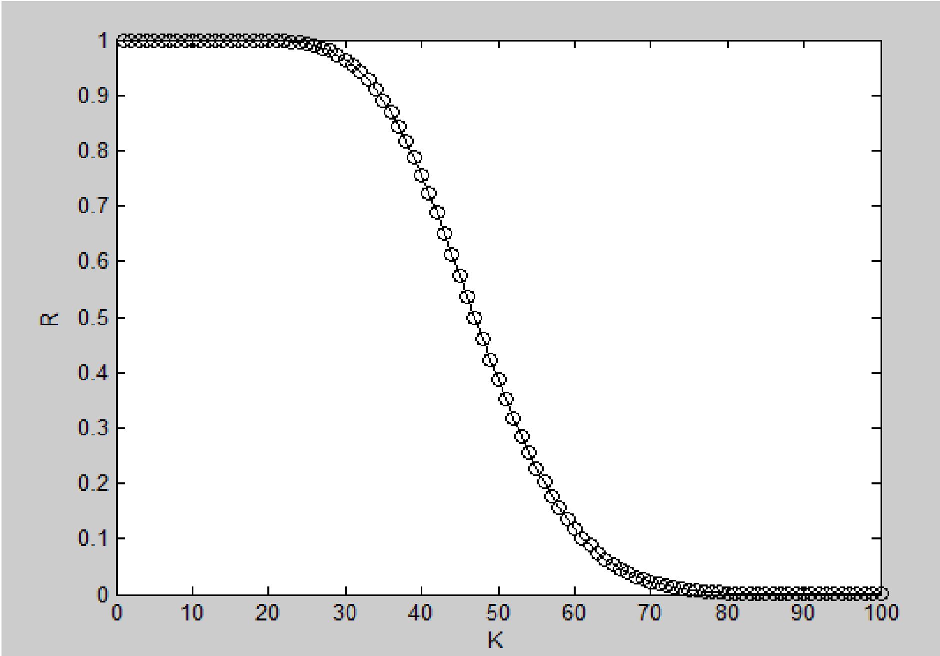

Рисунок 3 – График зависимости циклов от вероятности разорения с пуассоновским распределением

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1) Имитационное моделирование является довольно трудным инструментом, для исследования экономической деятельности и оценки рисков. Оно требует привлечения высококвалифицированных специалистов как со стороны экономистов, так и со стороны разработчиков ПО, использующих имитационную модель. Конкретно это является одним из самых существенных ограничений в распространении этого инструмента оценки рисков. Но именно этот инструмент является одним из самых истинных и достоверных при анализе бизнес-процесса (при условии адекватности имитируемой модели), поскольку позволяет максимально приблизиться к реалистичным условиям функционирования экономической системы.

2) Как и традиционно, при имитационном моделировании, огромный интерес должен быть уделен процессу вариации модели. В нашем примере для проверки корректности модели нужна консультация специалистов в области финансового менеджмента.

3) Гигантскую роль при использовании имитационного моделирования играет подготовительный статистический анализ факторов модели и статистический анализ результатов. Статистический анализ может быть использован в самой программной версии модели, избавляя пользователя от лишних исследований, так и отдельно, оставляя решение этой задачи пользователю независимо при поддержке статистических пакетов.

4) Для того, что бы полноценно проводить анализ риска проекта, требуется включать модель в реальную систему учета и анализа средств предприятия, а конкретно: применять данные баланса в качестве исходных данных модели. Это даст возможность использовать реальные и непрерывно меняющиеся показатели финансовой деятельности фирмы (коэффициенты ликвидности, коэффициенты рентабельности, характеристики платежеспособности и т. д.).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1 Baker T. Insuring Liability Risks // The Geneva Papers on Risk and Insurance. 2004. №1. pp. 128-149.

2 Baker T. The Law and Economics of Liability Insurance: A Theoretical and Empirical Review // Research Paper. 2011. №11. pp. 6-24.

3 Bertoneche M. Financial Performance. – Boston: Butterworth-Heinemann. 2001.

4 Bland D. Insurance: Principles and practice. Moscow. 2000.

5 Danzon P.M., Hamington S.E. The Economics of Liability Insurance // Handbook of Insurance, Kluwer Academic, Boston, Dodrecht, London. 2002. pp. 4-19.

6 Fagart M., Fluet C. Liability Insurance under the Negligence Rule // The RAND Journal of Economics. 2009. №3. pp. 486-508.

7 Jeffrey D. Liability Insurance // Professional Builder. 2007. pp. 39-40.

8 Katzman M.T. Pollution Liability Insurance and Catastrophic Environmental Risk // The Journal of Risk and Insurance. 1988. №1. pp. 75-100.

9 Shavell S. On liability and insurance // Bell Journal of Economics. 2000. pp.120-132

10 Zurich // Официальный сайт страховой компании Zurich в России. URL: http://www.zurich.ru (дата обращения: 15.05.2017)

11 Агеев, Ш.Р. Страхование гражданской ответственности: учебное пособие / Ш.Р. Агеев, В.В. Федоренков М.: ГУУ, 2002. – 128 с.

12 Русакова, О.И. Страхование ответственности в Российской Федерации на примере некоторых видов: учебное пособие / Е.В. Андреева, Р.А. Афанасьева, О.И. Русакова – Иркутск: ИГЭА, 1998. – 102 с.

13 Архипов, А.П. Основы страхового дела: учебное пособие / А.П. Архипов, В.Б. Гомелля – М.: Маркет ДС, 2002. – 407 с.

14 Карташов, Г.Д. Методические указания к решению задач по актуарной математике (модели дожития) / В.Н. Баскаков, Г.Д. Карташов – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 1997. – 48 с.

15 Бесфамильная, Л.В. Страхование ответственности за качество товаров, работ (услуг): учебное пособие / Л.В. Бесфамильная, Ю.В. Грызенкова, А.А. Цыганов – М.: Издательский центр Государственного университета управления, 2003. – 255 с.

16 Вишняков, Я.Д. Общая теория рисков: учебное пособие / Я.Д. Вишняков, Н.Н. Радаев – М.: Академия, 2008. – 368 с.

17 Гербер, Х. Математика страхования жизни: Пер. с нем / Х. Гербер – М.: Мир, 1995. – 156 с.

18 Грищенко, Н.Б. Основы страховой деятельности: Учеб. Пособие / Н.Б. Грищенко – М: Финансы и статистика, 2004. – 352 с.

19 Страхование сегодня // Страховой портал. URL: http://www.insur-info.ru/ (дата обращения: 15.05.2017)

20 Фалин, Г.И. Математические основы теории страхования жизни и пенсионных схем / Г.И. Фалин – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1996. – 221 с.

21 Фалин, Г.И. Введение в актуарную математику / Г.И. Фалин, А.И. Фалин – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1994. – 85 с.

22 Четыркин, Е.М. Методы финансовых и коммерческих расчетов / Е.М. Четыркин – М.: ДЕЛО ЛТД., 1995. – 320 с.

23 Официальный сайт PascalABC.NET в России URL:http://pascalabc.net.

ПРИЛОЖЕНИЕ А
Листинг программы модели индивидуального риска

```
Begin
randomize;
r:=0;
for k:=1 to 100000 do
begin
z:=random;
if z<p then x1:=0 else if z<p+q1 then x1:=1 else x1:=2;
z:=random;
if z<p then x2:=0 else if z<p+q1 then x2:=1 else x2:=2;
 z:=random;
if z<p then x3:=0 else if z<p+q1 then x3:=1 else x3:=2;
z:=random;
if z<p then x4:=0 else if z<p+q1 then x4:=1 else x4:=2;
s:=x1+x2+x3+x4;
if s>u then r:=r+1;
if int(k/10000)*10000=k then writeln(k,r/k:10);
end;
End.
```

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Листинг программы модели коллективного риска

```
Begin
randomize;
r:=0;
for k:=1 to 1000000 do
begin
z:=random;
pi:=exp(-lambda);
s:=pi;
nu:=0;
L2:if z<s then goto L1;
nu:=nu+1;
pi:=pi*lambda/nu;
s:=s+pi;
goto L2;
L1:s:=0;
for j:=1 to nu do
begin
y:=-m*ln(random);
s:=s+y;
end;
if s>u then r:=r+1;
if int(k/100000)*100000=k then writeln(k,r/k:9);
end;
End.
```

ПРИЛОЖЕНИЕ В
Листинг программы пуассоновского распределения

```
Begin
P[0]:=exp(-lambda);
P[1]:=lambda*p1*P[0];
P[2]:=lambda*p1*P[1]/2;
P[3]:=lambda*p1*P[2]/3;
for n:=4 to 100 do P[n]:=(lambda/n)*(p1*P[n-1]+4*p4*P[n-4]);
R[0]:=1-P[0];
for u:=1 to 100 do
begin
R[u]:=R[u-1]-P[u];
writeln(u,R[u]:10:6);
end;
End.
```

ПРИЛОЖЕНИЕ Г
Пользовательский интерфейс программы для индивидуального риска

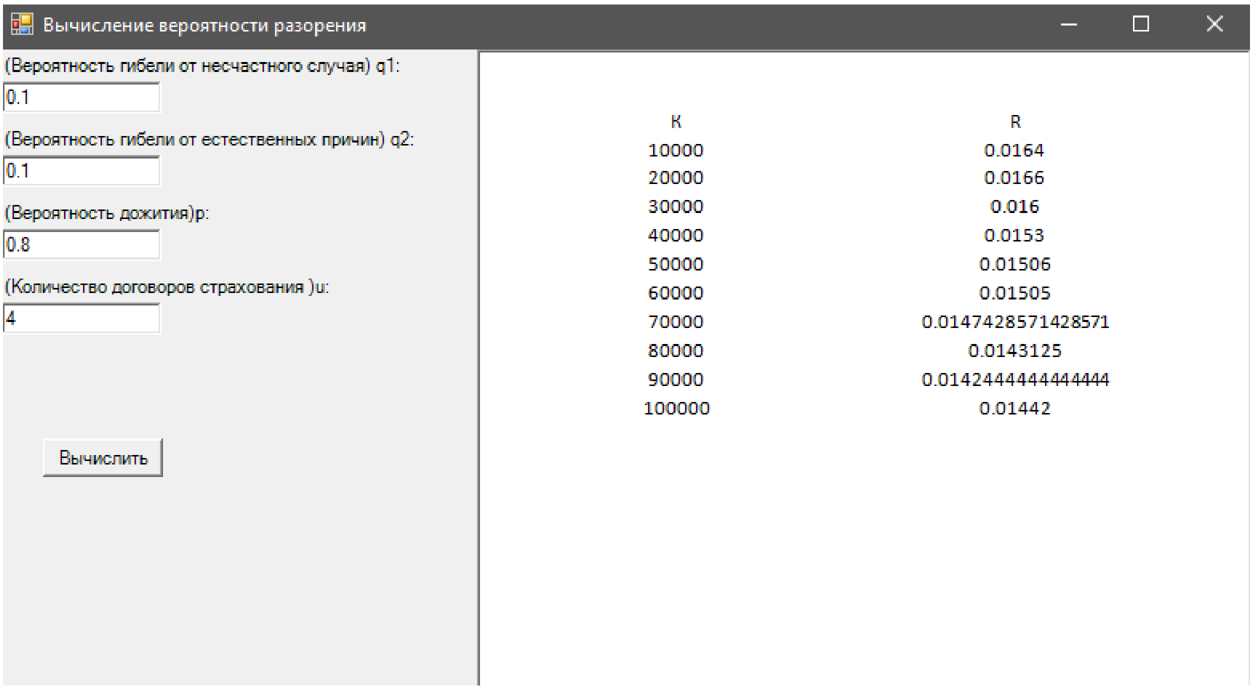

Рисунок 4 – Пользовательский интерфейс программы для индивидуального риска

ПРИЛОЖЕНИЕ Д

Пользовательский интерфейс программы для коллективного риска

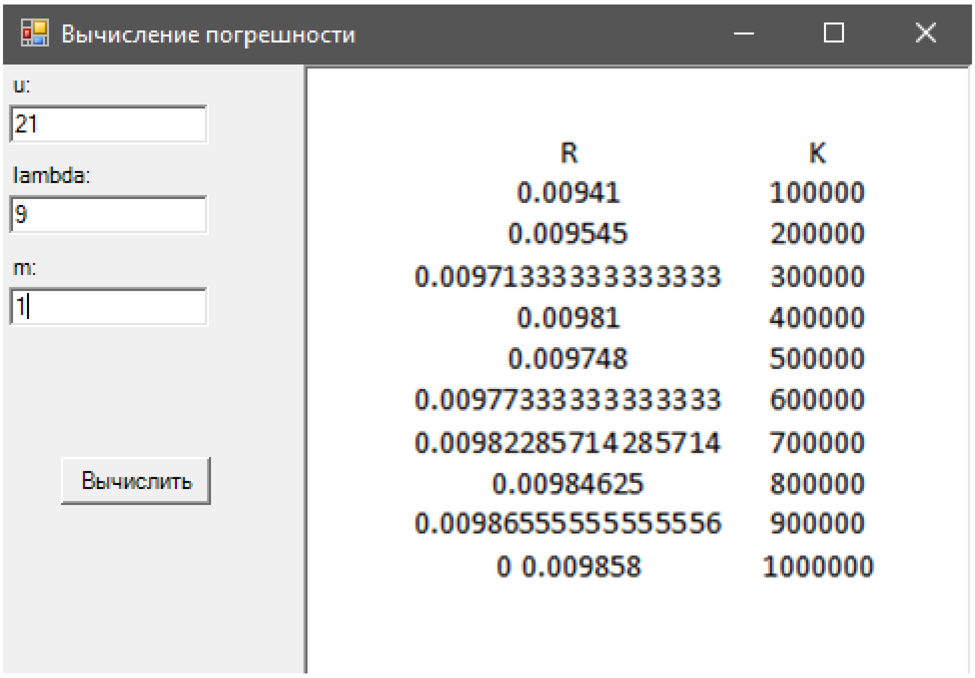

Рисунок 5 – Пользовательский интерфейс программы для коллективного риска