

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
(ФГБОУ ВО «АмГУ»)

Факультет математики и информатики
Кафедра математического анализа и моделирования
Направление подготовки 01.03.02 – Прикладная математика и информатика
Профиль: Математическое и информационное обеспечение экономической деятельности

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ
Зав. кафедрой
_____ Н.Н. Максимова
« _____ » _____ 2017 г.

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

на тему: Методы решения нелинейных уравнений волновых процессов

Исполнитель
студент группы 352 об _____ А.А. Загрузин
(подпись, дата)

Руководитель
доцент, канд. техн. наук _____ Т.В. Труфанова
(подпись, дата)

Нормоконтроль
доцент, канд. техн. наук _____ А.В. Рыженко
(подпись, дата)

Благовещенск 2017

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
(ФГБОУ ВПО «АмГУ»)

Факультет математики и информатики
Кафедра математического анализа и моделирования

УТВЕРЖДАЮ
Зав. кафедрой
_____ Н.Н. Максимова
« _____ » _____ 2017 г.

З А Д А Н И Е

К бакалаврской работе студента Загрузина Андрея Альбертовича.

1. Тема бакалаврской работы: Методы решения нелинейных уравнений волновых процессов (утверждена приказом от 10.04.2017 № 770-уч.)
 2. Срок сдачи студентом законченной работы 13.06.2017.
 3. Исходные данные к бакалаврской работе: отчет о прохождении преддипломной практики, учебные и периодические научные издания.
 4. Содержание бакалаврской работы (перечень подлежащих в разработке вопросов): теоретическое представление волновых процессов; аналитические решения волновых задач математической физики; численное моделирование процесса взаимодействия двух сталкивающихся солитонов.
 5. Перечень материалов приложения: листинги вычислительных программ.
 6. Консультанты по бакалаврской работе – нормоконтроль: Рыженко А.В., канд. техн. наук, доцент.
 7. Дата выдачи задания: 24.04.2017 г.
- Руководитель бакалаврской работы: Труфанова Татьяна Вениаминовна, доцент, канд. техн. наук, доцент.

Задание принял к исполнению 24.04.2017 г. _____ А.А. Загрузин

(подпись)

РЕФЕРАТ

Бакалаврская работа содержит 47 страниц, 11 рисунков, 24 источника, 1 приложение.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ, НЕЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ, ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ, УРАВНЕНИЕ КОЛМОГорова-ПЕТРОВСКОГО-ПИСКУНОВА, УРАВНЕНИЕ БЮРГЕРСА, УРАВНЕНИЕ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРИЗА, АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ, ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ

Целью данной дипломной работы является решение нелинейных волновых уравнений вида Кортевега-де Фриза точными и приближенными аналитическими методами. Его реализация в ППП Matlab. Рассмотрены такие понятия как: нелинейные модели, волновые задачи, солитон, кноидальные волны. Проведен литературный обзор подходов к исследованию методов решения нелинейных моделей математической физики. Проведен анализ определений. Рассмотрены примеры нелинейных волновых процессов.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	5
1 Нелинейные математические модели математической физики	7
1.1 Уравнение Колмогорова-Петровского-Пискунова	7
1.2 Уравнение Бюргера	15
2 Аналитические методы решения нелинейных волновых уравнений	25
2.1 Односолитонные решения уравнения Кортевега-де Фриза	25
2.2 Многосолитонные решения уравнения Кортевега-де Фриза	32
3 Приближенные методы решения нелинейных уравнений	37
3.1 Постановка задачи	37
3.2 Использование возможностей ППП Matlab для решения нелинейных волновых уравнений	40
Заключение	44
Библиографический список	45
Приложение А Программная реализация взаимодействия двух сталкивающихся солитонов	47

ВВЕДЕНИЕ

Математическое моделирование является одним из актуальных направлений. Главным требованием математической модели является адекватное описание процесса. Средства и методы математического моделирования широко используются для изучения экономических, физическо-химических процессов и объектов. Важнейшим вопросом в математическом моделировании является изучение диффузионных и волновых процессов. Диффузионными процессами являются процессы, протекающие при перемещении мельчайших частиц (атомов, ионов, молекул) или их комплексов вследствие стремления к равновесному распределению концентрации мигрирующих частиц в данном объеме. Такими процессами является диффузия, характеризующая перенос массы, и теплопроводность, которая обуславливает перенос энергии. Волновыми процессами называются любые возмущения состояния сплошной среды, которые распространяются с конечной скоростью и несут энергию.

Линейные математические модели считаются всегда лишь определенными приближениями при описании различных процессов. Их можно использовать только в тех случаях, когда исследуемые физические величины в рассматриваемом процессе изменяются не в очень широком диапазоне значений.

Нелинейные модели позволяют формализовать процессы в наиболее широком спектре значений. При этом нелинейности изменяют не только количественные характеристики процессов, но и качественную картину их протекания. В основе нелинейных моделей лежат нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных. Законченной теории и общих методов решения таких задач не разработано. Однако для ряда нелинейных задач математической физики удастся найти точные аналитические решения, анализ свойств которых позволяет выявить качественно новые нелинейные эффекты в исследуемых процессах.

Волновые процессы являются эффективным средством передачи энергии и информации. Они широко используются в науке и технике [12, с. 261]. Поэто-

му исследование закономерностей распространения волн различной природы является важной задачей. Волновые уравнения описывают малые колебания струны, колебательные процессы в сплошных средах и в электродинамике.

Аналитические методы решения волновых уравнений математической физики разработаны для узкого класса задач, поэтому на практике широкое распространение получили методы численного анализа.

Приближенная реализация прикладной задачи требует корректное и согласованное выполнение следующих этапов: составление алгоритма решения, реализация программы, анализ полученных результатов.

Цель данной работы: решение нелинейных волновых уравнений вида Кортевега-де Фриза точными и приближенными аналитическими методами.

Для достижения сформулированной цели требуется решение следующих задач:

- 1) исследование известных математических моделей нелинейных волновых процессов изучение методов построения решения уравнений Колмогорова-Петровского-Пискунова, Бюргерса и Кортевега-де Фриза;
- 2) решение аналога уравнения Кортевега-де Фриза;
- 3) аналитически приближенное решение уравнения Кортевега-де Фриза;
- 4) разработка прикладной программы, позволяющей наблюдать на дисплее взаимодействие двух сталкивающихся солитонов.

1 НЕЛИНЕЙНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1.1. Уравнение Колмогорова-Петровского-Пискунова

В качестве первого примера нелинейных моделей математической физики рассмотрим так называемое уравнение диффузионного типа Колмогорова-Петровского-Пискунова. Это уравнение было рассмотрено А.Н. Колмогоровым, И.Г. Петровским и Н.С. Пискуновым в труде «Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества, и его применение к одной биологической проблеме» (1937 г.). Показано, что задача вытеснения одного биологического вида другим на некоторой территории может быть сведена к решению параболического уравнения с нелинейным младшим членом[16, с. 294]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + ku(1-u), t > 0, x \in \mathbb{R}^1, \quad (1.1)$$

где $u(x,t) = \frac{N(x,t)}{N_m}$ – безразмерная концентрация(плотность) особей популяции, причем $0 \leq u \leq 1$;

$k = const > 0$ – определенный параметр задачи, который в биологической модификации считается мальтузианским параметром популяции.

Уравнение (1.1) называют уравнением Колмогорова-Петровского-Пискунова. Оно встречается в задачах тепло и массообмена, теории горения, биологии и экологии, в физике плазмы и задачах теории фазовых переходов. Оно описывает, например, массоперенос в двухкомпонентной неподвижной смеси при наличии объемной химической реакции квазипервого порядка.

Данное равенство является частным случаем полулинейного уравнения вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(u). \quad (1.2)$$

В уравнении (1.2) нелинейный младший член описывает объемные процессы генерации $F > 0$ или поглощения $F < 0$ в рассматриваемой системе. Ес-

ли $F > 0$ при $0 < u < 1$, $F(0) = F(1) = 0$, $F'(0) > 0$, а $F'(1) < 0$, уравнение (1.2) называют уравнением вида КПП, поскольку частным случаем такого рода связи, когда $F'(0) = k > 0$, является логический закон генерации $F(u) = ku(1 - u)$, соответствующий уравнению (1.1).

Полулинейное уравнение (1.2) называют уравнением Зельдовича, если $F(u) > 0$ при $0 < u < 1$, $F(0) = F(1) = 0$, $F'(1) < 0$ но $F'(0) = 0$. Частным случаем такого уравнения является уравнение (1.2) с $F(u) = u^2(1 - u)$, которое используется в теории горения для описания распространения пламени.

Если же функция $F(u)$ имеет три нуля на отрезке $[0, 1]$, т. е. $F(0) = F(\alpha) = F(1) = 0$, где $\alpha \in (0, 1)$, причем $F'(0) < 0$, $F'(\alpha) > 0$, а $F'(1) < 0$, то уравнение (1.2) называют уравнением Семенова. Такое уравнение обширно используется в математических моделях при описании автокаталитических цепных реакций.

Проведем исследование свойств решения уравнения (1.1) с целью последующей постановки задачи. Пусть в начальный момент времени $t = 0$ функция $u = 0$ при $x < a$ и достигает своего максимального значения $u = 1$ при $x > b > a$. В частном случае $b = a$ такое начальное распределение концентрации представляет собой ступенчатую функцию Хевисайда [11, с. 13].

Из такой постановки задачи очевидно, что из-за действий генерации и диффузии область плотностей, близких к единице, будет распространяться справа налево (рисунок 1), увеличивая зону, занимающуюся доминантными особями. О таком нестационарном процессе можно говорить равно как о распространении волны концентрации. При этом нужно предвидеть, что нелинейная генерация при наличии диффузии по истечении довольно большого промежутка времени образует некоторый стационарный профиль волны в переходной зоне, где $0 < u < 1$. Форма данного стационарного профиля не зависит от начального распределения концентрации в переходной зоне, и он перемещается из области с большей концентрацией в область с меньшей концентрацией с некоторой отличительной скоростью v_* .

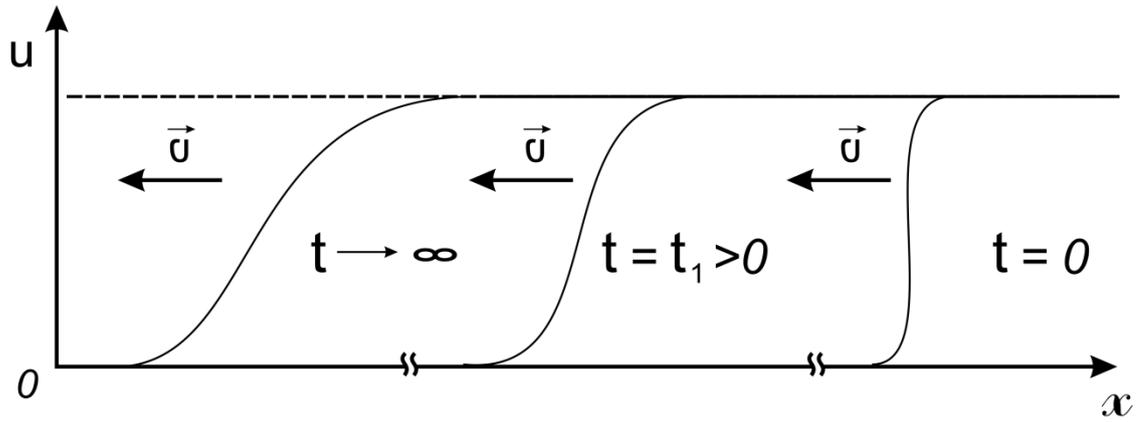


Рисунок 1 – Области плотностей

Чтобы определить данный стационарный профиль нелинейной волны и ее скорость распространения, перейдем в движущуюся систему отсчета и будем находить решение уравнения (1.1) в форме простой бегущей волны

$$u(x, t) = \Theta(x + vt), \quad v = \text{const}. \quad (1.3)$$

Тогда для функции $\theta = \theta(\xi)$, зависящей от переменного $\xi = x + vt$, после подстановки (1.3) в (1.1)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dt} = v \frac{d\theta}{d\xi}; \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{d\theta}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{d\theta}{d\xi}. \quad (1.5)$$

Из (1.5) следует, что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{d^2 \theta}{d\xi^2}, \quad (1.6)$$

получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$v \frac{d\theta}{d\xi} = \frac{d^2 \theta}{d\xi^2} + k\theta(1 - \theta), \quad 0 \leq \theta \leq 1. \quad (1.7)$$

Это уравнение следует решать при выполнении физически очевидных условий

$$\theta \rightarrow 0, \quad \frac{d\theta}{d\xi} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \xi \rightarrow -\infty; \quad \frac{d\theta}{d\xi} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \xi \rightarrow +\infty, \quad (1.8)$$

вытекающих из постановки задачи.

Задача (1.7), (1.8) содержит бесчисленное множество решений с непрерывным скоростей v , ограниченным снизу значением $v_* = 2\sqrt{k}$.

С целью подтверждения данного утверждения необходимо понизить порядок уравнения с помощью подстановки

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{d\xi} = p(\xi), \\ \frac{dp}{d\xi} = vp - k\theta(1 - \theta). \end{cases} \quad (1.9)$$

Учитывая, что

$$\frac{dp}{d\xi} = \frac{dp}{d\theta} \frac{d\theta}{d\xi} = p \frac{dp}{d\xi},$$

второе уравнение системы (1.9) можно записать в виде

$$p \frac{dp}{d\xi} = vp - k\theta(1 - \theta), \quad (1.10)$$

удобном для исследования на фазовой плоскости (θ, p) .

Таким образом, с учетом условий (1.8), решению уравнения Колмогорова-Петровского-Пискунова типа (1.3) соответствует траектория $p = p(\theta)$ на фазовой плоскости, которая является интегральной кривой уравнения

$$\frac{dp}{d\theta} = \frac{vp - k\theta(1 - \theta)}{p}. \quad (1.11)$$

Находим особые точки этого уравнения, приравняв числитель и знаменатель к нулю. Следовательно, особые точки этого уравнения $(0, 0)$ и $(1, 0)$. При этом интегральная кривая должна лежать в полосе $0 \leq \theta \leq 1$ и не пересекать ось абсцисс вне концевых точек (рисунок 2).

Покажем, что такая интегральная кривая может существовать только при $v > v_* = 2\sqrt{k}$. Действительно, с одной стороны, вблизи точки $(0, 0)$, т. е. для $\theta \ll 1$, искомую интегральную кривую можно аппроксимировать уравнением прямой $p = a\theta$, где $a = const > 0$. С другой стороны, при $\theta \ll 1$ уравнение (1.11) можно линеаризовать, если пренебречь квадратичными по θ членами по сравнению с линейными. Тогда оно примет вид

$$\frac{dp}{d\theta} \approx \frac{vp - k\theta}{p}.$$

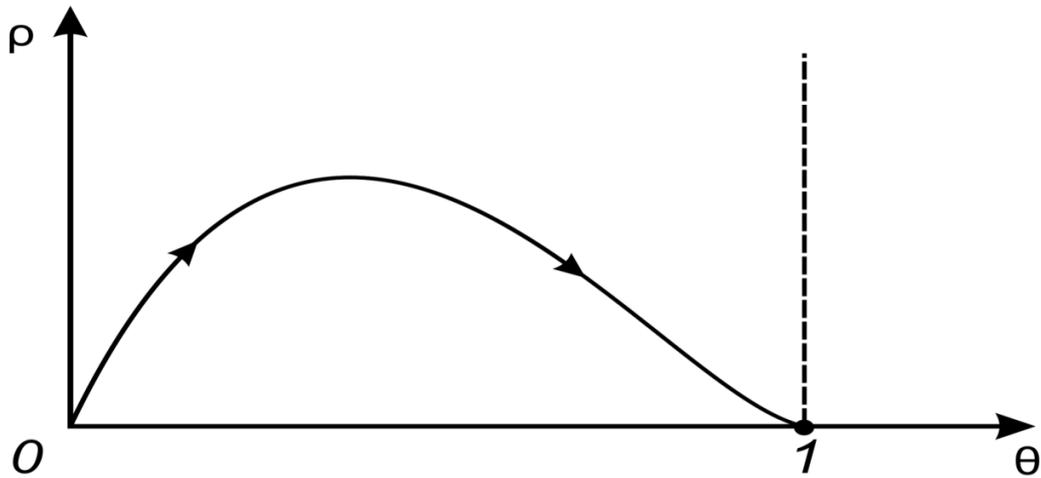


Рисунок 2 – Интегральная кривая

Подставляя $p = a\theta$, получаем для a квадратное уравнение

$$a^2 - va + k = 0.$$

Отсюда

$$a = \frac{v}{2} \pm \sqrt{\frac{v^2}{4} - k}.$$

Следовательно, условие существования вещественного a имеет вид

$$v \geq v_* = 2\sqrt{k}. \quad (1.12)$$

К этому же заключению можно прийти, исследуя особую точку $(0, 0)$ уравнения при различных значениях параметров задачи v и k . Для этого линеаризуем систему (1.9) вблизи точки $(0, 0)$. В таком случае она примет вид линейной системы с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{d\xi} = p; \\ \frac{dp}{d\xi} = -k\theta + vp. \end{cases} \quad (1.13)$$

Определитель матрицы коэффициентов такой системы

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -k & v \end{vmatrix} = k \neq 0. \quad (1.14)$$

Находим собственные значения этой матрицы из условия

$$\begin{vmatrix} a_1 - \lambda & b_1 \\ a_2 & b_2 - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -k & v - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (1.15)$$

и получаем характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - v\lambda + k = 0. \quad (1.16)$$

Находим собственные значения уравнения (1.16)

$$\lambda_{1,2} = \frac{v}{2} \pm \sqrt{\frac{v^2}{4} - k}. \quad (1.17)$$

Докажем теперь, что для интегральной кривой рассматриваемого вида при $v \geq 2\sqrt{k}$ выполняются условия (1.8). Для данной кривой справедливы следующие асимптотики:

$$p = a\theta + O(\theta) \text{ при } \theta \rightarrow 0; \quad p = c(1 - \theta) + O(1 - \theta) \text{ при } \theta \rightarrow 1, \quad (1.18)$$

где a и c – положительные константы.

Вспомним, что $p = d\theta / d\xi$ или $d\xi = d\theta / p(\theta)$. Проинтегрируем соотношение и получим

$$\xi - \xi_0 = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{p(\theta)}, \quad 0 < \theta_0 < 1.$$

Отсюда, с учетом уравнения (1.10) следует, что $\xi \rightarrow -\infty$ при $\theta \rightarrow 0$ и $\xi \rightarrow +\infty$ при $\theta \rightarrow 1$.

Волна, распространяющаяся с минимальной скоростью $v = v_* = 2\sqrt{k}$, устойчива. Это свойство состоит в том, что любой начальный профиль $u(x,0) = f(x)$, где $0 \leq f(x) \leq 1$, $f(+\infty) = 1$, $f(-\infty) = 0$, а $f'(x) \geq 0$, по истечении довольно значительного промежутка времени всегда приобретает форму стационарного профиля, движущегося со скоростью $v_* = 2\sqrt{k}$. Форму этого устойчивого стационарного профиля определяет из решения уравнения (1.7) с $v = v_*$, которое удовлетворяет условиям (1.8). Задача при $v = v_*$ решается

исключительно численными методами. Аналитического решения данной задачи нет.

Таким образом, для оценки скорости распространения нелинейных волн в процессах, описываемых уравнением (1.1), необходимо использовать значение $v_* = 2\sqrt{k}$. Примерами таких волн могут служить волны распространения популяции растений и животных или волны эпидемий.

Стоит заметить, что при одном значении v , близком к v_* , когда $v = 5\sqrt{\frac{k}{6}} \approx 1,02v_*$, точное решение уравнения (1.7), удовлетворяющее условиям (1.8), может быть найдено в аналитическом виде.

Введем в рассмотрение функцию

$$w(\xi; \alpha, \nu) = \left(\frac{e^{\alpha\xi}}{1 + e^{\alpha\xi}} \right)^\nu \equiv (1 + e^{-\alpha\xi})^{-\nu}, \quad -\infty < \xi < +\infty,$$

которая при $\alpha > 0$ и $\nu > 0$ удовлетворяет условиям (1.8).

Дифференцируем

$$\begin{aligned} \frac{dw}{d\xi} &= -\nu(1 + e^{-\alpha\xi})^{-\nu-1} e^{-\alpha\xi} = -\alpha\nu(1 + e^{-\alpha\xi})^{-\nu} e^{-\alpha\xi} (1 + e^{-\alpha\xi})^{-1} = \\ &= \alpha\nu w e^{-\alpha\xi} (1 + e^{-\alpha\xi})^{-1}, \end{aligned}$$

отсюда $w^\nu = (1 + e^{-\alpha\xi})$, подставляем в дифференцированное уравнение и находим

$$\frac{dw}{d\xi} = -\alpha\nu w (w^{\frac{1}{\nu}} - 1).$$

Аналогично найдём $\frac{d^2w}{d\xi^2}$

$$\frac{d^2w}{d\xi^2} = \alpha^2\nu(\nu + 1)w \left(w^{\frac{1}{\nu}} - 1 \right) \left(w^{\frac{1}{\nu}} - \frac{\nu}{\nu + 1} \right).$$

Поэтому при действии на функцию w оператором

$$\hat{L} = \nu \frac{d}{d\xi} - \frac{d^2}{d\xi^2},$$

получим

$$\hat{L}w = -\alpha^2 \nu(\nu+1)w \left(w^{\frac{1}{\nu}} - 1 \right) \left(w^{\frac{1}{\nu}} + A \right),$$

где $A = \frac{\nu}{\alpha(\nu+1)} - \frac{\nu}{\nu+1}$.

Пусть $A = 1$, т. е. $\nu = (2\nu+1)\alpha$. Тогда

$$\hat{L}w = \alpha^2 \nu(\nu+1)w \left(1 - w^{\frac{2}{\nu}} \right).$$

Возьмем частный случай, когда $\nu = 2$ и $\nu = 5\alpha$

$$\hat{L}w = 6\alpha^2 w(1-w).$$

Отсюда следует, что функция $\theta(\xi) = w(\xi; \sqrt{k/6}, 2)$ является решением задачи (1.7), (1.8) при $\nu = 5\sqrt{k/6}$.

Если $A = 0$, т. е. $\nu = \alpha\nu$, то

$$\hat{L}w = \alpha^2 \nu(\nu+1)w^{\frac{1+\nu}{\nu}} \left(1 - w^{\frac{1}{\nu}} \right).$$

Следовательно, в частном случае, функция

$$u(x, t) = w \left(\xi; \sqrt{\frac{k}{2}}, 1 \right) \equiv \left(1 + e^{-\sqrt{\frac{k}{2}}\xi} \right)^{-1},$$

где $\xi = x + \sqrt{\frac{k}{2}}t$, является решением уравнения Зельдовича

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + ku^2(1-u), \quad k = \text{const.}$$

Данное решение представляет собой бегущую волну со стационарным профилем, распространяющуюся с постоянной скоростью $\nu = \sqrt{k/2}$. При этом вследст-

вие объемной генерации возмущений область, где $u > 0$, расширяется с течением времени [16, стр. 302].

С помощью решений вида (1.3) уравнений (1.1) либо (1.2) можно находить и исследовать асимптотические решения других нелинейных уравнений математической физики.

1.2 Уравнение Бюргера

При исследовании процесса распространения плоских волн различной природы выберем закон сохранения, записанный в универсальной форме, в качестве исходного соотношения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0. \quad (1.19)$$

где $u(x, t)$ – некоторая характеристика состояния среды;

q – плотность потока, связанная с u и u_x соотношением $q = q(u, u_x)$.

Рассмотрим случай линейного конвективного механизма переноса $q = au$, где $a = const$. При этом уравнение (1.19) приводится к линейному дифференциальному уравнению в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (1.20)$$

решение которого

$$u(x, t) = f(x - at), \quad (1.22)$$

описывает волну неизменного профиля, распространяющуюся со скоростью a в положительном направлении оси Ox .

Если же $q = q(u)$, то мы переходим в область нелинейных волн, считая

$$q = au + \frac{1}{2}bu^2, \quad a, b = const. \quad (1.22)$$

Подставим выражение (1.22) в (1.19), получим обобщенное уравнение (1.20), представленное в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} + bu \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (1.23)$$

Переходим к новым переменным $x' = x - at$ и $t' = bt$, преобразуем производные

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial t'} \frac{\partial t}{\partial t'} = -a \frac{\partial u}{\partial x'} + b \frac{\partial u}{\partial t'},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x'} \frac{\partial x}{\partial x'} = \frac{\partial u}{\partial x'},$$

опустим штрихи и получим нелинейное уравнение Римана

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (1.24)$$

Уравнение (1.24) имеет решение, по форме аналогичное решению (1.21), если константу a в нем формально заменить на u . Такое решение

$$u(x, t) = f(x - ut), \quad (1.25)$$

описывает эволюцию нелинейной волны, профиль которой в начальный момент времени задан в виде $u(x, 0) = f(x)$.

Проведем прямые вычисления производных, для того, чтобы доказать, что формула (1.25) определяет решение нелинейного уравнения (1.24)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left(-u - t \frac{\partial u}{\partial t} \right) f'; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \left(1 - t \frac{\partial u}{\partial x} \right) f'.$$

Поэтому

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -uf' - t \frac{\partial u}{\partial t} f' + uf' - ut \frac{\partial u}{\partial x} f' = -tf' \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right).$$

Отсюда

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) (1 + tf') = 0$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Формула (1.25) представляет собой неявное выражение для u . Анализ данной формулы дает понять, что волна меняет форму при распространении. Действительно, как следует из (1.25), точки профиля волны, имеющие большие значения ординаты, движутся с большими скоростями (рисунок 3, а). Поэтому «вершина» волны начинает обгонять остальные участки. В результате профиль нелинейной волны при распространении искажается таким образом, что кру-

тizza правого «склона» возрастает (рисунок 3, б). В конечном итоге, наступает такой период времени, когда происходит так называемое «опрокидывание» волны. После данного этапа времени профиль волны, описываемый формулой (1.25), становится многозначным, когда некоторым значениям координаты соответствуют три значения функции u (рисунок 3, в).

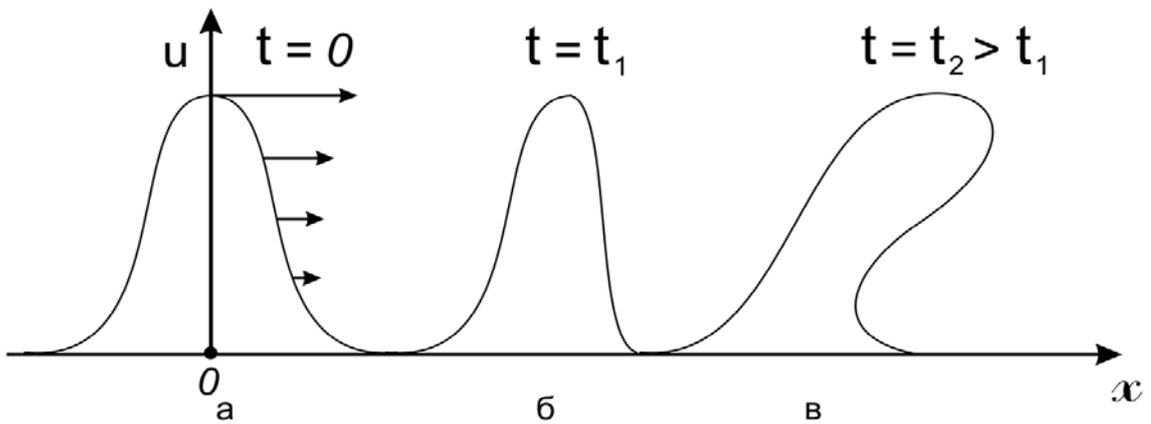


Рисунок 3 – Профиль нелинейной волны

Такая многозначность функции u в большинстве физических моделей не может быть обоснована. Придадим решению физический смысл. Для этого заменим многозначный профиль нелинейной волны на профиль с разрывом (рисунок 4), определяя его положение $x = s(t)$ так, чтобы разрыв отсекал области с равными площадями (заштрихованы на рисунке).

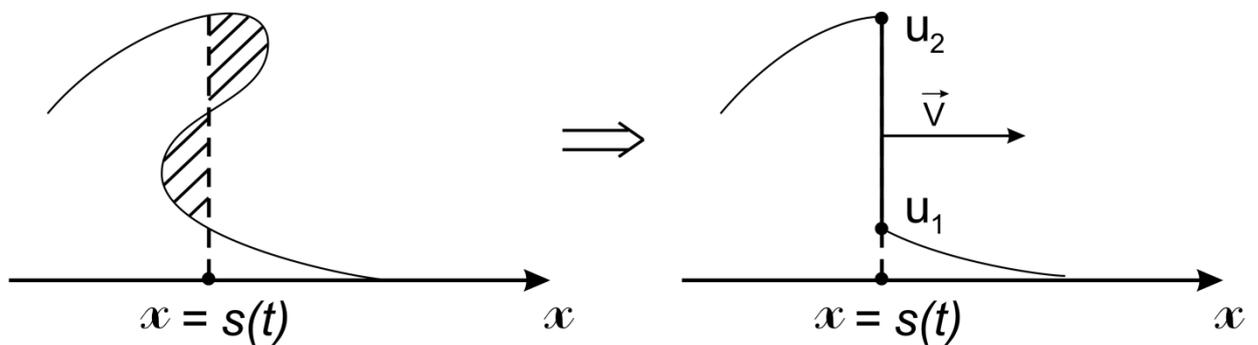


Рисунок 4 – Профиль нелинейной волны с разрывом

Это решение моделирует ударную волну, распространяющуюся в сплошной среде, если подимы понимаем, к примеру, плотность среды. При переходе через фронт ударной волны в направлении его движения плотность среды изменяется скачком от u_2 до u_1 . Здесь и далее с учетом направления движения разрыва будем обозначать индексом «1» величины до точки разрыва, а индексом «2» – после точки разрыва. Будем считать, что вне точки разрыва $x = s(t)$ функция $u(x, t)$ непрерывна вместе со своими первыми производными.

Проинтегрируем уравнение (1.21) по x от точки x_2 до точки x_1 ($x_2 < x_1$).

Получим

$$\frac{d}{dt} \int_{x_2}^{x_1} u(x, t) dx + \frac{1}{2} [u^2(x_1, t) - u^2(x_2, t)] = 0. \quad (1.26)$$

Если точка разрыва $x = s(t)$ попадает в интервал (x_2, x_1) то уравнение (1.26) следует записать, выделив точку разрыва. В этом случае

$$\frac{d}{dt} \left[\int_{x_2}^{s(t)} u(x, t) dx + \int_{s(t)}^{x_1} u(x, t) dx \right] = \frac{1}{2} [u^2(x_2, t) - u^2(x_1, t)] \quad (1.27)$$

Дифференцируем интегралы в (1.27), получаем

$$u(s^-, t)V + \int_{x_2}^{s(t)} \frac{\partial u}{\partial t} dx - u(s^+, t)V + \int_{s(t)}^{x_1} \frac{\partial u}{\partial t} dx = \frac{1}{2} [u^2(x_2, t) - u^2(x_1, t)] \quad (1.28)$$

где $u(s^-, t) = u_2$ и $u(s^+, t) = u_1$ – предельные значения функции u слева и справа от точки разрыва; $V = ds/dt$ – скорость распространения взрыва.

Устремим теперь точки x_1 и x_2 слева и справа к точке разрыва $x = s(t)$. Поскольку производная $\partial u / \partial t$ ограничена в каждом из интервалов непрерывности, то при $x_2 \rightarrow s^-$ и $x_1 \rightarrow s^+$ интегралы в (1.28) обратятся в нуль. Тогда из

уравнения (1.28) получим $(u_2 - u_1)V = \frac{1}{2}(u_2^2 - u_1^2)$, или

$$V = \frac{1}{2}(u_2 + u_1). \quad (1.29)$$

Формула (1.29) определяет скорость распространения разрыва в некоторых относительных единицах измерения через значения плотности u слева и справа от точки разрыва.

Распространяющийся с конечной скоростью разрыв можно рассматривать как фронт ударной волны. Самым простым решением уравнения (1.24) является ударная волна сжатия. Она имеет прямоугольную форму, чем напоминает ступеньку (рисунок 5)

$$u(x, t) = \begin{cases} u_1 = \text{const}, & x > Vt; \\ u_2 = \text{const}, & x < Vt, \end{cases} \quad (1.30)$$

фронт которой распространяется с постоянной скоростью $V = (u_1 + u_2) / 2$.

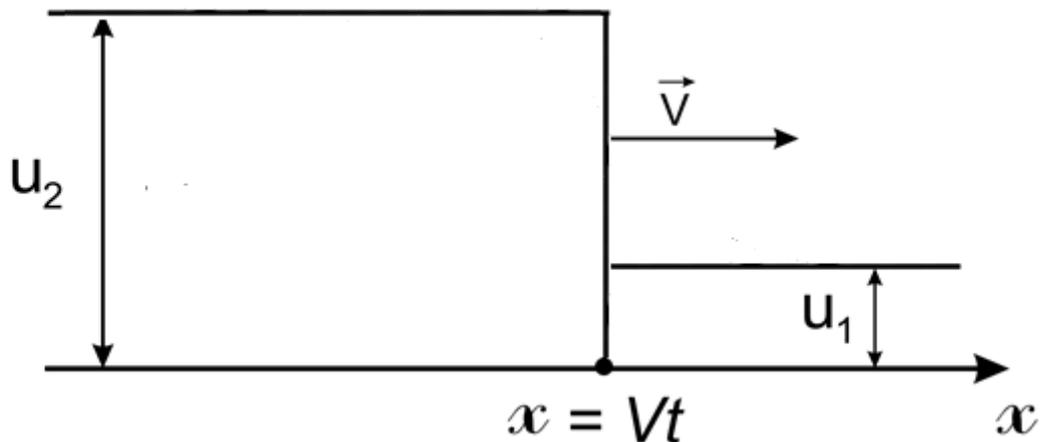


Рисунок 5 – Ударная волна сжатия

В случае если в механизме переноса кроме конвективной составляющей учесть и диффузионную составляющую плотности потока

$q_d = -c \frac{\partial u}{\partial x}$, $c = \text{const} > 0$, т. е. положить в законе сохранения (1.19)

$$q = au + \frac{1}{2}bu^2 - c \frac{\partial u}{\partial x},$$

то после несложных преобразований получим нелинейное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad v = \text{const} > 0, \quad (1.31)$$

называемое уравнением Бюргерса.

При моделировании ударных волн, распространяющихся в сплошной среде, диффузионный член в правой части уравнения (1.31) появляется, если учесть эффекты вязкости при движении среды. Поэтому, исследуя свойства решения уравнения Бюргерса (1.31), мы можем качественно изучать влияние вязкости среды на структуру ударной волны.

Найдем решение нелинейного уравнения Бюргерса (1.31) в виде бегущей волны с неизменным профилем, т.е. такое решение $u = u(\xi)$, которое зависит от переменного $\xi = x - Vt$, содержащего некоторую постоянную V имеющую смысл скорости распространения волны.

Выполним следующие условия

$$\begin{aligned} u &\rightarrow u_2, \quad \frac{du}{d\xi} \rightarrow 0 \text{ при } \xi \rightarrow -\infty; \\ u &\rightarrow u_1, \quad \frac{du}{d\xi} \rightarrow 0 \text{ при } \xi \rightarrow +\infty. \end{aligned} \tag{1.32}$$

Эта постановка задачи дает возможность исследовать структуру ударной волны сжатия (1.30) вблизи ее фронта с учетом влияния диффузионной вязкости. При этом следует ожидать, что наличие диффузионного слагаемого в уравнении Бюргерса приведет к сглаживанию разрыва, и только при $\nu \rightarrow 0$ решение будет трансформироваться к виду (1.30) с крутым фронтом.

Профиль стационарной волны $u(\xi)$ соответствует уравнению

$$-V \frac{du}{d\xi} + u \frac{du}{d\xi} = \nu \frac{d^2u}{d\xi^2}. \tag{1.33}$$

Интегрируем (1.33) и получаем

$$-Vu + \frac{1}{2}u^2 + C = \nu \frac{du}{d\xi}, \tag{1.34}$$

где $C = const$.

Выполняя условия (1.32), получаем

$$\begin{aligned}
-Vu_1 + \frac{1}{2}u_1^2 + C &= 0; \\
-Vu_2 + \frac{1}{2}u_2^2 + C &= 0.
\end{aligned}$$

Отсюда находим

$$V = \frac{1}{2}(u_2 + u_1); C = \frac{1}{2}u_2u_1. \quad (1.35)$$

Из выражений (1.29) и (1.35) следует, что вязкость среды, не изменяет стационарной скорости распространения ударной волны сжатия.

С учетом формул (1.35) запишем теперь уравнение (1.34) в виде

$$(u - u_1)(u - u_2) = 2\nu \frac{du}{d\xi}.$$

Разделяем переменные и получаем

$$\frac{d\xi}{2\nu} = \frac{du}{(u - u_1)(u - u_2)}. \quad (1.36)$$

Разложим на простые дроби

$$\frac{1}{(u - u_1)(u - u_2)} = \frac{1}{u_2 - u_1} \left[\frac{1}{u - u_1} + \frac{1}{u_2 - u} \right],$$

проинтегрируем уравнение (1.36) и запишем его в виде

$$\xi = \frac{2\nu}{u_2 - u_1} \ln \frac{u_2 - u}{u - u_1}, \quad u_1 < u < u_2. \quad (1.37)$$

Решим уравнение (1.37) относительно u и получим

$$u = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{1 + \exp\left(\frac{u_2 - u_1}{2\nu} \xi\right)}, \quad \xi = x - Vt. \quad (1.38)$$

Полученное соотношение является решением уравнения Бюргера. Оно описывает структуру ударной волны с шириной переходной области $l = \frac{2\nu}{u_2 - u_1}$ (рисунк 6). При $\nu \rightarrow 0$ ширина переходной области стремится к нулю и стационарный профиль волны (1.38) переходит в ступенчатый профиль (1.30).

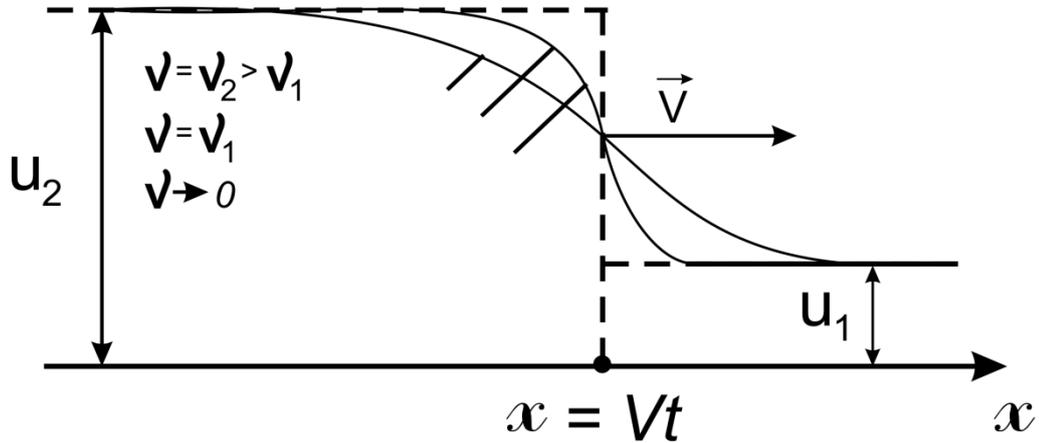


Рисунок 6 – Структура ударной волны в переходной области

Решение (1.38) можно записать также в виде

$$u(x, t) = V - Ath \left[\frac{A}{2\nu} (x - Vt) \right], \quad (1.39)$$

где $V = \frac{u_2 + u_1}{2}$; $A = \frac{u_2 - u_1}{2}$.

Важный результат для уравнения Бюргерса был получен Коулом и Хопфом, которые показали, что нелинейное уравнение Бюргерса (1.31) с помощью

замены $u = -\frac{2\nu}{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \equiv -2\nu \frac{\partial}{\partial x} \ln \varphi$ сводится к линейному уравнению теплопро-

водности

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\nu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}. \quad (1.40)$$

Действительно, если в уравнении (1.40) перейти от функции φ к функции $\psi = -2\nu \ln \varphi$, то с учетом преобразований

$$\varphi = e^{-\frac{\psi}{2\nu}}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{1}{2\nu} e^{-\frac{\psi}{2\nu}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2};$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{4\nu^2} e^{-\frac{\psi}{2\nu}} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2\nu} e^{-\frac{\psi}{2\nu}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}.$$

Из уравнения теплопроводности (1.40) получим уравнение для функции ψ :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 = \nu \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}.$$

Продифференцировав это уравнение по x , запишем его в виде

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right).$$

Обозначим производную $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ через u , для функции

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial x} = -2\nu \frac{\partial}{\partial x} \ln \varphi$$

получим уравнение Бюргера

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Таким образом, с помощью замены Коула-Хопфа каждое решение $\varphi(x, t)$ линейного уравнения теплопроводности (1.40) порождает решение $u(x, t)$ нелинейного уравнения Бюргера (1.31).

Если начальное условие для уравнения теплопроводности (1.40) выбрать в форме

$$\varphi(x, 0) = \Phi(x) = \exp \left[-\frac{1}{2\nu} \int_0^x F(\xi) d\xi \right], \quad (1.41)$$

то для уравнения Бюргера (1.31) начальное условие будет иметь вид

$$u(x, 0) = F(x), \quad -\infty < x < +\infty. \quad (1.42)$$

Решение уравнения теплопроводности (1.40) с начальным условием (1.41) может быть записано в форме интеграла Пуассона

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\eta) \exp \left[-\frac{(x-\eta)^2}{4\nu t} \right] d\eta. \quad (1.43)$$

После подстановки $\Phi(\eta)$ из уравнения (1.41) в уравнение (1.43) получаем

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{1}{2\nu} \int_0^\eta F(\xi) d\xi - \frac{(x-\eta)^2}{4\nu t}\right] d\eta,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{(-1)}{\sqrt{4\pi\nu t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-\eta)}{2\nu t} \exp\left[-\frac{1}{2\nu} \int_0^\eta F(\xi) d\xi - \frac{(x-\eta)^2}{4\nu t}\right] d\eta.$$

Тогда в силу соотношения Коула-Хопса для $u(x, t)$ имеем формулу

$$u(x, t) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-\eta}{t} e^{-B/(2\nu)} d\eta}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-B/(2\nu)} d\eta}, \quad (1.44)$$

где $B(\eta, x, t) = \int_0^\eta F(\xi) d\xi + \frac{(x-\eta)^2}{2t}$.

Таким образом, с помощью замены Коула-Хопфа найдено в виде (1.44) нестационарное решение нелинейного уравнения Бюргера (1.31), удовлетворяющее при $t=0$ начальному условию (1.42). Данное решение описывает эволюцию профиля нестационарной волны, распространение которой обусловлено нелинейным механизмом конвективного переноса и диффузией.

2 АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ВОЛНОВЫХ ЗАДАЧ

2.1 Односолитонные решения уравнения Кортевега-де Фриза

Процесс распространения одномерных волн описывается линейным дифференциальным уравнением в частных производных по пространственной переменной x и времени t , имеющим вид

$$\hat{L}u = 0, \quad (2.1)$$

где \hat{L} – линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами; $u(x, t)$ – функция, описывающая некоторую характеристику волны.

Найдем решение уравнения (2.1) в форме монохроматической волны

$$u(x, t) = \alpha \exp[-i(\omega t - kx)]. \quad (2.2)$$

Подставим (2.2) в (2.1)

$$D(\omega, k) = 0,$$

где ω – частота, k – волновое число (дисперсионное соотношение).

Если $\frac{d^2\omega}{dk^2} \neq 0$, то фазовая скорость волны $v_\phi = \omega/k$ не совпадает с группо-

вой $v_g = d\omega/dk$. Такую среду называют диспергирующей средой. При наличии дисперсии монохроматические волны разных частот распространяются с разными скоростями. Так как любую сложную по форме немонахроматическую волну с произвольным профилем возможно представить с помощью разложения в ряд либо интеграла Фурье как сумму монохроматических волн, то в диспергирующей среде, где эти монохроматические составляющие распространяются с разными скоростями, их сумма в разные моменты времени будет давать разнообразные профили немонахроматической волны. Дисперсия, как и нелинейность, приводит к искажению профиля распространяющейся волны [16, с. 313].

Простейшее дисперсионное соотношение $\omega = v_0 k$ соответствует линейному дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad v_0 = \text{const}, \quad (2.3)$$

решения которого $u(x, t) = f(x - v_0 t)$ для различных f описывают распространение недиспергирующих волн.

Более сложное дисперсионное соотношение $w = v_0 k - \beta k^3$ соответствует линейному уравнению с дисперсией

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v_0 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad v_0 = \text{const}; \quad \beta = \text{const}. \quad (2.4)$$

Одновременный учет дисперсии и нелинейности приводит к уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad (2.5)$$

которое называется уравнением Кортевега-де Фриза (или КдФ).

Впервые уравнение КдФ было получено Жозефом Буссинеском в 1877 г., но подробный анализ был проведён уже голландским ученым Кортевегом и его учеником де Фризом в 1895 г. при описании распространения длинных волн на воде в прямоугольном канале со свободной поверхностью. В такой гидродинамической модели u – смещение поверхности жидкости от равновесного уровня.

В настоящее время уравнение КдФ стало универсальным уравнением математической физики при моделировании волновых процессов различной физической природы с учетом дисперсии и слабой нелинейности.

Приступая к поиску волновых решений уравнения КдФ, возможно ожидать, что искажение профиля волны вследствие конвективной нелинейности может быть скомпенсировано изменением профиля распространяющейся волны, вызванным эффектами дисперсии. Предполагая возможность такой компенсации, будем находить решение уравнения КдФ в виде бегущей волны со стационарным профилем [16, с. 315]. Для этого произведем замену переменного $\xi = x - vt$ и преобразуем уравнение (2.5) в уравнение функции $u = u(\xi)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{du}{d\xi}; \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -v \frac{du}{d\xi}; \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \frac{d^3 u}{d\xi^3}; \\ -v \frac{du}{d\xi} + u \frac{du}{d\xi} + \beta \frac{d^3 u}{d\xi^3} &= 0, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где $v = const$; $\beta = const$.

Понизим порядок уравнения и проинтегрируем его. В результате интегрирования получим $-vu + \frac{1}{2}u^2 + \beta \frac{d^2 u}{d\xi^2} = a$, где $a = const$. Умножая это уравнение на $\frac{du}{d\xi}$

$$-vu \frac{du}{d\xi} + \frac{1}{2}u^2 \frac{du}{d\xi} + \beta \frac{d^2 u}{d\xi^2} \frac{du}{d\xi} = a,$$

и интегрируем полученное соотношение

$$-\frac{v}{2}u^2 + \frac{1}{6}u^3 + \frac{\beta}{2} \left(\frac{du}{d\xi} \right)^2 = au + b, \quad b = const. \quad (2.7)$$

Уравнение (2.7) умножим на 6 и приведем к виду

$$\left(\frac{du}{d\xi} \right)^2 3\beta = -u^3 + 3vu^2 + 6au + 6b.$$

Обозначим $F(u) = -u^3 + 3vu^2 + 6au + 6b$ и приведем к следующей форме

$$\left(\frac{du}{d\xi} \right)^2 3\beta = F(u), \quad (2.8)$$

где $F(u)$ – кубический многочлен, который можно записать в виде

$F(u) = (u_1 - u)(u_2 - u)(u_3 - u)$, обозначив через u_1, u_2, u_3 корни уравнения

$F(u) = 0$. При этом

$$v = \frac{u_1 + u_2 + u_3}{3}; \quad a = -\frac{u_1 u_2 + u_2 u_3 + u_3 u_1}{6}; \quad b = \frac{u_1 u_2 u_3}{6}.$$

Полагая, что все три корня действительны, причем $u_3 \leq u_2 \leq u_1$, запишем уравнение (2.8) в виде

$$3\beta\left(\frac{du}{d\xi}\right)^2 = (u_1 - u)(u_2 - u)(u_3 - u). \quad (2.9)$$

Поскольку выражение в левой части (2.9) положительно при $\beta > 0$, то функция u может изменяться в интервале $u_2 \leq u \leq u_1$.

Предположим сначала, что $u_2 = u_3 = 0$, а $u_1 = 3v > 0$. В этом случае из (2.9) следует уравнение $3\beta\left(\frac{du}{d\xi}\right)^2 = u^2(u_1 - u)$, из которого, разделяя переменные

и интегрируя, находим $\int \frac{du}{u\sqrt{u_1 - u}} = \frac{\xi + \xi_0}{\sqrt{3\beta}}$. Вычисляя квадратуру, получаем

$$-\frac{2}{\sqrt{u_1}} \operatorname{Arth} \sqrt{1 - \frac{u}{u_1}} = \frac{\xi + \xi_0}{\sqrt{3\beta}}. \quad (2.10)$$

Константу ξ_0 положим равной нулю. В этом случае точка $\xi = 0$ будет соответствовать максимуму функции u , так как $u(0) = u_1$ при $\xi = 0$. Тогда из уравнения (2.10) находим $1 - \frac{u}{u_1} = th^2\left(-\frac{\xi}{2} \sqrt{\frac{u_1}{3\beta}}\right)$ или

$$u(\xi) = u_1 ch^{-2}\left(\xi \sqrt{\frac{u_1}{12\beta}}\right). \quad (2.11)$$

Возвращаясь к переменным x, t , запишем найденное решение уравнения КдФ в виде нелинейной волны неизменной формы

$$u(x, t) = Ach^{-2}\left(\frac{x - vt}{\Delta}\right), \quad (2.12)$$

где $A = u_1$ – амплитуда волны; $v = A/3$ – скорость волны; $\Delta = \sqrt{12\beta/A}$ – параметр, характеризующий эффективный размер области возмущения, где $u > 0,5A$.

Такое решение (2.12) уравнения КдФ называют уединенной волной, или солитоном. Профиль уединенной волны изображен на рисунке 7.

Подобное возмущение колоколообразной формы, не изменяющейся со временем, распространяется в виде солитона с конечной скоростью $v = A/3$,

значение которой зависит от амплитуды солитона. Чем больше амплитуда солитона, тем с большей скоростью он движется. Зависимость скорости распространения от амплитуды характерна для всех нелинейных волн, в том числе и для нелинейной уединенной волны (2.12). Эффективная ширина Δ солитона уменьшается с ростом его амплитуды [13, с. 528].

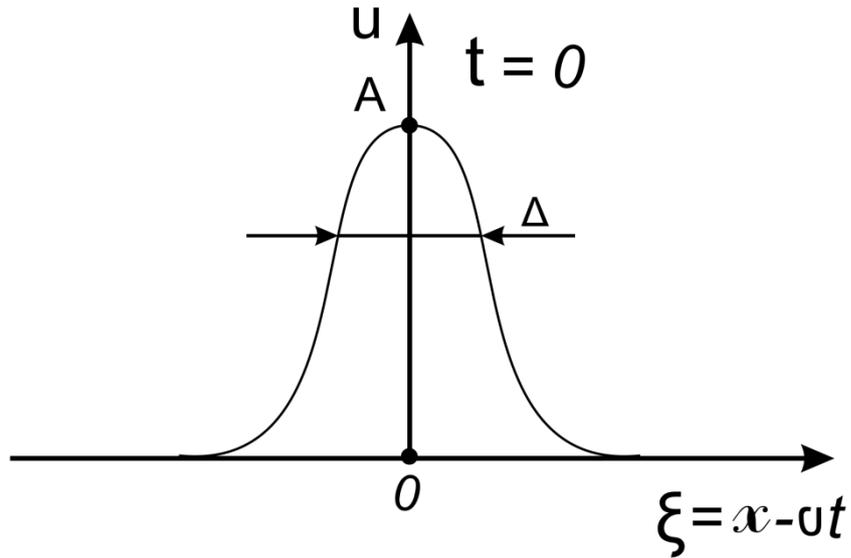


Рисунок 7 – Профиль уединенной волны

Учитывая, что уравнение (2.6) инвариантно относительно замены $u \rightarrow u + u_0$, $v \rightarrow v + u_0$, $u_0 = const$, можно записать также решение уравнения КдФ в виде уединенной волны, бегущей по ненулевому фону:

$$u(x, t) = u_0 + Ach^{-2} \left\{ \sqrt{\frac{A}{12\beta}} \left[x - \left(u_0 + \frac{A}{3} \right) t \right] \right\}. \quad (2.13)$$

В более общем случае, когда все три корня уравнения $F(u) = 0$ отличны от нуля, после интегрирования уравнения (2.9) получаем

$$u(\xi) = u_1 + (u_1 - u_2) cn^2 \left(\xi \sqrt{\frac{u_1 - u_3}{12\beta}}, s \right), \quad (2.14)$$

где параметр s определяется выражением $s^2 = \frac{u_1 - u_2}{u_1 - u_3}$.

Специальную функцию $w = cn(z, s)$ называют эллиптической функцией Якоби или эллиптическим косинусом. Эта функция определяется неявным образом с помощью эллиптического интеграла первого рода $z = \int_0^w \frac{d\varphi}{\sqrt{1-s^2 \sin^2 \varphi}}$.

Решение (2.14) называют кноидальной волной. Эта волна является пространственно периодической структурой (рисунок 8), и ее период по пространственному переменному, т.е. длина волны $\lambda = 4K(s) \sqrt{\frac{3\beta}{u_1 - u_3}}$, где $K(s)$ – пол-

ный эллиптический интеграл первого рода, $K(s) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-s^2 \sin^2 \varphi}}$.

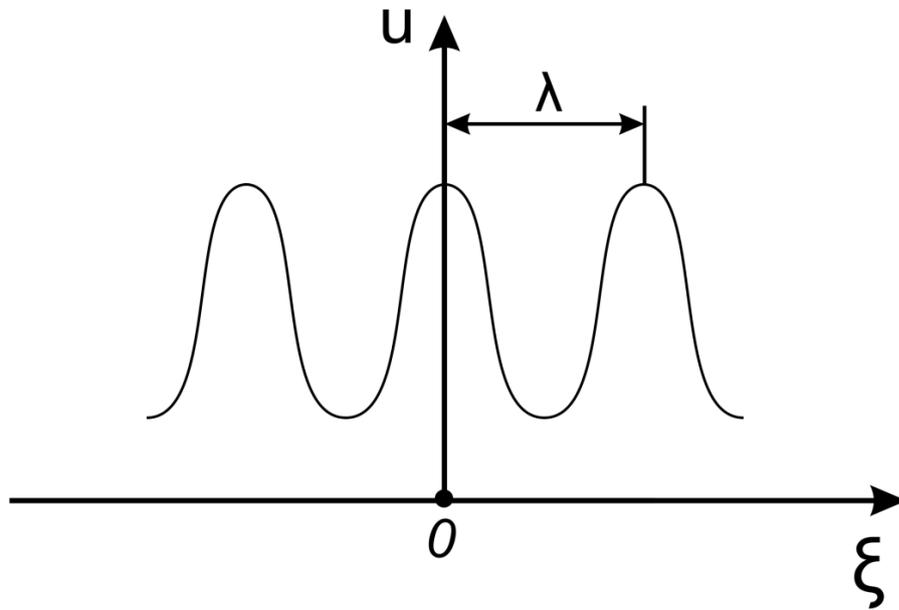


Рисунок 8 – Кноидальная волна

В предельном случае, когда u_3 и u_2 стремятся к нулю, параметр s стремится к единице, а так как при $s \rightarrow 1$.

$$K(s) \approx \frac{1}{2} \ln \frac{16}{1-s^2}, \text{ а } cn(z, s) \approx \frac{1}{chz},$$

то расстояние между соседними максимумами кноидальной волны неограниченно возрастает $\lambda \rightarrow \infty$ и каждый из них превращается в одиночный солитон.

Также, путем простых масштабных преобразований координаты, времени или искомой можно записать уравнение Кортевега-де Фриза в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sigma u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \quad (2.15)$$

В литературе используются различные нормировки, отвечающие значениям $\sigma = 1$, $\sigma = 6$ и $\sigma = -6$.

Возьмем значение $\sigma = -6$ и решим аналог уравнения Кортевега-де Фриза. Запишем уравнение в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \quad (2.16)$$

Произведем замену переменного $\xi = x - vt$ и преобразуем уравнение (2.16) в уравнение функции $u = u(\xi)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{du}{d\xi}; \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -v \frac{du}{d\xi}; \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \frac{d^3 u}{d\xi^3}; \\ -v \frac{du}{d\xi} - 6u \frac{du}{d\xi} + \frac{d^3 u}{d\xi^3} &= 0. \end{aligned} \quad (2.17)$$

где $v = const$; $\beta = const$.

Интегрируя выражение, получаем

$$-vu - 3u^2 + \frac{d^2 u}{d\xi} = a, \quad (2.18)$$

где $a = const$. Умножим уравнение на $du / d\xi$

$$-vu \frac{du}{d\xi} - 3u^2 \frac{du}{d\xi} + \frac{du}{d\xi} \frac{d^2 u}{d\xi^2} = a \frac{du}{d\xi};$$

и интегрируем полученное соотношение

$$-\frac{v}{2}u^2 - u^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{du}{d\xi} \right)^2 = au + b, \quad b = const. \quad (2.19)$$

Умножим уравнение (2.19) на 2 и приведем к виду

$$\left(\frac{du}{d\xi} \right)^2 = 2u^3 + vu^2 + 2au + 2b.$$

Полагая $a = b = 0$

$$\frac{du}{d\xi} = \sqrt{2u^3 + vu^2},$$

следовательно,

$$\frac{d\xi}{du} = \frac{1}{\sqrt{u^2(2u+v)}} = \frac{1}{u\sqrt{(2u+v)}};$$

Отсюда $\xi = \int \frac{du}{u\sqrt{(2u+v)}}$. Путем преобразований мы получаем

$$\xi = -\frac{2}{\sqrt{v}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{1 + \frac{2}{v}u} \right). \quad (2.20)$$

Тогда

$$u(\xi) = -\frac{v}{2} \left(1 - \tan^2 \left(\frac{\sqrt{v}}{2} \xi \right) \right) = -\frac{v}{2} + \frac{v}{2} \tan^2 \left(\frac{\sqrt{v}}{2} (x - vt) \right) \quad (2.21)$$

является решением уравнения (2.16).

2.2 Многосолитонные решения уравнения Кортевега-де Фриза

Процесс взаимодействия солитонов удастся описать точным аналитическим решением уравнения КдФ

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0.$$

Сделаем подстановку

$$u = 12\beta \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln F, \quad (2.22)$$

являющуюся обобщением подстановки Коула-Хопфа. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 12\beta \frac{\partial^3}{\partial x^3 \partial t} \ln F; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 12\beta \frac{\partial^3}{\partial x^3} \ln F; \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 12\beta \frac{\partial^5}{\partial x^5} \ln F.$$

Подставим полученные выражения в уравнение КдФ

$$12\beta \frac{\partial^3}{\partial x^3 \partial t} \ln F + 12\beta \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln F \left(12\beta \frac{\partial^3}{\partial x^3} \ln F \right) + 12\beta^2 \frac{\partial^5}{\partial x^5} \ln F = 0.$$

Преобразуем полученное уравнение к виду

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \ln F \right) + 6\beta \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln F \right)^2 \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} \ln F \right) = 0.$$

Интегрируя, получаем

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \ln F + 6\beta \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln F \right)^2 + \frac{\partial^4}{\partial x^4} \ln F = C. \quad (2.23)$$

Рассмотрим частный случай $C = 0$.

Так как

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \ln F = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial x} \right) = -\frac{1}{F^2} \frac{\partial F}{\partial t} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{F} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial t}; \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln F = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial x} \right) = -\frac{1}{F^2} \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{F} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\frac{1}{F^2} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{F} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}. \quad (2.25)$$

Возведем в квадрат выражение (2.25)

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln F \right)^2 &= \left(-\frac{1}{F^2} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{F} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)^2 = \frac{1}{F^2} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^4 - \frac{2}{F^3} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \\ &+ \frac{1}{F^2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)^2. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Выразим $\frac{\partial^3}{\partial x^3} \ln F$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3}{\partial x^3} \ln F &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{1}{F^2} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{F} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) = \\ &= (-1) \left((-2F^{-3}) \frac{\partial F}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{F^2} 2 \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) + \left(-\frac{1}{F^2} \right) \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{1}{F} \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} = \\ &= \frac{2}{F^3} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^3 - \frac{2}{F^2} \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{1}{F^2} \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{1}{F} \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} = \\ &= \frac{2}{F^3} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^3 - \frac{3}{F^2} \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{1}{F} \frac{\partial^3 F}{\partial x^3}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Затем $\frac{\partial^4}{\partial x^4} \ln F$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^4}{\partial x^4} \ln F &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2}{F^3} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^3 - \frac{3}{F^2} \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{1}{F} \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} \right) = \\
&= 2(-3)F^{-4} \frac{\partial F}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^3 + \frac{2}{F^3} 3 \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \\
&- 3 \left((-2)F^{-3} \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{1}{F^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) \right) + \left(-\frac{1}{F^2} \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} + \frac{1}{F} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} \right) = \\
&= -\frac{6}{F^4} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^4 + \frac{12}{F^3} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{3}{F^2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)^2 - \frac{4}{F^2} \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} + \frac{1}{F} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4}.
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Подставим выражения (2.24), (2.26), (2.28) в уравнение (2.23) и получим

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{F^2} \frac{\partial F}{\partial t} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{F} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial t} + 6\beta \left(\frac{1}{F^4} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^4 - \frac{2}{F^3} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{1}{F^2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)^2 \right) + \\
&+ \beta \left(-\frac{6}{F^4} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^4 + \frac{12}{F^3} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{3}{F^2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)^2 - \frac{4}{F^2} \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} + \frac{1}{F} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} \right) = 0.
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Приведем подобные, получаем

$$-\frac{1}{F^2} \frac{\partial F}{\partial t} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{F} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial t} + \frac{3\beta}{F^2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)^2 - \frac{4\beta}{F^2} \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} + \frac{\beta}{F} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} = 0. \tag{2.30}$$

Умножим (2.30) на F^2 и преобразуя выражение получаем

$$F \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial t} - \frac{\partial F}{\partial t} \frac{\partial F}{\partial x} + 3\beta \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)^2 - 3\beta \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} - \beta \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} + F\beta \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} = 0.$$

Тогда после преобразований получим для функции $F(x, t)$ сложное нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных четвертого порядка

$$F \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \beta \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} \right) - \frac{\partial F}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \beta \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} \right) + 3\beta \left(\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)^2 - \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} \right) = 0. \tag{2.31}$$

Особенность уравнения (2.31) состоит в том, что оно имеет характерную форму, содержащую оператор

$$\frac{\partial}{\partial t} + \beta \frac{\partial^3}{\partial x^3}.$$

Поэтому можно заметить, что простая функция с экспонентой

$$F(x, t) = 1 + f = 1 + \exp(-\theta), \quad (2.32)$$

удовлетворяет уравнениям

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \beta \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} = 0; \quad \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)^2 - \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} = 0,$$

которым соответствуют

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)^2 - \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} \end{vmatrix} = 0.$$

Обозначим

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, t) = y_t(x),$$

где t –параметр.

$$\begin{vmatrix} y_t & y_t' \\ y_t' & y_t'' \end{vmatrix} = 0;$$

$$y_t' = C y_t;$$

Интегрируя и возвращаясь к $F(x, t)$, получаем

$$y_t = \frac{\partial F}{\partial x}(x, t) = \tilde{C} e^{cx},$$

где \tilde{C} и C не зависят от x .

Ещё раз интегрируем, получаем

$$F(x, t) = \exp[c_1(t)x + c_2(t)] + c_3(t);$$

Полагая

$$c_3(t) \equiv 1, \quad c_1(t) = -\alpha, \quad c_2(t) = \alpha s + \alpha^3 \beta t;$$

тогда

$$F = 1 + \exp[-\alpha(x - s) + \alpha^3 \beta t] = 1 + f,$$

где $\theta = \alpha(x - s) - \alpha^3 \beta t$; $\alpha, s = const$. Поэтому функция (2.32) является также решением уравнения (2.31). Теперь в соответствии с формулой преобразования (2.22) найдем решение уравнения КдФ, порожденное функцией $F(x, t)$ из (2.32)

$$u = 12\beta \frac{\alpha^2 f}{(1+f^2)} = 3\beta\alpha^2 \left(\frac{2}{e^{\frac{\theta}{2}} + e^{-\frac{\theta}{2}}} \right)^2 = 3\beta\alpha^2 ch^{-2} \frac{\theta}{2},$$

которая при $3\beta\alpha^2 = A = const$ описывает одиночный солитон

$$u(x, t) = Ach^{-2} \left[\frac{(x-s) - vt}{\Delta} \right], \quad (2.33)$$

где $v = \beta\alpha^2 = \frac{A}{3}$; $\Delta = \sqrt{12\beta/A}$, сдвинутый вперед на величину s относительно «стандартного» солитона (2.12). Величина s представляет собой координату солитона при $t=0$. Эта величина носит название фазасолитона.

3 ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

3.1 Постановка задачи

В численном эксперименте с применением ЭВМ, было исследовано «столкновение» двух солитонов с разными амплитудами, когда быстрый солитон обгоняет медленный. Оказалось, что по мере сближения в результате взаимодействия солитоны начинают обмениваться амплитудами и скоростями. Быстрый солитон как бы проходит сквозь медленный без нарушения их формы. После столкновения возникают точно такие же по форме солитоны, что и до столкновения [16, с. 319].

Найдем более сложное по структуре решение уравнения КдФ, описывающее взаимодействие двух солитонов. Для этого представим функцию F в виде разложения в ряд

$$F = 1 + \varepsilon F^{(1)} + \varepsilon^2 F^{(2)} + \dots \quad (3.1)$$

по параметру ε . После преобразований параметр ε можно положить равным единице

Подставляя (3.1) в выражение (2.24), полученные после замены Коула-Хопса (2.15)

$$\begin{aligned} & (1 + \varepsilon F^{(1)} + \varepsilon^2 F^{(2)}) \left((\varepsilon F^{(1)} + \varepsilon^2 F^{(2)}) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F^{(k)}}{\partial t} + \beta \frac{\partial^3 F^{(k)}}{\partial x^3} \right) \right) - \\ & - (\varepsilon + \varepsilon^2) \frac{\partial F^{(k)}}{\partial x} (\varepsilon + \varepsilon^2) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F^{(k)}}{\partial t} + \beta \frac{\partial^3 F^{(k)}}{\partial x^3} \right) + \\ & + 3\beta \left(\left((\varepsilon + \varepsilon^2) \frac{\partial^2 F^{(k)}}{\partial x^2} \right)^2 - (\varepsilon + \varepsilon^2) \frac{\partial F^{(k)}}{\partial x} (\varepsilon + \varepsilon^2) \frac{\partial^3 F^{(k)}}{\partial x^3} \right) = 0; \end{aligned} \quad (3.2)$$

и собирая члены при одинаковых степенях ε , получаем уравнения при ε :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F^{(1)}}{\partial t} + \beta \frac{\partial^3 F^{(1)}}{\partial x^3} \right) = 0; \quad (3.3)$$

при ε^2 :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F^{(2)}}{\partial t} + \beta \frac{\partial^3 F^{(2)}}{\partial x^3} \right) = -3\beta \left(\left(\frac{\partial^3 F^{(1)}}{\partial x^3} \right)^2 - \frac{\partial F^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial^3 F^{(1)}}{\partial x^3} \right); \quad (3.4)$$

при ε^3 :

$$F^{(1)} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F^{(2)}}{\partial t} + \beta \frac{\partial^3 F^{(2)}}{\partial x^3} \right) - \frac{\partial F^{(1)}}{\partial x} \left(\frac{\partial F^{(2)}}{\partial t} + \beta \frac{\partial^3 F^{(2)}}{\partial x^3} \right) + \\ + 3\beta \left(2 \frac{\partial^2 F^{(1)}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 F^{(2)}}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial F^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial^3 F^{(2)}}{\partial x^3} + \frac{\partial F^{(2)}}{\partial t} \frac{\partial^3 F^{(1)}}{\partial x^3} \right) \right) = 0; \quad (3.5)$$

при ε^4 :

$$F^{(2)} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F^{(2)}}{\partial t} + \beta \frac{\partial^3 F^{(2)}}{\partial x^3} \right) - \frac{\partial F^{(2)}}{\partial x} \left(\frac{\partial F^{(2)}}{\partial t} + \beta \frac{\partial^3 F^{(2)}}{\partial x^3} \right) + \\ + 3\beta \left(\left(\frac{\partial^2 F^{(2)}}{\partial x^2} \right)^2 - \frac{\partial F^{(2)}}{\partial x} \frac{\partial^3 F^{(2)}}{\partial x^3} \right) = 0; \quad (3.6)$$

и т.д.

В качестве $F^{(1)}$ выберем сумму двух экспонент, порождающих солитон

$$F^{(1)} = f_1 + f_2, f_j = \exp[-\alpha_j(x - s_j) + \alpha_j^3 \beta t], j = 1, 2,$$

то уравнение (3.3) тождественно выполняется, так как каждое из f_j является его решением.

$$\frac{\partial F^{(1)}}{\partial t} = \alpha_1^3 \beta f_1 + \alpha_2^3 \beta f_2, \frac{\partial F^{(1)}}{\partial x} = -\alpha_1 f_1 - \alpha_2 f_2, \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial^2 F^{(1)}}{\partial x^2} = \alpha_1^2 f_1 + \alpha_2^2 f_2, \frac{\partial^3 F^{(1)}}{\partial x^3} = -\alpha_1^3 f_1 + \alpha_2^3 f_2. \quad (3.8)$$

Подставляем полученные производные (3.7) в уравнения (3.3)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F^{(1)}}{\partial t} + \beta \frac{\partial^3 F^{(1)}}{\partial x^3} \right) = \alpha_1^3 \beta f_1 + \alpha_1^3 \beta f_2 + \beta(-\alpha_1^3 f_1 - \alpha_2^3 f_2). \quad (3.9)$$

Соотношение (3.4) дает уравнение для определения функции $F^{(2)}$. Оно имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F^{(2)}}{\partial t} + \beta \frac{\partial^3 F^{(2)}}{\partial x^3} \right) = -3\beta \left(\left(\frac{\partial^3 F^{(1)}}{\partial x^3} \right)^2 - \frac{\partial F^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial^3 F^{(1)}}{\partial x^3} \right). \quad (3.10)$$

Подставим (3.8) в (3.10)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F^{(2)}}{\partial t} + \beta \frac{\partial^3 F^{(2)}}{\partial x^3} \right) = -3\beta \left(-(\alpha_1^2 f_1 + \alpha_2^2 f_2)^2 + (-\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)(-\alpha_1^3 f_1 - \alpha_2^3 f_2) \right), \quad (3.11)$$

свернем данное выражение и получим

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F^{(2)}}{\partial t} + \beta \frac{\partial^3 F^{(2)}}{\partial x^3} \right) = 3\beta \alpha_1 \alpha_2 (\alpha_1 - \alpha_2)^2 f_1 f_2. \quad (3.12)$$

Будем искать его решение в виде $F^{(2)} = B f_1 f_2$, где B – некоторая неопределенная постоянная. Дифференцируем по $F^{(2)}$

$$\frac{\partial F^{(2)}}{\partial t} = B(\alpha_1^3 \beta f_1 f_2 + f_1 \alpha_2^3 \beta f_2), \quad (3.13)$$

сворачиваем (3.13) и получаем

$$\frac{\partial F^{(2)}}{\partial t} = B(\alpha_1^3 + \alpha_2^3) \beta f_1 f_2. \quad (3.14)$$

Найдем $\frac{\partial^3 F^{(2)}}{\partial x^3}$

$$\frac{\partial F^{(2)}}{\partial x} = -B(\alpha_1 + \alpha_2) f_1 f_2, \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial^2 F^{(2)}}{\partial x^2} = B(\alpha_1 + \alpha_2)^2 f_1 f_2, \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial^3 F^{(2)}}{\partial x^3} = -B(\alpha_1 + \alpha_2)^3 f_1 f_2, \quad (3.17)$$

Подставим (3.14) и (3.17) в уравнение (3.12)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F^{(2)}}{\partial t} + \beta \frac{\partial^3 F^{(2)}}{\partial x^3} \right) = -(\alpha_1 + \alpha_2) (B(\alpha_1^3 \beta f_1 f_2 + f_2 \alpha_2^3 \beta f_2) - B\beta(\alpha_1 + \alpha_2)^3 f_1 f_2),$$

приведем полученное уравнение к виду

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F^{(2)}}{\partial t} + \beta \frac{\partial^3 F^{(2)}}{\partial x^3} \right) = 3B\beta \alpha_1 \alpha_2 (\alpha_1 + \alpha_2)^2 f_1 f_2.$$

Тогда с учетом (3.12) получаем

$$B = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)^2}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2}.$$

В остальных уравнениях цепочки для функций $F^{(k)}$ при $k > 2$ правые части обращаются в нуль, давая результат $F^{(k)} = 0$ для всех $k > 0$. Поэтому функция

$$F = 1 + f_1 + f_2 + \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)^2}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2} f_1 f_2, \quad (3.18)$$

является точным решением уравнения (2.24).

Теперь, используя подстановку Коула-Хопса (2.15), находим соответствующее точное решение уравнения КдФ в виде

$$\frac{u}{12\beta} = \frac{\alpha_1^2 f_1 + \alpha_2^2 f_2 + 2(\alpha_2 - \alpha_1) f_1 f_2}{(1 + f_1 + f_2 + B f_1 f_2)} + \frac{B(\alpha_2^2 f_1^2 f_2 + \alpha_1^2 f_2^2 f_1)}{(1 + f_1 + f_2 + B f_1 f_2)}. \quad (3.19)$$

где

$$f_j = \exp[-\alpha_j(x - s_j) + \alpha_j^3 \beta t], \quad j = 1, 2; \quad B = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)^2}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2}.$$

3.2 Использование возможностей ППП Matlab для решения нелинейных волновых уравнений

Используя соотношение (3.19) необходимо составить программу в ППП Matlab, позволяющую наблюдать на дисплее взаимодействие двух сталкивающихся солитонов.

Программный код, с помощью которого реализована модель взаимодействия двух сталкивающихся солитонов, описан в Приложении А.

Опишем с помощью уравнения (3.19) взаимодействие уединенных волн. Пусть для определения $\alpha_2 > \alpha_1 > 0$, а $s_1 > s_2$, так что «быстрый» солитон с большей амплитудой находится сначала левее «медленного» солитона, догоняя его.

При $t \rightarrow -\infty$ область взаимодействия солитонов отсутствует (рисунок 9) и уравнение (3.19) описывает две волны.

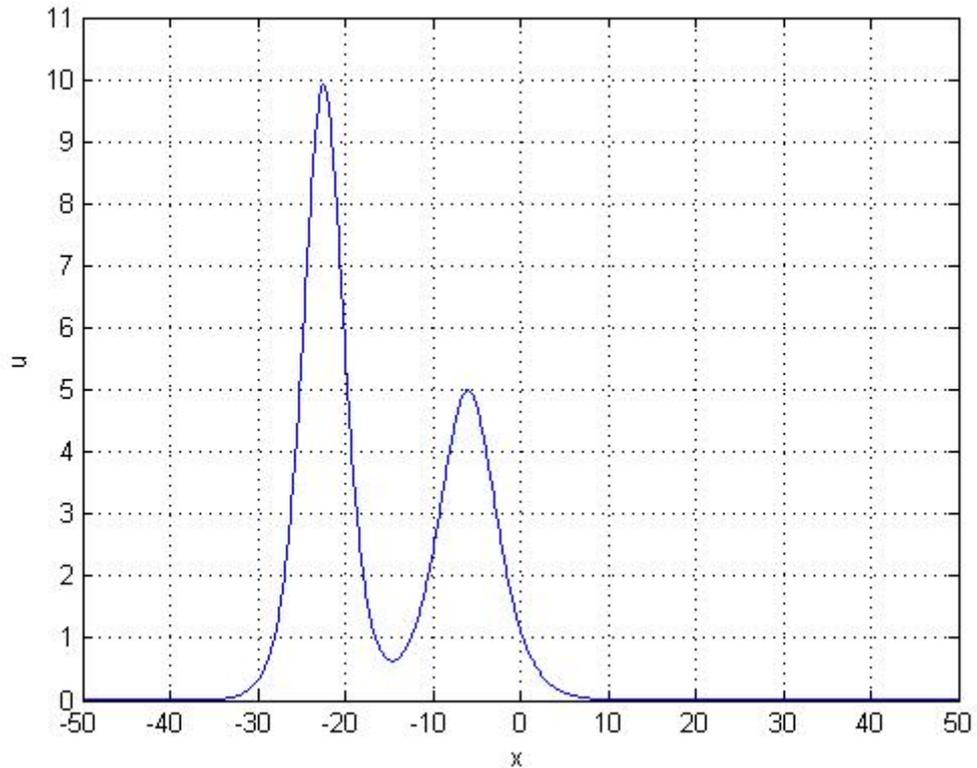


Рисунок 9 – Отсутствие взаимодействия солитонов

Центр уединенной волны с большей амплитудой находится в точке $x = s_1 + \alpha_1^2 \beta t$, вблизи которой $f_1 \approx 1$, а $f_2 \ll 1$. Центр уединенной волны с большей амплитудой находится левее в точке

$$x = s_2 - \frac{1}{\alpha_2} \ln \left(\frac{\alpha_2 + \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} \right)^2 + \alpha_2^2 \beta t,$$

вблизи которой $f_2 \approx 1$, а $f_1 \gg 1$. В остальных точках $u \approx 0$.

При $t \rightarrow +\infty$ центр уединенной волны с меньшей амплитудой находится в точке

$$x = s_1 - \frac{1}{\alpha_1} \ln \left(\frac{\alpha_2 + \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} \right)^2 + \alpha_1^2 \beta t,$$

вблизи которой $f_1 \approx 1$, а $f_2 \gg 1$; центр уединенной волны с меньшей амплитудой находится правее в точке $x = s_2 + \alpha_2^2 \beta t$, вблизи которой $f_1 \ll 1$, а $f_2 \approx 1$. В остальных точках $u \approx 0$.

Взаимодействие солитонов (рисунок 10) происходит в окрестности точки

$$x = \frac{\alpha_2^2 s_1 - \alpha_1^2 s_2}{\alpha_2^2 - \alpha_1^2},$$

в некий момент времени $t = \tau$, где $\tau = \frac{s_1 - s_2}{\beta(\alpha_2^2 - \alpha_1^2)}$.

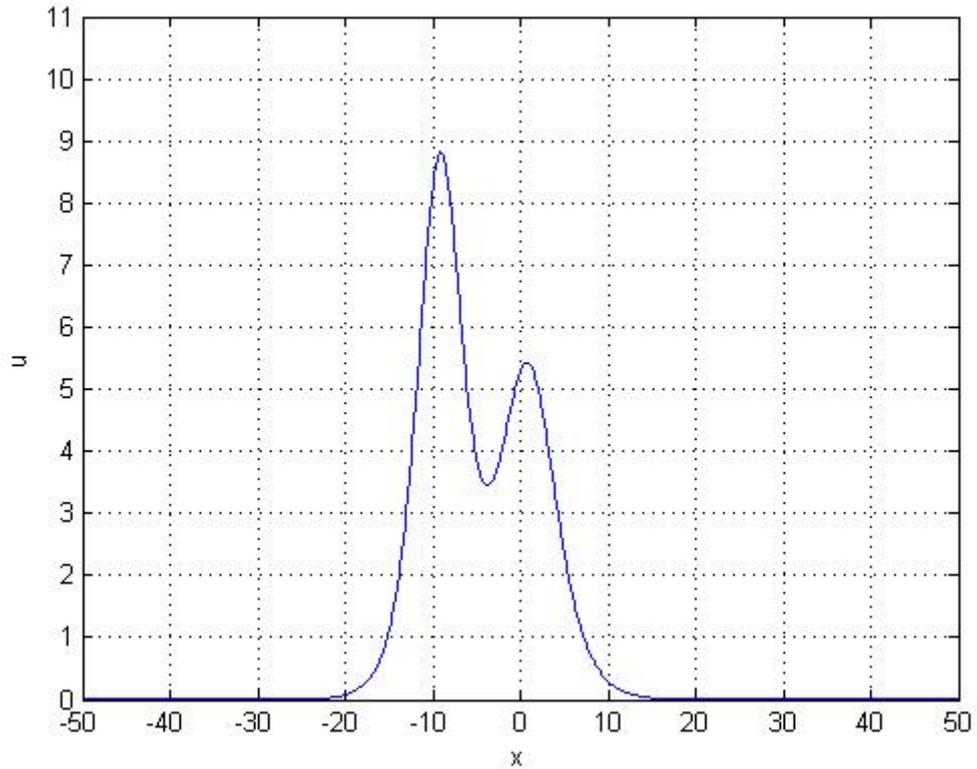


Рисунок 10 – Взаимодействие солитонов

В результате столкновения снова образуются два солитона с теми же амплитудами и скоростями, что и до столкновения (рисунок 11).

Изменяются лишь фазы этих солитонов. «Быстрый» солитон получает дополнительный сдвиг вперед на величину

$$\frac{1}{\alpha_2} \ln \left(\frac{\alpha_2 + \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} \right)^2,$$

в то время, как «медленный» солитон получает сдвиг назад на величину

$$\frac{1}{\alpha_1} \ln \left(\frac{\alpha_2 + \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} \right)^2.$$

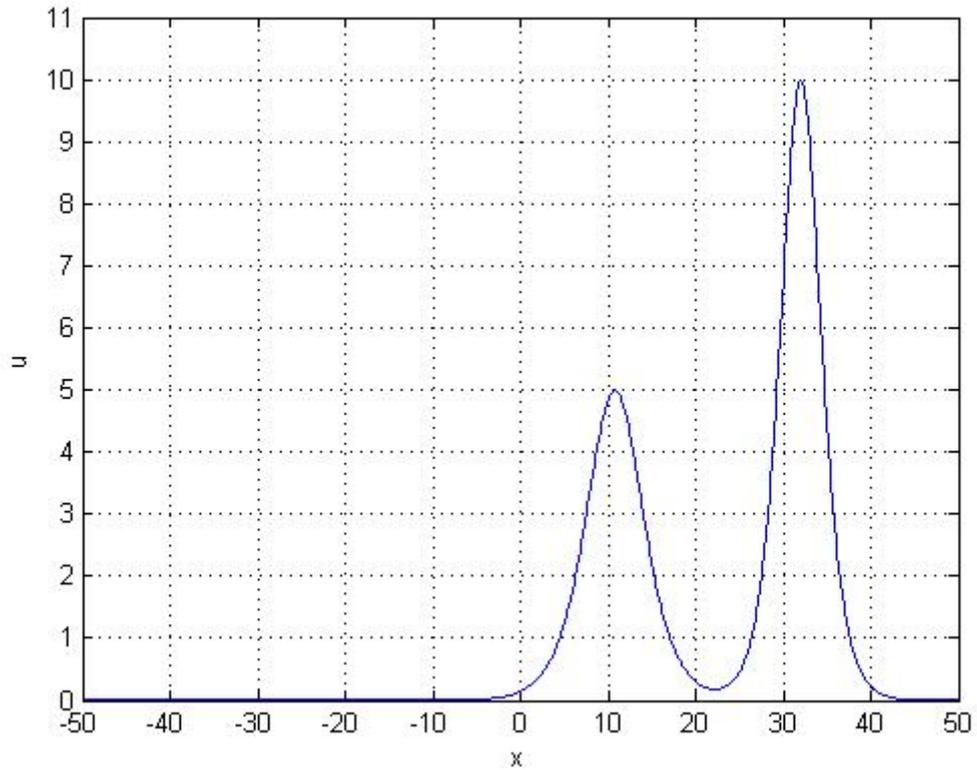


Рисунок 11 – Образование солитонов с теми же амплитудами и скоростями, но разными фазами

Таким образом, в работе проведено преобразование стандартного уравнения Кортевега-де Фриза к виду (3.19) и получено его решение в виде бегущей волны со стационарным профилем. Такое решения нелинейных уравнений устойчиво по отношению к изменению формы и используется во многих задачах гидродинамики, квантовой теории поля, физики плазмы и твердого тела.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решение очень многих волновых задач математической физики, которые можно решить только аналитическими и численными методами, представляет собой приближение при описании процессов.

Нелинейные волны и солитоны интенсивно изучаются физиками и математиками, что связано с тем, что в будущем они могут найти широкое применение в технике.

Широкое применение во всех областях имеет применение уравнения Кортевега-де Фриза. Уникальные свойства применяются в медицине, физике, химии и других науках.

Описаны такие известные уравнения, как: уравнение Колмогорова-Петровского-Пискунова, уравнение Бюргерса, уравнение Кортевега-де Фриза. Подробно изучены солитоны и их свойства, на основе создана модель взаимодействия двух сталкивающихся солитонов по средствам ППП Matlab. Решено уравнение Кортевега-де Фриза точными и приближенными аналитическими методами.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

- 1 Абловиц, М. Солитоны и метод обратной задачи рассеяния / М. Абловиц, Х. Сигур. – М.: Мир, 1987. – 480 с.
- 2 Березин, Ю.А. О численных решениях уравнения Кортевега-де Вриза / Ю.А. Березин // Численные методы механики сплошной среды. – 1973. – № 2, С. 20-31.
- 3 Борисов, А.А. Самоподдерживающиеся уединенные волны в неравновесных средах. Физика горения и взрыва / А.А. Борисов, О.В. Шарыпов, 1993. – 257 с.
- 4 Буллаф, Р. Солитоны / Р. Буллаф, Ф. Кодри. – М.: Мир, 1983. – 385 с.
- 5 Гордеев, Ю.Н. Уединенные волны в диссипативно-дисперсных системах с неустойчивостью / Ю.Н. Гордеев, Н.А. Кудряшов // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1989. – № 2. – С. 80-82.
- 6 Громак, В. И. Аналитические свойства решений уравнений Пенлеве / В.И. Громак, Н.А. Лукашевич. – Минск: Университетское, 1990. – 315 с.
- 7 Додд, Р. Солитоны и нелинейные волновые уравнения / Р. Додд, Д. Эйлбек, Д. Гиббон, Х. Моррис. – М.: Мир, 1988. – 694 с.
- 8 Землянухин А. И. Нелинейные волны в цилиндрических оболочках: солитоны, симметрии, эволюция / А.И. Землянухин, Л.И. Могилевич. – Саратов, 1999. – 132 с.
- 9 Камке, Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. – М.: Наука, 1971. – 576 с.
- 10 Карпман, В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах / В.И. Карпман. – М.: Наука, 1973. – 175 с.
- 11 Колмогоров, А. Н. Исследование уравнения диффузии, соединенного с возрастанием количества вещества и его применение к одной биологической проблеме / А.Н. Колмогоров, И.Г. Петровский, Н.С. Пискунов // Бюлл. МГУ. – 1937. – № 6. – С. 1-26.
- 12 Кудряшов, Н.А. Методы нелинейной математической физики /

Н.А. Кудряшов. – М.: Интеллект, 2010. – 368 с.

13 Кудряшов, Н.А. Нелинейные волны на воде и теория солитонов / Н.А. Кудряшов // Инженерно-физический журнал. – 1999. – № 6. – С. 1266-1278.

14 Лионе, Ж.Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Ж.Л. Лионе. – М.: Мир, 1972. – 259 с.

15 Лэм, Дж. Л. Введение в теорию солитонов / Дж. Л. Лэм. – Череповец: Меркурий-ПРЕСС, 2000. – 256 с.

16 Мартинсон, Л.К. Дифференциальные уравнения математической физики / Л.К. Мартинсон, Ю.И. Малов. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 2002. – 368 с.

17 Новокшенов, В.Ю. Введение в теорию солитонов / В. Ю. Новокшенов. – М. : ИКИ, 2002. – 96 с.

18 Ньюэлл, А. Солитоны в математике и физике / А. Ньюэлл. – М.: Мир, 1989. – 326 с.

19 Полянин, А.Д. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики / А.Д. Полянин, В.Ф. Зайцев. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 432 с.

20 Солитоны в действии / под ред. К. Лонгрена, Э. Скотта. – М. : Мир, 1981. – 312 с.

21 Тахтаджян, Л. А. Гамильтонов подход в теории солитонов / Л.А. Тахтаджян, Л.Д. Фадеев. – М.: Наука, 1986. – 528 с.

22 Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1972. – 724 с.

23 Фейнман, Р. Солитоны и их взаимодействие / Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс // Фейнмановские лекции по физике. – 1965. – №4. – С. 30-48.

24 Филлипов, А.Т. Многоликий солитон / А.Т. Филлипов. – М.: Наука, 1990. – 216 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Программная реализация взаимодействия двух сталкивающихся солитонов

```
function soliton
clc; clear all; clf;
A=[5 10];
beta=8;
alpha=sqrt(A./(3*beta));
s =[5 5];
x=-50:0.1:50;
for t=-10:0.1:10
    u=sol(alpha(1),alpha(2), beta, x, s, t) ;
plot(x,u); hold on;
xlabel('x'); ylabel('u');
ylim([0 max(A)+1]); xlim([-50 50])
hold off; grid on;
drawnow
end

function u=sol(a1, a2, b, x, s, t)
B=((a2-a1)/(a2+a1))^2;
f1=exp(-a1*(x-s(1))+a1^3*b*t);
f2=exp(-a2*(x-s(2))+a2^3*b*t);

u1ch=a1^2*f1+a2^2*f2+2*(a2-a1)^2*f1.*f2;
u2ch=B*(a2^2*f1.^2.*f2+a1^2*f1.*f2.^2);
uzn=(1+f1+f2+B*f1.*f2).^2;
u=12*b*(u1ch+u2ch)./uzn;
```