

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
(ФГБОУ ВО «АмГУ»)

Факультет математики и информатики
Кафедра математического анализа и моделирования
Направление подготовки 01.03.02 – Прикладная математика и информатика
Профиль: Математическое и информационное обеспечение экономической деятельности

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ
Зав. кафедрой
_____ Н.Н.Максимова
«_____» _____ 2017 г.

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

на тему: Применение численных методов дробного дифференцирования для математического моделирования финансовых систем

Исполнитель
студент группы 352об

(подпись, дата)

К.В. Биссенова

Руководитель
профессор, д-р. физ.-мат. наук _____

(подпись, дата)

А.Г. Масловская

Нормоконтроль
доцент, канд. техн. наук

(подпись, дата)

А.В. Рыженко

Благовещенск 2017

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
(ФГБОУ ВО «АмГУ»)

Факультет математики и информатики
Кафедра математического анализа и моделирования

УТВЕРЖДАЮ

Зав. кафедрой

_____ Н.Н. Максимова

«___» _____ 2017 г.

ЗАДАНИЕ

К бакалаврской работе студента Биссеновой Кристины Валерьевны

1. Тема бакалаврской работы: Применение численных методов дробного дифференцирования для математического моделирования финансовых систем (утверждена приказом от 10.04.2017 №770-уч).

2. Срок сдачи студентом законченной работы: 13.06.2017 г.

3. Исходные данные к бакалаврской работе: формулировка темы работы, литературные источники, отчет по преддипломной практике.

4. Содержание бакалаврской работы (перечень подлежащих разработке вопросов): основные теоретические концепции и приложения динамических моделей в экономике; базовые сведения об использовании дробно-дифференциального исчисления для моделирования финансовой системы; математическое и программное обеспечение для реализации фрактальной модели динамики финансовых систем.

5. Перечень материалов приложения: листинги компьютерных программ.

6. Консультанты по бакалаврской работе – нормоконтроль: Рыженко А.В., канд. техн. наук, доцент.

7. Дата выдачи задания: 24.04.2017 г.

Руководитель бакалаврской работы: Масловская А.Г., д-р физ.-мат. наук, профессор.

Задание принял к исполнению 24.04.2017: _____ К.В. Биссенова

РЕФЕРАТ

Бакалаврская работа содержит 61 с., 16 рисунков, 1 таблицу, 31 источник.

СИСТЕМА ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА, ФОРМУЛА ГРЮНВАЛЬДА-ЛЕТНИКОВА, ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ, ФИНАНСОВАЯ СИСТЕМА, УСТОЙЧИВОСТЬ, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

В бакалаврской работе представлена реализация математической модели фрактальной динамики финансовой системы. Математическая постановка задачи моделирования сформулирована в виде задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений дробного порядка.

Построение вычислительной схемы реализации модели основано на применении формулы Грюнвальда-Летникова для численной аппроксимации производной дробного порядка. Проведен анализ модели на устойчивость. Предложена программная реализация динамической модели финансовой системы. Представлены результаты вычислительных экспериментов при варьировании параметров модели.

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|---|----|
| Введение | 6 |
| 1 Динамические модели в экономике: основные теоретические концепции и приложения | 9 |
| 1.1 Линейные и нелинейные динамические модели, описываемые дифференциальными и разностными уравнениями | 9 |
| 1.1.1 Базовые сведения о дифференциальных и разностных уравнениях | 9 |
| 1.1.2 Качественное исследование динамических систем | 13 |
| 1.1.3 Бифуркация и хаос динамических систем | 15 |
| 1.2 Примеры математических моделей линейных и нелинейных экономических систем | 17 |
| 1.2.1 Математические модели, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями первого порядка | 17 |
| 1.2.2 Паутинообразные модели в экономике | 18 |
| 1.2.3 Некоторые модели макроэкономики | 22 |
| 1.3 Математические модели, описывающие динамику финансовых систем | 26 |
| 1.4 Базовые параметры модели финансовой системы и их экономический смысл | 28 |
| 2 Использование математического аппарата дробно-дифференциального исчисления для моделирования финансовой системы | 31 |
| 2.1 История введения и основные понятия дробного дифференцирования и интегрирования | 31 |
| 2.2 Приближенные методы вычисления дробной производной и решение дифференциальных уравнений | 33 |
| 2.2.1 Гамма-функция Эйлера | 33 |

| | |
|--|----|
| 2.2.2 Дробные производные и интегралы некоторых элементарных функций | 34 |
| 3 Математическое и программное обеспечение для реализации фрактальной модели динамики финансовых систем | 39 |
| 3.1 Математическая постановка задачи моделирования фрактальной динамики финансовых систем | 39 |
| 3.2 Исследование устойчивости динамической системы | 40 |
| 3.3 Вычислительная схема реализации модели финансовой системы | 42 |
| 3.4 Алгоритмизация и программная реализация модели в ППП Matlab | 44 |
| 3.5 Вычислительный эксперимент | 47 |
| Заключение | 54 |
| Библиографический список | 55 |
| Приложение А Листинг программы моделирования фрактальных систем в постановке системы дробно-дифференциальных уравнений | 58 |
| Приложение Б Листинг программы решения задачи Коши для системы дифференциальных уравнений | 60 |

ВВЕДЕНИЕ

Во второй половине XX века в естествознании произошли фундаментальные изменения, породившие на стыке различных научных направлений так называемую теорию самоорганизации, или синергетику. Синергетика – междисциплинарное направление науки, изучающее общие закономерности явлений и процессов в сложных неравновесных системах на основе присущих им принципов самоорганизации. Многие природные явления и кластерные объекты представляют результат процессов самоорганизации.

Для моделирования динамических систем традиционно используют средства классического математического анализа, в частности, аппарат интегродифференциальных уравнений в обыкновенных и частных производных. Интегралы и производные в классическом анализе имеют порядки, выражаемые целыми числами. Однако для целого ряда объектов и процессов, обладающих свойствами самоподобия, такой подход при моделировании не дает полного соответствия модели реальному объекту, и необходимо разрабатывать и использовать уточненные модели. Одним из направлений решения данной задачи является применение дробного исчисления.

Теория дробного дифференцирования применяется для описания процессов и явлений, обладающих фрактальными характеристиками. Для указания на то, что рассматриваемый процесс обладает особым свойством – память, используют дробную производную по времени. Чтобы показать, что процесс протекает в самоподобной неоднородной среде, применяют дробную производную по координате.

В настоящее время дробное исчисление находится в процессе бурного развития и в теоретическом плане, и в его практических приложениях. Известен широкий ряд приложений теории дробно-дифференциальных уравнений в различных областях, использующих математические методы и средства компьютерного моделирования. Можно сказать, что этот раздел математического ана-

лиза превратился в инструмент математического моделирования сложнейших динамических процессов в обычных и фрактальных средах, позволяющий решать на новой основе самые различные задачи анализа, синтеза, идентификации, диагностики, создания новых систем управления.

В настоящее время в экономике известно большое количество математических моделей процессов и явлений, формализуемых с помощью интегро-дифференциального аппарата: обыкновенных дифференциальных уравнений, систем обыкновенных дифференциальных уравнений, интегральных уравнений, интегро-дифференциальных уравнений, систем обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздыванием и др. В числе известных моделей динамических систем можно выделить класс макроэкономических математических моделей, описывающих эволюцию финансовой системы в терминах экономических показателей: ключевая ставка, валовое накопление основного капитала, индекс потребительских цен. Для учета свойств памяти в таких динамических системах используют дробно-дифференциальный подход. Такие математические модели появились в конце XX– начале XXI вв. и в настоящее время активно развиваются.

Аналитические методы решения разработаны для достаточно узкого класса прикладных задач. Поэтому привлекательной альтернативой поиску аналитических подходов к реализации этих математических моделей является конструирование вычислительных схем решения дифференциальных уравнений с дробными производными.

Цель работы заключалась в построении вычислительной схемы и программной реализации дробно-дифференциальной модели динамики финансовых систем. Для достижения указанной цели были сформулированы следующие задачи:

- 1) литературный обзор динамических моделей экономики;
- 2) исследование устойчивости математической модели финансовой системы;

3) построение вычислительной схемы для решения начальной задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений дробного порядка;

4) разработка прикладной программы, предназначенной для имитационного моделирования динамических характеристик финансовых систем;

5) проведение вычислительных экспериментов и анализ результатов моделирования динамики финансовой системы для набора модельных параметров.

ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ЭКОНОМИКЕ: ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ КОНЦЕПЦИИ И ПРИЛОЖЕНИЯ

1.1 Линейные и нелинейные динамические модели, описываемые дифференциальными и разностными уравнениями

1.1.1 Базовые сведения о дифференциальных и разностных уравнениях. Дифференциальные уравнения – уравнения, содержащие функцию и некоторые ее производные. Если неизвестная функция имеет зависимость от скалярного аргумента, то уравнение называют обыкновенным дифференциальным, а если от нескольких переменных, то дифференциальным уравнением в частных производных. Порядком уравнения называют наивысший порядок производной функции, входящей в данное уравнение[1].

Множество решений дифференциального уравнения, которое содержит все решения этого уравнения, называют общим решением или общим интегралом дифференциального уравнения. Если решение дифференциального уравнения удовлетворяет изначально заданным дополнительным условиям, то его называют частным решением дифференциального уравнения.

Интегральной кривой называется график решения дифференциального уравнения $y = f(x) + C$, где каждому C соответствует определенная кривая.

Разностным называют уравнение, которое содержит значения функции целочисленного аргумента, относящиеся к различным периодам времени (при условии, что в качестве аргумента берется дискретно меняющееся время $t=0,1,2,\dots$)[2]. Порядок разностного уравнения – наибольшая разность между номерами периодов, с которыми функция входит в уравнение.

Проще изучать дифференциальное уравнение, разрешенное относительно y' , и может быть записано в виде $y' = f(t, y)$, где $f(t, y)$ – заданная функция, которая «управляет» скоростью моделируемого процесса. Каждой точке на плоскости (t, y) ставится в соответствие некоторое число, равное производной решения и график которой проходит через данную точку. Производная совпадает с тангенсом угла наклона касательной к интегральной кривой в точке.

Автономным называется дифференциальное уравнение, не содержащее явно независимой переменной. Уравнение этого типа может иметь вид $y' = f(t, y)$. Если посмотреть с точки зрения приложений автономность может означать, что моделируемая система или процесс эволюционируют в условиях постоянной во времени внешней среды – природных условий, постоянства технологий, возмущений и управлений.

Задача Коши для дифференциальных уравнений и систем дробного порядка общего вида.

Пусть требуется найти функцию $y(x)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} y(x) = f(x, y), \quad n-1 < \alpha \leq n, \quad n=1,2,\dots, \quad (1.1)$$

при начальных условиях

$$\frac{d^{\alpha-k}}{dx^{\alpha-k}} y_i(x) = b_k, \quad k = 1,2,\dots,n, \quad (1.2)$$

где $f(x, y)$ – заданная функция;

α, b_1, \dots, b_n – заданные постоянные величины.

Рассмотрим теорему о существовании и единственности решения поставленной задачи.

Обозначим через R_n множество точек (x, y) из области D , лежащей в $R \times R$:

$$R_n = \left\{ (x, y) \in D : 0 < x \leq h, \left| x^{n-\alpha} y(x) - \frac{b_n}{\Gamma(\alpha - n + 1)} \right| \leq a \right\}, \quad (1.3)$$

$$a > \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h^{n-k} b_k}{\Gamma(\alpha - k + 1)},$$

где a, h, b_0 – некоторые постоянные.

Теорема 1. Пусть $f(x, y)$ – вещественнозначная, непрерывная в области D функция, удовлетворяющая по y условию Липшица

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq A |y_1 - y_2|$$

и ограничению $\sup_{(x,y) \in D} |f(x,y)| = b_0 < \infty$. Тогда решение задачи Коши для $n = 1$ в области $R_1 \subset D$ существует, непрерывно и единственно [3].

Доказательство. Интегрируя уравнение (1.1), где $\frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}} = I^\alpha$, имеем

$$\frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}} \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} y(x) = \frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}} f(x,y), \text{ тогда согласно условию (1.2), получим}$$

$$y(x) = b_1 \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \int_0^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(t,y) dt. \quad (1.4)$$

Задача (1.1)-(1.2) приводится к уравнению (1.4). Покажем наоборот, что если непрерывная функция $f(x,y)$ удовлетворяет (1.4), то она удовлетворяет и

(1.1)-(1.2). Применяя к последнему равенству оператор $\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}$, имеем

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} y(x) = \frac{b_1}{\Gamma(\alpha)} \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} x^{\alpha-1} + \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} \frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}} f(x,y),$$

откуда $\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} y(x) = f(x,y)$.

Если к (1.4) применить оператор $\frac{d^{\alpha-1}}{dx^{\alpha-1}}$:

$$\frac{d^{\alpha-1}}{dx^{\alpha-1}} y(x) = \frac{b_1}{\Gamma(\alpha)} \frac{d^{\alpha-1}}{dx^{\alpha-1}} x^{\alpha-1} + \frac{d^{-1}}{dx^{-1}} f(x,y) = b_1 + \frac{1}{\Gamma(1)} \int_0^x f(t,y(t)) dt,$$

а затем положить $x = 0$.

Следовательно, уравнение (1.4) равносильно уравнению (1.1) с начальным условием (1.2).

Пусть

$$y_0(x) = b_1 \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \quad y_n(x) = b_1 \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \int_0^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma_k(\alpha)} f(t, y_{n-1}(t)) dt, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.5)$$

Точки $(x, y_n(x))$ должны оставаться в R_1 при $0 < x \leq h$. Из условия

$\sup_{(x,y) \in D} f(x,y) = b_0$ следует оценка

$$\begin{aligned} \left| x^{1-\alpha} y_n(x) - \frac{b_1}{\Gamma(\alpha)} \right| &= \left| \frac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t, y_{n-1}(t)) dt \right| \leq \\ &\leq \frac{b_0 x}{\Gamma(\alpha+1)} \leq \frac{b_0 h}{\Gamma(\alpha+1)}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Если $\frac{b_0 h}{\Gamma(\alpha+1)} < \alpha$, $(x, y_n(x)) \in R_1$ при $0 < x \leq h$.

$$\text{Согласно (1.5) имеем } |y_1(x) - y_0(x)| \leq \frac{b_0 x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \leq \frac{b_0 h^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

При $n = 1$ с помощью условия Липшица и предыдущей оценки получим

$$\begin{aligned} |y_2(x) - y_1(x)| &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} (f(t, y_1(t)) - f(t, y_0(t))) dt \right| \leq \\ &\leq \frac{A}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} |y_1(t) - y_0(t)| dt \leq \frac{A}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} \frac{b_0 t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} dt \leq \frac{Ab_0 h^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)}. \end{aligned}$$

Повторив многократно, приходим к равенству

$$\left| x^{1-\alpha} y(x) - \frac{b_1}{\Gamma(\alpha)} \right| \leq \alpha,$$

которое в пределе при $n \rightarrow \infty$ следует из неравенства (1.6). Совершив в (1.5) предельный переход получим равенство (1.4).

Покажем, что при малых h решение $y(x)$ единственно. Пусть

$\frac{Ah^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} < 1$, и предположим, что имеются два решения $y(x)$ и $Y(x)$ рассмат-

риваемой задачи. Подставив их в (1.4), после вычитания получим

$$\begin{aligned} |y(x) - Y(x)| &= \left| \int_0^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} (f(t, y(t)) - f(t, Y(t))) dt \right| \leq \\ &\leq \frac{A}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} |y(t) - Y(t)| dt. \end{aligned}$$

Предположим, что разность $|y(x) - Y(x)|$ на промежутке $0 < x \leq h$ принимает наибольшее значение δ при некотором $x = \xi$. Тогда при $x = \xi$ будем иметь $\delta \leq A\Gamma^{-1}(\alpha)\delta h^\alpha \alpha^{-1}$, что противоречит предположению. Теорема доказана [4].

1.1.2 Качественное исследование динамических систем. Рассмотрим однородную систему дифференциальных уравнений n -го порядка с постоянными коэффициентами:

$$X'(t) = AX(t), \quad X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \vdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \vdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

где $X(t)$ – n -мерный вектор, A – матрица размерностью $n \times n$.

Нелинейную систему также можно свести к такой, выполнив линеаризацию вблизи точки равновесия. Далее будем считать, что точка равновесия расположена в начале координат.

Устойчивость или неустойчивость определяется знаками действительных частей собственных значений матрицы A . Далее решаем характеристическое уравнение, чтобы найти собственные значения λ

$$\det(A - \lambda I) = 0,$$

которое сводится к алгебраическому уравнению n -ой степени

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0.$$

В случае $n=2$ и некоторых случаях при $n \geq 3$ корни такого уравнения вычисляются просто. Иначе решение характеристического уравнения вызывает значительные трудности. Более того, Н.Х.Абель(1802–1829) доказал теорему, согласно которой при $n \geq 5$ общее алгебраическое уравнение неразрешимо в радикалах, т.е. в общем случае не существует формул, выражающих корни уравнения через его коэффициент в случае $n \geq 5$.

Большое значение имеют методы, которые позволяют не решая характеристическое уравнение установить устойчивость системы (будут ли все его корни иметь отрицательную действительную часть). Один из таких методов – критерий Рауса-Гурвица, который содержит необходимые и достаточные условия устойчивости системы.

Снова рассмотрим характеристическое уравнение

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0,$$

которое описывает динамическую систему. Видим, что необходимое условие устойчивости выполняется, если $a_i > 0$ (далее считаем, что $a_0 > 0$). Далее составим матрицу Гурвица: главная диагональ матрицы содержит элементы a_1, a_2, \dots, a_n . В первом столбце числа с нечетными числами $a_1, a_3, a_5 \dots$. В каждой строке индекс каждого следующего числа (счет идет слева направо) меньше на 1 индекса предыдущего числа. Остальные коэффициенты a_i с индексом больше n или меньше 0 меняются на нули. И получаем матрицу

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & a_n \end{pmatrix}$$

Главные миноры Δ_i матрицы Гурвица находятся по формулам

$$\Delta_1 = a_1, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \vdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \vdots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & a_n \end{vmatrix}.$$

Критерий Рауса-Гурвица: Чтобы все корни характеристического уравнения имели отрицательные действительные части, необходимо и достаточно, чтобы все главные диагональные миноры матрицы Гурвица были положительны при условии $a_0 > 0$: $\Delta_1 = 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0$. Так как $\Delta_n = a_n \Delta_{n-1}$, то можно записать $a_n > 0$.

Для системы 2-го порядка условие устойчивости выглядит следующим образом:

$$a_0 > 0, \Delta_1 = a_1 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 > 0$$

или

$$a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0.$$

Рассмотрим систему двух дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y),$$

$$\frac{dy}{dt} = Q(x, y).$$

Рассмотрим стационарные (автономные) системы, то есть где P и Q не зависят явно от времени. Особыми точками данной системы будут называться такие точки, в которых и P и Q одновременно обращаются в ноль[5].

1.1.3 Бифуркация и хаос динамических систем. Обычно под хаосом мы понимаем беспорядок, непредсказуемость действий, какую-либо непоследовательность. Кажется, что хаос возникает из-за случайного изменения каких-либо величин, но это не так. Динамический хаос – хаотическое поведение динамических систем, которые описываются полностью детерминированными дифференциальными или разностными уравнениями. Однако поведение является хаотическим. Условием для появления динамического хаоса является нелинейность системы. Также система должна проявлять зависимость от начальных условий. Такое свойство Лоренц назвал эффектом «бабочки»: даже такое ничтожно малое воздействие, как взмах крыльев бабочки способно привести к значительному изменению динамики хаотической системы.

В 1963г. Эдвард Лоренц занимался компьютерным моделированием метеосистем[6]. Также он изучал конвекцию в подогреваемом снизу слое. Основываясь на уравнении Навье-Стокса, была получена следующая система уравнений

$$\begin{cases} X' = -\sigma X + \sigma Y, \\ Y' = -XZ + \gamma X - Y, \\ Z' = XY - bZ. \end{cases}$$

При $\gamma=28$, $\sigma=10$, $b=8/3$ система начинает вести себя хаотически. На рисунке 1.1 показан вид аттрактора Лоренца. Даже малейшее изменение начальных условий ведут за собой кардинальные изменения поведения системы. Об-

ласть притяжения фазовых траекторий имеет фрактальный характер и называется аттрактором Лоренца.

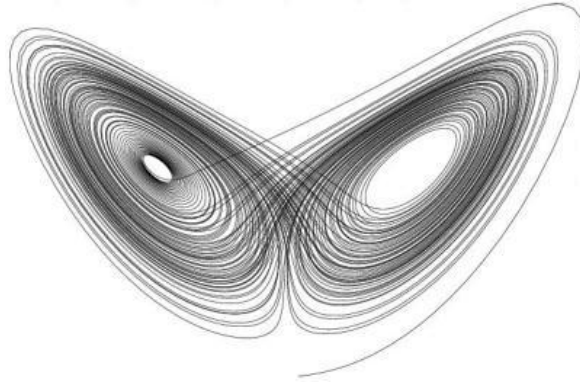


Рисунок 1.1 – Аттрактор Лоренца

Так как данная система уравнений описывает динамику атмосферы, можно сделать вывод о невозможности точного долгосрочного предсказания погоды, поскольку любые замеры параметров атмосферы проводятся с конечной точностью.

В 1976 г. Ресслер предложил систему дифференциальных уравнений, которые описывают динамику химических реакций с перемешиванием[6]:

$$\begin{cases} X' = -(Y + Z), \\ Y' = X + \frac{1}{5}Y, \\ Z' = \frac{1}{5} + Z(X - \mu). \end{cases}$$

Эта модель стала базовой для описания химических процессов в химии. Фазовый портрет системы Ресслера показан на рисунке 1.2.

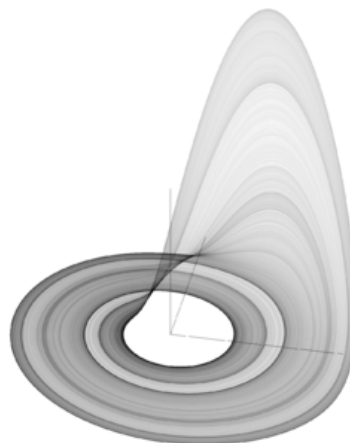


Рисунок 1.2 – Фазовый портрет системы Ресслера

1.2 Примеры математических моделей линейных и нелинейных экономических систем

1.2.1 Математические модели, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями первого порядка. В обыкновенном дифференциальном уравнении вида $y' = ay + b$ или его разностном аналоге $y(t + 1) = ay(t) + b$, где a, b – некоторые постоянные.

При $b=0$ уравнения будут называться однородными. Тогда первое можно записать в виде $y' / y = a$, откуда следует, что оно описывает динамику переменной $y(t)$, которая имеет постоянный темп прироста a , или же зависящий только от времени.

Впервые данное уравнение в социально-экономической сфере использовал в своих исследованиях динамики населения Земли Т. Мальтус [7,8]. Так как при начальном условии $y(0) = y_0$ и постоянном a уравнение будет иметь решение экспоненциального вида $y(t) = y_0 e^{at}$, то Мальтус сделал вывод о неминуемом наступлении голода: население неограниченно растет, а природные ресурсы ограничены. Но он не учитывал механизмы саморегуляции, которые приводят уже к нелинейным системам. Нелинейные модели являются гораздо более гибкими.

$$y' = ay - by^2, \quad (1.7)$$

Уравнение (1.7) – логистическое уравнение в непрерывном времени, а в дискретном оно имеет следующий вид

$$y(t + 1) = ay(t) - by^2(t), \quad (1.8)$$

где $a, b > 0$ – некоторые переменные.

Данные уравнения называют моделью Ферхюльсте-Пирла по имени ученых, которые предложили его в качестве альтернативы к модели Мальтуса для описания динамики биологической популяции [9, 10]. Записав их в виде

$$\frac{y'}{y} = a - by,$$

$$\frac{y(t+1)}{y(t)} = a - by(t).$$

Видно, что в непрерывной модели темп прироста линейно убывает по y , а в дискретной так же ведет себя темп роста (т.е. они уже не постоянны, как у Мальтуса). При малых значениях y главным членом в уравнениях (1.7) и (1.8) является ay , так что при таких y решения этих уравнений ведут себя подобно мальтузианским, но с ростом y начинают превалировать вторые слагаемые – вступают в действие процессы саморегуляции и лимитирования; чем больше значение y , тем сильнее действуют лимитирующие факторы.

1.2.2 Паутинообразные модели в экономике. Рассмотрим паутинообразную модель с запаздыванием спроса – дискретные модели динамики цен первого порядка, в которых наблюдается запаздывание либо спроса, либо предложения. Тогда динамика цен задается уравнением

$$D(P_{t+1}) = S(P_t). \quad (1.9)$$

Соответствующий итерационный процесс изображается на плоскости (Q, p) в виде паутины (рисунок 1.3), которая наматывается на кривые спроса и предложения [11]. Отсюда и название – паутинообразные.

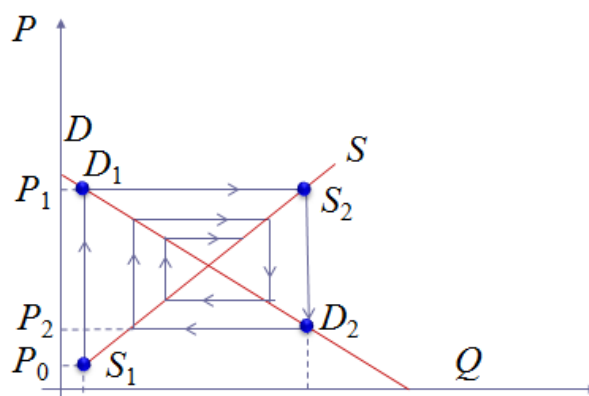


Рисунок 1.3 – Паутинообразная модель при $s < d$
(направление по часовой стрелке)

Концептуальная схема модели любого процесса динамики цен составляет взаимодействие трех подсистем: «товаропроизводитель», «потребитель», «рынок» показана на рисунке 1.4.

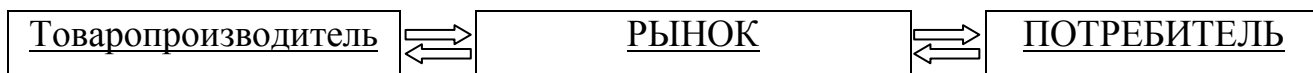


Рисунок 1.4 – Концептуальная схема модели динамики цен

Данная модель является одной из исторически первых динамических моделей рынка, которые отражают поведение участников и иллюстрирует применение метода моделирования при анализе экономических процессов. Существует несколько гипотез, лежащих в основе этой модели:

Гипотеза 1. Товаропроизводитель, принимая решение об объеме предложения, ориентируется на цену предыдущего периода. Это означает, что товаропроизводитель прогнозирует цену на следующий период.

Гипотеза 2. Рынок всегда находится в состоянии равновесия. Чтобы разобрать эту гипотезу, можно представить неодушевленное понятие «рынок» как некоего человека-аукциониста, распоряжающегося на реальном рынке. Задачей аукциониста является установление максимальной цены, при которой найдется покупатель на весь товар, поставляемый на рынок товаропроизводителем (рисунок 1.5).

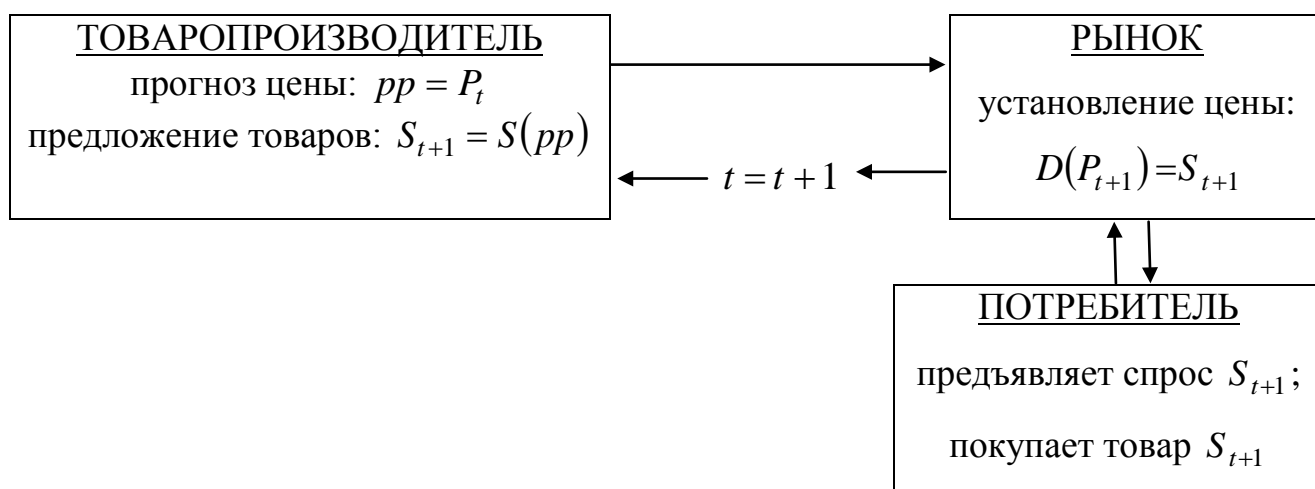


Рисунок 1.5 – Блок-схема паутинообразной модели с запаздыванием спроса

Рассмотрим паутинообразную модель с запаздыванием предложения. Рассмотрим некоторые гипотезы одной из модификаций паутинообразной модели вида (1.9) с запаздыванием предложения:

Гипотеза 1. При определении объема предложения в каждый период времени товаропроизводитель ориентируется на спрос в предыдущий период. Данная гипотеза приводит к росту либо снижению предложения в случае, когда спрос соответственно больше или меньше предложения.

Гипотеза 2. Цена товара устанавливается товаропроизводителем на уровне, определяемом в соответствии с функцией предложения. Здесь предполагается, что предлагаемый объем товара будет оптимальный при определении уровня цен с помощью функции предложения.

Гипотеза 3. Объем потребления товара не может превосходить ни объема предложения, ни объема спроса. Если предложение S_t меньше спроса D_t , то потребление C_t равно предложению. Если же спрос будет меньше предложения (в таком случае мы получим избыточное предложение товара), то потребление равняется спросу, а непроданный товар приводит к затовариванию. Таким образом потребление можем определить по формуле

$$C_t = \min(S_t, D_t).$$

Данную модель можно представить в виде блок-схемы, представленной на рисунке 1.6.

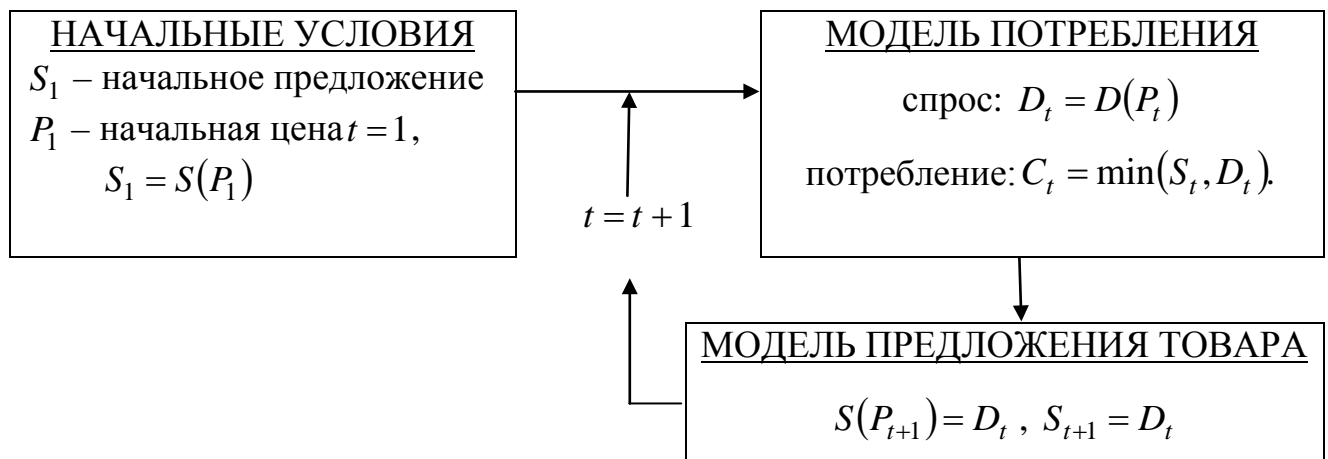


Рисунок 1.6 – Блок-схема паутинообразной модели
с запаздыванием предложения

На первом шаге, при цене P_1 имеем избыточный спрос, поэтому потребление равно предложению. Поскольку товар реализован в объеме S_1 – производитель теряет часть прибыли. Товаропроизводитель принимает решение увеличить выпуск до объема D_1 , при условии неизменности спроса. Далее производитель устанавливает цену P_2 , которой соответствует спрос $D_2 < S_2$. Тогда на втором шаге потребление равно D_2 (часть предложения не находит покупателя по причине высокой цены). Для достижения лучшего результата нужно сократить предложение и снизить цену. Предложение должно снизиться до уровня спроса D_2 , а цена – до уровня P_3 . Далее процесс повторяется; графически его можно представить в виде динамической спирали, изображенной на рисунке 1.7.

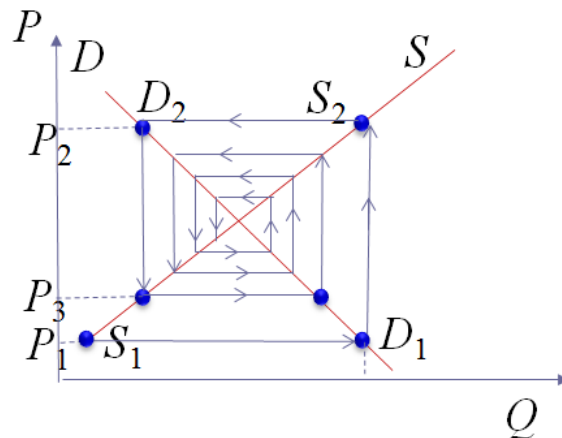


Рисунок 1.7 – Паутинообразная модель при $s > d$
(направление против часовой стрелки)

1.2.3 Некоторые модели макроэкономики.

Модель рынка товаров и механизм установления равновесия

Основные модели макроэкономических процессов в краткосрочном периоде опираются на классический и кейнсианский подходы. В основе классической макроэкономической модели лежит закон Сэя, в котором говорится что «предложение товаров создает спрос». Это означает, что спрос на товары и их предложение неразрывны в масштабах всей экономики [11].

Из закона Сэя следует, что на товарном рынке условием равновесия есть равенство национального дохода и объема национальных расходов:

$$Y = E, \quad (1.10)$$

где Y – национальный доход, E – объем национальных расходов.

Объем национальных расходов – спрос населения и предпринимателей на товары, где инвестиционные товары I и потребительские товары C :

$$E = I + C. \quad (1.11)$$

Также национальный доход Y предназначен для потребления C и сбережений S :

$$Y = C + S, \quad (1.12)$$

поэтому, национальный доход можно понимать как предложение товаров[12].

Из соотношений (1.10) – (1.12) получим условие равновесия между спросом и предложением

$$I = S. \quad (1.13)$$

В рамках классического подхода в основе модели установления равновесия лежат три гипотезы:

Гипотеза 1. Объем сбережений – возрастающая функция ставки процента: $S = S(r)$, $S'(r) > 0$. Графическое изображение функции сбережений изображено на рисунке 1.8.

Гипотеза 2. Зависимость инвестиций от ставки процента монотонно убывает: $I = I(r)$, $I'(r) < 0$.

Гипотеза 3.

1) *Если ставка процента меньше равновесной r_e : $r < r_e$, то спрос на инвестиции превышает сбережения.* Не все предприниматели, желающие платить за заемные средства найдут владельцев сбережений, которые готовы предложить им займы.

2) Если ставка процента больше равновесной r_e : $r > r_e$, то предложение заемных средств S будет превышать спрос I . Не все, кто намерен сберегать, найдут предпринимателей, готовых заплатить r .

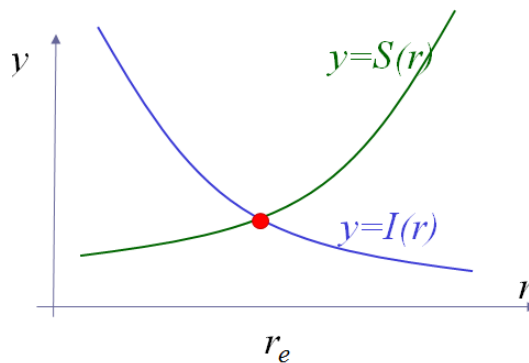


Рисунок 1.8 – Изменение сбережений и капиталовложений в зависимости от ставки процента

Процесс установления равновесия между инвестициями и сбережениями можно показать дифференциальным уравнением

$$\frac{dr}{dt} = a(I(r) - S(r)),$$

где a – коэффициент адаптации ставки процента (положительная константа, характеризующая реакцию рынка на несоответствие спроса предложению).

Уравнение в силу монотонности $S(r)$ и $I(r)$ имеет устойчивое значение r_e , к которому стремятся значения сбережений и капиталовложений.

$$\text{Если } \begin{cases} I = I_e - b(r - r_e) \\ S = I_e + c(r - r_e) \end{cases},$$

где I_e – равновесное значение инвестиций и сбережений;

b, c – положительные константы;

то $r = r_e + (r_0 - r_e)e^{-a(b+c)t}$.

Классическая теория хорошо служила для понимания и макроэкономических процессов и для обоснования государственной экономической политики. Однако она не смогла дать объяснений многих проблем после первой мировой войны и экономического кризиса 30-х годов. Тогда делалось множество попы-

ток усовершенствования теории для анализа новых экономических проблем. Наибольший успех получил подход Дж.М. Кейнса о невозможности существования экономики на основе самоорганизации – государство должно регулировать экономические процессы. Упрощенную модель Кейнса называют моделью мультипликатора: рассматривается один макроэкономический рынок – рынок товаров, который переходит к состоянию равновесия. Гипотеза Кейнса – «спрос создает предложение». Эта фраза является допущением, согласно которому «предпринимателям выгодно расширять производство при наличии избыточного спроса» [11].

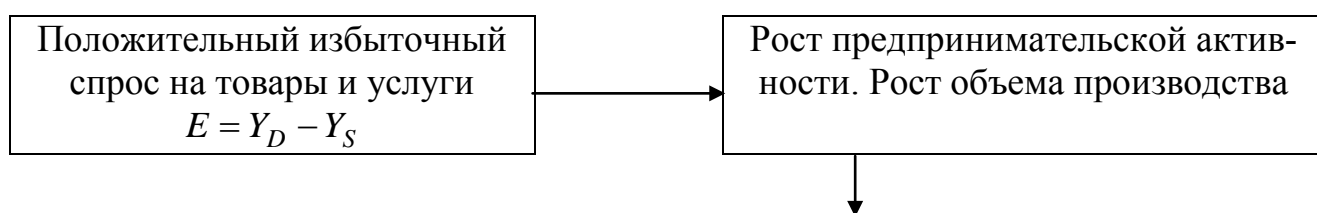
В модели Кейнса состояние экономики описывается двумя переменными: уровень национального дохода, которая трактуется как предложение товаров и услуг – Y_S и Y_D – совокупный спрос на товары и услуги. Y_D представляет собой сумму спроса на инвестиции I и спроса на текущее потребление C_D . При этом C_D есть возрастающая функция национального дохода:

$$C_D = C(Y_S), C'(Y_S) > 0.$$

Предположим, что до некоторого момента времени T экономике находилась в состоянии равновесия, а далее по какой-либо причине спрос на инвестиции увеличился на ΔI . В гипотезе Кейнса говорится, что прирост инвестиций приводит к росту совокупного спроса, что влечет за собой превышение спроса над предложением. Концептуальная схема модели приведена на рисунке 1.9.

При формализации утверждения «спрос создает предложение» учитывают то, что национальный доход в последующий момент времени равен совокупному спросу

$$Y_S(t+1) = Y_D(t).$$



Избыточный спрос вызывает в каждый последующий момент времени рост предложения и сокращение избыточного спроса.

Состояние равновесия

Рисунок 1.9 – Концептуальная схема

макрэкономической модели кейнсианского типа

Спрос складывается из объема потребления (зависит от национального дохода) и капиталовложений $I(t)$:

$$Y_D(t) = C(Y_S(t)) + I(t).$$

Примем линейную зависимость между объемом потребления и национальным доходом:

$$Y_D = a + cY_S + I.$$

Пусть при $t < 0$ инвестиции составляли $I = I_0$ и система находилась в равновесии, то:

$$Y_D(t) = Y_S(t) = \frac{I_0 + a}{1 - c}.$$

Пусть при $t = 0$ равновесие системы нарушилось из-за импульсного увеличения спроса до уровня $I_1 > I_0$, тогда получим

$$Y_S(t + 1) = I_0 + \Delta I + a + cY_S(t).$$

При этом начальное значение национального дохода можно вычислить по формуле

$$Y_S(0) = \frac{I_0 + a}{1 - c}.$$

При $0 < c < 1$ – итерационный процесс будет сходиться.

1.3 Математические модели, описывающие динамику финансовых систем

В настоящее время стремительно растет число применений дробного исчисления в различных областях науки, естествознания, экономики и других исследованиях, использующих математические методы и средства компьютерного моделирования. Введение нецелочисленных порядков, уточнение математи-

ческих моделей процессов в различных областях науки, технике, технологии приводит к новой постановке, ранее известных, задач.

Дробные версии математических моделей финансовых систем демонстрируют интересное динамическое поведение, которое может хорошо отражать фиксированные точки, и периодические, и хаотические движения. Обнаружено, что хаос проявляется в поведении моделей финансовых систем дробного порядка при порядках меньше трех.

В литературе представлена математическая модель финансовой системы, которая формализуется в виде нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка. Впервые модель была детально изучена учеными Ма и Chen [13, 14]:

$$\begin{cases} X' = Z + (Y - a)X, \\ Y' = 1 - bY - X^2, \\ Z' = -X - cZ, \end{cases}$$

где X – ставка процентов;

Y – спрос на капитальные вложения;

Z – индекс цен;

a – величина сбережений;

b – стоимость инвестиций;

c – эластичность спроса коммерческих рынков.

В работах [13, 14] представлена детерминированная модель, описывающая динамику финансовых систем на основе классических методов математического анализа. Но переменные, которые определяют поведение модели финансовых систем, характеризуются наличием долговременной памяти и для формализации систем, проявляющих фрактальные свойства, нашли применение дифференциальные уравнения дробного порядка. В работе [15] Chen предложил использовать дробное обобщение математической модели финансовой системы в постановке нелинейных дифференциальных уравнений дробных порядков:

$$\begin{cases} \frac{d^{q_1} X}{dt^{q_1}} = Z = (Y - a)X, \\ \frac{d^{q_2} X}{dt^{q_2}} = 1 - bY - X^2, \\ \frac{d^{q_3} X}{dt^{q_3}} = -X - cZ. \end{cases}$$

Для реализации подобного класса моделей требуется привлечения концепций теории дробно-дифференциального исчисления [16].

Авторами Juma и Hammodat была предложена вариационная модель с четырьмя переменными, исследована ее устойчивость, определены интервалы значений параметров, при которых динамическая система устойчива [17].

В работе [18] группа ученых предложила использовать элементы теории управления для моделирования нелинейной динамики финансовой системы. Динамическое поведение нелинейной финансовой хаотической системы моделировалось электронной схемой, и ее поведение изучалось с помощью инструментов моделирования систем управления.

Jabbari в совместной работе [19] с Kheiri представили схему адаптивного управления для изучения антисинхронизационного поведения между двумя идентичными модифицированными трехмерными хаотическими финансовыми системами с неизвестными параметрами.

Статья Kai и Zhang [20] посвящена классу нелинейной хаотической финансовой модели управления с обратной связью. Они предложили модификацию математической модели финансовой системы с учетом эффекта запаздывания. В [21] описана модификация, учитывающая сверхрасходыв экономико-математической постановке задачи моделирования финансовой системы. Другие модификации были направлены на модернизацию алгоритмов, например, в работе [22] предлагается использовать скользящий режим и пассивный контроль. В статье Chenи соавторов [23] рассмотрена модель финансовой системы как объекта теории управления, при этом проведена реализация модифицированной модели с четырьмя переменными.

Оценка параметров модели финансовой системы с запаздыванием проведена в работе [24]. С этой целью авторы используют ресурсы сайта www.tradingeconomics.com[25]. Авторы установили времена запаздывания, однако инициализация параметров a, b, c остается за рамками рассмотрения данной работы.

1.4 Базовые параметры модели финансовой системы и их экономический смысл

Для математической формализации экономической системы всеми авторами [13, 14, 15, 17-25] вводятся в рассмотрение следующие переменные:

x – ключевая ставка (interest rate);

y – валовое накопление основного капитала (Gross Fixed capital formation);

z – индекс цен (Consumer price index, CPI).

Кроме того, экономический смысл имеют и управляющие параметры математической модели:

a – величина сбережений;

b – стоимость инвестиций;

c – эластичность спроса коммерческих рынков.

Приведем описание основных переменных и параметров математической модели финансовой системы.

Ключевая ставка – это минимальная процентная ставка, по которой Центральный банк России (ЦБ РФ) предоставляет кредиты коммерческим банкам на срок в 1 неделю, и в то же время это максимальная ставка, по которой ЦБ РФ готов принимать от банков на депозиты денежные средства. Она играет ключевую роль при установлении процентных ставок по банковским кредитам и оказывает влияние на уровень инфляции и стоимость фондирования банков. Измеряется в %, либо в долях от единицы.

Валовое накопление основного капитала – это прирост нефинансовых активов, которые в течение длительного времени используются в процессе производства.

Размер валового накопления основного капитала оценивается исходя из общей стоимости основных средств, приобретенных институциональными единицами (за исключением реализованных) в отчетном периоде, а также увеличение невыработанное активов, которое произошло в результате продуктивной деятельности институциональных единиц

Размер валового накопления основного капитала оценивается исходя из общей стоимости основных средств, приобретенных институциональными единицами (за исключением реализованных) в отчетном периоде, а также увеличение невыработанное активов, которое произошло в результате продуктивной деятельности институциональных единиц. Рассчитывается в % от ВВП.

Индекс цен – это индекс цен, который рассчитывается для определенной группы товаров и услуг, определяющих состав потребительской корзины одного жителя страны и рассчитывающийся за определенный период времени. Индекс потребительских цен представляет собой отношение всей потребительской корзины базового года, которая оценивается в ценах текущего года, к потребительской корзине за базовый год, которая оценивается в ценах базового года.

Величина сбережений – это отсроченное на будущее потребление или часть дохода, которая не потребляется в настоящее время.

Стоимость инвестиции – будущие доходы для каждого конкретного инвестора. При этом будущая выгода приводится к настоящему времени.

Эластичность спроса коммерческих рынков – эластичность спроса характеризует степень реакции спроса на действие какого-либо фактора. В зависимости от вида фактора, воздействующего на спрос, различают эластичность спроса по цене, эластичность спроса по доходу и перекрестную эластичность.

Для просмотра численных значений показателей можно воспользоваться ресурсом сайта www.tradingeconomics.com, который предоставляет пользователям точную информацию на разных языках для 196 стран, включая исторические данные для более чем 300 тысяч экономических показателей, таких как курсы валют, индексы фондового рынка, доходности государственных облига-

ций и цен на сырьевые товары [25]. Поиск может осуществляться как по странам, так и по конкретным показателям.

2 ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АППАРАТА ДРОБНО-ГОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ФИНАНСОВОЙ СИСТЕМЫ

2.1 История введения и основные понятия дробного дифференцирования и интегрирования

Интерес к дробному математическому анализу возник почти одновременно с появлением классического анализа. Математический анализ с использованием интегро-дифференциальных операторов нецелых порядков или дробное исчисление (Fractional Calculus) имеет более чем трехвековую историю. Первое упоминание о производных нецелого порядка содержится в переписке Я. Бернулли и Г. Лейбница. Г. Лейбниц в письмах Г. Лопиталю (1695 г.) сделал несколько замечаний о возможности рассматривать дифференциалы и производные порядка $1/2$ [26].

Первый шаг был сделан Л. Эйлером в 1738 г., заметившим, что результаты вычисления производной $\frac{d^p x^a}{dx^p}$ от степенной функции можно придать смысл при нецелом p . Следующий шаг сделан Ж. Фурье в 1822 г., который предложил использовать равенство [27]:

$$\frac{d^p f(x)}{dx^p} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^p d\lambda \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(tx - t\lambda + p\pi/2) dt$$

для определения производной нецелого порядка. Это было первое определение производной любого положительного порядка и от любой функции.

В своем цикле работ Ж. Лиувилль (1832–1835 гг.), применяя разложение функций в степенные ряды, определял « p »-ю производную путем почленного дифференцирования. Он же, в частности, дал первые практические приложения созданной им теории к решению задач математической физики. Затем Б. Риман (1847 г.) предложил иное решение на основе определенного интеграла, пригодное к степенным рядам с нецелыми показателями [26]. Конструкции Лиувилля и Римана являются основными формами дробного интегрирования.

$$\frac{\partial^\alpha f(t)}{\partial t^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^\alpha}, f(x) \in [a,b], 0 < \alpha < 1.$$

Развивая идею Лиувилля, А. Грюнвальд (1867 г.) ввел понятие дробной производной как предела разностных отношений [4].

$$\frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{\left[\frac{t}{h} \right]} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t - jh).$$

Параллельно с теоретическими начинаниями разрабатывались приложения дробного анализа к решению различных задач. Одним из первых таких приложений явилось открытие Н. Абеля (1823 г.), показавшего, что решение задачи о таутохроне может быть получено путем интегрального преобразования, которое записывается как производная полуцелого порядка.

Его работы сыграли огромную роль в развитии идей дробного интегро-дифференцирования. Заслугой Хольмгрена является рассмотрение дробного дифференцирования как операции, обратной интегрированию, и приложение данных понятий к решению обыкновенных дифференциальных уравнений.

Большой вклад в развитие математического анализа нецелых порядков внес известный русский математик, президент Московского математического общества А.В. Летников, который за время своей 20-летней научной деятельности разработал полную теорию дифференцирования с произвольным показателем.

Дробное исчисление стало строгой математической теорией, только начиная с работ А.В. Летникова. В конце XIX в. вышла содержательная работа Ж. Адамара (1892 г.), в которой на основе разложения в ряд Тейлора было рассмотрено дробное дифференцирование аналитической в круге функции по радиусу, которое носит название подхода Адамара [26].

В первой половине XX в. заметный вклад, как в теорию, так и в практику дробного анализа внесли Г. Харди, Г. Вейль, М. Рисс, П. Монтель, А. Маршо, Д., А. Зигмунд, Х. Кобер, Ж. Коссар, и ряд других ученых. В 1915 г. Г. Харди и М. Рисс использовали дробное интегрирование для суммирования расходящихся

ся рядов. В 1917 г. Г. Вейль определил дробное интегрирование для периодических функций в виде свертки с некоторой специальной функцией. Аналог неравенства С.Н. Бернштейна для дробных производных алгебраических многочленов на конечном отрезке дал в 1918 г. П. Монтель. В работе А. Маршо (1927 г.) была введена новая форма дробного дифференцирования, которая применима в случае функций с «плохим» поведением на бесконечности. Были введены в обиход дробные производные Маршо [27].

$$\frac{\partial^\alpha f(t)}{\partial t^\alpha} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(x)f(x \mp t)dt}{t^{1+\alpha}}, 0 < \alpha < 1.$$

В работах М. Рисса (1936, 1938, 1949 г.г.) были получены операторы типа потенциала (потенциалы Рисса), позволившие определить дробное интегрирование функций многих переменных. Для некоторых интегральных операторов и интегральных уравнений очень полезными оказались дробные интегралы Эрдейи и Кобера (1940 г.) и т.д. [27]

2.2 Приближенные методы вычисления дробной производной и решение дифференциальных уравнений

2.2.1 Гамма-функция Эйлера. Дробный математический анализ имеет дело с функциями, которые представляют собой своего рода обобщение функций, применяемых в классическом анализе. Так, например, гамма-функция Эйлера является обобщением понятия факториала на нецелые числа и играет фундаментальную роль в дробном математическом анализе. Выражение для определения гамма-функции имеет вид [28]:

$$\Gamma(x) = \begin{cases} \int_0^\infty \exp(-t)t^{x-1} dt, & (\operatorname{Re}(x) > 0), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n^{x-1}}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1)}, & (x - \text{любой}). \end{cases}$$

Факториал $x!$ и гамма-функция $\Gamma(x)$ при целом неотрицательном x связаны соотношением: $\Gamma(n+1) = n!$.

На рисунке 2.1а представлен график модуля гамма-функции.

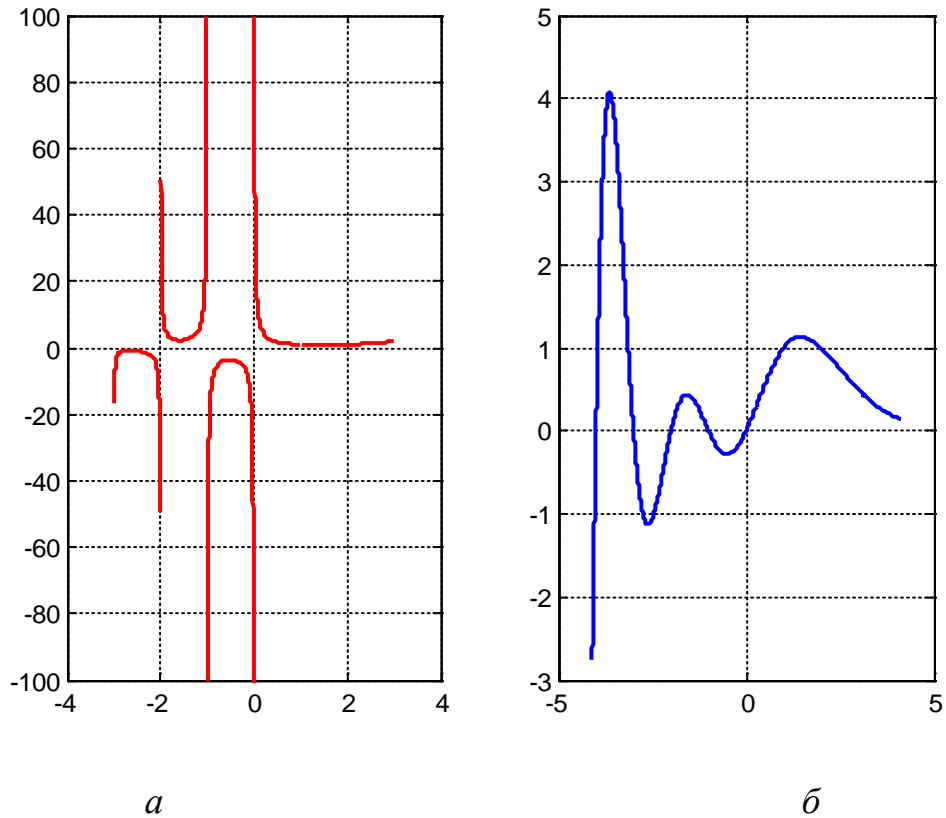


Рисунок 2.1 – Гамма-функция действительного аргумента – *a*;
график функции $1/\Gamma(x)$ – *б*

Как видно на графике, гамма-функция имеет разрывы, однако в дробном анализе чаще используется гамма функция в степени -1 , график которой изображен на рисунке 2.1б.

Неполная Гамма – функция определяется выражением:

$$\gamma(c, x) = \frac{c^{-x}}{\Gamma(x)} \int_0^x y^{x-1} e^{-y} dy = e^{-x} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{\Gamma(j+c+1)}.$$

2.2.2 Дробные производные и интегралы некоторых элементарных функций (степенные, экспоненциальные, логарифмические, синусоидальные)

Степенные функции

Рассмотрим переход от производной целого порядка к определению производной дробного порядка. Запишем сначала формулы дифференцирования с порядками $1, 2, \dots, n$ для степенной функции $x(t) = t^k$

$$\frac{dx(t)}{dt} = kt^{k-1},$$

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = k(k-1)t^{k-2},$$

...

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} = k(k-1)\dots(k-n+1)t^{k-n} = \frac{k!}{(k-n)!}t^{k-n}.$$

Заменяв целое значение n на нецелое значение α и факториальную функцию $(n-1)!$ на гамма-функцию нецелого аргумента $\Gamma(\alpha)$, получим формулу дифференцирования степенной функции с дробным порядком:

$$\frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\alpha+1)}t^{k-\alpha}. \quad (2.1)$$

Экспоненциальные функции

Рассмотрим экспоненциальную функцию $y(t) = e^{kt}$.

Дифференцируя ее с порядками $1, 2, \dots, n$ получим:

$$\frac{dy(t)}{dt} = ke^{kt},$$

...

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} = k^n e^{kt}.$$

Выражение производной порядка n обобщается на дробные порядки путем простой замены n на β :

$$\frac{d^\beta y(t)}{dt^\beta} = k^\beta e^{kt}. \quad (2.2)$$

Логарифмические функции

Первая производная натурального логарифма, как известно, является гиперболой:

$$\frac{d \ln t}{dt} = \frac{1}{t}.$$

Формула n -ой производной натурального логарифма имеет вид:

$$\frac{d^n \ln t}{dt^n} = (-1)^{n-1} (n-1)! \frac{1}{t^n}.$$

Если основание логарифма равно a , эти выражения изменяются незначительно и принимают вид:

$$\frac{d \log_a t}{dt} = \frac{1}{t \ln a},$$

$$\frac{d^n \log_a t}{dt^n} = (-1)^{r-1} (r-1)! \frac{1}{t^n \ln a}. \quad (2.3)$$

Синусоидальные функции

Поступая аналогично, получим систему формул целочисленного и дробного дифференцирования синусоидальной функции $z(t) = \sin(\omega t + \alpha)$:

$$\frac{dz(t)}{dt} = \omega \cos(\omega t + \alpha) = \omega \sin(\omega t + \alpha + \pi/2),$$

$$\frac{d^2 z(t)}{dt^2} = \omega^2 \sin(\omega t + \alpha + 2\pi/2),$$

...

$$\frac{d^n z(t)}{dt^n} = \omega^n \sin(\omega t + \alpha + n\pi/2),$$

$$\frac{d^\beta z(t)}{dt^\beta} = \omega^\beta \sin(\omega t + \alpha + \beta\pi/2).$$

Для n -кратного интеграла известна формула:

$$\int_a^x dx \int_a^x dx \dots \int_a^x f(x) dx = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt. \quad (2.4)$$

Заметив, что $(n-1)! = \Gamma(n)$, видим, что правой части уравнения (2.4) можно придать смысл при нецелых значениях n .

Интегралы

$$(I_a^\alpha + f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, x > a, \quad (2.5)$$

$$(I_b^\alpha - f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{f(t)}{(t-x)^{1-\alpha}} dt, x < b, \quad (2.6)$$

где $\alpha > 0$ называют интегралами дробного порядка α . Интеграл (2.5) называют левосторонним, а (2.6) – правосторонним.

Операторы I_{a+}^{α} , I_{b-}^{α} называют операторами дробного интегрирования. Интегралы (2.5), (2.6) принято также называть дробными интегралами Римана-Лиувилля.

Интеграл порядка α от константы β [26]:

$$\frac{d^{\alpha}\beta}{dx} = \frac{\beta}{\alpha\Gamma(\alpha)} x^{\alpha}.$$

Рассмотрим формулы численного дифференцирования некоторой функции $f(t)$, задав на интервале изменения аргумента t сетку с шагом h [3]:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h}, \\ \frac{d^2}{dt^2} f(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)}{h^2}, \\ &\dots \\ \frac{d^n}{dt^n} f(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} f(t-jh), \end{aligned} \quad (2.7)$$

где $\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!}$ – биномиальные коэффициенты.

Сделав аналогичные замены, получим формулу Грюнвальда-Летникова для определения дробной производной функции порядка α :

$$\begin{aligned} D_t^{\alpha} f(t) &= \frac{d^{\alpha} f(t)}{dt^{\alpha}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{j=0}^{\left[\frac{t}{h} \right]} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t-jh) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{j=0}^{\left[\frac{t}{h} \right]} (-1)^j \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\alpha-j+1)} f(t-jh), \end{aligned} \quad (2.8)$$

где $\left[x \right]$ – целая часть x .

Функция $f(t)$ может быть приближенно проинтегрирована известным методом прямоугольников, если разбить интервал интегрирования на N участков длиной h

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \approx h(f(t) + f(t-h) + f(t-2h) + \dots + f(t-nh)), \quad (2.9)$$

где $h = t / N$.

Аналогично для двойного интеграла формула численного интегрирования примет вид:

$$D_t^{-2} f(t) = \int_0^t \int_0^{t_1} f(t_2) dt_2 dt_1 \approx h^2 (f(t) + 2f(t-h) + 3f(t-2h) + \dots + (n+1)f(t-nh)),$$

где $h = t / N$.

Для n -кратного интегрирования можно получить [3]:

$$D_t^{-n} f(t) = \int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n-1}} f(t_1) dt_1 dt_2 \dots dt_{n-2} dt_{n-1} \approx h^n \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t}{h} \rfloor} (-1)^j \frac{(-n)!}{j!(-n-j)!} \times \\ \times f(t-jh) = h^n \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t}{h} \rfloor} \frac{(n+j-1)!}{j!(n-1)!} f(t-jh),$$

где $\lfloor x \rfloor$ – целая часть x .

Формула численной аппроксимации дробной производной может быть использована для построения сеточных алгоритмов приближенного решения дифференциальных уравнений нецелого порядка. Среди известных методов численного решения дифференциальных задач с дробной производной широкое развитие получили алгоритмы операционного исчисления. Кроме того, прямое использование формулы Грюнвальда-Летникова для аппроксимации производной позволяет строить эффективные явные и неявные конечно-разностные схемы решения дробно-дифференциальных задач [26].

3 МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДЛЯ РЕАЛИЗАЦИИ ФРАКТАЛЬНОЙ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ ФИНАНСОВОЙ СИСТЕМЫ

3.1 Математическая постановка задачи моделирования фрактальной динамики финансовых систем

Как было показано в главе 1, математическая постановка задачи моделирования динамики финансовой системы определяется задачей Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений дробного порядка. Трехмерная динамическая модель, описывающая поведение финансовой системы, в детерминированной постановке задается вариацией трех переменных состояния и имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} = z + (y - a) \cdot x, \\ \frac{d^\alpha y}{dt^\alpha} = 1 - b \cdot y - x^2, \\ \frac{d^\alpha z}{dt^\alpha} = -x - c \cdot z, \end{cases} \quad (3.1)$$

где x – ключевая ставка;

y – валовое накопление основного капитала;

z – индекс потребительских цен;

$a \geq 0$ – параметр, величина сбережений;

$b \geq 0$ – параметр, стоимость инвестиции;

$c \geq 0$ – параметр, эластичность спроса коммерческих рынков;

α – порядок дробной производной.

Модель в постановке (3.1) можно записать в следующем эквивалентном матрично-векторном виде:

$$\frac{d^\alpha X}{dt^\alpha} = F(X, t), \quad (3.2)$$

где компоненты вектора X соответствуют переменным модели:

$$x = X^1, y = X^2, z = X^3.$$

Для замыкания математической постановки задачи (3.1) или (3.2) требуется задать начальные условия:

$$x(t_0) = X_0^1, y(t_0) = X_0^2, z(t_0) = X_0^3 \text{ при } t=t_0. \quad (3.3)$$

3.2 Исследование устойчивости динамической системы

Проведем качественный анализ модели (3.1), (3.3) на устойчивость с использованием критерия Рауса-Гурвица. Для этого зафиксируем значения параметров $c=1, b=0.1$. Определим точки равновесия из решения стационарного уравнения:

$$\begin{cases} x(y - a) + z = 0, \\ 1 - by - x^2 = 0, \\ -x - cz = 0, \end{cases}$$

в зависимости от значения параметра a .

Выразим из последних двух алгебраических уравнений переменные y и z :

$$z = -\frac{x}{c},$$

$$y = -\frac{x^2}{b} + \frac{1}{b}.$$

Подставив z и y в первое уравнение системы, получим три решения в зависимости от значений параметров модели:

$$M_1\left(0, \frac{1}{b}, 0\right), M_{2,3}\left(\pm \sqrt{1 - ab - \frac{b}{c}}, \frac{1}{c} + a, \mp \frac{\sqrt{1 - ab - \frac{b}{c}}}{c}\right).$$

Запишем матрицу Якоби для системы линейных алгебраических уравнений в следующем виде:

$$J(x, y, z) = \begin{pmatrix} y - a & x & 1 \\ -2x & -b & 0 \\ -1 & 0 & -c \end{pmatrix}.$$

Составим характеристическое уравнение, используя условие:

$$\begin{vmatrix} y-a-\lambda & x & 1 \\ -2x & -b-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & -c-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

где λ – собственные числа.

Имеем

$$(-c-\lambda)(-b-\lambda)\left(\frac{1}{b}-a-\lambda\right)-(b+\lambda)=0.$$

Для определенности будем считать, что значения параметров b и c зафиксированы: $b=0.1$ и $c=1$, а значение параметра a варьируется. Определенность параметров b и c накладывает ограничения на значение параметра a для второй и третьей особых точек: $1-ab-\frac{b}{c} \geq 0$. Откуда следует, что должно удовлетворять условию: $a \leq 9$.

Далее проведем исследование на устойчивость с использованием критерия Рауса-Гурвица. Рассмотрим частные случаи:

1. Для точки $M_1\left(0, \frac{1}{b}, 0\right)$ параметры a , b , смогут принимать любые фиксированные значения, в нашем случае $b=0.1$ и $c=1$. Получим характеристическое уравнение в виде:

$$\lambda^3 + (a-8.9)\lambda^2 + (1.1a-9.9)\lambda + (0.1a-0.9) = 0.$$

Согласно критерию Рауса-Гурвица, решение системы устойчиво, если одновременно справедливы следующие неравенства:

$$a-8.9 > 0,$$

$$1.1a-9.9 > 0,$$

$$0.1a-0.9 > 0,$$

$$(a-8.9)(1.1a-9.9)-(0.1a-0.9) > 0.$$

Получаем, что при $a > 9$ мы имеем асимптотически устойчивое решение, соответствующее особой точке M_1 (все неравенства верны одновременно).

2) Для точек $M_{2,3} \left(\pm \sqrt{1 - ab - \frac{b}{c}}, \frac{1}{c} + a, \mp \frac{\sqrt{1 - ab - \frac{b}{c}}}{c} \right)$ параметры b ,

сфиксированы, а параметр a определяется из условия неотрицательности подкоренного выражения, в нашем случае $b=0.1$, $c=1$ и $a \leq 9$.

Получим характеристическое алгебраическое уравнение третьего порядка:

$$\lambda^3 + 0.1\lambda^2 + (1.8 - 0.2a)\lambda + (1.8 - 0.2a) = 0.$$

Согласно критерию Рауса-Гурвица, решение системы устойчиво, если одновременно справедливы неравенства и для последнего уравнения:

$$1.8 - 0.2a > 0,$$

$$0.1(1.8 - 0.2a) - (1.8 - 0.2a) > 0.$$

В одном из неравенств Рауса-Гурвица требуем $a < 9$, в другом $a > 9$. Но одновременно это не может быть верно. Из этого следует, что при $b=0.1$, $c=1$ и $a \leq 9$ решения, соответствующие особым точкам M_2 и M_3 , будут асимптотически неустойчивы.

3.3 Вычислительная схема реализации модели финансовой системы

Вычислительную схему для реализации модели (3.1), (3.3) будем строить с использованием формулы Грюнвальда-Летникова [26] для численной аппроксимации производной дробного порядка на временной сетке $\omega = \{t_i = ih, i = \overline{0, T}\}$:

$$\frac{d^\alpha X^k(t)}{dt^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{i=0}^T \frac{\Gamma(i-\alpha)}{\Gamma(i+1)} X^k(t-ih), \quad (3.4)$$

где h – шаг по времени;

$k = \overline{1,3}$ – индекс переменной модели;

$\Gamma(\alpha)$ – гамма-функция Эйлера.

Для конструирования вычислительной схемы решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений дробного порядка рассмотрим сначала

общий принцип решения одного дробно-дифференциального уравнения в следующей общей постановке:

$$\frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} = g(x, t), \quad (3.5)$$

где $x(t)$ – искомая функция;

α – порядок дробной производной.

$g(x, t)$ – функция правой части дифференциального уравнения с начальным условием

$$x(t_0) = x_0. \quad (3.6)$$

Формула Грюнвальда-Летникова для аппроксимации производной $\frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha}$

на сетке $\omega = \{t_i = t_0 + ih, i = \overline{0, T}\}$ может быть записана в следующей форме:

$$\frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{i=0}^T \frac{\Gamma(i-\alpha)}{\Gamma(i+1)} x(t-ih), \quad (3.7)$$

где h – шаг по времени.

Тогда последовательная аппроксимация производной для i -го узла $x(t_i) \approx x_i$:

$$\frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \frac{1}{h^\alpha} \left(\frac{\Gamma(-\alpha)}{\Gamma(1)} x_1 + \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(2)} x_0 \right) = g(x_0, t_0), \quad i = 1;$$

$$\frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \frac{1}{h^\alpha} \left(\frac{\Gamma(-\alpha)}{\Gamma(1)} x_2 + \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(2)} x_1 + \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\Gamma(3)} x_0 \right) = g(x_1, t_1), \quad i = 2;$$

...

и подстановка конечно-разностного аналога в уравнение (3.5) позволяет сконструировать явную конечно-разностную схему:

$$x_{i+1} = \Gamma(1)(h^\alpha g(x_i, t_i) - \sum_{j=1}^{i+1} \gamma_j^\alpha x_{i-j+1}), \quad (3.8)$$

где $\gamma_j^\alpha = \frac{\Gamma(j-\alpha)}{\Gamma(-\alpha) \cdot \Gamma(j+1)}$.

Таким образом, обобщим схему численного решения задачи (3.5)-(3.6) на случай трех независимых переменных модели (3.1), (3.3) и запишем явную конечно-разностную схему решения задачи:

$$X_{i+1}^k = \Gamma(1) \left(h^\alpha F^k(X_i, t_i) - \sum_{j=1}^{i+1} \gamma_j^\alpha X_{i-j+1}^k \right), \quad i = \overline{0, N}, \quad \gamma_j^\alpha = \frac{\Gamma(j-\alpha)}{\Gamma(-\alpha) \cdot \Gamma(j+1)}. \quad (3.9)$$

Порядок аппроксимации производной в схеме (3.9) соответствует $O(h)$. В этом случае можно провести аналог с явными многошаговыми методами для решения задач Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений целого порядка [29], например с методом Адамса. При использовании последних, для расчета значения функции в i -ом узле используют p значений в предыдущих узлах в зависимости от порядка точности метода. В случае решения дробно-дифференциального уравнения используются значения во всех предыдущих узлах. Поэтому общая схема (3.9) отражает идейный смысл использования дробной производной для моделирования системы с памятью: каждое последующее значение рассчитывается через все предыдущие.

3.4 Алгоритмизация и программная реализация модели в ППП Matlab

Приведем формальное представление алгоритма решения прикладной задачи в постановке (3.1), (3.3), используя блок-схему, показанную на рисунке 3.1.

Программная реализация алгоритма явного конечно-разностного метода решения задачи вида (3.6), (3.7) проведена в ППП Matlab. Листинг прикладной программы приведен в Приложении А.

MATLAB – это высокоуровневый язык и интерактивная среда для программирования, численных расчетов и визуализации результатов. С помощью MATLAB можно анализировать данные, разрабатывать алгоритмы, создавать модели и приложения [30]. С помощью MATLAB можно анализировать данные, разрабатывать алгоритмы, создавать модели и приложения. Основные достоинства этого пакета заключаются в возможности совместного применения алгоритмических основ программирования, встроенного инструментария для ре-

шения частных математических задач и среды разработки графического интерфейса пользователя, что позволяет создавать, модифицировать и интегрировать в комплексы проблемно-ориентированных программ отдельные функциональные и системные модули, ориентированные на решение поставленных научных задач.

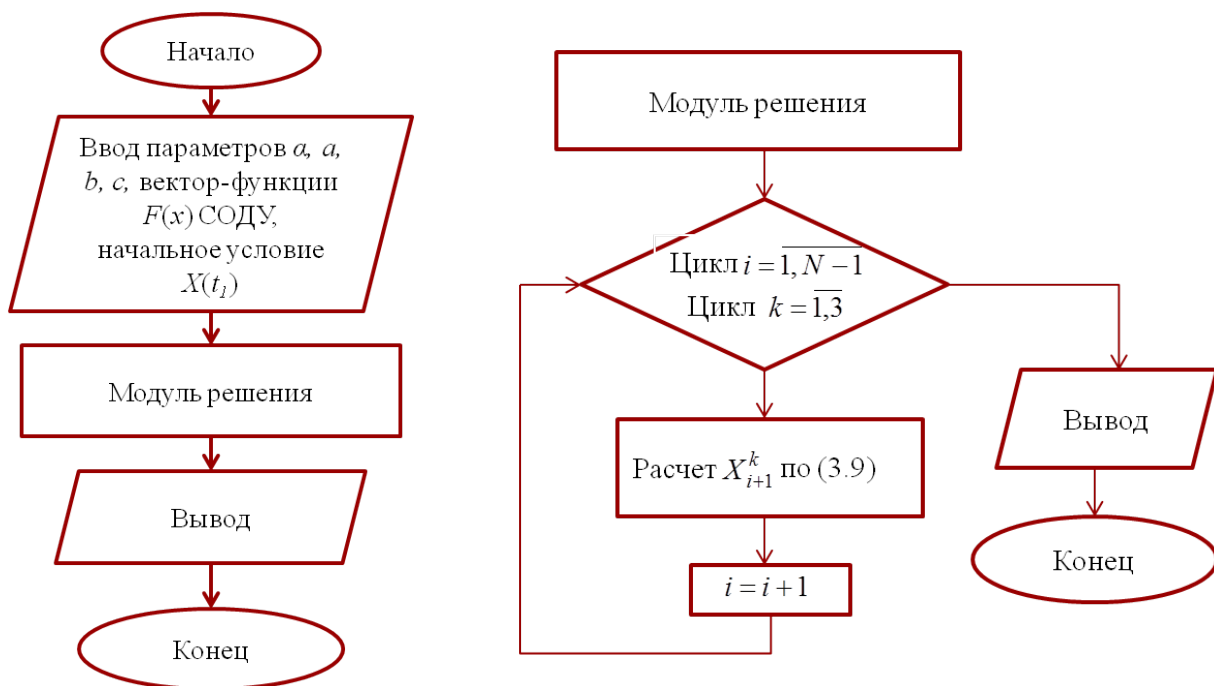


Рисунок 3.1 – Блок-схема алгоритма реализации модели

Сформулируем стандартную спецификацию на разработку прикладной программы.

1. *Системные требования.* Рекомендуемыми системными требованиями являются: операционная система WindowsXP/Vista/7/8/10 Mac, Linux, процессор Intel или AMD, видеокарта с памятью 1Гб, оперативная память 2 Гб, 4-6 Гб на диске, мышь, монитор.

2. *Входные и выходные данные.*

Входные данные: ключевая ставка, валовое накопление основного капитала и индекс цен.

Выходные данные: графическое изображение динамики ключевой ставки, валового накопления основного капитала и индекса цен с течением времени.

3. *Верификация работы программы.* Для проверки адекватности работы программы рассмотрим тест-пример и сравнение аналитического решения и найденного численным методом. Пусть требуется решить задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x + 4y \\ \frac{dy}{dt} = -x + 3y \end{cases} \quad (3.10)$$

с начальными условиями $x(0) = 3, y(0) = 0$.

Решая аналитически, получаем общее решение системы в виде:

$$\begin{cases} x(t) = 4C_1e^{-t} + C_2e^{2t} \\ y(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{2t} \end{cases},$$

где C_1, C_2 – постоянные.

Найдем частное решение, соответствующее начальным условиям $x(0) = 3, y(0) = 0$:

$$\begin{cases} x(0) = 4C_1 + C_2 = 3 \\ y(0) = C_1 + C_2 = 0 \end{cases}, 3C_1 = 3 \Rightarrow C_1 = 1; C_2 = -1.$$

Частное решение имеет вид:

$$\begin{cases} x(t) = 4e^{-t} - e^{2t} \\ y(t) = e^{-t} - e^{2t} \end{cases}.$$

Для сравнения с численным решением положим $\alpha = 0.999$. Решим систему (3.10) при помощи разработанной программы в ППП Matlabи приведем графическую визуализацию. Результаты сравнения точного и приближенного решения тест-задачи приведены на рисунке 3.2. Листинг программы представлен в Приложении Б.

Абсолютная погрешность оценивалась с помощью двух видов норм: нормы Евклида и нормы-максимум. Значения расчетов практической оценки погрешности приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Практическая оценка погрешности

| Переменная | Оценка погрешности численного решения | |
|------------|--|--|
| | Норма Евклида $\xi = \sqrt{\sum_i (X - \bar{X})^2}$ | Норма-максимум $\xi = \max_i X - \bar{X} $ |
| x | 1.155 | 0.624 |
| y | 1.241 | 0.652 |

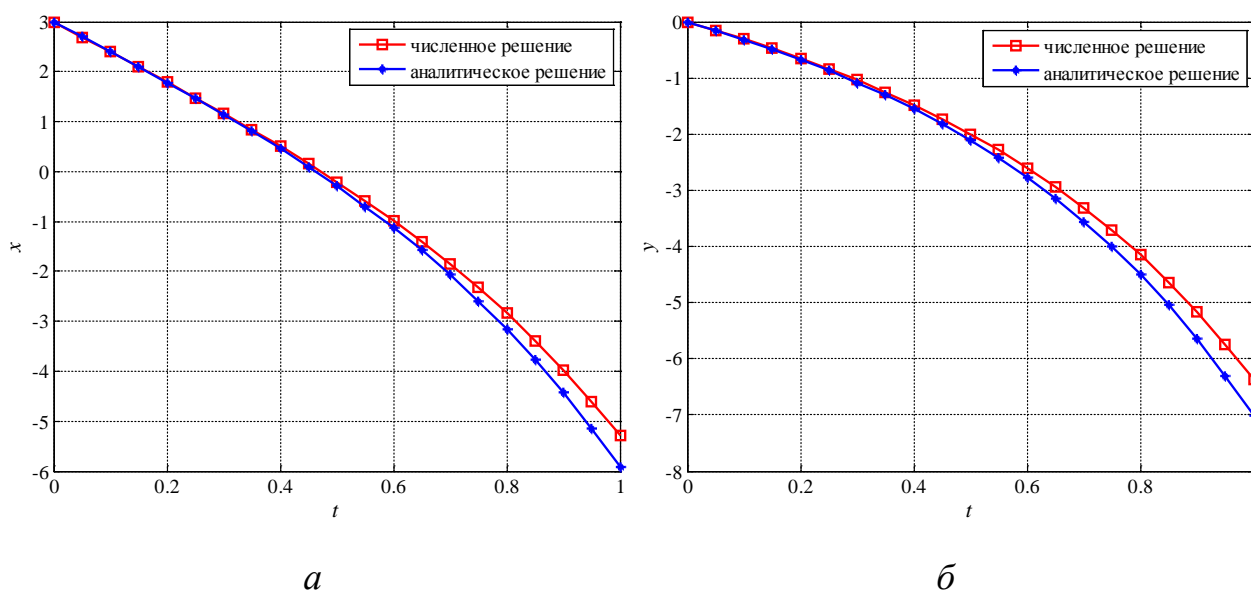


Рисунок 3.2 – Точное и приближенное решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений: для $x(t) - a$; для $y(t) - б$

3.5 Вычислительный эксперимент

Проведем серию модельных экспериментов при варьировании параметров модели, принимающих условные значения. При рассмотрении результатов вычислительных экспериментов ограничимся качественным анализом.

Вычислительный эксперимент № 1. Продемонстрируем реализацию модели для двух режимов: устойчивого и неустойчивого. Установим значения параметров: стоимость инвестиций $b=0.1$, эластичность спроса коммерческих рынков $c=1$, порядок дробного дифференцирования $\alpha=0.9$. На рисунке 3.3 показана динамика изменения показателей финансовой системы при раз-

личных значениях параметра a – величины сбережений: $a=10$ (рисунок 3.3 а) и $a=3$ (рисунок 3.3 б).

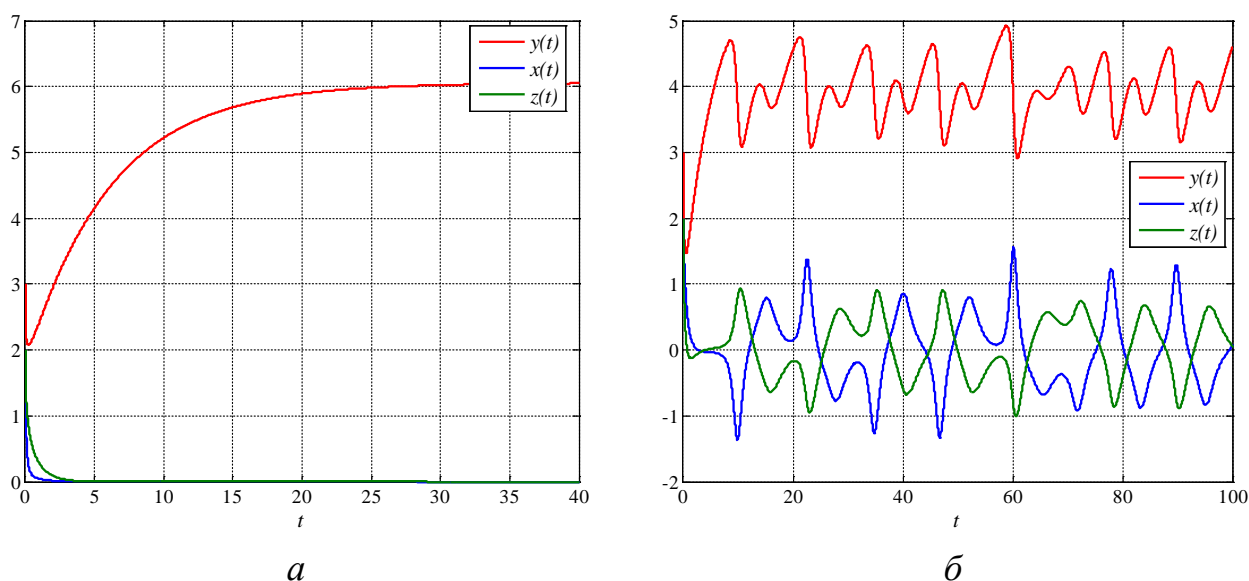


Рисунок 3.3 – Динамические характеристики – ключевая ставка $x(t)$, валовое накопление основного капитала $y(t)$, индекс цен $z(t)$ (параметры моделирования: $b=0.1$, $c=1$, $\alpha=0.9$, $x_0=2$, $y_0=3$, $z_0=2$, $T=100$): $a=10$ – а; $a=3$ – б

В соответствии с теоретическим анализом устойчивости согласно критерию Рауса-Гурвица, можно наблюдать поведение характеристик модели в устойчивом режиме при $a=10$ (рисунок 3.3 а) и неустойчивом – при $a=3$ (рисунок 3.3 б). Устойчивое решение характеризуется релаксацией системы к стационарному состоянию: ключевая ставка и индекс цен через 5 усл. ед. времени приближаются к нулевым значениям; валовое накопление основного капитала имеет на первом шаге небольшое снижение и далее более длительный период релаксации – через 100 усл. ед. времени стремятся к постоянному значению 10 усл. ед. Качественно такая экономическая ситуация может быть описана плавным ростом накопления основного капитала и резким снижением ключевой ставки и индекса цен, что характеризует благоприятный инвестиционный климат стабильное развитие финансово-экономической системы. Логистический рост основного капитала характерен для многих математических моделей макроэкономических систем. Переменные, описывающие поведение модели,

переходят в состояние насыщения. Это объясняется ограниченностью ресурсов, ограниченностью спроса на определенные группы товаров и технологий, существованием внешних политико-экономических факторов, препятствующих независимому развитию экономик отдельных государств, и т.п. Понятно, что в реальных условиях, только для развитых экономик, ключевая ставка и индекс цен, дающий стоимость потребительской корзины, могут принимать нулевые значения. Так например, по данным сайта <https://ru.tradingeconomics.com> финансово «благополучные» страны Еврозоны (Германия, Франция, Австрия, Люксембург и др.) имеют нулевую ключевую ставку, а в некоторых странах (Швейцария, Дания, Швеция) ключевая ставка принимает отрицательные значения. В России значение ключевой ставки 9.25 %, это говорит о том, что в этом случае реализуемая экономико-математическая модель может быть применена только для прогнозирования макроэкономических характеристик в краткосрочном периоде.

При преодолении параметром a (величины сбережений), порога, равного 9 усл. ед., система переходит в неустойчивый режим при фиксированных значениях параметров b и c (рисунок 3.3 б). В этом случае можно наблюдать хаотические колебания управляющих переменных модели: ключевой ставки $x(t)$, валового накопления основного капитала $u(t)$, индекса цен $z(t)$. Качественно такая картина соответствует неуправляемому, нестабильному поведению финансовой системы. Хаос в динамической системе наглядно демонстрирует трехмерная фазовая диаграмма состояния модели, построенная для фиксированного набора характерных параметров модели. На рисунке 3.4 показан аттрактор модели финансовой системы. Состояние системы, к которому она эволюционирует, имеет схожие черты с аттрактором систем Лоренца и Ресселера.

Результаты реализации компьютерной модели динамики фрактальной модели финансовой системы представлены в авторской работе [31].

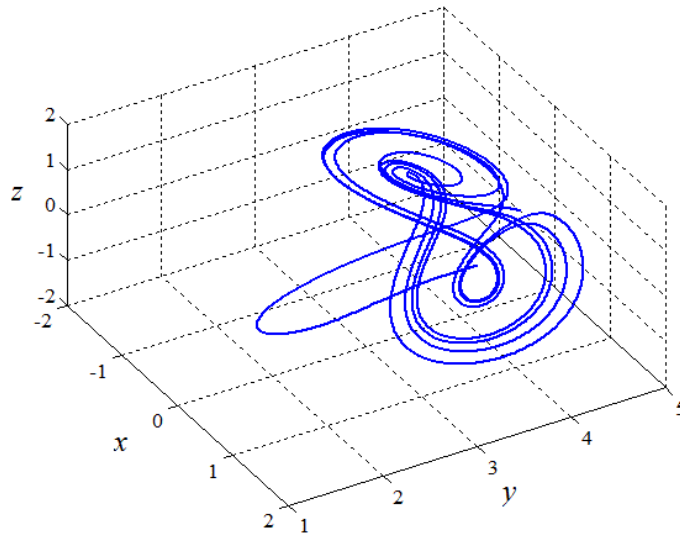


Рисунок 3.4 – Трехмерный фазовый портрет

(значения параметров: $b=0.1$, $c=1$, $a=3$, $\alpha=0.9$, $x_0=2$, $y_0=3$, $z_0=2$, $T=100$)

Вычислительный эксперимент № 2. Исследуем поведение модельных характеристик при варьировании параметра дробного дифференцирования α . Остальные параметры модели зафиксируем аналогично предыдущему случаю: $b=0.1$, $c=1$, $x_0=2$, $y_0=3$, $z_0=2$, $T=100$.

Как было показано выше, параметр α отвечает за присутствие эффекта памяти в системе. Если полный интервал возможных значений α есть $(0,1)$, то его предельные крайние значения можно интерпретировать таким образом: при $\alpha=0$ как производная нулевого порядка, т.е. значение самой функции и при $\alpha=1$ – производная первого порядка. При анализе фрактальных систем, моделирующих реальные физические процессы, α , как правило, выбирают из диапазона $(0.5,1)$ [26-27]. При приближении к правой границе интервала $\alpha \rightarrow 1$ – поведение модели больше соответствует детерминированному случаю – реализации модели в целых производных [13]. Соответственно, случай модели с более выраженными фрактальными свойствами имеет место при приближении α к левой границе интервала: $\alpha \rightarrow 0.5$.

Установим для определенности два значения: $\alpha=0.75$ и $\alpha=0.9$ и исследуем модельные зависимости при реализации устойчивого и неустойчивого режимов. Результаты показаны на рисунке 3.5.

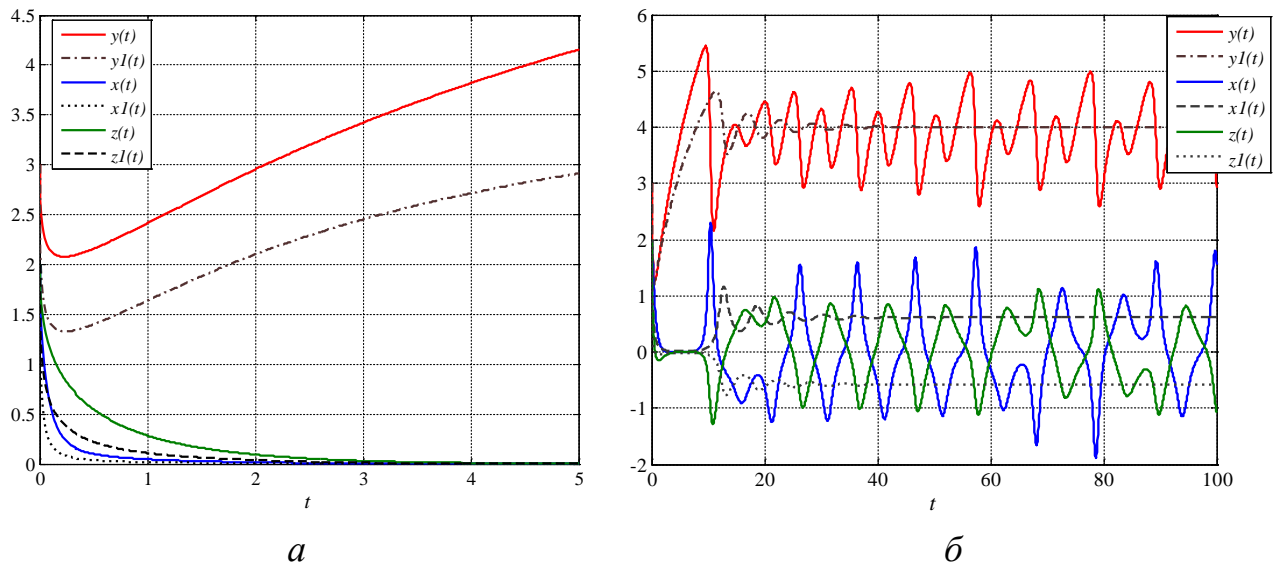


Рисунок 3.5 – Модельное представление динамических характеристик системы: ключевая ставка $x(t)$, валовое накопление основного капитала $y(t)$, индекс цен $z(t)$ при различных значениях параметра α ($x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ при $\alpha=0.9$ и $x_1(t)$, $y_1(t)$, $z_1(t)$ при $\alpha=0.75$) для: устойчивый режим – а; хаотический – б

Можно заключить, что для устойчивого режима характер поведения зависимостей, в целом, сохраняется. Однако, в начальные моменты рассматриваемого временного диапазона, модель с выраженным фрактальным поведением ($\alpha=0.75$) соответствует медленному накоплению основного капитала и резкому падению ключевой ставки и индекса цен по сравнению с моделью, приближенной к детерминированному состоянию ($\alpha=1$).

Особенность реализации неустойчивого режима заключается в хаотических колебаниях переменных модели. В этом случае для фрактальной модели ($\alpha=0.75$) наблюдается стабилизация состояния через 40 усл. ед. времени: колебания затухают.

Вычислительный эксперимент № 3. Представим результаты реализации модели при варьировании параметра a в устойчивом режиме. Остальные пара-

метры модели зафиксируем аналогично предыдущему случаю: $b=0.1$, $c=1$, $\alpha=0.9$, $x_0=2$, $y_0=3$, $z_0=2$, $T=30$. Результат представлен на рисунке 3.6.

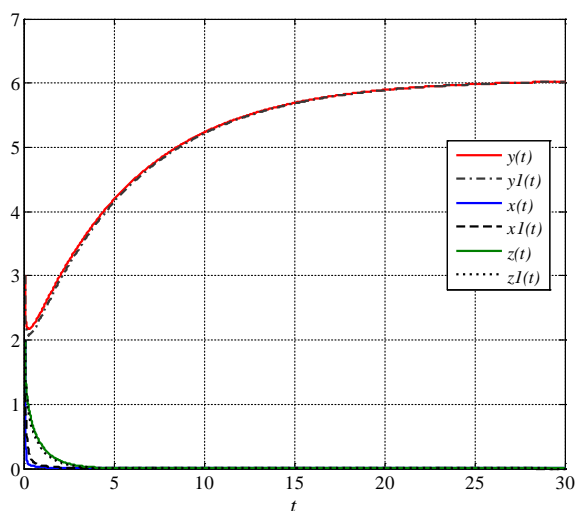


Рисунок 3.6 – Модельное представление динамических характеристик системы: ключевая ставка $x(t)$, валовое накопление основного капитала $y(t)$, индекс цен $z(t)$ при различных значениях параметра a ($x(t), y(t), z(t)$ при $a=20$ и $x_1(t), y_1(t), z_1(t)$ при $a=10$)

Можно отметить, что динамические характеристики системы мало чувствительны к изменению параметра a (в зоне устойчивости решения $M_1(0,10,0)$): увеличение этого параметра в два раза не привело к изменению поведения $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.

Таким образом, анализ экономического смысла данных математического моделирования позволяет заключить, что устойчивое состояние финансовой системы должно быть более предпочтительным и для перехода к устойчивой экономике и обеспечения роста валового накопления уставного капитала требуется снижение ключевой ставки и индекса цен «почти» до нулевого уровня. Так например, в период глобального экономического кризиса 2009 года многие европейские банки снизили ключевую ставку до нуля, что послужило мерой стабилизации экономик ряда государств. Понятно, что в условиях российской экономики (высокой ежегодной инфляции) такие меры трудно реализуемы.

Отметим, что в данной работе приведен только качественный анализ результатов вычислительных экспериментов для исследуемой модели. Проведение количественного анализа требует дополнительного исследования математической формализации модели на предмет анализа размерностей параметров модели, а также придания им корректных численных значений, соответствующих реальным финансовым системам. Это составляет перспективы дальнейшего исследования и продолжения работы по изучению и модификации математической модели поведения финансовых систем.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В выпускной квалификационной работе построена вычислительная схема и проведена программная реализация дробно-дифференциальной модели динамики финансовых систем.

Проведен литературный обзор динамических моделей макро- и микроэкономики (паутинообразные модели с запаздыванием, модель мультипликатора). Представлены различные модификации макроэкономической модели динамики финансовой системы. Исследована на устойчивость детерминированная математическая модель финансовой системы с использованием критерия Рауса-Гурвица. Установлены диапазоны значений нормированных параметров модели, при которых система характеризуется устойчивым состоянием, и при которых переходит в хаотический режим.

На основе численной аппроксимации производной дробного порядка по формуле Грюнвальда-Летникова построена вычислительная схема решения начальной задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений дробного порядка применительно к реализации модели финансовой системы. Проведена формализация алгоритма и разработана прикладная программа, предназначенная для имитационного моделирования динамических характеристик финансовых систем.

Проведены вычислительные эксперименты при варьировании значений переменных и проанализированы результаты моделирования динамики финансовой системы для набора модельных параметров (в нормированном виде). Установлено, что при фиксированных параметрах b и c , в определенном диапазоне для значений параметра a модель имеет неустойчивое решение и обнаруживает хаотическое поведение, в другом диапазоне значений параметра a – задача имеет устойчивое решение – наблюдается релаксация к стационарному состоянию.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

- 1 Эрроусмит, Д. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями: Научное издание / Д. Эрроусмит, К. Плейс. М.: ПЛАТОН, 1997. – 243 с.
- 2 Карташев, А.П. Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления: Учеб.пособие для вузов / А.П. Карташев, Б.Л. Рождественский. 3-е изд., перераб. и доп. М: Наука, 1986. – 272 с.
- 3 Самко, С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения: моногр. / С.Г. Самко, А.А. Килбас. – Минск: Наука и техника, 1987. – С. 9-16.
- 4 Петухов, А.А. Алгоритмы численного решения дробно-дифференциальных уравнений / А.А. Петухов, Д.Л. Ревизников: Вестник МАИ, 2009 – С. 228-234.
- 5 Божокин, С.В. Фракталы и мультифракталы / С.В. Божокин, Д.А. Паршин.– Ижевск: РХД, 2001. – 128 с.
- 6 Тарасевич, Ю.Ю. Математическое и компьютерное моделирование Вводный курс: Учебное пособие / Ю.Ю. Тарасевич. – Изд. 4-е, испр. – М.:Едиториал УРСС, 2004. – 152 с.
- 7 Malthus, T.R. An Essay on the Principle of Population / T.R. Malthus – London. Printed for J.Johnson, In St. Paul’s Church-Yard, 1798. – P. 1-45.
- 8 Мальтус, Т.Р. Опыт о законе народонаселения или изложение прошедшего и настоящего действия этого закона на благоденствие человеческого рода, с приложением нескольких исследований о надежде на отстранение или смягчение причиняемого им зла. 2т. / Т.Р. Мальтус – СПб.: Типография И.И.Глазунова, 1868. – 468 с.
- 9 Понтрягин, Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Л.С. Понтрягин. – 3-е изд. – М.: Наука, 1970 – 331 с.
- 10 Verhulst, P.-F. Recherches mathématiques sur la loi d'accroissement de la population / P.-F. Verhulst //Nouveaux mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles, – V. 18. – Art.1. – 1845. – P. 1–45.

- 11 Лебедев, В.В. Математическое моделирование нестационарных экономических процессов / В.В. Лебедев, К.В. Лебедев – М.:ООО «eТест», 2011. – 336 с.
- 12 Пезенти, А. Очерки политической экономики капитализма. – М.: Прогресс, 1976 – 840 с.
- 13 Ma, J. Study for the bifurcation topological structure and the global complicated character of a kind of non-linear finance system (I) / J. Ma, Y. Chen // Applied Mathematics and Mechanics, 2001. – V. 22. – No. 11. – P. 1240-1251.
- 14 Ma, J. Study for the bifurcation topological structure and the global complicated character of a kind of non-linear finance system (II) / J. Ma, Y. Chen // Applied Mathematics and Mechanics, 2001. – V. 22. – No. 11. – P. 1375-1382.
- 15 Chen, W.C. Nonlinear dynamics and chaos in a fractional-order financial system / W.C. Chen // Chaos, Solutions & Fractals, 2008. – V.36. – P. 1305-1314.
- 16 Нахушев, А.М. Дробное исчисление и его применение / А.М. Нахушев. – М.: Изд-во ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 179 с.
- 17 Juma'a, A.H. Stability of Chaotic and Hyperchaotic Finance System / A.H. Juma'a, A.A.-R. Hammodat // Journal of Education and Science, 2013. – V. 26. – No. 4. – P. 97-106.
- 18 Volos, C.K., Nonlinear Financial Dynamics from an Engineer's Point of View / I.M. Kyrianiadis, S.G. Stavriniadis, I.N. Stouboulos, L. Magafas, A.N. Anagnostopoulos // Journal of Engineering Science and Technology Review, 2011. – No. 4 – P. 281-285.
- 19 Jabbari, A. Anti-Synchronization of a Modified Three-Dimensional Chaotic Finance System with Uncertain Parameters via Adaptive Control / A. Jabbari H. Kheiri // International Journal of Nonlinear Science, 2012. – V. 14 – No.2, – P. 178-185.
- 20 Kai, G. Chaotic dynamics Analysis for a class of delay nonlinear finance system / G. Kai, W. Zhang // MATEC Web of Conferences, 2016. – No. 45 – P. 7-15.

21 Tacha, O.I. Analysis, adaptive control and circuit simulation of a novel finance system with dissaving / O.I. Tacha, C.K. Volos, I.N. Stouboulos, I.M. Kyprianidis // Archives of control sciences, 2016. – V. 26. – No. 1. – P. 95-115.

22 Kocamaz, U.E., Synchronization of chaos in nonlinear finance system by means of sliding mode and passive control methods: a comparative study / U.E. Kocamaz A. Göksu, H. Taşkın, Y. Uyaroğlu // Information technology and control, 2015. – V. 44, – No. 2, – P. 172-181.

23 Chen, C., Inverse optimal control of hyperchaotic finance system / C. Chen, T. Fan, B. Wang // World Journal of modeling and simulation, 2014. – V. 10. – No. 2. – P. 83-91.

24 Novotna, V., Stepankova V. Parameter estimation for dynamic model of the financial system / V. Novotna, V. Stepankova // Acta universitatis agriculturae et silviculturae mendelianae brunensis, 2015. – V. 63. – P. 2051-2055.

25 Trading economics: <https://ru.tradingeconomics.com/>.

26 Васильев В.В., Дробное исчисление и аппроксимационные методы в моделировании динамических систем / В.В. Васильев, Л.А. Симак. – Киев, 2008. – 249 с.

27 Учайкин, В.В. Метод дробных производных. / В.В. Учайкин. - Ульяновск: Изд-во: Артишок, 2008. - 512 с.

28 Стиган, И. Справочник по специальным функциям / И. Стиган – М.: Наука, 1979.–Р. 321-352.

29 Формалев, В.Ф., Ревизников Д.Л. Численные методы. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.

30 Ануфриев, И.Е., Смирнов Л.Б. Matlab 7. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 1104 с.

31 Биссенова, К.В / Применение аппарата дробного дифференцирования для численного моделирования финансовых систем/ К.В. Биссенова // В книге: Материалы XIII региональной научно-практической конференции «Молодежь XXI века: шаг в будущее» – Благовещенск: Изд-во БГПУ, 2017. – С. 1004-1005.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Листинг программы для численного решения системы дробно-дифференциальных уравнений

```
clc;
clearall;
eps=10^-6; %точность
tau=0.05; %шаг по времени
st=0.75; %порядок дробной производной
A=tau^st;
t=0:tau:100; %интервал времени
N=length(t);
G=zeros(N,3); %пустой массив
G(1,:)= [2,3,2]; %присваиваем 1ой строке массива значения
for i=1:1:N-1
    S2=zeros(1,3);
    for j=1:1:i
        S1=S2;
        A2=gamma(j-st)/(gamma(-st)*gamma(j+1));
        S2=S1+A2.*G(i-j+1,:);
    end
    if abs(S2-S1)<eps
        break;
    end;
end;
M=fun4(G(i,:));
G(i+1,:)=A.*M-S2;
end;
%plot3(G(:,1),G(:,2),G(:,3),'b');
figure (1)
plot(t,G(:,1),'r-',t,G(:,2),'b-',t,G(:,3),'g-')
gridon
```

Продолжение ПРИЛОЖЕНИЯ А
Листинг программы для численного решения системы дробно-
дифференциальных уравнений

```
% xlabel('Координаты');  
% ylabel('Координаты, y, z')
```

```
figure (2)
```

```
plot(G(:,1),G(:,2))
```

```
grid on
```

```
figure (3)
```

```
plot3(G(:,1),G(:,2),G(:,3))
```

% вектор-функция правых частей системы ОДУ, задающей математическую модель финансовой системы

```
function M= fun4(G)
```

```
x=G(1); % переменные
```

```
y=G(2);
```

```
z=G(3);
```

```
a=3; % параметры
```

```
b=0.1;
```

```
c=1;
```

```
M(1)=z+(y-a)*x;
```

```
M(2)=1-b*y-x.^2;
```

```
M(3)=-x-c*z;
```

ПРИЛОЖЕНИЕ Б
Листинг программы расчета задачи Коши для системы
дифференциальных уравнений

```
clc;
clearall;
eps=10^-6; %точность
tau=0.05; %шаг по времени
st=0.9999; %порядок дробной производной
A=tau^st;
t=0:tau:1; %интервал времени
N=length(t);
G=zeros(N,2);
G(1,:)=[3 0];%присваиваем 1ой строке массива значения
for i=1:1:N-1
    S2=zeros(1,2);
    for j=1:1:i
        S1=S2;
        A2=gamma(j-st)/(gamma(-st)*gamma(j+1));
        S2=S1+A2.*G(i-j+1,:);
    end
    if abs(S2-S1)<eps
        break;
    end;
end;
M=fun4(G(i,:));
G(i+1,:)=A.*M-S2;
end;
figure (1)
yt=exp(-t)-exp(2*t);
xt=4*exp(-t)-exp(2*t);
fy=norm(G(:,2)-yt')
```

Продолжение ПРИЛОЖЕНИЯ Б
Листинг программы расчета задачи Коши для системы
дифференциальных уравнений

```
fym=max(abs(G(:,2)-yt'))
```

```
fx=norm(G(:,1)-xt')
```

```
fxm=max(abs(G(:,1)-xt'))
```

```
plot(t,G(:,1),'r-',t,xt,'k-');
```

```
gridon
```

```
figure (2)
```

```
plot(t,G(:,2),'b-',t,yt,'g-')
```

```
gridon
```

```
%вектор-функция правых частей системы ОДУ
```

```
function M= fun4(G)
```

```
x=G(1); %переменные
```

```
y=G(2);
```

```
a=3; %параметры
```

```
b=0.1;
```

```
c=1;
```

```
M(1)=-2*x+4*y;
```

```
M(2)=-x+3*y;
```