Федеральное агентство по образованию РФ
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
(ГОУВПО «АмГУ»)

УТВЕРЖДАЮ
Зав. кафедрой ИиУС
___________ А.В. Бушманов
«___» _________ 2007 г.

Учебно-методический комплекс дисциплины

Алгебра и геометрия

для специальностей 230102 и 230201 кафедры

«Информационные и управляющие системы»

Составитель: Ерёмина В.В.

2007 г.

*Печатается по решению
редакционно-издательского совета
факультета математики и информатики
Амурского государственного
университета*

Алгебра и геометрия для специальности 230102 «Автоматизированные системы обработки информации и управления» и 230201 «Информационные системы и технологии»: учебно-методический комплекс дисциплины. / Еремина В.В. – Благовещенск. Изд-во Амурского гос. ун-та, 2007. 98 с.

Учебно-методическое пособие содержит: выписку из требований Государственного образовательного стандарта ВПО; рабочую программу преподавания дисциплины; методические указания и варианты индивидуальных заданий для проведения контрольных и расчетно графической работы; учебные задания для выполнения курса практических работ; тестовые задания по проверке остаточного уровня знаний; краткое изложение курса лекций.

Выписка из ГООСТ ВПО

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ СТАНДАРТ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Направление подготовки дипломированного специалиста
654600 – Информатика и вычислительная техника

Квалификация – инженер

4. Требования к обязательному минимуму содержания
основной образовательной программы
дипломированного специалиста по направлению подготовки
«Информатика и вычислительная техника»

Индекс	Наименование дисциплин и их основные разделы	Всего часов
ЕН.Ф.01.01	*Алгебра и геометрия*	140
	Основные алгебраические структуры, векторные пространства и линейные отображения. Аналитическая геометрия, многомерная евклидова геометрия, дифференциальная геометрия кривых и поверхностей, элементы топологий	

Рабочая программа

По дисциплине: Алгебра и геометрия

Для специальностей: 230102 – Автоматизированные системы обработки информации и управления
230201 – Информационные системы и технологии

Курс: 1 Семестр: 1

Лекции: 36 (час.) Экзамен: 1 семестр

Практические занятия: 36 (час.) Зачет: нет

Лабораторные занятия: нет

Самостоятельная работа: 68 (час.)

Всего часов: 140 (час.)

Составитель: Ерёмина В.В.

Факультет Математики и информатики

Кафедра Информационных и управляющих систем

1. Цели и задачи дисциплины, ее место в учебном процессе

1.1. Цель преподавания дисциплины
Изложение курса аналитической геометрии и линейной алгебры и способов решения задач всех основных разделов данной дисциплины. Показать их важность для решения прикладных задач, которые встречаются при анализе больших массивов информации в техническом мониторинге и других исследованиях.

1.2. Задачи изучения дисциплины
По завершению курса «Алгебра и геометрия», обучаемые должны приобрести устойчивые навыки и умения по решению задач всех основных разделов линейной алгебры и аналитической геометрии.

1.3. Перечень разделов (тем) необходимых дисциплин
1.3.1. геометрия: понятие вектора, прямой, плоскости.
1.3.2. алгебра: системы линейных уравнений, декартова прямоугольная система координат на плоскости и в пространстве.

2. Содержание дисциплины

2.1. Федеральный компонент

Обще математическая и естественнонаучная дисциплина
ГОС ВПО: 1912 ЕН – Ф.1. (230102); ГОС ВПО: 1898 ЕН – Ф.1. (230201)

2.2. Лекционные занятия

2.2.1. Тема 1. аналитическая геометрия на плоскости: метод координат на плоскости; уравнение прямой линии на плоскости; кривые второго порядка – 6 ч.

2.2.2. Тема 2. Векторная алгебра: понятие вектора; линейные операции над векторами; разложение вектора по базису; линейная зависимость векторов; нелинейные операции над векторами – 4 ч.

2.2.3. Тема 3. Аналитическая геометрия в пространстве: плоскость; прямая линия в пространстве; поверхности второго порядка – 4 ч.

2.2.4. Тема 4. преобразования плоскости: Отображения и преобразования; ортогональные преобразования; аффинные преобразования – 4 ч.

2.2.5. Тема 5. Системы линейных уравнений и матрицы: детерминанты; системы линейных уравнений; ранг матрицы; действия с матрицами – 6 ч.

2.2.6. Тема 6. Линейные пространства: понятие и примеры линейных пространств; линейные подпространства; линейные преобразования; задача о собственных векторах – 4 ч.

2.2.7. Тема 7. евклидовы и унитарные пространства: Евклидовы пространства; линейные преобразования в Евклидовом пространстве; понятие об унитарных пространствах – 4 ч.

2.2.8. Тема 8. Применение дифференциального исчисления к геометрии в пространстве: Уравнения кривой в пространстве; передел и производная векторной функции скалярного аргумента; уравнение касательной к кривой; уравнение нормальной плоскости; правила дифференцирования векторов (векторных функций); первая и вторая производные вектора по длине дуги; кривизна кривой; главная нормаль; соприкасающаяся плоскость; бинормаль; кручение; касательная плоскость и нормаль к поверхности – 4 ч.

2.3. Практические занятия

2.3.1. Практическая работа 1. Метод координат на плоскости. Уравнение линии – 2 ч.

2.3.2. Практическая работа 2. Уравнение прямой линии на плоскости – 2 ч.

2.3.3. Практическая работа 3. Вектор. Линейные операции над векторами – 2 ч.

2.3.4. Практическая работа 4. Скалярное произведение векторов – 2 ч.

2.3.5. Практическая работа 5. Векторное произведение векторов – 2 ч.
2.3.6. Практическая работа 6. Смешанное произведение векторов – 2 ч.
2.3.7. Практическая работа 7. Плоскость. Основные задачи на плоскость – 2 ч.
2.3.8. Практическая работа 8. Основные задачи на прямую в пространстве – 2 ч.
2.3.9. Практическая работа 9. Поверхности второго порядка – 2 ч.
2.3.10. Практическая работа 10. Матрицы, операции над матрицами – 2 ч.
2.3.11. Практическая работа 11. Определители второго и третьего порядка – 2 ч.
2.3.12. Практическая работа 12. Определители n – го порядка – 2 ч.
2.3.13. Практическая работа 13. Обратная матрица, решение матричных уравнений – 2ч.
2.3.14. Практическая работа 14. Ранг матрицы, транспонирование матриц – 2ч.
2.3.15. Практическая работа 15. Матричная запись и матричное решение системы линейных уравнений – 2 ч.
2.3.16. Практическая работа 16. Формулы Крамера – 2 ч.
2.3.17. Практическая работа 17. Метод Гаусса – 2 ч.
2.3.18. Практическая работа 18. Решение систем линейных уравнений – 2ч.

2.4. Самостоятельная работа студентов

2.4.1. Самостоятельное практическое решение задач: рассмотрение качественных вопросов, которые предлагаются на экзамене по данной дисциплине – 48 ч.

Рекомендуемая литература:

1. Лунгу К.Н., Письменный Д.Т., Федин С.Н., Шевченко Ю.А. Сборник задач по высшей математике. 1 курс. М.: Айрис-пресс, 2003. – 576 с.
2. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. 1 часть. М.: Айрис-пресс, 2003. – 288 с.

2.4.2. Расчетно-графическая работа 1. Прямая на плоскости – 10 ч.

Задание: Даны координаты вершин треугольника ABC. Найти:

1. Длину стороны AB.
2. Уравнения сторон AB и BC, а также их угловые коэффициенты.
3. Угол B в радианах с точность до 2-х знаков.
4. Уравнение высоты CD и ее длину.
5. Уравнение медианы AE и координаты точки K пересечения этой медианы с высотой CD.
6. Уравнение прямой, проходящей через точку K, параллельно стороне AB.

7. Координаты точки M, расположенной симметрично точке A, относительно прямой CB.

2.4.3. Расчетно-графическая работа 2. Векторная алгебра – 10 ч.

Задание: Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$. Требуется:

1. записать векторы $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$ в системе орт $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ и найти модули этих векторов;
2. найти угол между векторами $\vec{AB}$, $\vec{AC}$;
3. найти проекцию вектора $\vec{AD}$ на вектор $\vec{AB}$;
4. найти площадь грани ABC;
5. найти объем пирамиды $ABCD$;
6. составить уравнение ребра AC;
7. составить уравнение грани ABC.

2.5. Вопросы к экзамену

2.5.1. Декартовы прямоугольные координаты
2.5.2. Полярные координаты
2.5.3. Основные задачи, решаемые методом координат
2.5.4. Линии и их уравнения на плоскости
2.5.5. Уравнение прямой с угловым коэффициентом
2.5.6. Общее уравнение прямой и его исследование
2.5.7. Угол между прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых
2.5.8. Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении
2.5.9. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки
2.5.10. Уравнение прямой в отрезках
2.5.11. Кривые второго порядка. Уравнение окружности
2.5.12. Каноническое уравнение эллипса
2.5.13. Каноническое уравнение гиперболы
2.5.14. Каноническое уравнение параболы
2.5.15. Понятие вектора
2.5.16. Линейные операции над векторами
2.5.17. Понятие линейной зависимости векторов
2.5.18. Линейная зависимость векторов в пространстве
2.5.19. Линейная зависимость векторов на плоскости
2.5.20. Базис на плоскости и в пространстве
2.5.21. Проекция вектора на ось и ее свойства
2.5.22. Декартова прямоугольная система координат в пространстве
2.5.23. Цилиндрические и сферические координаты
2.5.24. Скалярное произведение двух векторов и его основные свойства
2.5.25. Скалярное произведение векторов в координатной форме
2.5.26. Направляющие косинусы вектора
2.5.27. Векторное произведение двух векторов и его основные свойства

2.5.28. Смешанное произведение 3-х векторов и его основные свойства
2.5.29. Выражение векторного произведения через координаты перемножаемых векторов
2.5.30. Выражение смешанного произведения через координаты перемножаемых векторов
2.5.31. Понятие об уравнении поверхности
2.5.32. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку и перпендикулярной к данному вектору
2.5.33. Общее уравнение плоскости. Исследование его особых случаев
2.5.34. Уравнение плоскости в отрезках
2.5.35. Нормальное уравнение плоскости
2.5.36. Приведение общего уравнения плоскости к нормальному виду
2.5.37. Угол между двумя плоскостями. Условие параллельности и перпендикулярности двух плоскостей
2.5.38. Понятие об уравнении линии
2.5.39. Каноническое уравнение прямой
2.5.40. Параметрические уравнения прямой
2.5.41. Векторное уравнение прямой
2.5.42. Угол между прямыми, условие параллельности и перпендикулярности двух прямых
2.5.43. Решение некоторых задач на плоскость и прямую линию
2.5.44. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости
2.5.45. Эллипсоид
2.5.46. Гиперболоиды
2.5.47. Параболоиды
2.5.48. Цилиндры второго порядка
2.5.49. Конус второго порядка
2.5.50. Понятие матрицы. Некоторые виды матриц
2.5.51. Действия над матрицами
2.5.52. Элементарные преобразования матриц. Ранг матрицы
2.5.53. Определители. Основные понятия. Определители второго и третьего порядков
2.5.54. Свойства определителей
2.5.55. Вычисление определителей порядка выше третьего
2.5.56. Невырожденные матрицы. Основные понятия
2.5.57. Обратная матрица
2.5.58. Системы линейных уравнений. Основные понятия
2.5.59. Решение систем линейных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли
2.5.60. Формулы Крамера
2.5.61. Решение систем линейных уравнений. Методом Гаусса
2.5.62. Системы линейных однородных уравнений
2.5.63. Линейные пространства

2.5.64. Базис и размерность линейного пространства
2.5.65. Линейные преобразования (операторы)
2.5.66. Самосопряженный оператор. Квадратичная форма
2.5.67. Квадратичная форма в двумерном пространстве
2.5.68. Комплексные числа. Алгебраическая форма записи комплексного числа
2.5.69. Действия над комплексными числами, записанными в алгебраической форме
2.5.70. Геометрическая интерпретация комплексного числа. Модуль и аргумент комплексного числа
2.5.71. Тригонометрическая форма комплексного числа. Действия над комплексными числами, записанными в тригонометрической форме
2.5.72. Показательная форма комплексного числа. Действия над комплексными числами, записанными в показательной форме
2.5.73. Отображение. Римеры. Произведение отображений. Обратное отображение
2.5.74. Ортогональное отображение

2.6. Оценочные критерии

При оценке знаний на экзамене учитывается: правильность и осознанность изложения содержания ответа на вопросы, полнота раскрытия понятий и закономерностей, точность употребления и трактовки общенаучных и специальных терминов; степень сформированности интеллектуальных и научных способностей экзаменуемого; самостоятельность ответа; речевая грамотность и логическая последовательность ответа.

Критерии оценок:

- отлично – полно раскрыто содержание вопросов в объеме □рограмммы и рекомендованной литературы; четко и правильно даны определения и раскрыто содержание концептуальных понятий, закономерностей, корректно использованы научные термины; для доказательства использованы различные теоретические знания, выводы из наблюдений и опытов; ответ самостоятельный, исчерпывающий, без наводящих дополнительных вопросов, с опорой на знания, приобретенные в процессе специализации по выбранному направлению информатики.
- хорошо – раскрыто основное содержание вопросов; в основном правильно даны определения понятий и использованы научные термины; ответ самостоятельный; определения понятий неполные, допущены нарушения последовательности изложения, небольшие неточности при использовании научных терминов или в выводах и обобщениях, исправляемые по дополнительным вопросам экзаменаторов.

- удовлетворительно – усвоено основное содержание учебного материала, но изложено фрагментарно, не всегда последовательно; определение понятий недостаточно четкое; не использованы в качестве доказательства выводы из наблюдений и опытов или допущены ошибки при их изложении; допущены ошибки и неточности в использовании научной терминологии, определении понятий.
- неудовлетворительно – ответ неправильный, не раскрыто основное содержание программного материала; не даны ответы на вспомогательные вопросы экзаменаторов; допущены грубые ошибки в определении понятий, при использовании терминологии.

3. Учебно-методические материалы по дисциплине

3.1. Используемая и рекомендуемая литература

Основная:

3.1.1. Александров П.С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Наука, 1999. – 231 с.
3.1.2. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Наука, 1994. – 272 с.
3.1.3. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. М.: Наука, 1994. – 264 с.
3.1.4. Воеводин В.В., Кузнецов В.А. Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1997. – 288 с.
3.1.5. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х частях. М.: Высшая школа, 1997. – 240 с.
3.1.6. Лунгу К.Н., Письменный Д.Т., Федин С.Н., Шевченко Ю.А. Сборник задач по высшей математике. 1 курс. М.: Айрис-пресс, 2003. – 576 с.
3.1.7. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. 1 часть. М.: Айрис-пресс, 2003. – 288 с.

3.2. Учебные пособия:

3.2.1. Карточки с заданиями и методическими указаниями по выполнению практических работ.
3.2.2. Методические указания и индивидуальные варианты заданий для выполнения расчетно-графических работ.

4. Учебно-методическая (технологическая) карта дисциплины

Номер недели	Номер темы	Вопросы, изучаемые на лекции	Занятия		Используемые наглядные и методические пособия	Самостоятельная работа студентов		Форма контроля
			Практические	Лабораторные		Содержание	Часы	
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2.2.1	2.3.1	-	3.2.1	2.4.1	48	ко[1]
2			2.3.2	-				
3			2.3.3	-				ко
4	2	2.2.2	2.3.4	-				
5			2.3.5	-				ко
6	3	2.2.3	2.3.6	-				
7			2.3.7	-				ко
8	4	2.2.4	2.3.8	-				
9			2.3.9	-				ко, сб.[2]
10	5	2.2.5	2.3.10	-				
11			2.3.11	-	3.2.1 3.2.2	2.4.2	10	ко
12			2.3.12	-				
13	6	2.2.6	2.3.13	-				ко, защ.[3]
14			2.3.14	-				
15	7	2.2.7	2.3.15	-		2.4.3	10	ко
16			2.3.16	-				
17	8	2.2.8	2.3.17	-				ко, защ.
18			2.3.18	-				

[1] Контрольный опрос знаний теоретического материала

[2] Собеседование по результатам самостоятельной работы студентов

[3] Защита расчетно-графической работы

Содержание лекционного курса

Тема 1. Аналитическая геометрия на плоскости: метод координат на плоскости; уравнение прямой линии на плоскости; кривые 2-ого порядка – 6 ч.

§1. Метод координат на плоскости

I. Декартовы прямоугольные координаты

Выберем на плоскости две взаимно перпендикулярные прямые Оx и Оy. Прямые Оx и Оy называются *координатными осями*, а точка их пересечения О – *началом координат*. Возьмем некоторую единицу масштаба, с помощью которой будут производиться все измерения на плоскости Оxy. Совокупность координатных осей Оx и Оy и выбранной единицы масштаба называют *декартовой прямоугольной системой координат* на плоскости.

Возьмем любую точку M плоскости Оxy и поставим ей в соответствие два числа: *абсциссу* x, равную расстоянию точки M от оси Оy, взятому со знаком плюс, если точка лежит правее данной оси, и со знаком минус, если точка лежит левее данной оси; *ординату* y, равную расстоянию точки M от оси Оx, взятому со знаком плюс, если точка лежит правее данной оси, и со знаком минус, если точка лежит левее данной оси.

Абсцисса x и ордината y называются *декартовыми прямоугольными* координатами точки M. Обозначается $M(x; y)$.

Любая точке плоскости соответствует одна пара действительных чисел x и y (её координат) и обратно, любой паре действительных чисел $(x; y)$ соответствует одна точка плоскости.

II. Полярные координаты

Зафиксируем на плоскости точку O и выходящую из нее полупрямую Оp, а также выберем единицу масштаба.

Точка О называется *полюсом*, а полупрямая Оp – *полярной осью*.

Возьмем любую точку M (отличную от точки О). Поставим ей в соответствие два числа: *полярный радиус* r, равный расстоянию точки M от точки O, измеренному выбранной единицей масштаба; *полярный угол* φ, равный углу между полярной осью Оp и полупрямой OM.

Полярный угол φ измеряется в радианах, отсчет положительных (отрицательных) значений φ ведется от Оp против движения (по движению) часовой стрелки. При этом обычно полагают, что $-\pi < \varphi \leq \pi$.

Полюсу О соответствует полярный радиус $r = 0$, полярный угол для него не определен. $M(r; \varphi)$.

Связь между прямоугольными и полярными координатами точки:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \end{cases} \text{ и,}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},\ tg\varphi = \frac{y}{x}.$$

III. Основные задачи, решаемые методом координат

Задача о расстоянии между двумя точками.

Задача о делении отрезка в данном отношении.

IV. Линии и их уравнения на плоскости(основные понятия)

В аналитической геометрии любую линию на плоскости рассматривают как геометрическое место точек, координаты которых x и y связывают уравнение, называемое уравнение этой линии. Это значит, что: 1) координаты любой точки, принадлежащей линии, удовлетворяют этому уравнению; 2) координаты любой точки, не принадлежащей линии, не удовлетворяют уравнению.

Уравнением линии на плоскости в прямоугольной системе координат называется уравнение $f(x;y) = 0$ с переменными x и y, которые называется *Текущими координатами*.

§2. Прямая линия

I. Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Вывод уравнения прямой с угловым коэффициентом.

Уравнение $y = kx + b$ называется *уравнением прямой с угловым коэффициентом, b* – называется *начальной ординатой*. Это отрезок *OB*, отсекаемый прямой на оси Оy, считая от начала координат.

Исследование уравнения $y = kx + b$. Пример.

II. Общее уравнение прямой

Уравнение вида $Ax + By + C = D$ есть общее уравнение прямой.

Исследование положения прямой на плоскости в зависимости от коэффициентов A, B, C (пять случаев). Пример.

III. Уравнение прямой с данным угловым коэффициентом и проходящей через данную точку

Вывод уравнения прямой с данным угловым коэффициентом и проходящей через данную точку.

Уравнение $y - y_1 = k(x - x_1)$ - есть уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении.

Если угловой коэффициент $к$ не задан, то это уравнение определяет совокупность прямых, проходящих через данную точку. Такая совокупность называется пучком прямых. Поэтому уравнение $y - y_1 = k(x - x_1)$ называют также уравнением пучка прямых, проходящих через данную точку M. Пример.

IV. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки

Вывод уравнения.

Уравнение вида $\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ – есть уравнение прямой проходящей через две данные точки.

Пример.

V. Уравнение прямой в отрезках

$\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ – уравнение прямой в отрезках.

Числа a и b имеют весьма простой геометрический смысл, а именно: это есть величины отрезков, которые прямая отсекает на координатных осях, считая от начала координат. Формулу $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ уравнения прямой удобно использовать для ее построения.

VI. Угол между двумя прямыми на плоскости

Определение угла между двумя прямыми.

Формула $tg\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$ дает выражение тангенса угла между двумя прямыми через угловые коэффициенты этих прямых. Вывод формулы.

Условие параллельности прямых.

Условие перпендикулярности прямых.

§3. Кривые второго порядка

Кривой второго порядка называется линия, определяемая уравнением второй степени относительно текущих декартовых координат.

I. Окружность

Окружностью называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от одной и той же точки, называемой центром окружности.

Вывод уравнения окружности $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$. Частный случай уравнения с центром в начале координат. Пример.

II.Эллипс

Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний которых до двух данных точек, называемых фокусами эллипса, постоянна.

Вывод канонического уравнения эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Исследование форму эллипса по его уравнению.

III. Гипербола

Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, разность расстояний которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная.

Вывод канонического уравнения гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Исследование формы гиперболы по её уравнению.

IV. Парабола

Параболой называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой фокусом и данной прямой, называемой директрисой..

Вывод канонического уравнения эллипса $y^2=2px$. Исследование формы параболы по её уравнению.

Тема 2. Векторная алгебра: понятие вектора; линейные операции над векторами; разложение вектора по базису; линейная зависимость векторов; нелинейные операции над векторами – 4 ч.

§1. Векторы и линейные операции над векторами

I. Понятие вектора

Направленный отрезок называется *вектором*.

Нулевым вектором называется вектор, у которого начало и конец совпадают.

Расстояние между началом и концом вектора называется его *длиной*.

Векторы называются *коллинеарными*, если они расположены на одной прямой или на параллельных прямых.

Векторы называются *компланарными*, если существует плоскость, которой они параллельны.

Два вектора называются *равными*, если они: 1) коллинеарные; 2) одинаково направлены; 3) равны по длине.

II. Операции над векторами

Произведением вектора $\vec{a}$ на скаляр (вещественное число) λ называется вектор $\vec{b}$, определяемый следующими условиями:

1) $\left|\vec{b}\right| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$;

2) вектор $\vec{b}$ коллинеарен вектору $\vec{a}$;

3) векторы $\vec{b}$ и $\vec{a}$ направлены одинаково, если $\lambda > 0$, и противоположно, если $\lambda < 0$.

Свойства операции произведения вектора на скаляр.

Суммой двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор, идущий из начала вектора $\vec{a}$ в конец вектора $\vec{b}$, при условии, что начало $\vec{b}$ приложено к концу вектора $\vec{a}$.

Правило треугольника. Правило многоугольника. Правило параллелограмма. Свойства операции сложения векторов.

Вектор, коллинеарный данному вектору $\vec{a}$, равный ему по длине и противоположно направленный (иными словами, вектор (-1) $\vec{a}$), называется *противоположным* вектором для вектора $\vec{a}$ и обозначается - $\vec{a}$. *Разностью* $\vec{b} - \vec{a}$ векторов $\vec{b}$ и $\vec{a}$ называется сумма векторов $\vec{b}$ и $-\vec{a}$. Если векторы $\vec{b}$ и $\vec{a}$ имеют общее начало, то разность представляет собой отрезок, соединяющий их концы и направленный от «вычитаемого» к «уменьшаемому». Т.о. операция вычитания векторов обратная операции сложения. Её свойства вытекают из свойств операции сложения.

III. Понятие линейной зависимости векторов

Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ называются *линейно зависимыми*, если существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, не все равные нулю, для которых имеет место равенство:

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + ... + \lambda_n \vec{a}_n = \vec{0}. \qquad (1)$$

Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ называются *линейно независимыми*, если равенство(1) имеет место только при $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$.

Из равенства (1), предполагая, например, что $\lambda_1 \neq 0$, получаем:

$$\vec{a}_1 = \mu_2 \vec{a}_2 + ... + \mu_n \vec{a}_n . \tag{2}$$

Правая часть выражения (2) называется *линейной комбинацией* векторов $\vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$. Т.о., если несколько векторов линейно зависимы, то хотя бы один из них всегда можно представить в виде линейной комбинации остальных векторов. Справедливо и обратное утверждение: если один из векторов представлен в виде линейной комбинации остальных векторов, то все эти векторы линейно зависимы.

IV. Линейная зависимость векторов на плоскости

Теорема. Любые три вектора на плоскости линейно зависимы.

Следствие. Если число данных векторов на плоскости больше трех, то они также линейно зависимы.

Теорема. Для того, чтобы два вектора на плоскости были линейно независимы, необходимо и достаточно, чтобы они были неколлинеарные.

V. Линейная зависимость векторов в пространстве

Теорема. Любые четыре вектора в пространстве линейно зависимы.

Следствие. Если число данных векторов в пространстве больше четырех, то они также линейно зависимы.

Теорема. Для того, чтобы три вектора в пространстве были линейно независимы, необходимо и достаточно, чтобы они были некомпланарные.

VI. Базис на плоскости и в пространстве

Базисом на плоскости называются любые два линейно независимые векторы.

Пусть $\vec{a}$ − любой вектор на плоскости, и векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют базис. Т.к. на плоскости любые три вектора линейно зависимы, то вектор $\vec{a}$ линейно выражается через векторы базиса, т.е. выполняется соотношение:

$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{b} + \lambda_2 \vec{c} . \tag{3}$$

Если вектор $\vec{a}$ представлен в виде (3), то говорят, что он *разложен по базису*, образованному векторами $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Числа λ_1, λ_2 называют *координатами вектора* $\vec{a}$ на плоскости относительно базиса $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Теорема. Разложение вектора $\vec{a}$ по базису $\vec{b}$ и $\vec{c}$ является единственным.

Базисом в пространстве называются любые три линейно независимых вектора.

Пусть $\vec{a}$ − любой вектор в пространстве, и векторы $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$ образуют базис. Т.к. в пространстве любые четыре вектора линейно зависимы, то вектор $\vec{a}$ линейно выражается через векторы базиса, т.е. выполняется соотношение:

$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{b} + \lambda_2 \vec{c} + \lambda_3 \vec{d} ,$$

причем это разложение единственное.

Числа λ_1, λ_2, λ_3 называют *координатами вектора* $\vec{a}$ в пространстве относительно базиса $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$.

Основное значение базиса состоит в том, что линейные операции над векторами при задании базиса становятся обычными линейными операциями над числами – координатами этих векторов.

VII. Проекция вектора на ось и ее свойства

Углом между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется наименьший угол, на который надо повернуть один из векторов до его совпадения со вторым после приведения этих векторов к общему началу.

Осью называется направленная прямая. Направление прямой на рисунке обычно обозначается стрелкой. Заданное направление оси считается положительным, противоположное – отрицательным. Рассмотрим ось l, положительное направление которой совпадает с направлением единичного вектора $\vec{l}_0$, расположенного на оси l. Такой вектор называется *ортом* оси l.

Углом между вектором $\vec{a}$ и осью l называется φ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{l}_0$.

Проекцией точки А на ось l называется точка A_1, в которой пересекается ось l с плоскостью, перпендикулярной к l, проходящей через точку A.

Компонентой (составляющей) вектора $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ на ось l называется вектор $\vec{a}'=\overrightarrow{A_1B_1}$, где A_1 и B_1 соответственно проекции точек A и B на ось l.

Проекцией вектора $\vec{a}$ на ось l называется длина его компоненты $\vec{a}'$ на ось l, взятая со знаком плюс, если направление компонент совпадает с направлением оси l, и со знаком минус, если направление компоненты противоположно направлению оси l.

Теорема. Проекция вектора $\vec{a}$ на ось l равна произведению его модуля на косинус угла между этим вектором и осью l.

VIII. Декартова прямоугольная система координат в пространстве

Три взаимно перпендикулярные оси в пространстве (координатные оси) с общим началом O и одинаковой масштабной единицей образуют *декартову прямоугольную систему координат в пространстве*.

Орты осей Ox, Oy, Oz обозначают соответственно $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Т.к. векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ некомпланарные, то они образуют базис, который называется *декартовым прямоугольным базисом*.

Различают *правую* и *левую* системы декартовых прямоугольных координат в зависимости от базиса. Базис называется *правым* и *левым* в зависимости от того, вправо или влево направлен вектор $\vec{i}$, когда $\vec{j}$ направлен от нас, а вектор $\vec{k}$ направлен вверх.

Упорядоченная тройка некомпланарных векторов называется *правоориентированной* или просто *правой*, если из конца третьего вектора кратчайший поворот от первого ко второму виден против часовой стрелки. В противоположном случае тройка называется *левоориентированной* или *левой* (начала векторов тройки предполагаются совмещенными).

Любой вектор $\vec{a}$ может быть единственным образом разложен по декартовому прямоугольному базису $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, т. е. для любого вектора найдется и притом единственная тройка чисел *x*, *y*, *z*, называемых декартовыми прямоугольными координатами. Обозначается $\vec{a}(x, y, z)$.

IX. Цилиндрические и сферические координаты

Числа r, φ, z – цилиндрические координаты точки M:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

Числа r, φ, θ – сферические координаты точки M:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = r\cos\theta. \end{cases}$$

§2. Нелинейные операции над векторами

I. Скалярное произведение двух векторов и его основные свойства

Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними:

$$\left(\vec{a};\vec{b}\right) = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cos\angle\left(\vec{a};\vec{b}\right).$$

Скалярное произведение двух векторов равно модулю одного из них, умноженному на проекцию другого на ось с направлением первого:

$$\left(\vec{a};\vec{b}\right) = |\vec{a}| \cdot np_{\vec{a}}\vec{b};$$

$$\left(\vec{a};\vec{b}\right) = \left|\vec{b}\right| \cdot np_{\vec{b}}\vec{a}.$$

Физический смысл скалярного произведения: пусть материальная точка двигается по прямой, перемещаясь из положения M в положение N под действием силы $\vec{F}$, направление которой образует угол φ с направлением перемещения точки, тогда $A = FS\cos\varphi$.

Свойства скалярного произведения:

1. $\forall \vec{a}, \vec{b}, \left(\vec{a};\vec{b}\right) = \left(\vec{b};\vec{a}\right)$;
2. $\forall \vec{a}, \vec{a}^2 = (\vec{a};\vec{a}) = |\vec{a}|^2$;
3. $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \left(\vec{a} + \vec{b}\right)\vec{c} = (\vec{a};\vec{c}) + \left(\vec{b};\vec{c}\right)$;
4. $\forall \lambda \in R, \forall \vec{a}, \vec{b}, (\lambda \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda\left(\vec{a};\vec{b}\right)$.

Косинус угла между двумя ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен:

$$\cos\varphi = \frac{\left(\vec{a};\vec{b}\right)}{|\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right|}$$

Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ортогональны тогда и только тогда, когда $\left(\vec{a};\vec{b}\right) = 0$.

II. Скалярное произведение векторов в координатной форме

Скалярное произведение двух векторов равно сумме парных произведений их одноименных координат:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.$$

Угол между векторами определяется выражением:

$$\cos\varphi=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|},$$

где $|\overline{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$ и $|\vec{b}|=\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}$.

Для ортогональных векторов выполняется условие:

$$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0.$$

III. Направляющие косинусы вектора

Пусть дан вектор $\vec{a}(a_1;a_2;a_3)$. Обозначим углы наклона этого вектора к осям Ox, Oy, Oz соответственно α, β, γ.

Три числа $\cos\alpha$, $cos\beta$, $cos\gamma$ принято называть *направляющими косинусами* вектора $\vec{a}$.

Т.к. a_1, a_2, a_3 являются проекциями вектора $\vec{a}$ на координатные оси, то

$$a_1=|\vec{a}|\cos\alpha;\ a_2=|\vec{a}|\cos\beta;\ a_3=|\vec{a}|\cos\gamma.$$

Откуда,

$$\cos\alpha=\frac{a_1}{|\vec{a}|};\ \cos\beta=\frac{a_2}{|\vec{a}|};\ \cos\gamma=\frac{a_3}{|\vec{a}|}.$$

Сумма квадратов направляющих косинусов любого ненулевого вектора равна единице, т.е.

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

IV. Векторное произведение двух векторов и его основные свойства

Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется новый вектор $\vec{c}$, обозначаемый символом $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ ([$\vec{a};\vec{b}$]), и определяемый слудующими тремя условиями:

1. модуль вектора $\vec{c}$ равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (после совмещения их начал), т.е.

$$|\vec{c}|=\left|\left[\vec{a};\vec{b}\right]\right|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\varphi,$$ где φ - угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

2. вектор $\vec{c}$ перпендикулярен плоскости этого параллелограмма;
3. вектор $\vec{c}$ направлен в ту сторону от этой плоскости, что если смотреть из его конца, кратчайший поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ совершался бы против часовой стрелки.

V. Физический смысл векторного произведения

Своим прообразом векторное произведение двух векторов имеет в механике операцию отыскания момента силы относительно точки.

VI.Свойства векторного произведения

1. $\forall\vec{a},\vec{b},\ \vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a};$

2. $\forall \vec{a},\ \vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$;
3. $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c},\ (\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{c})+(\vec{b}\times\vec{c})$;
4. $\forall \lambda\in R, \forall \vec{a}, \vec{b},\ (\lambda\cdot\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})=\lambda\,(\vec{a}\times\vec{b})$.

VII.Смешанное произведение трех векторов и его основные свойства

Смешанным произведением трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется произведение обозначаемый символом $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$, где два первых вектора перемножаются векторно, а их векторное произведение умножается скалярно на третий вектор.

Смешанное произведение трех векторов называют векторно – скалярным произведением. Смешанное произведение – величина скалярная, т.к. последнее выполняемое действие есть скалярное умножение.

Смешанное произведение трех векторов равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах, взятому со знаком плюс, если эти векторы образуют правую тройку и со знаком минус, если они образуют левую тройку.

VIII. Свойства смешанного произведения

1. Смешанное произведение не меняется при циклической перестановке его сомножителей, т.е.

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}=(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b};$$

2. При перестановке двух соседних множителей смешанное произведение меняет свой знак на противоположный, т.е.

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=-\,\vec{b}\,\vec{a}\,\vec{c};$$

3. Смешанное произведение обращается в нуль, если три перемножаемых вектора, компланарны, или, если $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=0$, то векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарны.

IX. Детерминанты второго и третьего порядков. Минор. Алгебраическое дополнение

Для выражения векторного произведения через координаты сомножителей употребляются детерминанты второго и третьего порядков.

Определителем второго порядка соответствующим матрице второго порядка, называется число, равное $a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$. Обозначается

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}.$$

Элементы матрицы A называются элементами определителя $|A|$, элементы a_{11}, a_{22} – образуют главную диагональ, а элементы a_{21}, a_{12} – побочную.

Определителем третьего порядка соответствующим квадратной матрице третьего порядка A, называется число, обозначаемое символом и равное:

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{21}a_{32}a_{13}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}.$$

Минором какого-либо элемента определителя называется определитель, полученный из данного вычеркиванием той строки и того столбца, которым принадлежит этот элемент.

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} определителя $|A|$ называется его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$ в обозначении $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

Определитель равен сумме произведений элементов какой либо строки (столбца) на их алгебраические дополнения.

X. Выражение векторного произведения через координаты перемножаемых векторов

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

XI. Выражение смешанного произведения через координаты перемножаемых векторов

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Тема 3. Аналитическая геометрия в пространстве: плоскость; прямая линия в пространстве; поверхности второго порядка – 4 ч.

§1. Плоскость

I. Понятие об уравнении поверхности

Множество всех точек пространства *Oxyz*, координаты которых *x, y, z* удовлетворяют уравнению

$$F(x, y, z) = 0 \qquad (1)$$

определяет в пространстве *Oxyz некоторую поверхность*. Уравнение (1) называется *уравнением этой поверхности, а x, y, z – ее текущими координатами*.

Т.о., любая поверхность, рассматриваемая как геометрическое место точек, изображается уравнением между координатами ее точек. Обратно. Любое уравнение между переменными *x, y, z*, изображает поверхность как геометрическое место точек, координаты которых ему удовлетворяют.

Из изложенного вытекает постановка двух основных задач, решаемых в аналитической геометрии в пространстве:

1. дана поверхность как г.м.т. Составить уравнение этой поверхности.
2. дано уравнение между координатами *x, y, z*. Исследовать форму поверхности, определяемой этим уравнением.

II. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку и перпендикулярной к данному вектору

Вектор $\vec{n}$ перпендикулярный к плоскости называется ее *нормальным вектором*.

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0 \qquad (2)$$

Уравнение (2) и есть уравнение искомой плоскости, где *A*, *B*, *C* - координаты вектора перпендикулярного плоскости; x_1, y_1, z_1 – координаты данной точки, лежащей в плоскости; *x*, *y*, *z* – текущие координаты.

III. Общее уравнение плоскости. Исследование его особых случаев

Уравнение первой степени

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{3}$$

называется *общим уравнением плоскости*.

Общее уравнение (3) называется *полным*, если все его коэффициенты A, B, C отличны от нуля. Если хотя бы один из указанных коэффициентов равен нулю, то уравнение (3) называется *неполным*.

IV. Уравнение плоскости в отрезках

Уравнение вида

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

называют уравнением плоскости в отрезках.

V. Нормальное уравнение плоскости

Уравнение вида

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$$

называется нормальным уравнением плоскости.

VI. Расстояние от точки до плоскости

Формула расстояния от точки $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ до плоскости определяется выражением:

$$d = \left| x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p \right|.$$

VII. Угол между двумя плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей

Угол между двумя плоскостями можно найти по формуле

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}.$$

§2. Прямая в пространстве

I. Понятие об уравнении линии

Любую линию в пространстве будем рассматривать как геометрическое место точек пересечения некоторых поверхностей. Пусть $F_1(x, y, z) = 0$ и $F_2(x, y, z) = 0$ – уравнения некоторых поверхностей, тогда система уравнений $F_1(x, y, z) = 0$ и $F_2(x, y, z) = 0$ определяет некоторую линию, т. е. линия в пространстве определяется в декартовых прямоугольных координатах системой двух уравнений с переменными x, y, z.

II. Общее уравнение прямой в пространстве

Система двух уравнений первой степени

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}$$

в которой коэффициенты при x, y, z не пропорциональны, определяют некоторую прямую линию, как линию пересечения этих плоскостей и называются *общими уравнениями прямой в пространстве*.

III. Канонические уравнения прямой в пространстве

Уравнение вида

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

выражает общее свойство всех точек, лежащих на прямой, проходящей через точку $A(x_0;\ y_0;\ z_0)$, параллельно вектору $\vec{v}=(m,n,p)$ (направляющему вектору прямой) и называется *каноническим уравнением данной прямой*.

IV. Параметрические уравнения прямой

Уравнения вида

$$\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt, \\ z=z_0+pt, \end{cases}$$

называются *параметрическими уравнениями прямой*.

V. Векторное уравнение прямой

Уравнение вида

$$\vec{r}=\vec{r}_0+\vec{v}t,$$

где $\vec{r}_0$ - радиус вектор точки, через которую проходит прямая; t - числовой множитель и может принимать любые значения в зависимости от положения текущей точки на прямой; $\vec{v}$ - направляющий вектор прямой; называется *векторным уравнением прямой*.

VI.Угол между прямыми, условие параллельности и перпендикулярности двух прямых

За угол между двумя прямыми принимают один из двух смежных углов, которые образуют прямые, проведенные параллельно данным через какую-нибудь точку пространства. Один из этих смежных углов равен углу между направляющими векторами этих прямых.

§3. Поверхности второго порядка

I. Эллипсоид

Эллипсоидом называется поверхность, определяемая в прямоугольной системе координат *Oxyz* уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

называемым *каноническим уравнением эллипсоида*. Величины *a, b, c* называются *полуосями эллипсоида*. Исследование уравнения и построение эллипсоида.

II. Однополостной гиперболоид. Двуполостной гиперболоид

Однополостным гиперболоидом называется поверхность, определяемая в прямоугольной системе координат *Oxyz* уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

называемым *каноническим уравнением однополостного гиперболоида*. Величины *a, b, c* называются *полуосями однополостного гиперболоида*. Исследование уравнения и построение однополостного гиперболоида.

Двуполостным гиперболоидом называется поверхность, определяемая в прямоугольной системе координат *Oxyz* уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1,$$

называемым *каноническим уравнением двуполостного гиперболоида*. Величины *a, b, c* называются *полуосями*. Исследование уравнения и построение поверхности.

III. Эллиптический параболоид. Гиперболический параболоид.

Эллиптическим параболоидом называется поверхность, определяемая в прямоугольной системе координат *Oxyz* уравнением

$$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2},$$

называемым *каноническим уравнением.* Исследование уравнения и построение.

Гиперболическим параболоидом называется поверхность, определяемая в прямоугольной системе координат *Oxyz* уравнением

$$z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2},$$

называемым *каноническим уравнением*. Исследование уравнения и построение.

IV. Эллиптический цилиндр. Параболический цилиндр. Гиперболический цилиндр

Цилиндры второго порядка определяются в прямоугольной системе координат *Oxyz* уравнениями:

a) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ - *эллиптический цилиндр*;

b) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ - *гиперболический цилиндр*;

c) $y^2=2px$ - *параболический цилиндр*.

V. Конус второго порядка

Конусом второго порядка, или, *конусом*, называется поверхность, определяемая в прямоугольной системе координат *Oxyz* уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

Тема 4. Преобразования плоскости. – 4 ч.

Преобразования плоскости: отображения и преобразования; ортогональные преобразования; аффинные преобразования.

Тема 5. Системы линейных уравнений и матрицы: детерминанты; системы линейных уравнений; ранг матрицы; действия с матрицами – 6 ч.

Матрицы и действия над ними. Понятие матрицы. Некоторые виды матриц. Равенство матриц, сложение матриц. Умножение матрицы на число. Умножение матриц. Перестановки. Понятие определителя порядка *n*. Определители второго порядка. Определители третьего порядка. Свойства определителей.

Понятие алгебраического дополнения и минора и связь между ними. Обратная матрица. Ранг матрицы. Элементарные преобразования над матрицами. Системы линейных уравнений и их исследование. Форма записи систем линейных уравнений. Классификация систем. Теорема Кронекера-Капелли (о совместности произвольной системы линейных уравнений). Метод Гаусса. Формулы Крамера. Решение систем линейных уравнений с помощью обратной матрицы. Системы линейных однородных уравнений.

Система линейных алгебраических уравнений, содержащая m уравнений и n неизвестных, имеет следующий вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

или в матричной записи $A\vec{x} = \vec{b}$,
где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \ a_{12} \ ... \ a_{1n} \\ a_{21} \ a_{22} \ ... \ a_{2n} \\ .... \\ a_{m1} \ a_{m2} \ ... \ a_{mn} \end{pmatrix}$$ - основная матрица системы,

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$$ - столбец неизвестных,

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}$$ - столбец свободных членов.

Матрицу

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ .... & .... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

называют *расширенной матрицей системы*.

Система линейных алгебраических уравнений называется *прямоугольной*, если $m \neq n$, и квадратной, если $m = n$.

Система линейных алгебраических уравнений называется *однородной*, если $\vec{b} = 0$, т.е., если столбец свободных членов состоит из одних нулей.

Система линейных алгебраических уравнений называется *неоднородной*, если $\vec{b} \neq 0$.

Система линейных алгебраических уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и несовместной, если она не имеет ни одного решения.

Совместная система линейных алгебраических уравнений называется *определенной*, если она имеет только одно решение, и неопределенной, если она имеет более одного решения.

Совместность системы может быть определена с помощью теоремы Кронекера-Капелли.

Теорема. Для того , чтобы система была совместна, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы равнялся рангу расширенной матрицы.

Если ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы, т.е. $rgA = rg\widetilde{A}$, то ранг матрицы системы называют *рангом системы*.

Замечание. Если ранг системы равен числу неизвестных, то система определённая.

Теорема (Крамера). Если матрица квадратной системы невырожденная, то система определенная.

В этом случае решение системы может быть найдено по формулам Крамера.

Теорема. Если ранг однородной системы меньше числа неизвестных, то такая система имеет фундаментальную совокупность решений, состоящую из $n - r$ решений, где $n -$число неизвестных, $r -$ ранг системы.

Совокупность решений однородной системы называется *фундаментальной*, если выполняются два условия:

1) эта совокупность линейно независимая;

2) любое решение однородной системы может быть линейно выражено через эту совокупность.

Элементарные преобразования системы линейных уравнений:

- перестановка любых двух уравнений;
- умножение обеих частей одного уравнения на любое число отличное от нуля;
- прибавление к обеим частям одного уравнения соответствующих частей другого, умноженных на любое число.

Элементарные преобразования переводят данную систему в эквивалентную.

Метод Гаусса решения системы линейных уравнений состоит в том, что с помощью элементарных преобразований последовательно исключаются неизвестные, и данная система превращается в ступенчатую. Приводить к ступенчатому виду удобнее не саму систему, а её расширенную матрицу, выполняя все преобразования над её строками.

Формулы Крамера. Решение неоднородной системы n уравнений с n неизвестными, имеющей невырожденную основную матрицу системы, находится по формулам

$$x_j = \frac{\Delta j}{\Delta},\ j = 1,2,\ldots,n,$$

где $\Delta = \det A$ - определитель системы; Δ_j - определитель матрицы, получаемой из основной матрицы системы заменой её j-го столбца столбцом свободных членов.

Примеры

1. Решить систему уравнений

$$\begin{aligned}
&2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 1,\\
&4x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 5,\\
&6x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 = 9,\\
&2x_1 - x_2 + 2x_3 - 12x_4 = 10.
\end{aligned}$$

<u>Решение</u>. Будем решать методом Гаусса. Выпишем расширенную матрицу системы и преобразуем её, вычитая первую строку, умноженную на 2, 3 и 1 соответственно из 2-ой, 3-ей и 4-ой строк:

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|cc} 2 & -1 & -1 & 3 & 1\\ 4 & -2 & -1 & 1 & 5\\ 6 & -3 & -1 & -1 & 9\\ 2 & -1 & 2 & -12 & 10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|ccc} 2 & -1 & -1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -5 & 3\\ 0 & 0 & 2 & -10 & 6\\ 0 & 0 & 3 & -15 & 9 \end{array}\right).$$

Далее вторую строку, умноженную на 2 и 3, вычтем соответственно из третей и четвёртой строк:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -5 & 3\\ 0 & 0 & 2 & -10 & 6\\ 0 & 0 & 3 & -15 & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 2 & -1 & -1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -5 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Последняя матрица эквивалентна следующей ступенчатой системе:

$$\begin{aligned}
2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 &= 1,\\
x_3 - 5x_4 &= 3.
\end{aligned}$$

Полученная упрощённая система представляет собой систему из двух уравнений для четырёх неизвестных. Следовательно, два из неизвестных можно выбрать за главные, а два - за свободные, через которые будут выражены главные. В качестве главных неизвестных можно выбрать любую пару, если определитель, составленный из коэффициентов, стоящих перед ними, отличен от нуля (базисный минор). В данной задаче в качестве главных неизвестных можно выбрать x_1 , x_3 .

Действительно, определитель, составленный из их коэффициентов, отличен от нуля:

$$\Delta_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -1\\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Теперь из второго уравнения выразим x_3 через x_4. Затем подставим его в первое уравнение и найдём x_1 через x_2, x_4. В итоге получим

$$x_1 = \frac{1}{2}x_2 + x_4 + 2,$$

$$x_3 = 5x_4 + 3.$$

Переменные x_2, x_4 принимают произвольные значения. Положив $x_2 = \lambda_2$, $x_4 = \lambda_4$, общее решение системы можно записать в виде

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\lambda_2 + \lambda_4 + 2 \\ \lambda_2 \\ 5\lambda_4 + 3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix}.$$

2. Решить с помощью формул Крамера систему уравнений

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 4,$$

$$3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1,$$

$$2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8.$$

Решение. Убедимся, прежде всего, в том, что определитель системы отличен от нуля:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (5 - 21) - 2 \cdot (-3 - 6) + 1 \cdot (21 + 10) = 33.$$

Вычислим теперь остальные, входящие в формулы Крамера, определители:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 8 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 4 \cdot (5 - 21) - 2 \cdot (-1 - 24) + 1 \cdot (7 + 40) = 33,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 8 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1 - 24) - 4 \cdot (-3 - 6) + 1 \cdot (24 - 2) = 33,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -5 & 1 \\ 2 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-40 - 7) - 2 \cdot (24 - 2) + 4 \cdot (21 + 10) = 33.$$

Подставив полученные значения определителей в формулы Крамера, имеем

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{33}{33} = 1, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{33}{33} = 1, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{33}{33} = 1.$$

Правильность представленного решения можно проверить подстановкой значений x_1, x_2, x_3 в исходную систему уравнений.

3. Исследовать на совместность и, если совместна, найти общее и одно частное решение системы уравнений

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 3,$$
$$x_1 + 3x_2 - x_3 = 1,$$
$$3x_1 + 4x_2 - x_3 = 5.$$

Решение. Прежде всего, используя теорему Кронекера-Капелли, определим, является ли данная система уравнений совместной. Для этого выпишем расширенную матрицу системы

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 5 \end{array}\right).$$

Вычислим вначале ранг основной матрицы. Видно, что минор второго порядка, стоящий в левом верхнем углу, отличен от нуля:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 2 = 5 \neq 0.$$

Посмотрим теперь, чему равен минор третьего порядка (определитель) основной матрицы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-3 + 4) + 2 \cdot (-1 + 3) + 1 \cdot (4 - 9) = 0$$

Таким образом, ранг основной матрицы равен двум - $rg(A) = 2$.

Для определения ранга расширенной матрицы необходимо вычислить ещё один, оставшийся, минор третьего порядка

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot (15 - 4) + 2 \cdot (5 - 3) + 3 \cdot (4 - 9) = 0$$

Следовательно, ранг расширенной матрицы также равен двум - $rg(\widetilde{A}) = 2$. Значит, в соответствии с теоремой Кронекера-Капелли рассматриваемая система уравнений совместна. Принимая за независимые первые два уравнения, содержащие базисный минор, исходную систему можно переписать в виде

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 3,$$
$$x_1 + 3x_2 - x_3 = 1.$$

Здесь главными являются относящиеся к базисному минору неизвестные x_1, x_2. Выражая их через x_3, получим

$$x_1 = \frac{11 - x_3}{5}, \quad x_2 = \frac{2x_3 - 2}{5}.$$

Это общее решение, которое можно записать также в виде вектор-столбца

$$X=\begin{pmatrix}\dfrac{11-x_3}{5}\\ \dfrac{2x_3-2}{5}\\ x_3\end{pmatrix}.$$

Частное решение получается из общего, если для x_3 выбрать конкретное числовое значение. Пусть, например, $x_3=1$, тогда в качестве частного решения имеем

$x_1=2,\quad x_2=0,\quad x_3=1$.

4. Найти фундаментальную совокупность и общее решение системы уравнений

$$x_1+3x_2+3x_3+2x_4+4x_5=0,$$
$$x_1+4x_2+5x_3+3x_4+7x_5=0,$$
$$2x_1+5x_2+4x_3+x_4+5x_5=0,$$
$$x_1+5x_2+7x_3+6x_4+10x_5=0.$$

Решение. Выпишем матрицу системы и упростим её с помощью элементарных преобразований, вычитая первую строку, умноженную на 1,2 и 1 соответственно из второй, третьей и четвёртой строк:

$$A=\begin{pmatrix}1&3&3&2&4\\1&4&5&3&7\\2&5&4&1&5\\1&5&7&6&10\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&3&2&4\\0&1&2&1&3\\0&-1&-2&-3&-3\\0&2&4&4&6\end{pmatrix}.$$

Теперь вторую строку прибавим к третьей и её же, умноженную на 2, вычтем из четвёртой строки, получим

$$A\sim\begin{pmatrix}1&3&3&2&4\\0&1&2&1&3\\0&-1&-2&-3&-3\\0&2&4&4&6\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&3&2&4\\0&1&2&1&3\\0&0&0&-2&0\\0&0&0&3&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&3&2&4\\0&1&2&1&3\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}.$$

Ранг этой матрицы равен трём. Следовательно, три неизвестные являются главными, а две - свободными. Выберем в качестве главных x_1,x_2,x_4. Это можно сделать, т.к. минор 3-го порядка, составленный из коэффициентов при этих неизвестных, отличен от нуля. Соответствующая преобразованной матрице система имеет вид

$$x_1+3x_2+3x_3+2x_4+4x_5=0,$$
$$x_2+2x_3+x_4+3x_5=0,$$
$$x_4=0.$$

Отсюда, выражая главные неизвестные через свободные, получим общее решение

$$x_1 = 3x_3 + 5x_5,$$
$$x_2 = -2x_3 - 3x_5,$$
$$x_4 = 0.$$

Чтобы записать фундаментальную совокупность решений (ФСР), необходимо из вектор-столбца $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix}$ составить любым способом два линейно независимых вектора. Обычно это делается путем задания искомого вектор-столбца в виде столбцов единичной матрицы размером, равным высоте столбца из свободных неизвестных. В данном случае – это матрица второго порядка

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Придавая x_3, x_5 значения из первого и второго столбцов этой матрицы, получим ФСР:

$$C_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку общее решение системы есть сумма линейно независимых решений из ФСР, умноженных на произвольные коэффициенты, то его можно записать ещё в следующем виде:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 = \lambda_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\lambda_1 + 5\lambda_2 \\ -2\lambda_1 - 3\lambda_2 \\ \lambda_1 \\ 0 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Тема 6. Линейные пространства: понятие и примеры линейных пространств; линейные подпространства; линейные преобразования; задача о собственных векторах – 4 ч.

Понятие n – мерного арифметического пространства. Базис и координаты в n – мерных арифметических пространствах. Понятие линейного пространства. Понятие подпространства. Матрица линейного оператора. Собственные векторы и собственные числа линейного оператора. Линейные формы. Понятие квадратичной формы. Приведение квадратичной формы к главным осям.

Квадратичной формой n переменных $x_1, x_2, ..., x_n$,принимающих числовые значения, называется числовая функция вида

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + ... + a_{1n}x_1x_n + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + ...$$

$$+ a_{2n}x_2x_n + ... + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + ... + a_{nn}x_n^2 \ ,$$

где a_{ij} - числа, называемые коэффициентами квадратичной формы.

Матрицей квадратичной формы n переменных $x_1, x_2, ..., x_n$, называется симметрическая матрица порядка n, элементы главной диагонали которой совпадают с коэффициентами при квадратах переменных, а каждый недиагональный элемент, расположенный в $i-$ой строке $j-$ом столбце, равен половине коэффициента при $x_i x_j$ в квадратичной форме.

Рангом квадратичной формы называется ранг её матрицы. Квадратичная форма может быть записана в матричном виде $f(\vec{x}) = \vec{x}^{\mathrm{T}} A\,\vec{x}$, где $A-$матрица квадратичной формы и $\vec{x} = (x_1, x_2, ...x_n)$.

Квадратичная форма называется канонической (имеет канонический вид), если коэффициенты $a_{ij} = 0$ при $i \neq j$, то есть, если матрица квадратичной формы диагональная и, следовательно,

$$f(\vec{x}) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + ... + a_{nn}x_n^2 = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 \ .,$$

где не все коэффициенты a_{ii} равны нулю.

Теорема (Лагранжа). Для всякой квадратичной формы существует такой базис, в котором квадратичная форма имеет канонический вид.

Нормальным видом квадратичной формы называется такой канонический вид, в котором коэффициенты при квадратах неизвестных (не считая нулевых) равны ± 1.

Квадратичная форма $f(\vec{x})$ называется положительно (отрицательно) определённой, если $f(\vec{x}) > 0$ $\left(f(\vec{x}) < 0\right)$ при всех $\vec{x} \neq 0$ и положительно (отрицательно) полуопределенной, если $f(\vec{x}) \geq 0$ $\left(f(\vec{x}) \leq 0\right)$ при всех $\vec{x}$.

Теорема (критерий Сильвестра). Для того чтобы квадратичная форма $f(\vec{x})$ была положительно определённой, необходимо и достаточно чтобы все угловые миноры матрицы квадратичной формы были положительны, то есть, чтобы

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, ..., \Delta_n > 0.$$

Здесь $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n$ - угловые миноры матрицы квадратичной формы.

Следствие. Для того чтобы квадратичная форма $f(\vec{x})$ была отрицательно определённой, необходимо и достаточно, чтобы знаки угловых миноров матрицы квадратичной формы чередовались следующим образом:

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, ..., (-1)^n \Delta_n > 0.$$

Примеры

1. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа и записать соответствующее преобразование

$$L(\vec{x},\vec{x}) = x_1^2 - x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_2x_3.$$

Решение. Следуя алгоритму метода Лагранжа, выделим вначале в квадратичной форме все члены, содержащие x_1, и дополним их до полного квадрата:

$$x_1^2 + 4x_1x_2 = (x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2) - 4x_2^2 = (x_1 + 2x_2)^2 - 4x_2^2.$$

Сделаем в этом выражении замену $y_1 = x_1 + 2x_2$ и подставим его в квадратичную форму. Получим:

$$L = y_1^2 - 5x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_2x_3.$$

Далее выделим в L члены, содержащие x_2, и проделаем с ними аналогичную процедуру:

$$-5x_2^2 + 2x_2x_3 = -5\cdot(x_2^2 - \frac{2}{5}x_2x_3 + \frac{x_3^2}{25} - \frac{x_3^2}{25}) =$$

$$= -5\cdot(x_2 - 0.2x_3)^2 + \frac{x_3^2}{5}$$

Если положить $y_2 = x_2 - 0.2x_3$, то квадратичная форма уже не будет содержать смешанных произведений. Примем также $x_3 = y_3$, тогда канонический вид квадратичной формы есть

$$L = y_1^2 - 5y_2^2 + 3.2y_3^2.$$

Соответствующее преобразование от переменных x_1, x_2, x_3 к переменным y_1, y_2, y_3 имеет вид:

$$y_1 = x_1 + 2x_2,\ y_2 = x_2 - 0.2x_3,\ y_3 = x_3.$$

2. Найти ортогональное преобразование, приводящее квадратичную форму к каноническому виду, и записать соответствующий канонический вид этой формы:

$$L(\vec{x},\vec{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_2x_3.$$

Решение. В исходном базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ матрица оператора, соответствующая данной квадратичной форме, есть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица будет определять квадратичную форму канонического вида в ортонормированном базисе $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'$, составленном из собственных векторов матрицы A. Найдем их.

Характеристическое уравнение для матрицы A имеет вид

$$|A - \lambda\cdot E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Откуда следует

$$(1-\lambda)\cdot[(2-\lambda)^2-1]=0 \text{ и } \lambda_{1,2}=1, \lambda_3=3.$$

Как известно собственные векторы матрицы находятся из уравнений

$$(A-\lambda\cdot E)\vec{f}=0.$$

Для случая $\lambda_{1,2}=1$ имеем:

$$(A-E)\vec{f}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix}=0.$$

Ранг матрицы этой системы уравнений (относительно $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$) равен 1. Следовательно, ФСР системы состоит из двух линейно независимых решений. Как видно из данной системы, величина α_3 принимает произвольные значения, а величины α_1,α_2 связаны соотношением $\alpha_1+\alpha_2=0$. В качестве собственных можно выбрать, например, векторы

$$\vec{f}_1=(1,0,0), \vec{f}_2=(0,1,-1).$$

Эти векторы ортогональны: $(\vec{f}_1,\vec{f}_2)=0$ (если бы они оказались не ортогональными, то их нужно было бы ортогонализировать с помощью стандартной процедуры). Вектор $\vec{f}_1$ к тому же и нормирован. Откуда следует - $\vec{e}_1'=\vec{f}_1$. Нормируем теперь вектор $\vec{f}_2$:

$$\vec{e}_2'=\frac{\vec{f}_2}{\|\vec{f}_2\|}=(0,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}).$$

Для случая $\lambda_3=3$ уравнение, определяющее собственный вектор есть

$$\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&-1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\beta_3\end{pmatrix}=0.$$

Ранг матрицы этой системы уравнений равен 2. Следовательно, она имеет одно линейно независимое решение, например, $\vec{f}_3=(0,1,1)$. Отнормируем этот вектор:

$$\vec{e}_3'=\frac{\vec{f}_3}{\|\vec{f}_3\|}=(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}).$$

Теперь можно составить искомую матрицу ортогонального преобразования:

$$T_{e\to e'}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}.$$

Исходная квадратичная форма будет иметь следующий канонический вид

$$L(y,y)=y_1^2+y_2^2+3y_3^2.$$

При этом переменные x_1, x_2, x_3 связаны с переменными y_1, y_2, y_3 соотношением

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

или

$$x_1 = y_1,\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} y_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_3,\ x_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}} y_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_3$$

3. Построить в прямоугольной системе координат фигуру, определяемую следующим уравнением, предварительно приведя его к каноническому виду

$$5x^2 + 6xy + 5y^2 - 16x - 16y - 16 = 0.$$

Решение. Выделим в этом выражении квадратичную форму $L(x, y)$. Это три первых слагаемых уравнения $L(x, y) = 5x^2 + 6xy + 5y^2$.

Матрица квадратичной формы равна $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. Проведём процедуру приведения квадратичной формы к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования. Характеристическое уравнение матрицы имеет вид

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 3 \\ 3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Его корни таковы: $\lambda_1 = 8, \lambda_2 = 2$.

Найдём теперь собственные векторы, соответствующие этим корням и ортонормируем их. Для вектора $\vec{f}_1 = (\alpha_1, \alpha_2)$, соответствующего $\lambda_1 = 8$, имеем

$$(A - \lambda_1 E)\vec{f}_1 = (A - 8E)\vec{f}_1 = 0, \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = 0, \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2$$

В итоге собственный вектор, соответствующий $\lambda_1 = 8$, можно выбрать в виде

$$\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Аналогичная процедура для собственного вектора $\vec{f}_2 = (\beta_1, \beta_2)$ даёт:

$$(A - \lambda_2 E)\vec{f}_2 = (A - 2E)\vec{f}_2 = 0, \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = 0, \Rightarrow \beta_1 = -\beta_2$$

Откуда:

$$\vec{f}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

После нормировки полученных векторов имеем:

$$\vec{e}_1' = \frac{\vec{f}_1}{\|\vec{f}_1\|} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix},\ \vec{e}_2' = \frac{\vec{f}_2}{\|\vec{f}_2\|} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Эти векторы представляют собой ортонормированный базис новой системы координат. Матрица ортогонального оператора, приводящего квадратичную форму $L(x,y) = 5x^2 + 6xy + 5y^2$ к каноническому виду $8x'^2 + 2y'^2$, есть

$$T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Связь старых (x,y) и новых (x',y') координат определяется соотношением

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},\ x = \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y',\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'.$$

Учитывая приведенные выражения, приведём заданную квадратичную форму к каноническому виду

$$5x^2 + 6xy + 5y^2 - 16x - 16y - 16 = 8x'^2 + 2y'^2 - 16(\frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y') -$$

$$-16(\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y') - 16 = 8(x' - \sqrt{2})^2 + 2y'^2 - 32 = 0,$$

$$\frac{(x' - \sqrt{2})^2}{4} + \frac{y'^2}{16} = 1$$

Это есть каноническое уравнение эллипса в системе координат x', y',которая получается из исходной её поворотом на угол $\varphi = \pi/4$ и переносом начала координат в точку $x_0 = \sqrt{2},\ y_0 = 0$.

Тема 7. Евклидовы и унитарные пространства: Евклидовы пространства; линейные преобразования в Евклидовом пространстве; понятие об унитарных пространствах – 4 ч.

Определение евклидова пространства. Матрица Грама. Длины и углы. Ортогональность. Процесс ортогонализации. Ортогональное дополнение. Ортогональная проекция вектора на подпространство. Изоморфизм евклидовых пространств. Понятие об унитарном пространстве. Линейные операторы в евклидовом пространстве. Линейные операторы в унитарном пространстве.

Множество векторов V называется *вещественным линейным пространством*, если в этом множестве введены операции сложения двух векторов (т.е. каждой паре $\vec{x}, \vec{y} \in V$ поставлен в соответствие определенный элемент $\vec{z} = \vec{x} + \vec{y}$ из множества V) и умножения вектора на вещественное число (т.е. каждому вектору $\vec{x} \in V$ и произвольному числу $\alpha \in R$ поставлен в соответствие определенный элемент $\vec{z} = \alpha\vec{x}$ из множества V), и эти две операции удовлетворяют следующим аксиомам:

1) $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$ для $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V$;
2) $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$ для $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V$;

3) во множестве V существует нулевой вектор $\vec{0}$ такой, что $\vec{x}+\vec{0}=\vec{x}$ для $\forall\vec{x}\in V$;
4) для $\forall\vec{x}\in V$ во множестве V существует противоположный вектор $-\vec{x}$ такой, что $-\vec{x}+\vec{x}=\vec{0}$;
5) для $\forall\vec{x}\in V$ выполняется $1\cdot\vec{x}=\vec{x}$;
6) для $\forall\vec{x},\vec{y}\in V$ и $\forall\alpha,\beta\in R$ выполняются равенства

$\alpha(\beta\vec{x})=(\alpha\beta)\vec{x}$;

$(\alpha+\beta)\vec{x}=\alpha\vec{x}+\beta\vec{x}$;

$\alpha(\vec{x}+\vec{y})=\alpha\vec{x}+\alpha\vec{y}$.

Арифметическим пространством $\mathbf{R^n}$ называется множество векторов $\{\vec{x}=(x_1,x_2,...,x_n)|\,x_i\in R, i=1,2,...,n\}$, в котором операции сложения векторов и умножения вектора на число определены следующим образом: если

$$\alpha\in R,\ \vec{x}=(x_1,x_2,...,x_n),\ \vec{y}=(y_1,y_2,...,y_n),$$

то

$$\vec{x}+\vec{y}=(x_1+y_1,x_2+y_2,...,x_n+y_n),\ \alpha\vec{x}=(\alpha x_1,\alpha x_2,...,\alpha x_n).$$

Утверждение. Множество всех решений однородной системы образует линейное пространство.

Линейной комбинацией векторов $\vec{v}_1,...,\vec{v}_k$ называется сумма вида

$$\lambda_1\cdot\vec{v}_1+...+\lambda_k\cdot\vec{v}_k,$$

где $\lambda_1,...,\lambda_k$ - произвольные числа.

Утверждение. Множество всех линейных комбинаций векторов $\vec{v}_1,...,\vec{v}_k$ образует линейное пространство.

Система векторов $\vec{v}_1,...,\vec{v}_k$ называется *линейно независимой*, если равенство $\lambda_1\cdot\vec{v}_1+...+\lambda_k\cdot\vec{v}_k=\vec{0}$ выполняется только при $\lambda_1=...=\lambda_k=0$.

Утверждение. Система векторов линейно независима тогда и только тогда, когда ни один из этих векторов не является линейной комбинацией остальных векторов данной системы.

Система векторов $\vec{v}_1,...,\vec{v}_k$ называется *линейно зависимой*, если существуют числа $\lambda_1,...,\lambda_k$, не равные нулю одновременно, при которых выполняется равенство $\lambda_1\cdot\vec{v}_1+...+\lambda_k\cdot\vec{v}_k=\vec{0}$.

Утверждение. Система векторов $\vec{v}_1,...,\vec{v}_k$ линейно зависима тогда и только тогда, когда хотя бы один из этих векторов является линейной комбинацией остальных векторов данной системы.

Примеры

1. Являются ли линейно зависимыми (независимыми) векторы

$$\vec{a}_1=(2,-3,1),\quad \vec{a}_2=(3,-1,5),\quad \vec{a}_3=(1,-4,3).$$

<u>Решение</u>. По определению линейная зависимость или независимость векторов устанавливается исходя из условия равенства нулю линейной комбинации этих векторов

$$\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\alpha_3\vec{a}_3=0$$

или в развёрнутом виде

$$\alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{12} + \alpha_3 a_{13} = 0,$$

$$\alpha_1 a_{21} + \alpha_2 a_{22} + \alpha_3 a_{23} = 0,$$

$$\alpha_1 a_{31} + \alpha_2 a_{32} + \alpha_3 a_{33} = 0.$$

Если эти равенства выполняются при условии, что хотя бы один из коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ отличен от нуля, то векторы линейно зависимы. Записанные равенства представляют собой однородную систему линейных уравнений относительно коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Эта система имеет нетривиальное решение (т.е. решение, в котором не все α одновременно равны нулю) только при условии равенства нулю определителя системы. В рассматриваемом случае определитель системы равен

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & -4 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-3 + 20) - 3 \cdot (-9 + 4) + 1 \cdot (-15 + 1) = 35 \neq 0.$$

Таким образом система имеет лишь тривиальное решение и исходная совокупность векторов линейно независима.

2. При каких λ вектор $\vec{b} = (7, -2, \lambda)$ линейно выражается через векторы $\vec{a}_1 = (2, 3, 5)$, $\vec{a}_2 = (3, 7, 8)$, $\vec{a}_3 = (1, -6, 1)$.

<u>Решение</u>. По условию задачи надо найти такие λ, при которых выполняется равенство

$$\vec{b} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \alpha_3 \vec{a}_3$$

или в развёрнутом виде

$$\alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{12} + \alpha_3 a_{13} = b_{1,}$$

$$\alpha_1 a_{21} + \alpha_2 a_{22} + \alpha_3 a_{23} = b_2,$$

$$\alpha_1 a_{31} + \alpha_2 a_{32} + \alpha_3 a_{33} = b_3.$$

Записанные соотношения представляют собой систему неоднородных линейных уравнений относительно $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ - коэффициентов линейной комбинации. В соответствии с теоремой Кронекера-Капелли эта система совместна, если ранг основной матрицы системы равен рангу расширенной матрицы. Выпишем расширенную матрицу для заданных условий:

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 7 \\ 3 & 7 & -6 & -2 \\ 5 & 8 & 1 & \lambda \end{array} \right)$$

Сначала определим ранг основной матрицы. Видно, что отличные от нуля миноры второго порядка в матрице имеются, например, минор, стоящий в левом верхнем углу. Вычислим теперь минор третьего порядка (определитель) основной матрицы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & -6 \\ 5 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot(7+48) - 3\cdot(3+30) + 1\cdot(24-35) = 0\,.$$

Следовательно, ранг основной матрицы равен двум. Таким образом, рассматриваемая система будет совместна, если ранг расширенной матрицы также будет равен двум. Для этого необходимо, чтобы второй минор третьего порядка расширенной матрицы был равен нулю, т.е.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 3 & 7 & -2 \\ 5 & 8 & \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

откуда следует

$$2\cdot(7\lambda+16) - 3\cdot(3\lambda+10) + 1\cdot(24-35) = 0,$$

$$14\lambda + 32 - 9\lambda - 30 - 77 = 0,\ 5\lambda = 75,\ \lambda = 15.$$

Базисом линейного пространства V называется линейно независимая система векторов $\vec{v}_1,...,\vec{v}_n$ из V такая, что любой вектор из пространства V можно представить в виде линейной комбинации векторов $\vec{v}_1,...,\vec{v}_n$.

Размерностью линейного пространства V называется количество векторов в базисе этого пространства. Обозначается $\dim V$.

Утверждение. Базисом линейного пространства решений однородной системы является ее фундаментальная система решений.

Утверждение. $\dim \boldsymbol{R}^{\mathbf{n}} = n$.

Примеры.

1. Образуют ли базис в пространстве $\mathbf{R}^3$ векторы
$\vec{a}_1 = (1,0,0)$, $\vec{a}_2 = (0,1,0)$, $\vec{a}_3 = (1,1,0)$?

Решение. По определению базис составляют линейно независимые векторы. Линейная зависимость (или независимость) определяется исходя из анализа равенства нулю линейной комбинации этих векторов:

$$\alpha\vec{a}_1 + \beta\vec{a}_2 + \gamma\vec{a}_3 = 0\,.$$

Последнее векторное уравнение после записи его по компонентам представляет собой систему трёх однородных уравнений относительно α, β, γ. Согласно схеме исследования линейной зависимости векторов вычислим определитель матрицы, составленной из координат векторов

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Определитель системы равен нулю, следовательно, она имеет нетривиальное решение и это означает, что исходная группа векторов линейно зависима и не образует базис в $\mathbf{R}^3$.

2. Найти размерность и один из базисов линейного пространства решений однородной системы:

$$3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0,$$
$$x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0,$$
$$4x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0.$$

<u>Решение</u>. Представленная система состоит из трёх уравнений и содержит 5 неизвестных. Выпишем матрицу системы и упростим её с помощью элементарных преобразований, сначала поменяв местами строки 1 и 2, а затем вычитая новую первую строку, умноженную на 3 и 4, соответственно из второй и третьей строк :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -10 & 7 & -2 & 2 \\ 0 & -10 & 7 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -10 & 7 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Видно что ранг матрицы A равен 2. Следовательно, две неизвестные являются главными, а три - свободными. Значит ФСР системы содержит 5-2=3 линейно независимых решения. Выберем в качестве главных x_1, x_2.. Это можно сделать, т.к. минор 2-го порядка, составленный из коэффициентов при этих неизвестных, отличен от нуля. Система, соответствующая преобразованной матрице, имеет вид

$$x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0,$$
$$-10x_2 + 7x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0.$$

Отсюда, выражая главные неизвестные через свободные, получим общее решение

$$x_1 = -0.1x_3 - 0.4x_4 + 0.4x_5,$$
$$x_2 = 0.7x_3 - 0.2x_4 + 0.2x_5.$$

Или иначе:

$$X = \begin{pmatrix} -0.1x_3 - 0.4x_4 + 0.4x_5 \\ 0.7x_3 - 0.2x_4 + 0.2x_5 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}.$$

Фундаментальная совокупность решений, составленная в соответствии с изложенным алгоритмом, является базисом линейного пространства решений исходной системы и в данном случае имеет вид

$$X_1 = \begin{pmatrix} -0.1 \\ 0.7 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} -0.4 \\ -0.2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Размерность искомого пространства равна 3.

Координатами вектора $\vec{x}$ в базисе $\vec{v}_1,...,\vec{v}_n$ называются числа $x_1,...,x_n$, при которых выполняется равенство $x_1 \cdot \vec{v}_1 + ... + x_n \cdot \vec{v}_n = \vec{x}$.

Матрицей перехода от базиса $\vec{a}_1,...,\vec{a}_n$ к базису $\vec{b}_1,...,\vec{b}_n$ называется матрица вида

$$T = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & .. & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & ... & c_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ c_{n1} & c_{n2} & ... & c_{nn} \end{pmatrix},$$

где для каждого $j = 1,...,n$ в j-ом столбце стоят координаты $(c_{1j}, c_{2j},...,c_{nj})$ вектора $\vec{b}_j$ в базисе $\vec{a}_1,...,\vec{a}_n$.

Утверждение. Координаты $(\alpha_1, \alpha_2,...,\alpha_n)$ вектора $\vec{x}$ в базисе $\vec{a}_1,...,\vec{a}_n$ и координаты $(\beta_1, \beta_2,...,\beta_n)$ этого же вектора в базисе $\vec{b}_1,...,\vec{b}_n$ связаны равенством

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = T_{a\to b} \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix},$$

где $T_{a\to b}$ - матрица перехода от базиса $\vec{a}_1,...,\vec{a}_n$ к базису $\vec{b}_1,...,\vec{b}_n$.

Утверждение. Матрица перехода $T_{a\to b}$ от базиса $\vec{a}_1,...,\vec{a}_n$ к базису $\vec{b}_1,...,\vec{b}_n$ и матрица обратного перехода $T_{b\to a}$ от базиса $\vec{b}_1,...,\vec{b}_n$ к базису $\vec{a}_1,...,\vec{a}_n$ связаны равенством $T_{a\to b} = T_{b\to a}^{-1}$.

Примеры

1. Найти координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\vec{e}_1', \vec{e}_2'$, если известно

$$\vec{x} = 2\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2, \quad \vec{e}_1' = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2, \quad \vec{e}_2' = \vec{e}_1 - \vec{e}_2.$$

Решение. В соответствии с определением матрица перехода от базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ к базису $\vec{e}_1', \vec{e}_2'$ есть

$$T_{e\to e'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Обозначим координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ через ξ_1, ξ_2, а в базисе $\vec{e}_1', \vec{e}_2'$ через η_1, η_2. Искомые координаты η_1, η_2 связаны с известными координатами ξ_1, ξ_2 следующим соотношением:

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = T_{e' \to e} \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = T_{e \to e'}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}.$$

Видно, что для получения координат η_1, η_2 необходимо вычислить матрицу, обратную $T_{e \to e'}$. Используя стандартную процедуру, имеем

$$T_{e \to e'}^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вычислим теперь координаты η_1, η_2:

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 2-5 \\ 6+5 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{11}{4} \end{pmatrix}.$$

3. Найти матрицу перехода от базиса $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ к базису $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ по данным разложениям этих векторов в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2$:

$$\vec{a}_1 = \vec{e}_1 + 4\vec{e}_2,\ \vec{a}_2 = 3\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2, \quad \vec{b}_1 = 7\vec{e}_1 + \vec{e}_2,\ \vec{b}_2 = \vec{e}_2.$$

Решение. Чтобы построить матрицу $T_{a \to b}$ перехода от базиса $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ к базису $\vec{b}_1, \vec{b}_2$, необходимо найти разложение векторов $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ по базису $\vec{a}_1, \vec{a}_2$. Сделаем это, представив $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ в виде разложения по $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ с неизвестными координатами, которые требуется определить:

$$\vec{b}_1 = \alpha_1 \cdot \vec{a}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{a}_2, \quad \vec{b}_2 = \beta_1 \cdot \vec{a}_1 + \beta_2 \cdot \vec{a}_2,$$

или с учётом вида этих векторов в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2$

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \beta_2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Откуда для координат $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ имеем

$$\alpha_1 + 3\alpha_2 = 7, \quad 4\alpha_1 + 5\alpha_2 = 1; \quad \beta_1 + 3\beta_2 = 0, \quad 4\beta_1 + 5\beta_2 = 1,$$

$$\alpha_1 = -\frac{32}{7}, \alpha_2 = \frac{27}{7}; \quad \beta_1 = \frac{3}{7}, \beta_2 = -\frac{1}{7}.$$

Теперь, зная разложение $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ по $\vec{a}_1, \vec{a}_2$, выпишем матрицу $T_{a \to b}$:

$$T_{a \to b} = -\frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 32 & -3 \\ -27 & 1 \end{pmatrix}.$$

Подпространством L линейного пространства V называется множество векторов из V такое, что для любых двух векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ из L и любых двух вещественных чисел α и β линейная комбинация $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}$ также принадлежит L.

Утверждение. Подпространство само является линейным пространством.

Линейной оболочкой системы векторов $\vec{v}_1,...,\vec{v}_k$ называется множество всех линейных комбинаций векторов $\vec{v}_1,...,\vec{v}_k$. Обозначается $L(\vec{v}_1,...,\vec{v}_k)$.

Утверждение. Линейная оболочка системы векторов является подпространством.

Пересечением двух подпространств L_1 и L_2 называется множество всех векторов, принадлежащих одновременно и L_1, и L_2. Обозначается $L_1 \cap L_2$.

Суммой двух подпространств L_1 и L_2 называется множество всех векторов $\vec{z}$, представимых в виде $\vec{z} = \vec{x} + \vec{y}$, где $\vec{x} \in L_1$, $\vec{y} \in L_2$. Обозначается $L_1 + L_2$.

Утверждение. Сумма и пересечение подпространств L_1 и L_2 являются линейными пространствами, и их размерности связаны равенством

$$\dim(L_1 + L_2) + \dim(L_1 \cap L_2) = \dim L_1 + \dim L_2.$$

Сумма двух подпространств называется *прямой суммой*, если пересечение этих подпространств состоит только из нулевого вектора.

Примеры

1. Найти размерность и какой-нибудь базис суммы и пересечения подпространств, порождённых векторами

$$\vec{x}_1 = (1,2,1,0), \quad \vec{x}_2 = (-1,1,1,1), \quad \vec{y}_1 = (2,-1,0,1), \quad \vec{y}_2 = (1,-1,3,7).$$

<u>Решение</u>. Вычислим вначале размерность подпространств. С этой целью установим, являются ли линейно независимыми векторы, порождающие данные подпространства. Для подпространства L_1, порождённого векторами $\vec{x}_1, \vec{x}_2$, равенство нулю линейной комбинации $\alpha_1 \cdot \vec{x}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{x}_2 = 0$, эквивалентное системе уравнений $\alpha_1 - \alpha_2 = 0,\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0,\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0,\ \alpha_2 = 0$, достигается лишь при условии $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0$. Следовательно, векторы $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ линейно независимы и размерность подпространства L_1 равна 2: $\dim L_1 = 2$. Для подпространства L_2, порождённого векторами $\vec{y}_1, \vec{y}_2$, проводя аналогичный анализ, получим $\dim L_2 = 2$.

Вычислим теперь размерность пересечения подпространств L_1 и L_2. По определению векторы, составляющие пересечение, принадлежат одновременно обоим подпространствам. Произвольный вектор $\vec{x}$ подпространства L_1 является линейной комбинацией базисных векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2$: $\vec{x} = \beta_1 \vec{x}_1 + \beta_2 \vec{x}_2$. Аналогично для подпространства L_2 имеем $\vec{y} = \gamma_1 \vec{y}_1 + \gamma_2 \vec{y}_2$, тогда условие принадлежности пересечению есть $\beta_1 \vec{x}_1 + \beta_2 \vec{x} = \gamma_1 \vec{y}_1 + \gamma_2 \vec{y}_2$ или $\beta_1 \vec{x}_1 + \beta_2 \vec{x} - \gamma_1 \vec{y}_1 - \gamma_2 \vec{y}_2 = 0$.

Это условие представляет собой систему уравнений относительно коэффициентов $\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$. Составим матрицу системы и упростим её с помощью элементарных преобразований:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -7 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 5 & 3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 8 & 24 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Как видно ранг системы равен 3. Значит ФСР состоит из одного линейно независимого вектора. Найдём его, решив систему уравнений, соответствующих последней матрице, получим

$$\beta_1 - \beta_2 - 2\gamma_1 - \gamma_2 = 0, \quad \beta_2 - \gamma_1 - 7\gamma_2 = 0, \quad \gamma_1 + 3\gamma_2 = 0,$$

откуда $\beta_1 = -\gamma_2, \beta_2 = 4\gamma_2, \gamma_1 = -3\gamma_2$.

Полагая свободное неизвестное $\gamma_2 = -1$, для остальных имеем

$\beta_1 = 1, \beta_2 = -4, \gamma_1 = 3$. Итак, пересечение подпространств L_1, L_2 имеет один базисный вектор

$$\vec{z} = \vec{x}_1 - 4\vec{x}_2 = 3\vec{y}_1 - \vec{y}_2.$$

Размерность пересечения $\dim(L_1 \cap L_2) = 1$. Следовательно, в соответствии с равенством

$$\dim(L_1 + L_2) + \dim(L_1 \cap L_2) = \dim L_1 + \dim L_2$$

размерность суммы подпространств $\dim(L_1 + L_2) = 3$. В качестве базиса суммы подпространств можно взять, например, векторы $\vec{x}_1, \vec{x}_2$, дополненные вектором $\vec{y}_1$. В линейной независимости векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{y}_1$ убедиться нетрудно.

Евклидово пространство, ортонормированные системы

Вещественное линейное пространство V называется евклидовым пространством, если каждой паре $\vec{x}, \vec{y} \in V$ поставлено в соответствие вещественное число, которое называется скалярным произведением векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$, обозначается $(\vec{x}, \vec{y})$ и для любых $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ удовлетворяет следующим требованиям:

1) $(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{y}, \vec{x})$;

2) $(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}, \vec{z}) = \alpha(\vec{x}, \vec{z}) + \beta(\vec{y}, \vec{z})$;

3) $(\vec{x}, \vec{x}) \geq 0$, причем равенство возможно лишь в том случае, когда $\vec{x} = \vec{0}$.

Утверждение. Арифметическое пространство $\mathbf{R^n}$, в котором скалярное произведение векторов задано равенством

$$(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n,$$

является евклидовым пространством. Оно обозначается $\mathbf{E^n}$.

Векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ называются *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю.

Нормой (длиной) вектора $\vec{v}$ называется число $\|\vec{v}\| = \sqrt{(\vec{v},\vec{v})}$.

Углом между ненулевыми векторами $\vec{x}$ и $\vec{y}$ называется угол $\varphi \in [0,\pi]$ такой, что

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{x},\vec{y})}{\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|}.$$

Система ненулевых векторов $\vec{v}_1,...,\vec{v}_k$ называется *ортогональной системой*, если скалярное произведение любых двух различных векторов этой системы равно нулю.

Утверждение. Ортогональная система линейно независима.

Ортогональная система векторов $\vec{v}_1,...,\vec{v}_k$ называется ортонормированной системой, если норма любого вектора из этой системы равна единице.

Процесс ортогонализации базиса. Пусть даны n линейно независимых векторов $\vec{f}_1,\vec{f}_2,...\vec{f}_n$. Для построения по этим векторам n попарно ортогональных векторов $\vec{e}_1,\vec{e}_2,...\vec{e}_n$ необходимо провести следующую процедуру ортогонализации. Положим вначале $\vec{e}_1 = \vec{f}_1$. Затем вектор $\vec{e}_2$ будем искать в виде $\vec{e}_2 = \vec{f}_2 + \alpha\cdot\vec{e}_1$.

По условию ортогональности $(\vec{e}_1,\vec{e}_2) = 0$. Следовательно,

$$(\vec{f}_2,\vec{e}_1) + \alpha\cdot(\vec{e}_1,\vec{e}_1) = 0,$$

откуда

$$\alpha = -\frac{(\vec{f}_2,\vec{e}_1)}{(\vec{e}_1,\vec{e}_1)} = -\frac{(\vec{f}_2,\vec{f}_1)}{(\vec{f}_1,\vec{f}_1)}.$$

Предположим, что уже построено $k-1$ ортогональных векторов $\vec{e}_1,\vec{e}_2,...\vec{e}_{k-1}$. Будем искать $\vec{e}_k$ в виде

$$\vec{e}_k = \vec{f}_k + \lambda_1\cdot\vec{e}_1 + \lambda_2\cdot\vec{e}_2 + ... + \lambda_{k-1}\cdot\vec{e}_{k-1}.$$

По условию вектор $\vec{e}_k$ должен быть ортогонален $\vec{e}_1,\vec{e}_2,...\vec{e}_{k-1}$, что даёт $k-1$ уравнений для определения $k-1$ неизвестных $\lambda_1,\lambda_2,...\lambda_{k-1}$. Выпишем эти уравнения с учётом ортогональности векторов $\vec{e}_1,\vec{e}_2,...\vec{e}_{k-1}$:

$$(\vec{f}_k,\vec{e}_i) + \lambda_i\cdot(\vec{e}_i,\vec{e}_i) = 0,\ i = 1,2,...(k-1),$$

откуда получим

$$\lambda_i = -\frac{(\vec{f}_k,\vec{e}_i)}{(\vec{e}_i,\vec{e}_i)},\quad i = 1,2,...(k-1).$$

Примеры

1. В евклидовом пространстве E^3 построить ортонормированный базис по данному $\vec{f}_1 = (1,0,0)$, $\vec{f}_2 = (0,1,-1)$, $\vec{f}_3 = (1,1,1)$.

<u>Решение.</u> Проведём вначале ортогонализацию, т.е. построим ортогональный базис $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$. Проверим прежде всего, нет ли среди векторов $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ ортогональных. Вычислим $(\vec{f}_1, \vec{f}_2), (\vec{f}_1, \vec{f}_3)$:

$$(\vec{f}_1, \vec{f}_2) = 1\cdot 0 + 0\cdot 1 + 0\cdot(-1) = 0,\ (\vec{f}_1, \vec{f}_3) = 1\cdot 1 + 0\cdot 1 + 0\cdot 1 = 1.$$

Откуда следует, что векторы $\vec{f}_1$ и $\vec{f}_2$ ортогональны. Они сразу входят в состав ортогонального базиса $\vec{a}_1 = \vec{f}_1, \quad \vec{a}_2 = \vec{f}_2$.

Далее определим $\vec{a}_3$, пользуясь процедурой ортогонализации. Ищем $\vec{a}_3$ в виде

$$\vec{a}_3 = \vec{f}_3 + \lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{a}_2.$$

Из условий ортогональности $\vec{a}_3, \vec{a}_1, \vec{a}_2$ имеем

$$\lambda_1 = -\frac{(\vec{f}_3, \vec{a}_1)}{(\vec{a}_1, \vec{a}_1)}, \quad \lambda_2 = -\frac{(\vec{f}_3, \vec{a}_2)}{(\vec{a}_2, \vec{a}_2)}, (\vec{f}_3, \vec{a}_1) = (\vec{f}_3, \vec{f}_1) = 1, (\vec{f}_3, \vec{a}_2).$$

$$= (\vec{f}_3, \vec{f}_2) = 0,\ (\vec{a}_1, \vec{a}_1) = (\vec{f}_1, \vec{f}_1) = 1,\ (\vec{a}_2, \vec{a}_2) = (\vec{f}_2, \vec{f}_2) = 2.$$

Таким образом $\quad \vec{a}_3 = \vec{f}_3 - \vec{a}_1 = \vec{f}_3 - \vec{f}_1 = (0,1,1).$

Теперь ортонормируем базис $\vec{a}_3, \vec{a}_1, \vec{a}_2$, т.е. переведём его в ортонормированный базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, получим

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{a}_1}{\|\vec{a}_1\|} = \frac{\vec{a}_1}{1} = \vec{f}_1 = (1,0,0),\ \vec{e}_2 = \frac{\vec{a}_2}{\|\vec{a}_2\|},\ \|\vec{a}_2\| = \sqrt{2},$$

$$\vec{e}_2 = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}), \vec{e}_3 = \frac{\vec{a}_3}{\|\vec{a}_3\|}, \|\vec{a}_3\| = \sqrt{2}, \quad \vec{e}_3 = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}).$$

2. Дополнить до ортогонального базиса пространства E^n систему векторов $\vec{f}_1 = (1,1,0,0),\ \vec{f}_2 = (1,0,1,1)$.

<u>Решение.</u> Вначале ортогонализируем $\vec{f}_1, \vec{f}_2$. Положим $\vec{e}_1 = \vec{f}_1, \vec{e}_2 = \vec{f}_2 + \alpha \cdot \vec{e}_1$. Исходя из условия ортогональности имеем

$$\alpha = -\frac{(\vec{f}_2, \vec{e}_1)}{(\vec{e}_1, \vec{e}_1)} = -\frac{(\vec{f}_2, \vec{f}_1)}{(\vec{f}_1, \vec{f}_1)} = -\frac{1}{2}, \quad \vec{e}_2 = \vec{f}_2 - \frac{1}{2}\vec{f}_1 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 1).$$

Построим $\vec{e}_3$. Пусть $\vec{e}_3 = (x_1, x_2, x_3, x_4)$. По условиям ортогональности

$$(\vec{e}_3, \vec{e}_1) = 0, (\vec{e}_3, \vec{e}_2) = 0,$$

откуда имеем

$$x_1 + x_2 = 0, \quad \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + x_3 + x_4 = 0.$$

Общее решение полученной системы есть

$$x_1 = -x_3 - x_4,$$

$$x_2 = x_3 + x_4.$$

ФСР строится стандартным способом и состоит из двух линейно независимых решений: $\vec{e}_3 = (-1,1,1,0), \vec{e}\,'_4 = (-1,1,0,1).$

Вектор $\vec{e}_3$ ортогонален векторам $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ и, следовательно, входит в ортогональный базис. Вектор $\vec{e}_4'$ также ортогонален $\vec{e}_1, \vec{e}_2$, но не ортогонален $\vec{e}_3$. Действительно

$$(\vec{e}_3, \vec{e}_4') = 1 + 1 = 2 \neq 0 .$$

Проверим теперь, является ли система векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4'$ линейно независимой. Для установления факта зависимости (независимости) этих векторов вычислим определитель, составленный из их координат:

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$$

Неравенство нулю этого определителя означает, что однородная система уравнений для коэффициентов линейной комбинации рассматриваемых векторов имеет лишь тривиальное решение. Следовательно, векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4'$ линейно независимы и составляют базис в пространстве E^4. Остаётся теперь ортогонализировать вектор $\vec{e}_4'$. Следуя стандартной процедуре, ищем $\vec{e}_4$ в виде

$$\vec{e}_4 = \vec{e}_4' + \lambda_1 \cdot \vec{e}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{e}_2 + \lambda_3 \cdot \vec{e}_3, \ \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0,$$

$$\lambda_3 = -\frac{(\vec{e}'_4, \vec{e}_3)}{(\vec{e}_3, \vec{e}_3)} = -\frac{2}{3}, \ \vec{e}_4 = \vec{e}_4' - \frac{2}{3} \cdot \vec{e}_3 = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 1).$$

Таким образом, окончательно в качестве ортогонального базиса в E^4 имеем $\vec{e}_1 = (1,1,0,0), \vec{e}_2 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 1), \vec{e}_3 = (-1,1,1,0), \vec{e}_4 = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 1)$.

Матрица Грама

Матрицей Грама для системы векторов $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_k$ называется симметричная матрица вида

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_{n1} & \cdots & \gamma_{nn} \end{pmatrix},$$

где $\gamma_{ij} = (\vec{v}_i, \vec{v}_j)$.

Утверждение. Скалярное произведение векторов $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$ и $\vec{y} = (y_1, ..., y_n)$, заданных в базисе $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n$, вычисляется по формуле

$$(\vec{x}, \vec{y}) = (x_1 ... x_n) \cdot \Gamma \cdot (y_1, ..., y_n)^T,$$

где Γ - матрица Грама для системы векторов $\vec{v}_1,...,\vec{v}_n$.

Подмножество евклидова пространства $\mathbf{E^n}$ вида

$$\left\{\vec{x}=\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+...+\lambda_k\vec{a}_k \,\middle|\, \lambda_i\in[0,1], i=1,2,...,k\right\},$$

где $\vec{a}_1,...,\vec{a}_k$ - линейно независимые векторы, называется *k-мерным параллелепипедом*, построенным на векторах $\vec{a}_1,...,\vec{a}_k$.

Утверждение. Объем **k**-мерного параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}_1,...,\vec{a}_k$, равен квадратному корню из определителя матрицы Грама для системы векторов $\vec{a}_1,...,\vec{a}_k$.

Унитарное пространство

Линейное пространство V называется *унитарным пространством*, если каждой паре $\vec{x},\vec{y}\in V$ поставлено в соответствие комплексное число, которое называется скалярным произведением $\vec{x}$ на $\vec{y}$, обозначается $(\vec{x},\vec{y})$, и для любых $\vec{x},\vec{y},\vec{z}\in V$ и комплексных α,β удовлетворяет следующим требованиям:

1) $(\vec{x},\vec{y})=\overline{(\vec{y},\vec{x})}$;

2) $(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y},\vec{z})=\alpha(\vec{x},\vec{z})+\beta(\vec{y},\vec{z})$;

3) $(\vec{x},\vec{x})\geq 0$, причем равенство возможно лишь том случае, когда $\vec{x}=\vec{0}$.

Утверждение. Комплексное линейное пространство

$$\mathrm{U^n}=\left\{\vec{x}=(x_1,x_2,...,x_n)\,\middle|\, x_k\in C,\ k=1,2,...,n\right\},$$

в котором скалярное произведение векторов задано равенством

$$(\vec{x},\vec{y})=x_1\bar{y}_1+x_2\bar{y}_2+...+x_n\bar{y}_n,$$

является унитарным пространством.

Примеры

1. Векторы $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ образуют ортонормированный базис в унитарном пространстве. Найти скалярное произведение $(\vec{a},\vec{b})$, если

$$\begin{aligned}\vec{a}&=(a_1,a_2,a_3)=3i\cdot\vec{e}_1+2\cdot\vec{e}_2+i\cdot\vec{e}_3,\\ \vec{b}&=(b_1,b_2,b_3)=i\cdot\vec{e}_1-\vec{e}_2+2i\cdot\vec{e}_3\end{aligned}.$$

<u>Решение.</u> В рассматриваемом случае в соответствии со свойствами скалярного произведения в унитарном пространстве можно записать

$$(\vec{a},\vec{b})=a_1\cdot\overline{b_1}+a_2\cdot\overline{b_2}+a_3\cdot\overline{b_3}=3i\cdot(-i)+2\cdot(-1)+i\cdot2(-i)=$$
$$=3-2+2=3.$$

2. В унитарном пространстве со скалярным произведением вида $(\vec{x},\vec{y})=x_1\cdot\bar{y}_1+x_2\cdot\bar{y}_2+x_3\cdot\bar{y}_3$ построить ортонормированный базис по данному

$$\vec{a}=(i,1),\ \vec{b}=(i,i).$$

<u>Решение.</u> Сначала проведём процедуру ортогонализации. В данном случае она аналогична описанной для евклидова пространства. Положим

$$\vec{e}_1{}'=\vec{a},\quad \vec{e}_2{}'=\vec{b}+\alpha\cdot\vec{e}_1{}'.$$

Используя условия ортогональности, получим

$$\alpha = -\frac{(\vec{b},\vec{e}_1')}{(\vec{e}_1',\vec{e}_1')} = -\frac{(\vec{b},\vec{a})}{(\vec{a},\vec{a})} = -\frac{i\cdot(-i)+i\cdot 1}{i\cdot(-i)+1\cdot 1} = -\frac{1+i}{2}.$$

$$\vec{e}_2' = \vec{b} - \frac{1+i}{2}\cdot\vec{a} == (\frac{1+i}{2},\frac{-1+i}{2})$$

Теперь ортонормируем векторы $\vec{e}_1',\vec{e}_2'$:

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{e}_1'}{\|\vec{e}_1'\|} = \frac{\vec{e}_1'}{\sqrt{2}} = (\frac{i}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}),\ \vec{e}_2 = \frac{\vec{e}_2'}{\|\vec{e}_2'\|},\ \|\vec{e}_2'\| =$$

$$= \sqrt{\frac{(1+i)(1-i)}{4} + \frac{(-1+i)(-1-i)}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 1,$$

$$\vec{e}_2 = \vec{e}_2' = (\frac{1+i}{2},\frac{-1+i}{2}).$$

Ортогональное разложение векторов

Говорят, что вектор $\vec{v}$ *ортогонален к подпространству* L, если вектор $\vec{v}$ ортогонален любому вектору из этого подпространства.

Ортогональным дополнением к подпространству L из евклидова пространства E называется множество всех векторов из E, ортогональных подпространству L. Обозначается $L^{\perp}$.

Пусть вектор $\vec{x}$ представлен в виде $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, где $\vec{y} \in L$, а $\vec{z} \in L^{\perp}$, тогда вектор $\vec{y}$ называется ортогональной проекцией вектора $\vec{x}$ на подпространство L, вектор $\vec{z}$ называется ортогональной составляющей вектора $\vec{x}$ относительно подпространства L, число $\|\vec{z}\|$ называется расстоянием от вектора $\vec{x}$ до подпространства L, а угол между векторами $\vec{x}$ и $\vec{y}$ называется углом между вектором $\vec{x}$ и подпространством L.

Утверждение. Ортогональное дополнение к подпространству из евклидова пространства само является подпространством евклидова пространства E.

Утверждение. Сумма подпространств $L + L^{\perp}$ является прямой суммой.

Утверждение. Если L – некоторое подпространство евклидова пространства E, то справедливо равенство $L + L^{\perp} = E$.

Примеры

1. Найти ортогональную проекцию вектора $\vec{x} = (8,-1,3,6)$ на подпространство L, порождённое векторами

$$\vec{f}_1 = (4,2,0,0),\ \vec{f}_2 = (2,1,-1,2),\ \vec{f}_3 = (1,-2,-4,3).$$

<u>Решение.</u> Вначале определим базис данного подпространства. Проверим, являются ли линейно независимыми векторы $\vec{f}_1,\vec{f}_2,\vec{f}_3$. Условие линейной независимости (зависимости) данных векторов $\alpha_1\cdot\vec{f}_1 + \alpha_2\cdot\vec{f}_2 + \alpha_3\cdot\vec{f}_3 = 0$ представляет собой систему уравнений относительно коэффициентов $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$. Найдём решение этой системы с помощью элементарных преобразований её матрицы:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Как видно, ранг системы равен 3, определитель системы отличен от нуля. Следовательно, однородная система трёх уравнений для трёх неизвестных имеет лишь тривиальное решение: $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$.

Таким образом, векторы $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ линейно независимы и составляют базис заданного подпространства. По определению вектор $\vec{y}$, представляющий ортогональную проекцию $\vec{x}$ на подпространство L, принадлежит L и ортогонален $\vec{x}$. Эти условия приводят в итоге к системе уравнений для координат $y_1, y_2, ..., y_k$ вектора $\vec{y}$ в базисе $\vec{f}_1, \vec{f}_2, ..., \vec{f}_k$ подпространства L:

$$y_1\gamma_{1j} + y_2\gamma_{2j} + ... + y_k\gamma_{kj} = (\vec{x}, \vec{f}_j) = b_j, \quad j = 1,2,...,k$$

где $\gamma_{ij} = (\vec{f}_i, \vec{f}_k)$ - элементы матрицы Грама.

В соответствии с формулой Крамера решение этой системы имеет вид

$$y_j = \frac{\delta_j}{\delta},$$

где δ - определитель матрицы Грама системы базисных векторов, а δ_j - определитель, полученный из определителя Грама заменой j-го столбца на столбец из свободных членов $(\vec{x}, \vec{f}_j)$ выписанной системы уравнений.

В рассматриваемой задаче элементы матрицы Грама равны

$$\gamma_{11} = 20, \gamma_{12} = \gamma_{21} = 10, \gamma_{13} = \gamma_{31} = 0, \gamma_{22} = 10,$$

$$\gamma_{23} = \gamma_{32} = 10, \gamma_{33} = 30.$$

Элементы столбца свободных членов: $b_1 = 30, b_2 = 30, b_3 = 40$.

Учитывая это, для определителей $\delta, \delta_1, \delta_2, \delta_3$ имеем

$$\delta = \begin{vmatrix} 20 & 10 & 0 \\ 10 & 10 & 10 \\ 0 & 10 & 30 \end{vmatrix} = 10^3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 10^3, \delta_1 = \begin{vmatrix} 30 & 10 & 0 \\ 30 & 10 & 10 \\ 40 & 10 & 30 \end{vmatrix} = 10^3,$$

$$\delta_2 = \begin{vmatrix} 20 & 30 & 0 \\ 10 & 30 & 10 \\ 0 & 40 & 30 \end{vmatrix} = 10^3, \delta_3 = \begin{vmatrix} 20 & 10 & 30 \\ 10 & 10 & 30 \\ 0 & 10 & 40 \end{vmatrix} = 10^3.$$

Откуда, $y_1 = \delta_1 / \delta = 1, y_2 = \delta_2 / \delta = 1, y_3 = \delta_3 / \delta = 1$.

Тема 8. Применение дифференциального исчисления к геометрии в пространстве – 4 ч.

Применение дифференциального исчисления к геометрии в пространстве: уравнения кривой в пространстве; передел и производная векторной функции скалярного аргумента; уравнение касательной к кривой; уравнение нормальной плоскости; правила дифференцирования векторов (векторных функций); первая и вторая производные вектора по длине дуги; кривизна кривой; главная нормаль; соприкасающаяся плоскость; бинормаль; кручение; касательная плоскость и нормаль к поверхности

Практические занятия

Практическая работа 1

Метод координат на плоскости. Уравнение линии

1. Построить точки по их полярным координатам $A(5;0)$, $B(2;\pi/4)$, $C(3;\pi/3)$, $D(1;\pi)$.
2. Найти полярные координаты точек $A(1;1)$, $B(0;2)$, $C(-3;-3)$.
3. Доказать, что треугольник с вершинами $A(0;0)$, $B(3;1)$, $C(1;7)$ прямоугольный.
4. Построить точки $A(-2;1)$ и $B(3;6)$ и найти точку $M(x;\ y)$, делящую AB в отношении $AM : MB = 3 : 2$.
5. В треугольнике с вершинами $O(0;0)$, $A(8;0)$ и $B(0;6)$ определить длину медианы OC и биссектрисы OD.
6. Даны три вершины параллелограмма $A(4;2)$, $B(5;7)$, $C(-3;4)$. Найти четвертую вершину D, противоположную вершине B.
7. Составить уравнение геометрического места точек, удаленных от точки $M(2;0)$ в три раза дальше, чем от точки $N(-2;0)$.
8. Определить траекторию точки M, которая движется так, что ее расстояние от точки $A(3;0)$ остается вдвое меньше расстояния от точки $B(-6;0)$.
9. Составить уравнение геометрического места точек, разность расстояний которых до точек $A(-5;0)$ $B(3;0)$ равна десяти.
10. Определить параметры k и b для каждой из прямых: $2x - 3y = 6$, $2x + 3y = 0$, $x/4 + y/3 = 1$.
11. Построить прямую, отсекающую на оси OY отрезок $b = -3$ и составляющую с осью OX угол: *a*) 60°; *b*) 120°. Написать уравнение прямой.
12. Определить параметры k и b прямой, проходящей через точку $A(2;3)$ и составляющей с осью OX угол 45°. Написать уравнение этой прямой.

Домашняя работа

13. Построить прямые $3x + 4y = 12$; $3x - 4y = 0$, $2x - 5 = 0$, $2y + 5 = 0$.
14. Какие прямоугольные координаты имеют точки, заданные своими полярными координатами $A(5;0)$, $B(6;\pi/4)$, $C(2;\pi/2)$.
15. Даны вершины треугольника $A(3;-7)$, $B(5;2)$, $C(-1;0)$. Найти середины его сторон.
16. Составить уравнение геометрического места точек. Одинаково удаленных от начала координат и от точки $A(-5;3)$.

Практическая работа 2

Уравнение прямой линии на плоскости

1. Найти внутренние углы треугольника, стороны которого заданы уравнениями: $x + 2y = 0$, $x + 4y - 6 = 0$, $x - 4y - 6 = 0$.
2. Построить точку $A(-2;5)$ и прямую $2x - y = 0$. Написать уравнение пучка прямых, проходящих через точку A и выбрать из пучка прямую параллельную данной прямой; прямую, перпендикулярную данной прямой.
3. Написать уравнение прямых, проходящих через точку $A(-1;1)$ под углом 45° к прямой $y = 4 - 2x$.
4. Дан треугольник с вершинами $A(-2;0)$, $B(2;4)$, $C(4;0)$. Написать уравнения сторон треугольника, медианы AE, высоты AD. Найти длину медианы и высоты.
5. Даны четыре последовательные вершины трапеции $A(-2;-2)$, $B(-3;1)$, $C(7;7)$, $D(3;1)$. Составить уравнение средней линии трапеции и диагоналей.
6. Вершины треугольника $A(2;1)$, $B(0;7)$, $C(-4;-1)$. Найти уравнения его медиан и точку их пересечения.
7. Уравнения прямых $2x - 3y = 6$, $3x - 2y + 4 = 0$ привести к виду в отрезках.
8. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(-4;3)$ и отсекающей от координатного угла треугольник площадью, равной 3 кв. ед.

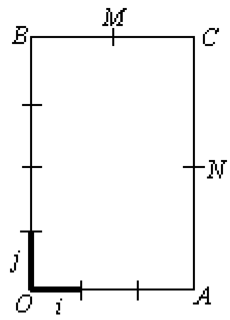
Домашняя работа

9. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(-2;-3)$ и отсекающей на осях координат равные отрезки.
10. Определить угол между прямыми: a) $y = 2x - 3$ и $y = x/2 + 1$; b) $5x - y + 7 = 0$ и $2x - 3y + 1 = 0$.
11. Написать уравнение пучка прямых, проходящих через точку $A(2;3)$. Выбрать из этого пучка прямые, составляющие с осью OX углы 45°, 60°, 135°, 0° и построить их.

Практическая работа 3

Вектор. Линейные операции над векторами

1. По сторонам OA и OB прямоугольника $OACB$ отложены единичные векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$ (рис.). Выразить через $\vec{i}$ и $\vec{j}$ векторы $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{BO}$, $\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{BA}$, если длина $OA = 3$ и $OB = 4$.



2. Пусть на рисунке M – середина BC и N – середина AC. Определить векторы $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}, \overrightarrow{MN}$ при $OA = 3$ и $OB = 4$.
3. Даны три компланарных единичных вектора $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{p}$, причем (m,n)=30° и (n, p)=60°. Построить вектор $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{m} + 2\boldsymbol{n} - 3\boldsymbol{p}$ и вычислить его модуль.
4. Проверить аналитически и геометрически векторные тождества: $\vec{a} + \frac{\vec{b} - \vec{a}}{2} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}; \vec{a} - \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} = \frac{\vec{a} - \vec{b}}{2}$.
5. На трех некомпланарных векторах $\overrightarrow{OA} = a, \overrightarrow{OB} = b, \overrightarrow{OC} = c$ построен параллелепипед. Указать те его вектор – диагонали, которые соответственно равны $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$, $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$, $\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$, $\vec{b} - \vec{a} - \vec{c}$.
6. Даны векторы $\overrightarrow{OA} = a, \overrightarrow{OB} = b$. Вектор $\overrightarrow{OC} = c$ - медиана треугольника OAB. Разложить аналитически и геометрически: 1) вектор $\boldsymbol{c}$ по векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$; 2) вектор $\boldsymbol{a}$ по векторам $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$.
7. В прямоугольнике ОАВС (рисунок) M и N – середины сторон $BC = 3$ и $AC = 4$. Разложить геометрически и аналитически вектор $\overrightarrow{OC} = c$ по векторам $\overrightarrow{OM} = a, \overrightarrow{ON} = b$.
8. Дан правильный шестиугольник $OABCDE$ со стороной $OA = 3$. Обозначив единичные векторы направлений $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ через $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{p}$, установить зависимость между ними (например, рассмотрением трапеции $OABC$). Выразить затем через $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{n}$ векторы $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{EO}, \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{DA}$.
9. Построить точку $M(5;-3;4)$ и определить длину и направление ее радиус – вектора.
10. Построить вектор $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM} = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}$ и определить его длину и направление (проверить по формуле $cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1$).
11. Вектор составляет с осями Оx и Оz углы 40° и 80°. Найти его угол с осью Оy.
12. Даны точки $A(1;2;3)$, $B(3;-4;6)$. Построить вектор $\overrightarrow{AB} = u$, его проекции на оси координат и определить длину и направление вектора. Построить углы вектора с осями координат.

13. Построить параллелограмм на векторах $\overrightarrow{OA} = \vec{i} + \vec{j}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{k} - 3\vec{j}$ и определить его диагонали.
14. В точке $A(2;1;-1)$ приложена сила $\boldsymbol{R} = 7$. Зная две координаты этой силы $x = 2$ и $y = -3$, определить направление и конец вектора, изображающего силу.

Домашняя работа

15. На плоскости Оxy даны точки $A(4;2)$, $B(2;3)$, $C(0;5)$ и построены векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}$. Разложите геометрически и аналитически вектор $\vec{a}$ по векторам $\vec{b}, \vec{c}$.
16. На плоскости даны точки $A(0;-2)$, $B(4;2)$, $C(4;-2)$. В начале координат приложены силы $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$. Построить их равнодействующую $\overrightarrow{OM}$, найти ее проекции на оси координат и величину. Выразить силы $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ через единичные векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$ координатных осей.
17. С помощью чертежа задачи 6 проверить переместительное свойство векторной суммы $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = \vec{a} - \vec{c} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} - \vec{c} = \vec{b} - \vec{c} + \vec{a}$.
18. Радиус – вектор точки M составляет с осью Оx угол 45° и с осью Оy угол 60°. Длина его $r = 6$. Определить координаты точки M, если ее координата x отрицательна, и выразить вектор $\overrightarrow{OM}$ через орты $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$.

Практическая работа 4

Скалярное произведение векторов

1. Определить углы треугольника ABC с вершинами $A(2;-1;3)$, $B(1;1;1)$, $C(0;0;5)$.
2. Даны точки $A(a;0;0)$, $B(0;0;2a)$, $C(a;0;a)$. Построить векторы $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{AB}$ и найти угол между ними.
3. На плоскости дан треугольник с вершинами $O(0;0)$, $A(2a;0)$ и $B(a;-a)$. Найти угол, образованный стороной OB и медианой OM этого треугольника.
4. Найти угол между биссектрисами углов Оxy и Оyz/
5. Из вершины квадрата проведены прямые, делящие противоположные стороны пополам. Найти угол между этими прямыми.
6. Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j}$ и $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$.
7. Даны векторы $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$. Определить $np_b a$, $np_a b$.
8. Вычислить: 1) $(\vec{m} + \vec{n})^2$, если $\vec{m}$ и $\vec{n}$ - единичные векторы с углом между ними 30°; 2) $(\vec{a} - \vec{b})^2$, если $a = 2\sqrt{2}$, $b = 4$ и $\angle(\vec{a};\vec{b}) = 135°$.

9. Раскрыть скобки в выражениях: 1) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2$; 2) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2+\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2$ и выяснить геометрический смысл полученных формул.
10. Даны компланарные векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, причем a = 3, b = 2, c = 5, $\angle\left(\vec{a};\vec{b}\right)=60^\circ$ и $\angle\left(\vec{b};\vec{c}\right)=60^\circ$. Построить вектор $\vec{u}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$ и вычислить его модуль по формуле $u=\sqrt{(a+b-c)^2}$.
11. Определить длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=2\vec{m}-\vec{n}$ и $\vec{b}=\vec{m}-2\vec{n}$, где $\vec{m}$ и $\vec{n}$ - единичные векторы, угол между которыми 60°.
12. Дан вектор $\vec{a}=2\vec{m}-\vec{n}$, где $\vec{m}$ и $\vec{n}$ - единичные векторы, угол между которыми 120°. Найти $\cos\angle(\vec{a};\vec{m})$ и $\cos\angle(\vec{a};\vec{n})$.

Домашняя работа

13. Определить угол между биссектрисами двух плоских углов правильного тетраэдра, проведенными из одной вершины.
14. Найти величину равнодействующей четырех компланарных сил, приложенных к точке О, если величина каждой силы равна 10кГ, а угол между двумя последовательными силами равен 45°.
15. Раскрыть скобки в выражении $\left(2\vec{i}-\vec{j}\right)\cdot\vec{j}-\left(\vec{j}-2\vec{k}\right)\cdot\vec{k}+\left(\vec{i}-2\vec{k}\right)^2$.
16. Определить угол между векторами $\vec{a}=-\vec{i}+\vec{j}$ и $\vec{b}=\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$.

Практическая работа 5

Векторное произведение векторов

1. Определить и построить вектор $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$, если 1) $\vec{a}=3\vec{i}$, $\vec{b}=2\vec{k}$; 2) $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}$; 3) $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}$, $\vec{b}=3\vec{j}+2\vec{k}$. Найти в каждом случае площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

2. Вычислить площадь треугольника с вершинами A (7; 3; 4), B (1; 0; 6) и C (4; 5; -2).

3. Построить параллелограмм на векторах $\vec{a}=2\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{k}$ и вычислить его площадь и высоту.

4. Раскрыть скобки и упростить выражения:
1) $\vec{i}\times\left(\vec{j}+\vec{k}\right)-\vec{j}\times\left(\vec{i}+\vec{k}\right)+\vec{k}\times\left(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}\right)$;
2) $\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)\times\vec{c}+\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)\times\vec{b}+\left(\vec{b}-\vec{c}\right)\times\vec{a}$;
3) $\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\times\left(\vec{c}-\vec{a}\right)+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)\times\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$;
4) $2\vec{i}\cdot\left(\vec{j}\times\vec{k}\right)+3\vec{j}\cdot\left(\vec{i}\times\vec{k}\right)+4\vec{k}\cdot\left(\vec{i}\times\vec{j}\right)$.

5. Доказать, что $(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b})=2\vec{a}\times\vec{b}$, и выяснить геометрическое значение этого тождества.
6. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ составляют угол 45°. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}-2\vec{b}$ и $3\vec{a}+2\vec{b}$, если $|\vec{a}|=|\vec{b}|=5$.
7. Найти площадь параллелограмма, диагоналями которого служат векторы $2\vec{m}-\vec{n}$ и $4\vec{m}-5\vec{n}$, где $\vec{m}$ и $\vec{n}$ - единичные векторы, образующие угол 45°.
8. Построить векторы $\vec{a}=-2\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{b}=3\vec{i}-2\vec{j}$ и $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$. Вычислить модуль вектора $\vec{c}$ и площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
9. Построить треугольник с вершинами *A* (1; -2; 8), *B* (0; 0; 4) и *C* (6; 2; -0). Вычислить его площадь и высоту *BD*.
10. Вычислить диагонали и площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=-\vec{j}+\vec{k}$ и $\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$.

Домашняя работа

11. Доказать, что $(2\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}+2\vec{b})=3\vec{a}\times\vec{b}$.
12. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=\vec{m}+2\vec{n}$ и $\vec{b}=2\vec{m}+\vec{n}$, где $\vec{m}$ и $\vec{n}$ - единичные векторы, образующие угол 30°.

Практическая работа 6

Смешанное произведение векторов

1. Построить параллелепипед на векторах $\vec{a}=3\vec{i}+4\vec{j}$, $\vec{b}=-3\vec{j}+\vec{k}$ $\vec{c}=2\vec{j}+5\vec{k}$ и вычислить его объем. Правой или левой будет связка векторов $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$?
2. Построить пирамиду с вершинами *O* (0;0;0), *A* (7;3;4), *B* (1;0;6) и *C* (4;5;-2) и вычислить ее объем, площадь грани *ABC* и высоту пирамиды, опущенную на эту грань.
3. Показать, что точки *A* (2;-1;-2), *B* (1;2;1), *C* (2;3;0) и *D* (5;0;-6) лежат в одной плоскости.
4. Показать, что векторы $a = -i + 3j + 2k$, $b = 2i – 3j – 4k$, $c = -3i + 12j + 6k$ компланарны, и разложить вектор *c* по векторам *a* и *b*.
5. Показать что: $(a+b)[(a+c)\times b] = –abc$; 2) $(a+2b-c)[(a-c) \times (a-b-c)] = 3abc$.

6. Найти объем тетраэдра, построенного на векторах $\overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{OC}$, если эти векторы направлены по биссектрисам координатных углов и длина каждого равна 2.
7. Построить пирамиду с вершинами A (2;0;0), B (0;3;0), C (0;0;6) и D (2;3;8), вычислить ее объем, площадь грани ABC и высоту пирамиды, опущенную на эту грань.
8. Построить векторы $a = i + j + 4k$, $b = i - 2\ \ j$, $c = 3i - 3j + 4k$, показать, что компланарны, и найти линейную зависимость между ними.
9. Показать, что объем параллелепипеда, построенного на диагоналях граней заданного параллелепипеда, равен удвоенному объему данного параллелепипеда.
10. Даны единичные векторы $m,\ n,\ p$. Угол $(\widehat{m,n}) = [\widehat{p,(m \times n)}] = \alpha$. Доказать, что тогда $(m \times n)p = 1/2 \sin 2\alpha$.

Домашняя работа

11. При любых векторах $a,\ b,\ c$ векторы $a - b,\ b - c,\ c - a$ компланарны. Доказать это аналитически и геометрически (рассмотрением параллелепипеда, построенного на векторах $a,\ b,\ c$).
12. Вычислить объем параллелепипеда $OABCO_1A_1B_1C_1$, в котором даны три вершины нижнего основания O (0;0;0), A (2;-3;0), C (3;2;0) и вершина верхнего основания B_1 (3;0;4), лежащая на боковом ребре BB_1, противоположном ребру OO_1.

Практическая работа 7

Плоскость. Основные задачи на плоскость

1. Построить плоскости: 1) $5x - 2y + 3z - 10 = 0$; 2) $3x + 2y - z = 0$; 3) $3x + 2z = 6$; 4) $2z - 7 = 0$.
2. Построить плоскость $2x + 3y + 6z - 12 = 0$ и найти углы нормали к плоскости с осями координат.
3. Даны точки M_1 (0;-1;3) и M_2 (1;3;5). Написать уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 и перпендикулярной вектору $\vec{n} = \overrightarrow{M_1M_2}$.
4. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку M (a;a;0) и перпендикулярной к вектору $\overrightarrow{OM}$. Построить плоскость.
5. Написать уравнение геометрического места точек, одинаково удаленных от точек $A\left(a; -\dfrac{a}{2}; a\right)$ и $B\left(0; \dfrac{a}{2}; 0\right)$.
6. Написать уравнение плоскости, параллельной оси Ox и проходящей через точки M_1 (0;1;3) и M_2 (2;4;5), и построить её.

7. Написать уравнение плоскости, проходящей через ось *Ox* и точку M_1 (0;-2;3). Построить плоскость.
8. Написать уравнение плоскости, проходящей через ось *Oz* и точку M_1 (2;-4;3). Построить плоскость.
9. Написать уравнение плоскости, параллельной оси *Oy* и отсекающей на осях *Ox* и *Oz* отрезки *a* и *c*. Построить плоскость.
10. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку *M* (2;-1;3) и отсекающей на осях координат равные отрезки.
11. Найти угол между плоскостями $x-2y+2z-8=0$ и $x+z-6=0$.
12. Найти плоскость, проходящую через точку (2;2;-2) и параллельную плоскости $x-2y-3z=0$.
13. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку (-1;-1;2) и перпендикулярной к плоскостям $x-2y+z-4=0$ и $x+2y-2z+4=0$.

Домашняя работа

14. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки M_1 (-1;-2;0) и M_2 (1;1;2) и перпендикулярной к плоскости $x+2y+2z-4=0$.
15. Найти расстояние точки (4;3;0) от плоскости, проходящей через точки M_1 (1;3;0), M_2 (4;-1;2), M_3 (3;0;1).

Практическая работа 8

Основные задачи на прямую в пространстве

1. Уравнения прямой $\begin{cases} x+2y+3z-13=0 \\ 3x+y+4z-14=0 \end{cases}$ написать: 1) в канонической форме; 2) в параметрической форме. Найти следы прямой на координатных плоскостях и построить прямую и ее проекции.
2. Написать уравнения прямой, проходящей через точку *A*(4;3;0) и параллельной вектору $\vec{v}(-1;1;1)$. Найти след прямой на плоскости *yOz* и построить прямую.
3. Написать уравнения прямой, проходящей через точки *A*(-1;2;3) и *B*(2;6;-2) и построить ее.
4. Написать уравнения траектории точки *M*(*x*; *y*; *z*) которая, выйдя из точки *A*(4;-3;1), движется со скоростью $\vec{v}(2;3;1)$.
5. Написать параметрические уравнения прямой: 1) проходящей через точку (-2;1;-1) и параллельной вектору $\vec{v}(1;-2;3)$; 2) проходящей через точки *A*(3;-1;4) и *B*(1;1;2).
6. Написать уравнения прямой, проходящей через точку (*a; b; c*): 1) параллельно оси *Oz*; 2) перпендикулярно к оси *Oz*.
7. Найти угол прямой $x=2z-1$; $y=-2z+1$ с прямой, проходящей через начало координат и через точку (1; -1; -1).

8. Найти угол между прямыми: $\begin{cases} x-y+z-4=0 \\ 2x+y-2z+5=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x+y+z-4=0 \\ 2x+3y-z-6=0 \end{cases}$.

9. Показать, что прямая $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{1}$ перпендикулярна к прямой $x=z+1$; $y=1-z$.

10. Написать уравнения прямой, проходящей через точку (-4; 3; 0) и параллельной прямой $\begin{cases} x-2y+z-4=0 \\ 2x+y-z=0 \end{cases}$.

11. Найти угол прямой $y=3x-1$, $2z=-3x+2$ с плоскостью $2x+y+z-4=0$.

Домашняя работа

12. Показать, что прямая $\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-3}{3}$ параллельна плоскости $2x+y-z=0$, а прямая $\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z+3}{3}$ лежит в этой плоскости.

13. Найти точку пересечения прямой $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{2}$ с плоскостью $x+2y+3z-29=0$.

Практическая работа 9

Поверхности второго порядка

Метод параллельных сечений

Если задано уравнение той или иной поверхности, то возникает задача исследования ее формы и расположения относительно координатных осей. Для решения этой задачи обычно применяют метод параллельных сечений: поверхность пересекается несколькими плоскостями, параллельными плоскостям координат. Форма и размер полученных сечений позволяют выяснить геометрическую форму самой поверхности.

Установить тип заданных поверхностей и построить их:

1. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{81}=1$;
2. $x^2+y^2-4z^2=-1$;
3. $3x^2+y^2=2a(z-2)$;
4. $2y=x^2-\frac{z^2}{4}$;
5. $y^2=15z$;
6. $z=5-x^2-y^2$;
7. $x^2-9y^2=4z^2$;

8. $x^2 = 5y - 1$;
9. $2x^2 - 4x + y^2 - 6y - z^2 = 0$;
10. $2x^2 - 7y^2 + 11z^2 = 0$;

Домашняя работа

11. $x + 2 = y^2 - 3y + 3z^2 + 6z$;
12. $x^2 = yz$.

Практическая работа 10

Матрицы, операции над матрицами

Найти линейные комбинации матриц:

1. $4A - 7B$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & 1 \\ 5 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 & -5 \\ -8 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$;

2. $5A - 3B + 2C$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & 7 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Найти произведения матриц AB и BA (если это возможно):

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$;

$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

Найти произведения матриц $(AB)C$ и $A(BC)$:

$A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Найти значение матричного многочлена $f(A)$:

$$f(A)=2x^2-3x+1,\ A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix};$$
$$f(A)=2x^3-x^2+3,\ A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -3 & 1\end{pmatrix}.$$

Проверить, коммутируют ли матрицы A и B:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -3\\ -4 & 5 & -6\\ -7 & 8 & -9\end{pmatrix}.$$

Найти произведения матриц AA^T и A^TA:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 3 & 5 & -7\\ -4 & 1 & 2\end{pmatrix}; \qquad A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}.$$

Привести матрицу к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 0\\ 3 & -1 & 2 & 2\\ 2 & 5 & -1 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 2\end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & -1 & 3\\ 3 & -2 & 0 & -4 & 7\\ 2 & 2 & 10 & -1 & 8\\ 1 & -2 & -4 & 5 & 2\end{pmatrix}.$$

Домашняя работа

Найти ранг матрицы методом элементарных преобразований:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & -3\\ 3 & 5 & 6 & -4\\ 3 & 8 & 2 & -19\end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix}3 & -1 & 3 & 2 & 5\\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4\\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7\\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1\end{pmatrix}.$$

Найти ранг матрицы методом окаймляющих миноров и указать один из базисных миноров:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Практическая работа 11

Определители второго и третьего порядка

1.1. Вычислить определитель разложением по элементам
а) первой строки;
б) третьей строки

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}.$$

1.2.Найти алгебраическое дополнение а) элемента 6; б) элемента 0 данной матрицы

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -7 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & 6 \\ -7 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

При каком значении α равны нулю следующие определители:

1.3. $\begin{vmatrix} 3-\alpha & 2 \\ 2 & -\alpha \end{vmatrix}$. 1.4. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ -1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$. 1.5. $\begin{vmatrix} 3-\alpha & 0 & 0 \\ 2 & \alpha & 0 \\ 10 & -5 & 1 \end{vmatrix}$.

Используя свойства определителей, вычислить следующие определители:

1.6. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 8 \\ 5 & 3 & 5 \end{vmatrix}$. 1.7. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & -2 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$. 1.8. $\begin{vmatrix} 121 & 283 \\ 221 & 183 \end{vmatrix}$. 1.9. $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2+\alpha & 4-2\alpha & -3 \end{vmatrix}$.

1.10. $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 3\alpha \\ 2 & 1 & -1+\alpha \\ -3 & 4 & 1+4\alpha \end{vmatrix}$.

Домашняя работа

Вычислить определители, приведя матрицу к треугольному виду (приведение матрицы к треугольному виду – такое преобразование, при котором все элементы, лежащие по одну сторону от главной диагонали, равны нулю)

1.11. $\begin{vmatrix} -2 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$. 1.12. $\begin{vmatrix} -4 & 3 & 7 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & -8 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 0 & 4 \end{vmatrix}$. 1.13. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 8 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

1.14. $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & -6 \end{vmatrix}$.

Практическая работа 12

Определители n – го порядка

Вычислить определители приведением к треугольному виду

1.1. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\,n-2} & a_{1\,n-1} & a_{1\,n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\,n-2} & a_{2\,n-1} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3\,n-2} & 0 & 0 \\ & & \dots & & & \\ a_{n1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$. 1.2. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ & & \dots & & \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 \end{vmatrix}$.

1.3. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ & & \dots & & \\ -1 & -2 & -3 & \dots & n \end{vmatrix}$ 1.4. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n & n & n \\ & & & \dots & & & \\ n & n & n & \dots & n & n & n \end{vmatrix}$.

Вычислить определители методом выделения линейных множителей

2.1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & x+1 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & x+1 & \dots & n \\ & & \dots & & \\ 1 & 2 & 3 & \dots & x+1 \end{vmatrix}$. 2.2. $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_0 & x & a_2 & \dots & a_n \\ a_0 & a_1 & x & \dots & a_n \\ & & \dots & & \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & x \end{vmatrix}$

2.3. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2-x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 3-x & \dots & 1 \\ & & \dots & & \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n+1-x \end{vmatrix}$. 2.4. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix}$.

Вычислить определители методом рекуррентных соотношений

3.1. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ & & \dots & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix}$. 3.2. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \dots & 0 \\ & & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 \end{vmatrix}$.

Домашняя работа

3.3. $\begin{vmatrix} 7 & 5 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 7 & 5 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 7 & \dots & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 7 \end{vmatrix}$. 3.4. $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

Практическая работа 13

Обратная матрица, решение матричных уравнений

1.1. Какая из матриц B, C, D является обратной к матрице A, если
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 & -3/2 \\ -4 & 1/2 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

1.2. При каких λ существует A^{-1}, если

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ \lambda-2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & \lambda \\ \lambda & 3 & 0 \\ \lambda-1 & 5 & \lambda \end{pmatrix}$;

в) $A = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda^2-1 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Найти матрицу, обратную к данной, если она существует

1.1. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. 1.2. $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$. 1.3. $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$.

1.4. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$. 1.5. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. 1.6. $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$.

1.7. $\begin{pmatrix} -10 & 12 & -10 \\ -17 & 6 & 7 \\ 8 & 0 & -8 \end{pmatrix}$. 1.8. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

1.9. $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 9 \\ -5 & -3 & 8 \\ -4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$. 1.10. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1.11. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. 1.12. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \end{pmatrix}$.

Решить матричные уравнения

2.1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$. 2.2. $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$.

2.3. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$.

2.4. $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -12 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$.

2.5. $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & 14 & -7 \\ 1 & 20 & -12 \end{pmatrix}$.

2.5. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$.

Домашняя работа

2.6. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -1 & 2 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}.$

Практическая работа 14

Ранг матрицы, транспонирование матриц

1.1. Найти ранг и указать какой-нибудь базисный минор матрицы

а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -6 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 2 & -6 & 0 \\ -3 & 9 & -3 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1.2. С помощью элементарных преобразований найти ранг матрицы

а) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 5 & 3 \\ -4 & -2 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & 7 & 7 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} 24 & 14 & 17 & 15 \\ 23 & 13 & 16 & 14 \\ 47 & 27 & 33 & 29 \\ 3 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 49 & 40 & 73 & 147 & -80 \\ 73 & 59 & 98 & 219 & -118 \\ 47 & 36 & 71 & 141 & -72 \end{pmatrix}$.

1.3. Найти все значения λ, при которых ранг матрицы

а) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ \lambda & 0 & 1 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ равен 2; б) $\begin{pmatrix} \lambda & 2 & 3 \\ 0 & \lambda-2 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ равен 2;

в) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & \lambda & -1 \end{pmatrix}$ равен 3.

Домашняя работа

1.4. В зависимости от λ исследовать ранг матрицы

а) $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & \lambda & 2 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ -2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & \lambda \\ 8 & -4 & 8 & \lambda \\ 6 & -3 & 12 & 0 \end{pmatrix}$.

Практическая работа 15

Матричная запись и матричное решение системы линейных уравнений

Решить матричные уравнения

1.1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$.

1.2. $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1.3. $X \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$.

1.4. $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$.

1.5. $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 9 & 18 \end{pmatrix}$.

1.6. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$.

1.7. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 7 \\ 1 & 11 & 7 \\ 7 & 5 & 7 \end{pmatrix}$.

1.8. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$.

$$1.9.\ X\cdot\begin{pmatrix}5 & 3 & 1\\ 1 & -3 & -2\\ -5 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8 & 3 & 0\\ -5 & 9 & 0\\ -2 & 15 & 0\end{pmatrix}.$$

$$1.10.\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 4 & -5 & 2\\ 5 & -7 & 3\end{pmatrix}\cdot X\cdot\begin{pmatrix}9 & 7 & 6\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & -2\\ 18 & 12 & 9\\ 23 & 15 & 11\end{pmatrix}.$$

Домашняя работа

$$1.11.\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & ... & 1\\ 0 & 1 & 1 & ... & 1\\ 0 & 0 & 1 & ... & 1\\ ... & ... & ... & ... & ...\\ 0 & 0 & 0 & & 1\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & ... & n\\ 0 & 1 & 2 & ... & n-1\\ 0 & 0 & 1 & ... & n-2\\ ... & ... & ... & ... & ...\\ 0 & 0 & 0 & ... & 1\end{pmatrix}.$$

Практическая работа 16

Формулы Крамера

Системы линейных алгебраических уравнений решить по правилу Крамера

$$1.1.\begin{cases}2x_1+2x_2-x_3+x_4=4,\\ 4x_1+3x_2-x_3+2x_4=6,\\ 8x_1+5x_2-3x_3+4x_4=12,\\ 3x_1+3x_2-2x_3+2x_4=6.\end{cases}$$

$$1.2.\begin{cases}2x_1+3x_2+11x_3+5x_4=2,\\ x_1+x_2+5x_3+2x_4=1,\\ 2x_1+x_2+3x_3+2x_4=-3,\\ x_1+x_2+3x_3+4x_4=-3.\end{cases}$$

$$1.3.\begin{cases}2x_1+5x_2+4x_3+x_4=20,\\ x_1+3x_2+2x_3+x_4=11,\\ 2x_1+10x_2+9x_3+7x_4=40,\\ 3x_1+8x_2+9x_3+2x_4=37.\end{cases}$$

$$1.4.\begin{cases}3x_1+4x_2+x_3+2x_4=-3,\\ 3x_1+5x_2+3x_3+5x_4=-6,\\ 6x_1+8x_2+x_3+5x_4=-8,\\ 3x_1+5x_2+3x_3+7x_4=-8.\end{cases}$$

$$1.\ 5.\begin{cases}7x_1+9x_2+4x_3+2x_4=2,\\ 2x_1-2x_2+x_3+x_4=6,\\ 5x_1+6x_2+3x_3+2x_4=3,\\ 2x_1+3x_2+x_3+x_4=0.\end{cases}$$

$$1.\ 6.\begin{cases}6x_1+5x_2-2x_3+4x_4+4=0,\\ 9x_1-x_2+4x_3-x_4-13=0,\\ 3x_1+4x_2+2x_3-2x_4-1=0,\\ 3x_1+9x_2+2x_4-11=0.\end{cases}$$

$$1.7.\begin{cases}2x_1-x_2-6x_3+3x_4=-1,\\ 7x_1-4x_2+2x_3-15x_4=-32,\\ x_1-2x_2-4x_3+9x_4=5,\\ x_1-x_2+2x_3-6x_4=-8.\end{cases}$$

$$1.\ 8.\begin{cases}2x_1+x_2+4x_3+8x_4=-1,\\ x_1+3x_2-6x_3+2x_4=3,\\ 3x_1-2x_2+2x_3-2x_4=8,\\ 2x_1-x_2+2x_3=4.\end{cases}$$

Домашняя работа

1.9. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 9, \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 = -4, \\ 4x_1 - 7x_2 + x_3 = 5. \end{cases}$

1.10. $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + x_4 = 5, \\ 3x_1 - 7x_2 + 3x_3 - x_4 = -1, \\ 5x_1 - 9x_2 + 6x_3 + 4x_4 = 7, \\ 4x_1 - 6x_2 + 3x_3 + x_4 = 8. \end{cases}$

Практическая работа 17

Метод Гаусса

Системы линейных алгебраических уравнений решить методом Гаусса

1.1. $\begin{cases} x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -3, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 = -3, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3. \end{cases}$

1.2. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 3, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 7, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 8x_4 = -7. \end{cases}$

1.3. $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_4 + 3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 + 6 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 - 2 = 0. \end{cases}$

1.4. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 8x_4 = -7. \end{cases}$

1.5. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3, \\ 6x_1 + 9x_2 - 2x_3 - x_4 = -4, \\ 10x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 3, \\ 8x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 = -7. \end{cases}$

1.6. $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 3, \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 1, \\ 5x_1 + 18x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 12. \end{cases}$

1.7. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 8x_1 + 12x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 3, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 - 7x_4 = 3. \end{cases}$

1.8. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 8, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 7, \\ 2x_1 - x_2 - 5x_4 = 6, \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 - 8x_4 = 1. \end{cases}$

Домашняя работа

1.9. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 - 6x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 5. \end{cases}$

1.10. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 9x_4 = 79, \\ 3x_1 + 13x_2 + 18x_3 + 30x_4 = 263, \\ 2x_1 + 4x_2 + 11x_3 + 16x_4 = 146, \\ x_1 + 9x_2 + 9x_3 + 9x_4 = 92. \end{cases}$

Практическая работа 18

Решение систем линейных уравнений

Исследовать совместность и найти общее решение и одно частное решение системы линейных алгебраических уравнений

1.1. $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2. \end{cases}$

1.2 $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1, \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1. \end{cases}$

1.3. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7, \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13. \end{cases}$

1.4. $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3. \end{cases}$

1.5. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2, \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3, \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4. \end{cases}$

1.6. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 5, \\ 6x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 = 7, \\ 4x_1 - 2x_2 + 14x_3 - 31x_4 = 18. \end{cases}$

1.7. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8, \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7, \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12. \end{cases}$

1.8. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 2. \end{cases}$

1.9. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2, \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 3, \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 9, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 1. \end{cases}$

1.10. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 1, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 - x_4 = 3, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 2. \end{cases}$

Найти общее решение и фундаментальную совокупность решений

2.11. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 + 19x_4 = 0. \end{cases}$

2.2. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0, \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0, \\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_4 + 8x_5 = 0. \end{cases}$

2.3. $\begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0, \\ 9x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 9x_5 = 0, \\ 6x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 7x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 4x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$

2.4. $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0. \end{cases}$

2.5. $\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 7x_4 + 4x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0, \\ 7x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 0, \\ 5x_1 + 9x_2 - 3x_3 + x_4 + 6x_5 = 0. \end{cases}$

2.6. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_5 = 0, \\ 3x_1 + 3x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0. \end{cases}$

2.7. $$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 7x_5 = 0, \\ 6x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 - 11x_5 = 0, \\ 6x_1 + 4x_2 + x_3 + 4x_4 - 13x_5 = 0. \end{cases}$$

2.8. $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 - 7x_3 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 6x_3 = 0. \end{cases}$$

Домашняя работа

2.9. $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 = 0. \end{cases}$$

2.10. $$\begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 9x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 6x_4 + 3x_5 = 0, \\ 6x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 20x_4 + 3x_5 = 0, \\ 9x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 15x_5 = 0. \end{cases}$$

Контрольная работа №1

ВАРИАНТ №1

1. На биссектрисе первого координатного угла лежат точки $A(3;3)$ и $B(x;y)$, расстояние между которыми равно $\sqrt{2}$. Найти координаты точки B.
2. Найти уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $2x - y - 1 = 0$ и $3x - y + 4 = 0$ параллельно прямой $4x + 2y - 13 = 0$.
3. Найти угол между высотой AD и медианой AE в треугольнике с вершинами в точках $A(1;3)$, $B(4;-1)$, $C(-1;1)$.
4. Найти каноническое уравнение эллипса, если: а) расстояние между концами большой и малой оси равно 5, а сумма длин полуосей равна 7; b) расстояния от его фокуса до концов большой оси равны 2 и 14.
5. Через фокус параболы $y^2 = -x$ проведена прямая под углом 135° к оси Ox. Найти длину образовавшейся хорды.

ВАРИАНТ №2

1. Дан треугольник ABC с вершинами $A(1;5)$, $B(4;1)$, $C(13;10)$.Найти точку пересечения биссектрисы внутреннего угла A со стороной BC.
2. Прямая $y = kx + 4$ удалена от начала координат на расстояние $d = \sqrt{3}$. Найти значение k.
3. Даны последовательные вершины параллелограмма $ABCD$: A(-2;5), $B(2;7)$, $C(-4;-3)$. Найти координаты четвертой вершины D и написать уравнение диагонали BD.
4. Найти уравнение прямой, содержащей диаметр окружности $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 8 = 0$, перпендикулярной прямой $x - 3y + 2 = 0$.
5. Найти уравнение гиперболы, зная, что ее эксцентриситет $\varepsilon = 2$, фокусы гиперболы совпадают с фокусом эллипса $\frac{x^2}{10} + y^2 = 1$.

ВАРИАНТ №3

1. Найти координаты центра и радиус окружности, проходящей через точку $A(-10;4)$ и касающейся оси Ox в точке $B(-6;0)$.
2. Написать уравнение прямой, проходящей через точку (-2;1) на расстоянии 1 от начала координат.
3. При каких значениях A и C прямая $Ax + 3y + C = 0$: а) параллельна прямой $3x - y + 8 = 0$; b) перпендикулярна прямой $y = 5x$; в) проходит через точки (2;2) и (-1;4); г) пересекаются с прямой $4x - 2y + 7 = 0$.
4. Найти площадь четырехугольника, две вершины которого лежат в фокусах эллипса $5x^2 + 9y^2 - 180 = 0$, а две другие совпадают с концами его малой оси.
5. Найти длину диаметра эллипса (хорды, проходящей через центр эллипса) $9x^2 + 27y^2 = 225$, перпендикулярного к асимптоте гиперболы $x^2 - y^2 = 4$, проходящей через первую и третью четверти.

ВАРИАНТ №4

1. Площадь треугольника ABC с вершинами A(-2;1), B(2;2), C(4;y) равна 15. Найти ординату вершины C.
2. Через точку пересечения прямых $2x - y = 0$ и $x + 3y - 1 = 0$ проведена прямая, перпендикулярная прямой $y = 3 - x$. Найти ее уравнение.
3. Даны две смежные вершины A(-2;4), B(2;2) параллелограмма $ABCD$ и точка M(1;-1) пересечения его диагоналей. Найти уравнения сторон BC и CD параллелограмма.
4. Окружность проходит через точки M_1(1;5) и M_2(5;3), а центр ее лежит на прямой $\frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 1$. Найти уравнение окружности.
5. Дан эллипс $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{16} = 1$. Найти уравнение гиперболы, вершины которой находятся в фокусах, а фокусы – в вершинах данного эллипса.

Контрольная работа №2

ВАРИАНТ № 1

1. В параллелограмме $ABCD$: O – точка пересечения диагоналей. Найти x, если
1) $\overline{AB} = x \cdot \overline{CD}$;
2) $\overline{AC} = x \cdot \overline{AO}$;
3) $\overline{OB} = x \cdot \overline{BD}$;
4) $\overline{OC} = x \cdot \overline{CD}$.

2. Разложить вектор $\bar{c} = (9;4)$ по векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если $\bar{a} = (1;2)$ и $\bar{b} = 2\bar{i} - 3\bar{j}$.

3. Найти вектор $\bar{d}$, зная, что $\bar{d} \perp \bar{a}$, $\bar{d} \perp \bar{b}$,
где $\bar{a} = (2;3;-1), \bar{b} = (1;-2;3), \bar{d} \cdot (2\bar{i} - \bar{j} + \bar{k}) = -6$.

4. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a} = 3\bar{p} + \bar{q}$, $\bar{b} = \bar{p} - 2\bar{q}$,
где $|\bar{p}| = 4, |\bar{q}| = 1, \left(\widehat{\bar{p},\bar{q}}\right) = \frac{\pi}{4}$.

5. Дана пирамида с вершинами A_1(7;2;4), A_2(7;-1;-2), A_3(3;3;1), A_4(-4;2;1). Найти:
а) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4;
б) объем пирамиды;
в) длину высоты, опущенной на грань $A_1A_2A_3$.

ВАРИАНТ № 2

1. Дан параллелограмм $ABCD$. Доказать, что $\overline{OA} + \overline{OC} = \overline{OB} + \overline{OD}$, где O – произвольная точка пространства.

2. Радиус-вектор т. M составляет с осью Ox угол 45^0, с осью Oy – 60^0. Его длина $|\bar{r}| = 6$. Найти координаты т. M, зная, что третья ее координата отрицательная.

3. Найти единичный вектор, перпендикулярный векторам $\bar{a} = 2\bar{i} + \bar{j} + \bar{k},\ \bar{b} = (1;1;2)$.

4. Найти площадь треугольника ABC, в котором $A(2;1;0)$, $B(-2;4;1)$, $C(-3;-8;4)$.

5. Дана пирамида с вершинами $A_1(1;3;6)$, $A_2(2;2;1)$, $A_3(-1;0;1)$, $A_4(-4;6;3)$. Найти:

а) косинус угла между ребрами A_1A_2 и A_1A_4;

б) объем пирамиды;

в) длину высоты, опущенной на грань $A_1A_2A_3$.

ВАРИАНТ № 3

1. Даны векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$, угол между которыми равен 120^0. Построить вектор $\bar{c} = 2\bar{a} - 1.5\bar{b}$ и определить его длину, если $|\bar{a}| = 3, |\bar{b}| = 4$.

2. Проверить, что четыре точки $A(3;-1;2)$, $B(1;2;-1)$, $C(-1;1;-3)$ и $D(3;-5;3)$ являются вершинами трапеции.

3. Даны векторы $\bar{a} = 2\bar{i} - \bar{j} + 3\bar{k}, \bar{b} = \bar{i} - 3\bar{j} + 2\bar{k}$, $\bar{c} = 3\bar{i} + 2\bar{j} - 4\bar{k}$. Найти вектор $\bar{x}$, если $\overline{xa} = -5,\ \overline{xb} = -11,\ \overline{xc} = 20$.

4. В треугольнике с вершинами $A(4;-14;8)$, $B(2;-18;12)$, $C(12;-8;12)$ найти длину высоты, опущенной из вершины C на сторону AB.

5. Дана пирамида с вершинами $A_1(-2;0;-4)$, $A_2(-1;7;1)$, $A_3(4;-8;-4)$, $A_4(1;-4;6)$. Найти:

а) длину ребра A_2A_3;

б) косинус угла между ребрами A_1A_2 и A_1A_4;

в) объем пирамиды.

ВАРИАНТ № 4

1. В ромбе $ABCD$ диагонали $\overline{AC} = \bar{a}, \overline{BD} = \bar{b}$, разложить по этим двум векторам векторы $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$.

2. Зная одну из вершин треугольника $A(1;-6;3)$ и векторы, совпадающие с двумя сторонами $\overline{AB} = 3\bar{j} + 5\bar{k},\ \overline{BC} = 4\bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}$, найти остальные вершины и вектор $\overline{CA}$.

3. Найти вектор $\bar{m}$, зная, что $\bar{m} \perp \bar{c}$, $\overline{ma} = 4, \overline{mb} = 35$, где $\bar{a} = (3;-2;4), \bar{b} = (5;1;6), \bar{c} = (-3;0;2)$

4. Зная две стороны треугольника ABC: $AB = (-3;-2;6)$, $BC = (-2;4;4)$, вычислить длину высоты AD.

5. Дана пирамида с вершинами $A_1(1;2;0)$, $A_2(3;0;-3)$, $A_3(5;2;6)$, $A_4(8;4;-9)$. Найти:

а) длину ребра A_2A_3;

б) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4;

в) объем пирамиды.

Расчетно-графическая работа № 1

В задачах даны координаты вершин треугольника *ABC*. Найти:

1. Длину стороны *AB*.
2. Уравнения сторон *AB* и *BC*, а также их угловые коэффициенты.
3. Угол *B* в радианах с точность до 2-х знаков.
4. Уравнение высоты *CD* и ее длину.
5. Уравнение медианы *AE* и координаты точки *K* пересечения этой медианы с высотой *CD*.
6. Уравнение прямой, проходящей через точку *K*, параллельно стороне *AB*.
7. Координаты точки *M*, расположенной симметрично точке *A*, относительно прямой *CB*.

Варианты заданий

№	Точка *A*	Точка *B*	Точка *C*
1	(-8; -3)	(4; -12)	(8; 10)
2	(-5; 7)	(7; -2)	(11; 20)
3	(-12; -1)	(0; -10)	(4; 12)
4	(-10; 9)	(2; 0)	(6; 22)
5	(0; 2)	(12; -7)	(16; 15)
6	(-9; 6)	(3; -3)	(7; 19)
7	(1; 0)	(13; -9)	(17; 13)
8	(-4; 10)	(8; 1)	(12; 23)
9	(2; 5)	(14; -4)	(18; 18)
10	(-1; 4)	(11; -5)	(15; 17)
11	(-2; 7)	(10; -2)	(8; 12)
12	(-6; 8)	(6; -1)	(4; 13)
13	(3; 6)	(15; -3)	(13; 11)
14	(-10; 5)	(2; -4)	(0; 10)
15	(-4; 12)	(8; 3)	(6; 17)
16	(-3; 10)	(9; 1)	(7; 15)
17	(4; 1)	(16; -8)	(14; 6)
18	(-7; 4)	(5; -5)	(3; 9)
19	(0; 3)	(12; -6)	(10; 8)
20	(-5; 9)	(7; 0)	(5; 14)
21	(-4; 6)	(8; -10)	(11; 11)
22	(-6; 8)	(6; -8)	(9; 13)
23	(-8; 10)	(4; -6)	(7; 15)
24	(-10; 4)	(2; -12)	(5; 9)
25	(-2; 7)	(10; -9)	(13; 12)
26	(-5; 9)	(7; 7)	(10; 14)
27	(-3; 11)	(9; -5)	(12; 16)
28	(-7; 13)	(5; -3)	(8; 18)
29	(-11; 12)	(1; -4)	(4; 17)
30	(-9; 5)	(3; -11)	(6; 10)

Расчетно-графическая работа №2

Тема: *Векторная алгебра*

Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$. Требуется:

1. записать векторы $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$ в системе орт $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ и найти модули этих векторов;
2. найти угол между векторами $\vec{AB}$, $\vec{AC}$;
3. найти проекцию вектора $\vec{AD}$ на вектор $\vec{AB}$;
4. найти площадь грани ABC;
5. найти объем пирамиды $ABCD$;
6. составить уравнение ребра AC;
7. составить уравнение грани ABC.

№ варианта	*A*	*B*	*C*	*D*
1.	(1;2;1)	(-1;5;1)	(-1;2;7)	(1;5;9)
2.	(2;3;2)	(0;6;2)	(0;3;8)	(2;6;10)
3.	(0;3;2)	(-2;6;2)	(-2;3;8)	(0;6;10)
4.	(2;1;2)	(0;4;2)	(0;1;8)	(2;4;10)
5.	(2;3;0)	(0;6;0)	(0;3;6)	(2;6;8)
6.	(2;2;1)	(0;5;1)	(0;2;7)	(2;5;9)
7.	(1;3;1)	(-1;6;1)	(-1;3;7)	(1;6;9)
8.	(1;2;2)	(-1;5;2)	(-1;2;8)	(1;5;10)
9.	(2;3;1)	(0;6;1)	(0;3;7)	(2;6;9)
10.	(2;2;2)	(0;5;2)	(0;2;8)	(2;5;10)
11.	(1;3;2)	(-1;6;2)	(-1;3;8)	(1;6;10)
12.	(0;1;2)	(-2;4;2)	(-2;1;8)	(0;4;10)
13.	(0;3;0)	(-2;6;0)	(-2;3;6)	(0;6;8)
14.	(2;1;0)	(0;4;0)	(0;1;6)	(2;4;8)
15.	(0;2;1)	(-2;5;1)	(-2;2;7)	(0;5;9)
16.	(1;1;1)	(-1;4;1)	(-1;1;7)	(1;4;9)
17.	(1;2;0)	(-1;5;0)	(-1;2;6)	(1;5;8)
18.	(0;1;0)	(-2;4;0)	(-2;1;6)	(0;4;8)
19.	(0;1;1)	(-2;4;1)	(-2;1;7)	(0;4;9)
20.	(0;2;0)	(-2;5;0)	(-2;2;6)	(0;5;8)
21.	(4;2;5)	(0;7;2)	(0;7;2)	(1;5;0)
22.	(4;4;10)	(4;10;2)	(2;8;4)	(9;6;4)
23.	(4;6;5)	(6;9;4)	(2;10;10)	(7;5;9)
24.	(3;5;4)	(8;7;4)	(5;10;4)	(4;7;8)
25.	(10;6;6)	(-2;8;2)	(6;8;9)	(7;10;3)
26.	(1;8;2)	(5;2;6)	(5;7;4)	(4;10;9)
27.	(6;6;5)	(4;9;5)	(4;6;11)	(6;9;3)
28.	(7;2;2)	(5;7;7)	(5;3;1)	(2;3;7)
29.	(8;6;4)	(10;5;5)	(5;6;8)	(8;10;7)
30.	(7;7;3)	(6;5;8)	(3;5;8)	(8;4;1)

Расчетно-графическая работа № 3

Тема: *Поверхности второго порядка*

В вариантах № 1 – 15 установить тип заданных поверхностей и построить их. В вариантах № 16 – 25 даны уравнения линий в плоскости yOz, требуется: 1) найти уравнение поверхности, образованной вращением данной линии вокруг оси Oz; 2) построить чертеж полученной поверхности.

№ варианта	*Уравнение поверхности*
1.	$x^2 - xy - xz + yz = 0$
2.	$x^2 + z^2 - 4x - 4z + 4 = 0$
3.	$x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xy - 2yz = 0$
4.	$x^2 + y^2 - z^2 - 2y + 2z = 0$
5.	$x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4y + 4z + 4 = 0$
6.	$4x^2 + y^2 - z^2 - 24x - 4y + 2z + 35 = 0$
7.	$x^2 + y^2 - z^2 - 2x - 2y + 2z + 2 = 0$
8.	$x^2 + y^2 - 6x + 6y - 4z + 18 = 0$
9.	$9x^2 - z^2 - 18x - 18y - 6z = 0$
10.	$4x^2 - y^2 + 4z^2 - 8x + 4y + 8z + 4 = 0$
11.	$x^2 - y^2 - 4x + 8y - 2z = 0$
12.	$4x^2 + 9y^2 + 36z^2 - 8x - 18y - 72z + 13 = 0$
13.	$x^2 + y^2 + z^2 = 2az$
14.	$x^2 + y^2 = 2az$
15.	$x^2 - y^2 = 2az$
16.	$z = 4 - y^2$
17.	$2y + 3z = 6$
18.	$y^2 + 4z^2 = 4$
19.	$z = y^2 - 4$
20.	$9y^2 - 4z^2 + 36 = 0$
21.	$4y^2 - z^2 = 16$
22.	$z = y^2 + 2$
23.	$z^2 - 4y^2 - 4 = 0$
24.	$y - 2z = 4$
25.	$4y^2 - z^2 - 36 = 0$

Методические рекомендации
Примеры решения задач

1. Решить систему уравнений

$$2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 1,$$
$$4x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 5,$$
$$6x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 = 9,$$
$$2x_1 - x_2 + 2x_3 - 12x_4 = 10.$$

Решение. Будем решать методом Гаусса. Выпишем расширенную матрицу системы и преобразуем её, вычитая первую строку, умноженную на 2, 3 и 1 соответственно из 2-ой, 3-ей и 4-ой строк:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|cc} 2 & -1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & -1 & 1 & 5 \\ 6 & -3 & -1 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 2 & -12 & 10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|ccc} 2 & -1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -10 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & -15 & 9 \end{array}\right).$$

Далее вторую строку, умноженную на 2 и 3, вычтем соответственно из третей и четвёртой строк:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -10 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & -15 & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 2 & -1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Последняя матрица эквивалентна следующей ступенчатой системе:

$$2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 1,$$
$$x_3 - 5x_4 = 3.$$

Полученная упрощённая система представляет собой систему из двух уравнений для четырёх неизвестных. Следовательно, два из неизвестных можно выбрать за главные, а два - за свободные, через которые будут выражены главные. В качестве главных неизвестных можно выбрать любую пару, если определитель, составленный из коэффициентов, стоящих перед ними, отличен от нуля (базисный минор). В данной задаче в качестве главных неизвестных можно выбрать x_1 , x_3.

Действительно, определитель, составленный из их коэффициентов, отличен от нуля:

$$\Delta_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Теперь из второго уравнения выразим x_3 через x_4. Затем подставим его в первое уравнение и найдём x_1 через x_2, x_4. В итоге получим

$$x_1 = \frac{1}{2}x_2 + x_4 + 2,$$

$$x_3 = 5x_4 + 3.$$

Переменные x_2, x_4 принимают произвольные значения. Положив $x_2 = \lambda_2$, $x_4 = \lambda_4$, общее решение системы можно записать в виде

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\lambda_2 + \lambda_4 + 2 \\ \lambda_2 \\ 5\lambda_4 + 3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix}.$$

2. Решить с помощью формул Крамера систему уравнений

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 4,$$

$$3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1,$$

$$2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8.$$

Решение. Убедимся, прежде всего, в том, что определитель системы отличен от нуля:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (5 - 21) - 2 \cdot (-3 - 6) + 1 \cdot (21 + 10) = 33.$$

Вычислим теперь остальные, входящие в формулы Крамера, определители:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 8 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 4 \cdot (5 - 21) - 2 \cdot (-1 - 24) + 1 \cdot (7 + 40) = 33,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 8 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1 - 24) - 4 \cdot (-3 - 6) + 1 \cdot (24 - 2) = 33,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -5 & 1 \\ 2 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-40 - 7) - 2 \cdot (24 - 2) + 4 \cdot (21 + 10) = 33.$$

Подставив полученные значения определителей в формулы Крамера, имеем

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{33}{33} = 1, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{33}{33} = 1, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{33}{33} = 1.$$

Правильность представленного решения можно проверить подстановкой значений x_1, x_2, x_3 в исходную систему уравнений.

3. Исследовать на совместность и, если совместна, найти общее и одно частное решение системы уравнений

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 3,$$
$$x_1 + 3x_2 - x_3 = 1,$$
$$3x_1 + 4x_2 - x_3 = 5.$$

Решение. Прежде всего, используя теорему Кронекера-Капелли, определим, является ли данная система уравнений совместной. Для этого выпишем расширенную матрицу системы

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 5 \end{array}\right).$$

Вычислим вначале ранг основной матрицы. Видно, что минор второго порядка, стоящий в левом верхнем углу, отличен от нуля:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 2 = 5 \neq 0.$$

Посмотрим теперь, чему равен минор третьего порядка (определитель) основной матрицы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-3+4) + 2 \cdot (-1+3) + 1 \cdot (4-9) = 0$$

Таким образом, ранг основной матрицы равен двум - $rg(A) = 2$.

Для определения ранга расширенной матрицы необходимо вычислить ещё один, оставшийся, минор третьего порядка

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot (15-4) + 2 \cdot (5-3) + 3 \cdot (4-9) = 0$$

Следовательно, ранг расширенной матрицы также равен двум - $rg(\widetilde{A}) = 2$. Значит, в соответствии с теоремой Кронекера-Капелли рассматриваемая система уравнений совместна. Принимая за независимые первые два уравнения, содержащие базисный минор, исходную систему можно переписать в виде

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 3,$$
$$x_1 + 3x_2 - x_3 = 1.$$

Здесь главными являются относящиеся к базисному минору неизвестные x_1, x_2. Выражая их через x_3, получим

$$x_1 = \frac{11 - x_3}{5}, \quad x_2 = \frac{2x_3 - 2}{5}.$$

Это общее решение, которое можно записать также в виде вектор-столбца

$$X=\begin{pmatrix}\dfrac{11-x_3}{5}\\ \dfrac{2x_3-2}{5}\\ x_3\\ \end{pmatrix}.$$

Частное решение получается из общего, если для x_3 выбрать конкретное числовое значение. Пусть, например, $x_3=1$, тогда в качестве частного решения имеем

$x_1=2,\quad x_2=0,\quad x_3=1$.

4. Найти фундаментальную совокупность и общее решение системы уравнений

$$\begin{aligned}
&x_1+3x_2+3x_3+2x_4+4x_5=0,\\
&x_1+4x_2+5x_3+3x_4+7x_5=0,\\
&2x_1+5x_2+4x_3+x_4+5x_5=0,\\
&x_1+5x_2+7x_3+6x_4+10x_5=0.
\end{aligned}$$

<u>Решение.</u> Выпишем матрицу системы и упростим её с помощью элементарных преобразований, вычитая первую строку, умноженную на 1,2 и 1 соответственно из второй, третьей и четвёртой строк:

$$A=\begin{pmatrix}1&3&3&2&4\\1&4&5&3&7\\2&5&4&1&5\\1&5&7&6&10\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&3&2&4\\0&1&2&1&3\\0&-1&-2&-3&-3\\0&2&4&4&6\end{pmatrix}.$$

Теперь вторую строку прибавим к третьей и её же, умноженную на 2, вычтем из четвёртой строки, получим

$$A\sim\begin{pmatrix}1&3&3&2&4\\0&1&2&1&3\\0&-1&-2&-3&-3\\0&2&4&4&6\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&3&2&4\\0&1&2&1&3\\0&0&0&-2&0\\0&0&0&3&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&3&3&2&4\\0&1&2&1&3\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}.$$

Ранг этой матрицы равен трём. Следовательно, три неизвестные являются главными, а две - свободными. Выберем в качестве главных x_1,x_2,x_4. Это можно сделать, т.к. минор 3-го порядка, составленный из коэффициентов при этих неизвестных, отличен от нуля. Соответствующая преобразованной матрице система имеет вид

$$\begin{aligned}
x_1+3x_2+3x_3+2x_4+4x_5&=0,\\
x_2+2x_3+x_4+3x_5&=0,\\
x_4&=0.
\end{aligned}$$

Отсюда, выражая главные неизвестные через свободные, получим общее решение

$$x_1 = 3x_3 + 5x_5,$$
$$x_2 = -2x_3 - 3x_5,$$
$$x_4 = 0.$$

Чтобы записать фундаментальную совокупность решений (ФСР), необходимо из вектор-столбца $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix}$ составить любым способом два линейно независимых вектора. Обычно это делается путем задания искомого вектор-столбца в виде столбцов единичной матрицы размером, равным высоте столбца из свободных неизвестных. В данном случае – это матрица второго порядка

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Придавая x_3, x_5 значения из первого и второго столбцов этой матрицы, получим ФСР:

$$C_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку общее решение системы есть сумма линейно независимых решений из ФСР, умноженных на произвольные коэффициенты, то его можно записать ещё в следующем виде:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 = \lambda_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\lambda_1 + 5\lambda_2 \\ -2\lambda_1 - 3\lambda_2 \\ \lambda_1 \\ 0 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

5. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа и записать соответствующее преобразование

$$L(\vec{x}, \vec{x}) = x_1^2 - x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_2x_3.$$

Решение. Следуя алгоритму метода Лагранжа, выделим вначале в квадратичной форме все члены, содержащие x_1, и дополним их до полного квадрата:

$$x_1^2 + 4x_1x_2 = (x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2) - 4x_2^2 = (x_1 + 2x_2)^2 - 4x_2^2.$$

Сделаем в этом выражении замену $y_1 = x_1 + 2x_2$ и подставим его в квадратичную форму. Получим:

$$L = y_1^2 - 5x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_2x_3.$$

Далее выделим в L члены, содержащие x_2, и проделаем с ними аналогичную процедуру:

$$-5x_2^2+2x_2x_3=-5\cdot(x_2^2-\frac{2}{5}x_2x_3+\frac{x_3^2}{25}-\frac{x_3^2}{25})=$$

$$=-5\cdot(x_2-0.2x_3)^2+\frac{x_3^2}{5}$$

Если положить $y_2=x_2-0.2x_3$, то квадратичная форма уже не будет содержать смешанных произведений. Примем также $x_3=y_3$, тогда канонический вид квадратичной формы есть

$$L=y_1^2-5y_2^2+3.2y_3^2.$$

Соответствующее преобразование от переменных x_1,x_2,x_3 к переменным y_1,y_2,y_3 имеет вид:

$$y_1=x_1+2x_2,\ y_2=x_2-0.2x_3,\ y_3=x_3.$$

6. Найти ортогональное преобразование, приводящее квадратичную форму к каноническому виду, и записать соответствующий канонический вид этой формы:

$$L(\vec{x},\vec{x})=x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_2x_3.$$

Решение. В исходном базисе $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ матрица оператора, соответствующая данной квадратичной форме, есть

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&1&2\end{pmatrix}.$$

Эта матрица будет определять квадратичную форму канонического вида в ортонормированном базисе $\vec{e}_1',\vec{e}_2',\vec{e}_3'$, составленном из собственных векторов матрицы A. Найдем их.

Характеристическое уравнение для матрицы A имеет вид

$$|A-\lambda\cdot E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&0&0\\0&2-\lambda&1\\0&1&2-\lambda\end{vmatrix}=0.$$

Откуда следует

$$(1-\lambda)\cdot[(2-\lambda)^2-1]=0 \ \text{ и } \ \lambda_{1,2}=1,\lambda_3=3.$$

Как известно собственные векторы матрицы находятся из уравнений

$$(A-\lambda\cdot E)\vec{f}=0.$$

Для случая $\lambda_{1,2}=1$ имеем:

$$(A-E)\vec{f}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix}=0.$$

Ранг матрицы этой системы уравнений (относительно $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$) равен 1. Следовательно, ФСР системы состоит из двух линейно независимых решений. Как видно из данной системы, величина α_3 принимает произвольные значения, а величины α_1,α_2 связаны соотношением $\alpha_1+\alpha_2=0$. В качестве собственных можно выбрать, например, векторы

$$\vec{f}_1=(1,0,0),\ \vec{f}_2=(0,1,-1).$$

Эти векторы ортогональны: $(\vec{f}_1,\vec{f}_2)=0$ (если бы они оказались не ортогональными, то их нужно было бы ортогонализировать с помощью стандартной процедуры). Вектор $\vec{f}_1$ к тому же и нормирован. Откуда следует - $\vec{e}_1'=\vec{f}_1$. Нормируем теперь вектор $\vec{f}_2$:

$$\vec{e}_2'=\frac{\vec{f}_2}{\left\|\vec{f}_2\right\|}=(0,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}).$$

Для случая $\lambda_3=3$ уравнение, определяющее собственный вектор есть

$$\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{pmatrix}=0.$$

Ранг матрицы этой системы уравнений равен 2. Следовательно, она имеет одно линейно независимое решение, например, $\vec{f}_3=(0,1,1)$. Отнормируем этот вектор:

$$\vec{e}_3'=\frac{\vec{f}_3}{\left\|\vec{f}_3\right\|}=(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}).$$

Теперь можно составить искомую матрицу ортогонального преобразования:

$$T_{e\to e'}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}.$$

Исходная квадратичная форма будет иметь следующий канонический вид

$$L(y,y)=y_1^2+y_2^2+3y_3^2.$$

При этом переменные x_1,x_2,x_3 связаны с переменными y_1,y_2,y_3 соотношением

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix},$$

или

$$x_1 = y_1, x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} y_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_3, x_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}} y_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_3$$

7. Построить в прямоугольной системе координат фигуру, определяемую следующим уравнением, предварительно приведя его к каноническому виду

$$5x^2 + 6xy + 5y^2 - 16x - 16y - 16 = 0.$$

Решение. Выделим в этом выражении квадратичную форму $L(x, y)$. Это три первых слагаемых уравнения $L(x, y) = 5x^2 + 6xy + 5y^2$.

Матрица квадратичной формы равна $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. Проведём процедуру приведения квадратичной формы к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования. Характеристическое уравнение матрицы имеет вид

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 3 \\ 3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Его корни таковы: $\lambda_1 = 8, \lambda_2 = 2$.

Найдём теперь собственные векторы, соответствующие этим корням и ортонормируем их. Для вектора $\vec{f}_1 = (\alpha_1, \alpha_2)$, соответствующего $\lambda_1 = 8$, имеем

$$(A - \lambda_1 E)\vec{f}_1 = (A - 8E)\vec{f}_1 = 0, \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = 0, \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2$$

В итоге собственный вектор, соответствующий $\lambda_1 = 8$, можно выбрать в виде

$$\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Аналогичная процедура для собственного вектора $\vec{f}_2 = (\beta_1, \beta_2)$ даёт:

$$(A - \lambda_2 E)\vec{f}_2 = (A - 2E)\vec{f}_2 = 0, \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = 0, \Rightarrow \beta_1 = -\beta_2$$

Откуда:

$$\vec{f}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

После нормировки полученных векторов имеем:

$$\vec{e}_1' = \frac{\vec{f}_1}{\|\vec{f}_1\|} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \ \vec{e}_2' = \frac{\vec{f}_2}{\|\vec{f}_2\|} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Эти векторы представляют собой ортонормированный базис новой системы координат. Матрица ортогонального оператора, приводящего квадратичную форму $L(x, y) = 5x^2 + 6xy + 5y^2$ к каноническому виду $8x'^2 + 2y'^2$, есть

$$T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Связь старых (x, y) и новых (x', y') координат определяется соотношением

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \; x = \frac{1}{\sqrt{2}} x' - \frac{1}{\sqrt{2}} y', \; y = \frac{1}{\sqrt{2}} x' + \frac{1}{\sqrt{2}} y'.$$

Учитывая приведенные выражения, приведём заданную квадратичную форму к каноническому виду

$$5x^2 + 6xy + 5y^2 - 16x - 16y - 16 = 8x'^2 + 2y'^2 - 16(\frac{1}{\sqrt{2}} x' - \frac{1}{\sqrt{2}} y') -$$

$$-16(\frac{1}{\sqrt{2}} x' + \frac{1}{\sqrt{2}} y') - 16 = 8(x' - \sqrt{2})^2 + 2y'^2 - 32 = 0,$$

$$\frac{(x' - \sqrt{2})^2}{4} + \frac{y'^2}{16} = 1$$

Это есть каноническое уравнение эллипса в системе координат x', y',которая получается из исходной её поворотом на угол $\varphi = \pi / 4$ и переносом начала координат в точку $x_0 = \sqrt{2}, \; y_0 = 0$.

8. Являются ли линейно зависимыми (независимыми) векторы

$$\vec{a}_1 = (2, -3, 1), \quad \vec{a}_2 = (3, -1, 5), \quad \vec{a}_3 = (1, -4, 3).$$

Решение. По определению линейная зависимость или независимость векторов устанавливается исходя из условия равенства нулю линейной комбинации этих векторов

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \alpha_3 \vec{a}_3 = 0$$

или в развёрнутом виде

$$\alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{12} + \alpha_3 a_{13} = 0,$$

$$\alpha_1 a_{21} + \alpha_2 a_{22} + \alpha_3 a_{23} = 0,$$

$$\alpha_1 a_{31} + \alpha_2 a_{32} + \alpha_3 a_{33} = 0.$$

Если эти равенства выполняются при условии, что хотя бы один из коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ отличен от нуля, то векторы линейно зависимы. Записанные равенства представляют собой однородную систему линейных уравнений относительно коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Эта система имеет нетривиальное решение (т.е. решение, в котором не все α одновременно равны нулю) только при условии равенства нулю определителя системы. В рассматриваемом случае определитель системы равен

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & -4 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-3 + 20) - 3 \cdot (-9 + 4) + 1 \cdot (-15 + 1) = 35 \neq 0.$$

Таким образом система имеет лишь тривиальное решение и исходная совокупность векторов линейно независима.

9. При каких λ вектор $\vec{b} = (7, -2, \lambda)$ линейно выражается через векторы $\vec{a}_1 = (2, 3, 5), \quad \vec{a}_2 = (3, 7, 8), \quad \vec{a}_3 = (1, -6, 1)$.

<u>Решение</u>. По условию задачи надо найти такие λ, при которых выполняется равенство

$$\vec{b} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \alpha_3\vec{a}_3$$

или в развёрнутом виде

$$\alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{12} + \alpha_3 a_{13} = b_1,$$

$$\alpha_1 a_{21} + \alpha_2 a_{22} + \alpha_3 a_{23} = b_2,$$

$$\alpha_1 a_{31} + \alpha_2 a_{32} + \alpha_3 a_{33} = b_3.$$

Записанные соотношения представляют собой систему неоднородных линейных уравнений относительно $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ - коэффициентов линейной комбинации. В соответствии с теоремой Кронекера-Капелли эта система совместна, если ранг основной матрицы системы равен рангу расширенной матрицы. Выпишем расширенную матрицу для заданных условий:

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 7 \\ 3 & 7 & -6 & -2 \\ 5 & 8 & 1 & \lambda \end{array}\right)$$

Сначала определим ранг основной матрицы. Видно, что отличные от нуля миноры второго порядка в матрице имеются, например, минор, стоящий в левом верхнем углу. Вычислим теперь минор третьего порядка (определитель) основной матрицы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & -6 \\ 5 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot(7+48) - 3\cdot(3+30) + 1\cdot(24-35) = 0.$$

Следовательно, ранг основной матрицы равен двум. Таким образом, рассматриваемая система будет совместна, если ранг расширенной матрицы также будет равен двум. Для этого необходимо, чтобы второй минор третьего порядка расширенной матрицы был равен нулю, т.е.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 3 & 7 & -2 \\ 5 & 8 & \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

откуда следует

$$2\cdot(7\lambda+16) - 3\cdot(3\lambda+10) + 1\cdot(24-35) = 0,$$

$$14\lambda + 32 - 9\lambda - 30 - 77 = 0,\ 5\lambda = 75,\ \lambda = 15.$$

Тестовые задания по проверке остаточного уровня знаний

«Алгебра и геометрия» для специальностей 230201
20 заданий
время тестирования – 40 минут

ВАРИАНТ 1

Инструкция: все задания имеют одну и ту же форму – с выбором одного ответа из четырех предложенных

1. Определитель $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 7 & -1 & 4 \\ 9 & -8 & -6 \end{vmatrix}$ равен…	1) - 77 2) 77 3) 70 4) -76
2. Ранг матрицы $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ равен…	1) 2 2) 3 3) 0 4) 1
3. Для матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$ обратная матрица равна…	1) $\begin{pmatrix} 16/9 & 8/9 & -1/9 \\ 14/9 & 7/9 & 2/9 \\ -1/9 & 2/9 & 1/9 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} -16/9 & 8/9 & -1/9 \\ 14/9 & -7/9 & 2/9 \\ -1/9 & 2/9 & -1/9 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 16/9 & 8/9 & 1/9 \\ 14/9 & 7/9 & 2/9 \\ -1/9 & 2/9 & 1/9 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 16/9 & 8/9 & 1/9 \\ 14/9 & 7/9 & 2/9 \\ 1/9 & 2/9 & 1/9 \end{pmatrix}$
4. Произведение матриц $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ равно…	1) $\begin{pmatrix} 16 & 10 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 11 & 10 \\ 10 & 6 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 12 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 16 & 10 \\ 10 & 6 \end{pmatrix}$
5. Даны векторы $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ и $\vec{b} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$. Тогда линейная комбинация $\vec{a} + 2\vec{b}$ этих векторов имеет вид…	1) $7\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ 2) $7\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ 3) $7\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k}$ 4) $4\vec{i} + \vec{k}$

6. Даны векторы $\vec{a} = 4\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{b} = (2;1;2)$. Скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$ равно…	1) 13 2) 3 3) 5 4) 1
7. Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}$ и $\vec{b} = 5\vec{j} - 7\vec{k}$, равна…	1) 20 2) $\sqrt{195}$ 3) $10\sqrt{2}$ 4) 10
8. Объем пирамиды с вершинами $A(0;\ 0;\ 1)$, $B(2;\ 3;\ 5)$, $C(6;\ 2;\ 3)$, $D(3;\ 7;\ 2)$ равен…	1) 60 2) 120 3) 20 4) 89
9. Прямая проходит через точки $O(0;\ 0)$ и $B(2;\ 1)$. Тогда ее угловой коэффициент равен…	1) 0,5 2) 2 3) -0,5 4) -2
10. Если уравнение гиперболы имеет вид $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$, то длина ее действительной полуоси равна…	1) 3 2) 4 3) 9 4) 16
11. Даны точки $A(2;\ 3)$ и $B(-6;\ 5)$. Тогда координаты середины отрезка AB равны…	1) (2; 4) 2) (- 2; 4) 3) (2; - 4) 4) (- 2; - 4)
12. Радиус окружности, заданной уравнением $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$, равен…	1) 5 2) 25 3) 20 4) 10
13. Уравнение прямой, проведенной из точки $N(2;\ 0;\ -1)$ перпендикулярно плоскости $2x + 3y - z + 5 = 0$, имеет вид…	1) $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-1}$ 2) $\frac{x+2}{-2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{5}$ 3) $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{3} = \frac{-z+1}{1}$ 4) $\frac{x+2}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{5}$
14. Уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1;\ 0;\ -1)$, $M_2(2;\ 2;\ 3)$, $M_3(0;\ -3;\ 1)$ имеет вид…	1) $16x + 6y - z - 17 = 0$ 2) $16x - 6y - z - 15 = 0$ 3) $16x - 6y - z - 17 = 0$ 4) $16x - 6y + z - 17 = 0$
15. Поверхность, определяемая уравнением $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{9} = 1$ является…	1) эллипсоидом 2) однополостным гиперболоидом 3) двуполостным гиперболоидом 4) конусом
16. Величина острого угла между прямыми $\frac{x}{11} = \frac{y+1}{8} = \frac{z-1}{7}$ и $\frac{x-4}{7} = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{8}$ равна…	1) $\pi/2$ 2) $\pi/3$ 3) $\pi/6$ 4) $\pi/4$
17. Решением системы $\begin{cases} -3x + 4y + z = 17; \\ 2x + y - z = 0; \\ -2x + 3y + 5z = 8; \end{cases}$ является…	1) (- 2; - 3; - 1) 2) (- 2; 3; 1) 3) (- 2; 3; - 1) 4) (2; 3; - 1)

18. Дано множество натуральных чисел. Укажите, какие из арифметических действий (сложение, вычитание, умножение, деление) ***всегда*** выполнимы на этом множестве…	1) деление и вычитание 2) умножение и вычитание 3) сложение и умножение 4) сложение и деление
19. Линейное отображение задано в стандартном базисе матрицей $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$ Тогда координатами образа вектора $\bar{x}=\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ являются…	1) (15; 7) 2) (20; -12) 3) (19; 6) 4) (6; -19)
20. Даны точки A(-1;5;-10), B(5;-7;8), C(2;2;-7), D(5;-4;2). Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ являются…	1) коллинеарными 2) компланарными 3) ортогональными 4) равными

ВАРИАНТ 2

Инструкция: все задания имеют одну и ту же форму – с выбором одного ответа из четырех предложенных

1. Определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ равен…	1) 0 2) 500 3) – 500 4) 480
2. Ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 3 & 8 & 2 & -19 \end{pmatrix}$ равен…	1) 0 2) 1 3) 2 4) 3
3. Для матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \\ -4 & -14 & -6 \end{pmatrix}$ обратная матрица равна…	1) $\begin{pmatrix} 16 & 8 & -1 \\ 14 & 7 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 16 & -8 & -1 \\ 14 & -7 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 16 & 8 & -1 \\ 14 & 7 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ 4) A^{-1} не существует
4. Произведение матриц $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ равно…	1) $\begin{pmatrix} 16 & 10 \\ 14 & 10 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 11 & 10 \\ 10 & 6 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 12 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 16 & 10 \\ 10 & 6 \end{pmatrix}$

5. Даны векторы $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ и $\vec{b} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$. Тогда линейная комбинация $\vec{a} - 2\vec{b}$ этих векторов имеет вид…	1) $-5\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$ 2) $-5\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}$ 3) $5\vec{i} - 3\vec{j} - 5\vec{k}$ 4) $5\vec{i} + \vec{k}$
6. Даны векторы $\vec{a} = 4\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{b} = (2;1;2)$. Угол между векторами равен…	1) $\arccos\frac{1}{\sqrt{21}}$ 2) $\pi - \arccos\frac{1}{\sqrt{21}}$ 3) $\arccos\frac{1}{\sqrt{23}}$ 4) $\arccos\frac{1}{\sqrt{20}}$
7. Площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}$ и $\vec{b} = 5\vec{j} - 7\vec{k}$, равна…	1) 10 2) $\frac{\sqrt{195}}{2}$ 3) $5\sqrt{2}$ 4) 5
8. Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a} = (1;-2;1)$, $\vec{b} = (3;2;1)$, $\vec{c} = (1;0;-1)$ равен…	1) 12 2) 6 3) 18 4) 24
9. Прямая проходит через точки $O(0;\ 0)$ и $B(1;\ 2)$. Тогда ее угловой коэффициент равен…	1) 0,5 2) 2 3) -0,5 4) -2
10. Если уравнение гиперболы имеет вид $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$, то длина ее мнимой полуоси равна…	1) 3 2) 4 3) 9 4) 16
11. Даны точки $A(3;\ 3)$ и $B(-6;\ 5)$. Тогда координаты середины отрезка AB равны…	1) (2; 4) 2) (- 1,5; 4) 3) (2; - 4) 4) (- 2; - 4)
12. Радиус окружности, заданной уравнением $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 15 = 0$, равен…	1) 5 2) 25 3) 20 4) 10
13. Уравнение прямой, проведенной из точки $N(2;\ 3;\ -1)$ перпендикулярно плоскости $2x - 3y - z + 5 = 0$, имеет вид…	1) $\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z+1}{-1}$ 2) $\frac{x+2}{-2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+1}{5}$ 3) $\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{-z+1}{1}$ 4) $\frac{x+2}{3} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-1}{5}$
14. Уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(2;\ 3;\ 0)$, $M_2(2;\ 0;\ -5)$, $M_3(0;\ 3;\ -5)$ имеет вид…	1) $15x + 10y - 3z - 60 = 0$ 2) $15x - 10y - 3z - 60 = 0$ 3) $15x - 10y - 3z - 60 = 0$ 4) $15x - 10y + 3z - 60 = 0$

15. Поверхность, определяемая уравнением $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}-\frac{z^2}{9}=-1$ является…	1) эллипсоидом 2) однополостным гиперболоидом 3) двуполостным гиперболоидом 4) конусом
16. Прямые $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+2}{1}$ и $\frac{x+4}{4}=\frac{y+3}{-6}=\frac{z-1}{2}$ являются…	1) параллельными 2) пересекающимися 3) ортогональными 4) совпадающими
17. Решением системы $\begin{cases}2x-4y+3z=1;\\ x-2y+4z=3;\\ 3x-y+5z=2;\end{cases}$ является…	1) -1; 0; 1 2) система несовместна 3) 5; 6; 10 4) система неопределенна
18. Дано множество целых чисел. Укажите, какие из арифметических действий (сложение, вычитание, умножение, деление) ***всегда*** выполнимы на этом множестве…	1) деление, умножение и вычитание 2) умножение и вычитание 3) сложение, умножение и вычитание 4) сложение и деление
19. Линейное отображение задано в стандартном базисе матрицей $A=\begin{pmatrix}3&2\\-1&2\end{pmatrix}$. Тогда координатами образа вектора $\bar{x}=\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$ являются…	5) (15; 7) 6) (20; -12) 7) (19; 6) 4) (6; -10)
20. Даны точки A(-1;5;-10), B(5;5;8), C(2;-4;-1), D(5;-4;-2). Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ являются…	1) коллинеарными 2) компланарными 3) ортогональными 4) равными

ВАРИАНТ 3

Инструкция: все задания имеют одну и ту же форму – с выбором одного ответа из четырех предложенных

1. Определитель $\begin{vmatrix}2&1&3\\5&3&2\\1&4&3\end{vmatrix}$ равен…	1) – 40 2) 40 3) 0 4) 65
2. Ранг матрицы $\begin{pmatrix}1&-2&3&1\\3&2&-4&2\\5&-2&2&4\end{pmatrix}$ равен…	1) 1 2) 2 3) 3 4) 4
3. Для матрицы $\begin{pmatrix}1&1&1\\-2&-1&-2\\2&3&3\end{pmatrix}$ обратная матрица равна…	1) $\begin{pmatrix}1&1&1\\-2&-1&-2\\2&3&3\end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-1&-2\\2&3&3\end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix}1&1&1\\-2&1&-2\\2&3&3\end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix}1&1&1\\-2&-1&2\\2&3&3\end{pmatrix}$
4. Произведение матриц $\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4&2\\2&2\end{pmatrix}$ равно…	1) $\begin{pmatrix}16&10\\14&10\end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix}11&10\\10&6\end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix}14&8\\10&6\end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix}16&10\\10&6\end{pmatrix}$

5. Даны векторы $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ и $\vec{b}=3\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$. Тогда линейная комбинация $\vec{a}+3\vec{b}$ этих векторов имеет вид…	1) $10\vec{i}-2\vec{j}+5\vec{k}$ 2) $7\vec{i}-2\vec{j}+5\vec{k}$ 3) $10\vec{i}-2\vec{j}-3\vec{k}$ 4) $4\vec{i}+\vec{k}$
6. Даны векторы $\vec{a}=4\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$, $\vec{b}=(2;1;2)$. $np_{\vec{a}}\vec{b}$ равна…	1) 6 2) -0,7 3) 0,7 4) $\sqrt{\frac{3}{7}}$
7. Площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}=(8;4;1)$ и $\vec{b}=(2;-2;1)$, равна…	1) 9 2) $18\sqrt{2}$ 3) $9\sqrt{2}$ 4) 18
8. Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}=(2;1;-3)$, $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{c}=(1;-3;1)$ равен…	1) 26 2) 25 3) 24 4) 20
9. Прямая проходит через точки $O(0;\ 0)$ и $B(4;\ 1)$. Тогда ее угловой коэффициент равен…	1) 0,25 2) 4 3) – 4 4) – 0,25
10. Если уравнение гиперболы имеет вид $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$, то ее эксцентриситет равен…	1) $\frac{4}{3}$ 2) 1 3) $\frac{5}{3}$ 4) 5
11. Даны точки $A(2;\ 3)$ и $B(6;\ 5)$. Тогда координаты середины отрезка AB равны…	1) (4; 4) 2) (- 4; 4) 3) (2; - 4) 4) (- 2; - 4)
12. Радиус окружности, заданной уравнением $x^2+y^2-2x+4y-44=0$, равен…	1) 7 2) 5 3) 49 4) 44
13. Уравнение прямой, проведенной из точки $N(-2;\ 0;\ -1)$ перпендикулярно плоскости $2x+3y-z+5=0$, имеет вид…	1) $\frac{x+2}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{-1}$ 2) $\frac{x+2}{-2}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{5}$ 3) $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{3}=\frac{-z+1}{1}$ 4) $\frac{x+2}{3}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{5}$
14. Уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(0;\ 0;\ -1)$, $M_2(2;\ 5;\ 3)$, $M_3(0;\ -3;\ -1)$ имеет вид…	1) $12x+10y-6z-6=0$ 2) $-12x-10y-3z-60=0$ 3) $12x-6z-6=0$ 4) $12x-3z-6=0$
15. Поверхность, определяемая уравнением $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}-\frac{z^2}{9}=0$ является…	1) эллипсоидом 2) однополостным гиперболоидом 3) двуполостным гиперболоидом 4) конусом

16. Прямые $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+2}{1}$ и $\frac{x+4}{4}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-1}{-2}$ являются…	1) параллельными 2) пересекающимися 3) ортогональными 4) совпадающими
17. Решением системы $\begin{cases}5x-2y+z=2;\\2x+y-3z=-1;\\3x-3y+4z=5;\end{cases}$ является…	1) -1; 0; 1 2) система несовместна! 3) 5; 6; 10 4) система неопределенна
18. Дано множество действительных чисел. Укажите, какие из арифметических действий (сложение, вычитание, умножение, деление) ***всегда*** выполнимы на этом множестве…	1) деление и вычитание 2) умножение и вычитание 3) сложение и умножение 4) сложение, вычитание, умножение и деление
19. Линейное отображение задано в стандартном базисе матрицей $A=\begin{pmatrix}3&-2\\-1&5\end{pmatrix}$. Тогда координатами образа вектора $\bar{x}=\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$ являются…	1) (15; 7) 2) (20; -12) 3) (19; 6) 4) (18; -19)
20. Даны точки *A*(-1;5;-10), *B*(5;-7;8), *C*(2;2;-7), *D*(5;-4;2). Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ являются…	1) коллинеарными 2) компланарными 3) ортогональными 4) равными

ВАРИАНТ 4

Инструкция: все задания имеют одну и ту же форму – с выбором одного ответа из четырех предложенных

1. Определитель $\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&6\end{vmatrix}$ равен…	1) 1 2) 2 3) 3 4) 4
2. Ранг матрицы $\begin{pmatrix}1&-2&3&1\\3&2&-4&3\\5&-2&2&4\end{pmatrix}$ равен…	1) 1 2) 2 3) 3 4) 4
3. Для матрицы $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$ обратная матрица равна…	1) $\begin{pmatrix}3&-1&-1\\-1&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix}3&1&1\\-1&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix}3&-1&-1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix}3&-1&-1\\-1&-1&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}$

4. Произведение матриц $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ равно…	1) $\begin{pmatrix} 16 & 10 \\ 14 & 10 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 11 & 10 \\ 10 & 6 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 12 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 16 & 14 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}$
5. Даны векторы $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ и $\vec{b} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$. Тогда линейная комбинация $\vec{a} - 3\vec{b}$ этих векторов имеет вид…	1) $8\vec{i} - 4\vec{j} + 7\vec{k}$ 2) $8\vec{i} - \vec{j} + 7\vec{k}$ 3) $-8\vec{i} + 4\vec{j} - 7\vec{k}$ 4) $4\vec{i} + \vec{k}$
6. Даны векторы $\vec{a} = 4\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{b} = (2;1;2)$. $np_{\vec{b}}\vec{a}$ равна…	1) 1 2) 2 3) 3 4) 4
7. Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = (8;4;1)$ и $\vec{b} = (2;-2;1)$, равна…	1) 9 2) $18\sqrt{2}$ 3) $9\sqrt{2}$ 4) 18
8. Объем треугольной призмы, построенной на векторах $\vec{a} = (1;2;3)$, $\vec{b} = (2;4;1)$, $\vec{c} = (2;-1;0)$ равен…	1) $\frac{25}{6}$ 2) 25 3) 23 4) $\frac{23}{6}$
9. Прямая проходит через точки $O(0;\ 0)$ и $B(2;\ 4)$. Тогда ее угловой коэффициент равен…	1) 2 2) 0,5 3) – 2 4) – 0,5
10. Если уравнение гиперболы имеет вид $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$, то ее фокусы имеют координаты…	1) $F_1(-25;\ 0)$, $F_2(25;\ 0)$ 2) $F_1(-3;\ 0)$, $F_2(3;\ 0)$ 3) $F_1(-5;\ 0)$, $F_2(5;\ 0)$ 4) $F_1(-4;\ 0)$, $F_2(4;\ 0)$
11. Даны точки $A(2;\ 3)$ и $B(-6;\ -5)$. Тогда координаты середины отрезка AB равны…	1) (4; 4) 2) (- 4; 4) 3) (2; - 4) 4) (- 2; - 1)
12. Радиус окружности, заданной уравнением $x^2 + y^2 - 2x + 10y - 23 = 0$, равен…	1) 7 2) 5 3) 49 4) 44
13. Уравнение прямой, проведенной из точки $N(2;\ 0;\ -1)$ перпендикулярно плоскости $2x + 3y + z + 5 = 0$, имеет вид…	1) $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{1}$ 2) $\frac{x+2}{-2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{5}$ 3) $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{3} = \frac{-z+1}{1}$ 4) $\frac{x+2}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{5}$
14. Уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1;\ 1;\ -1)$, $M_2(2;\ 2;\ -2)$, $M_3(-3;\ -3;\ 1)$ имеет вид…	1) $x + y = 0$ 2) $x - y = 0$ 3) $x - z = 0$ 4) $12x - 3z - 6 = 0$

15. Поверхность, определяемая уравнением $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}-\frac{z^2}{9}=1$ является…	1) эллипсоидом 2) однополостным гиперболоидом 3) двуполостным гиперболоидом 4) конусом
16. Прямые $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+2}{5}$ и $\frac{x+4}{4}=\frac{y+3}{-6}=\frac{z-1}{2}$ являются…	1) параллельными 2) пересекающимися 3) ортогональными 4) совпадающими
17. Решением системы $\begin{cases} x-2y+z=1; \\ 2x+y-3z=2; \\ 4x-3y-z=4; \end{cases}$ является…	1) -1; 0; 1 2) система несовместна 3) 5; 6; 10 4) система неопределенна (имеет множество решений)!
18. Дано множество рациональных чисел. Укажите, какие из арифметических действий (сложение, вычитание, умножение, деление) ***всегда*** выполнимы на этом множестве…	1) деление и вычитание 2) умножение и вычитание 3) сложение и умножение 4) сложение, вычитание, умножение и деление
19. Линейное отображение задано в стандартном базисе матрицей $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$. Тогда координатами образа вектора $\overline{x}=\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ являются…	1) (15; 7) 2) (20; -12) 3) (19; 6) 4) (0; -17)

Содержание

Виктория Владимировна ЕРЕМИНА
доцент кафедры Информационных и управляющих систем АмГУ,
кандидат физико-математических наук, доцент

Алгебра и геометрия для специальности
230102 «Автоматизированные системы обработки информации и управления»
и 230201 «Информационные системы и технологии»:
учебно-методический комплекс дисциплины.

Издательство АмГУ.