Федеральное агентство по образованию РФ
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
(ГОУВПО «АмГУ»)

УТВЕРЖДАЮ
Зав. кафедрой ИиУС
___________ А.В. Бушманов
«___» _________ 2007 г.

Учебно-методический комплекс дисциплины

Теория вероятностей, математическая статистика

и случайные процессы

для специальностей 230102 и 230201 кафедры

«Информационные и управляющие системы»

Составитель: Ерёмина В.В.

2007 г.

*Печатается по решению
редакционно-издательского совета
факультета математики и информатики
Амурского государственного
университета*

Теория вероятностей, математическая статистика и случайные процессы для специальностей 230102 «Автоматизированные системы обработки информации и управления» и 230201 «Информационные системы и технологии»: учебно-методический комплекс дисциплины. / Еремина В.В. – Благовещенск. Изд-во Амурского гос. ун-та, 2007. 131 с.

Учебно-методическое пособие содержит: выписку из требований Государственного образовательного стандарта ВПО; рабочую программу преподавания дисциплины; методические указания и варианты индивидуальных заданий для проведения контрольных и расчетно графической работы; учебные задания для выполнения курса практических работ; тестовые задания по проверке остаточного уровня знаний; краткое изложение курса лекций.

Выписка из ГООСТ ВПО

Направление подготовки дипломированного специалиста
654600 – Информатика и вычислительная техника
Квалификация – инженер

4. Требования к обязательному минимуму содержания основной образовательной программы дипломированного специалиста по направлению подготовки «Информатика и вычислительная техника»

Индекс	Наименование дисциплин и их основные разделы	Всего часов
ЕН.Ф.01.06	*Теория вероятностей, математическая статистика и случайные процессы.*	100
	Случайная величина, ее функция распределения, математическое ожидание и дисперсия. Распределение монотонной функции от случайной величины. Системы случайных величин, условные плотности, зависимость и независимость случайных величин, корреляционный момент. Закон больших чисел и центральная предельная теорема. Точечные и интервальные оценки случайных величин. Критерии проверки гипотез. Статические характеристики случайных процессов. Стационарный случайный процесс. Метод статистических испытаний.	

Направление подготовки дипломированного специалиста
654700 – Информационные системы
Квалификация – инженер

4. Требования к обязательному минимуму содержания основной образовательной программы по направлению подготовки дипломированного специалиста “Информационные системы”

Индекс	Наименование дисциплин и их основные разделы	Всего часов
ЕН.Ф.01	*Математика*	782
	… Вероятность и статистика: математические основы теории вероятностей, модели случайных процессов, проверка гипотез, статистические методы обработки экспериментальных данных.	…

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

По дисциплине:	Теория вероятностей, математическая статистика и случайные процессы
Для специальностей:	230102 – Автоматизированные системы обработки информации и управления
Курс: 2	Семестр: 4

Лекции: 36 (час.) Экзамен: 4 семестр

Практические занятия: 36 (час.) Зачет: нет

Лабораторные занятия: нет

Самостоятельная работа: 60 (час.)

Всего часов: 132 (час.)

Составитель: Ерёмина В.В.

Факультет Математики и информатики

Кафедра Информационных и управляющих систем

1. Цели и задачи дисциплины, ее место в учебном процессе

   1.1. Цель преподавания дисциплины

   Изложение курса теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов и способов решения задач всех основных разделов данной дисциплины. Показать их важность для решения прикладных задач.

   1.2. Задачи изучения дисциплины

   По завершению курса «Теория вероятностей, математическая статистика и случайные процессы», обучаемые должны приобрести устойчивые навыки и умения по решению задач всех основных разделов математического анализа.

   1.3. Перечень разделов (тем) необходимых дисциплин

1.3.1. математический анализ: понятие функции, дифференциальное и интегральное исчисление.
1.3.2. алгебра и геометрия: системы линейных уравнений, декартова прямоугольная система координат на плоскости и в пространстве.

2. Содержание дисциплины

1.1. Федеральный компонент
Обще математическая и естественнонаучная дисциплина
ГОС ВПО: 1912 ЕН – Ф.6

1.2. Лекционные занятия
2.2.1. Тема 1. События и вероятность: понятие случайного события; классическое, статистическое, геометрическое определения вероятности; аксиоматический подход к вероятности; условная вероятность; схема испытаний Бернулли – 6 ч.
2.2.2. Тема 2. Случайные величины: понятие случайной величины; конечные величины и их числовые характеристики; функция распределения; непрерывные случайные величины и их числовые характеристики; нормальное распределение – 10 ч.
2.2.3. Тема 3. Точечные и интервальные оценки: основные понятия; точечные оценки; некоторые статистические распределения; интервальные оценки – 10 ч.
2.2.4. Тема 4. Статистические гипотезы: статистические гипотезы; гипотезы о параметрах нормального распределения; гипотеза о функции распределения; однофакторный дисперсионный анализ – 10 ч.

1.3. Практические занятия
2.3.1. Практическая работа 1. Случайные события – 2 ч.
2.3.2. Практическая работа 2. Комбинаторика – 2 ч.
2.3.3. Практическая работа 3. Классическое, статистическое и геометрические определения вероятностей – 2 ч.
2.3.4. Практическая работа 4. Теоремы сложения и умножения вероятностей – 2 ч.
2.3.5. Практическая работа 5. Условная вероятность – 2 ч.
2.3.6. Практическая работа 6. Формула полной вероятности. Формулы Бейеса – 2 ч.
2.3.7. Практическая работа 7. Независимые повторные испытания – 2 ч.
2.3.8. Практическая работа 8. Контрольная работа – 2 ч.
2.3.9. Практическая работа 9. Дискретные случайные величины – 2 ч.

2.3.10. Практическая работа 10. Непрерывные случайные величины – 2 ч.
2.3.11. Практическая работа 11. Системы двух случайных величин (семинарское занятие) – 2 ч.
2.3.12. Практическая работа 12. Системы двух случайных величин – 2 ч.
2.3.13. Практическая работа 13. Выборочный метод (семинарское занятие) – 2 ч.
2.3.14. Практическая работа 14. Выборочный метод – 2 ч.
2.3.15. Практическая работа 15. Интервальные оценки параметров распределения (семинарское занятие) – 2 ч.
2.3.16. Практическая работа 16. Интервальные оценки параметров распределения – 2 ч.
2.3.17. Практическая работа 17. Проверка статистических гипотез о законах распределения (семинарское занятие) – 2 ч.
2.3.18. Практическая работа 18. Проверка статистических гипотез о законах распределения – 2 ч.

1.4. Самостоятельная работа студентов

2.4.1. Самостоятельное практическое решение задач: рассмотрение качественных вопросов, которые предлагаются на экзамене по данной дисциплине – 40 ч.

Рекомендуемая литература:

1. Лунгу К.Н., Письменный Д.Т., Федин С.Н., Шевченко Ю.А. Сборник задач по высшей математике. В 2-х ч. М.: Айрис-пресс, 2003. – 576 с.

2. Письменный Д.Т. Конспект лекций по теории вероятностей и математической статистике. М.: Айрис-пресс, 2004. – 256 с.

2.4.2. Расчетно-графическая работа 1. Теория вероятностей – 10 ч.

Задание. Найти:

1. вероятность события по классической формуле вероятности;
2. вероятность события по теореме сложения вероятностей несовместных событий;
3. вероятность события по теореме умножения вероятностей независимых событий;
4. вероятность события по формуле полной вероятности;
5. вероятность события по формуле Бейеса;
6. вероятность события по формуле Бернулли;
7. вероятность события по локальной теореме Лапласа;
8. вероятность события по интегральной теореме Лапласа

2.4.3. Расчетно-графическая работа 2. Случайные величины – 10 ч.

Задание: Найти:

1. Определить законы распределения вероятностей случайной величины.
2. Числовые характеристики случайных величин.
3. Параметры нормального распределения вероятностей.
4. Вычислить вероятность заданного отклонения.

1.5. Вопросы к экзамену

2.5.1. Основные этапы развития ТВ
2.5.2. Случайное событие.
2.5.3. Действия над случайными событиями.
2.5.4. Классическое определение вероятности.
2.5.5. Относительная частота. Статистическое определение вероятности
2.5.6. Геометрическая вероятность
2.5.7. Теорема сложения вероятностей несовместных событий
2.5.8. Полная группа событий
2.5.9. Противоположные события
2.5.10. Условная вероятность. Теорема умножения вероятностей
2.5.11. Независимые события. Теорема умножения для независимых событий.
2.5.12. Вероятность появления хотя бы одного события
2.5.13. Теорема сложения вероятностей совместных событий
2.5.14. Формула полной вероятности
2.5.15. Вероятность гипотез. Формулы Бейеса
2.5.16. Формула Бернулли
2.5.17. Локальная теорема Лапласа
2.5.18. Интегральная теорема Лапласа
2.5.19. Вероятность отклонения относительной частоты от постоянной вероятности в независимых испытаниях
2.5.20. Случайная величина. Виды СВ
2.5.21. Закон распределения вероятностей дискретной СВ
2.5.22. Биномиальное распределение
2.5.23. Распределение Пуассона (вывод)
2.5.24. Геометрическое распределение. Гипергеометрическое распределение
2.5.25. Математическое ожидание дискретной СВ
2.5.26. Свойства математического ожидания
2.5.27. Математическое ожидание числа появлений события в независимых испытаниях
2.5.28. Отклонение СВ от ее математического ожидания. Дисперсия дискретной СВ
2.5.29. Свойства дисперсии
2.5.30. Дисперсия числа появления события в независимых испытаниях
2.5.31. Математическое ожидание и дисперсия распределения Пуассона

2.5.32. Среднее квадратическое отклонение
2.5.33. Одинаково распределенные взаимно-независимые СВ
2.5.34. Неравенство Чебышева
2.5.35. Теорема Чебышева
2.5.36. Теорема Бернулли
2.5.37. Функция распределения
2.5.38. Свойства функции распределения
2.5.39. График функции распределения
2.5.40. Плотность распределения
2.5.41. Вероятность попадания непрерывной СВ в заданный интервал
2.5.42. Нахождение функции распределения по известной плотности распределения
2.5.43. Свойства плотности распределения
2.5.44. Закон равномерного распределения вероятностей
2.5.45. Числовые характеристики непрерывных СВ
2.5.46. Закон нормального распределения
2.5.47. Нормальная кривая
2.5.48. Влияние параметров нормального распределения на форму нормальной кривой
2.5.49. Вероятность попадания в заданный интервал нормальной СВ
2.5.50. Вычисление вероятностей заданного отклонения
2.5.51. Правило тех сигм.
2.5.52. Центральная предельная теорема
2.5.53. Начальные моменты
2.5.54. Центральные моменты
2.5.55. Асимметрия
2.5.56. Функция одного случайного аргумента
2.5.57. Математическое ожидание функции одного случайного аргумента
2.5.58. Функция двух случайных аргументов
2.5.59. Показательное распределение
2.5.60. Вероятность попадания в заданный интервал показательного распределения
2.5.61. Числовые характеристики показательного распределения
2.5.62. Функция надежности
2.5.63. Показательный закон надежности
2.5.64. Характеристическое свойство показательного закона надежности
2.5.65. Система нескольких СВ
2.5.66. Закон распределения вероятностей дискретной двумерной СВ
2.5.67. Функция распределения двумерной СВ
2.5.68. Вероятность попадания случайной точки в прямоугольник
2.5.69. Плотность совместного распределения вероятностей непрерывной двумерной СВ

2.5.70. Нахождение плотностей вероятности составляющих двумерной СВ
2.5.71. Условные законы распределения составляющих системы дискретных СВ
2.5.72. Условные законы распределения составляющих системы непрерывных СВ
2.5.73. Условное математическое ожидание
2.5.74. Зависимые и независимые СВ
2.5.75. Числовые характеристики системы двух СВ.
2.5.76. Корреляционный момент. Коэффициент корреляции
2.5.77. Коррелированность и зависимость СВ
2.5.78. Линейная корреляция
2.5.79. Расчет прямых регрессии
2.5.80. Задачи математической статистики
2.5.81. Генеральная совокупность и выборка
2.5.82. Статистическое распределение выборки.
2.5.83. Эмпирическая функция распределения. Кумулята
2.5.84. Полигон, гистограмма
2.5.85. Выборка как набор СВ
2.5.86. Генеральная и выборочная средние. Методы их расчета
2.5.87. Генеральная и выборочная дисперсии
2.5.88. Оценки параметров распределения
2.5.89. Надежность. Доверительные интервалы
2.5.90. Доверительный интервал для математического ожидания при известном σ
2.5.91. Доверительный интервал для математического ожидания при неизвестном σ
2.5.92. Доверительный интервал для среднего квадратического отклонения
2.5.93. Оценка истинного значения измеряемой величины
2.5.94. Оценка точности измерений
2.5.95. Гипотеза
2.5.96. Проверка статистических гипотез. Критерий согласия Пирсона
2.5.97. Дисперсия суммы СВ
2.5.98. Случайные процессы и их виды

1.6. Оценочные критерии

При оценке знаний на экзамене учитывается: правильность и осознанность изложения содержания ответа на вопросы, полнота раскрытия понятий и закономерностей, точность употребления и трактовки общенаучных и специальных терминов; степень сформированности интеллектуальных и научных способностей экзаменуемого; самостоятельность ответа; речевая грамотность и логическая последовательность ответа.

Критерии оценок:

- отлично – полно раскрыто содержание вопросов в объеме программы и рекомендованной литературы; четко и правильно даны определения и раскрыто содержание концептуальных понятий, закономерностей, корректно использованы научные термины; для доказательства использованы различные теоретические знания, выводы из наблюдений и опытов; ответ самостоятельный, исчерпывающий, без наводящих дополнительных вопросов, с опорой на знания, приобретенные в процессе специализации по выбранному направлению информатики.
- хорошо – раскрыто основное содержание вопросов; в основном правильно даны определения понятий и использованы научные термины; ответ самостоятельный; определения понятий неполные, допущены нарушения последовательности изложения, небольшие неточности при использовании научных терминов или в выводах и обобщениях, исправляемые по дополнительным вопросам экзаменаторов.
- удовлетворительно – усвоено основное содержание учебного материала, но изложено фрагментарно, не всегда последовательно; определение понятий недостаточно четкое; не использованы в качестве доказательства выводы из наблюдений и опытов или допущены ошибки при их изложении; допущены ошибки и неточности в использовании научной терминологии, определении понятий.
- неудовлетворительно – ответ неправильный, не раскрыто основное содержание программного материала; не даны ответы на вспомогательные вопросы экзаменаторов; допущены грубые ошибки в определении понятий, при использовании терминологии.

4. Учебно-методические материалы по дисциплине

1.7. Используемая и рекомендуемая литература

Основная:

2.7.1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высшая школа, 2003. – 231 с.
2.7.2. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М.: Высшая школа, 2003. – 272 с.
2.7.3. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х частях. М.: Высшая школа, 1997. – 240 с.
2.7.4. Лунгу К.Н., Письменный Д.Т., Федин С.Н., Шевченко Ю.А. Сборник задач по высшей математике. В 2-х ч. М.: Айрис-пресс, 2003. – 576 с.
2.7.5. Письменный Д.Т. Конспект лекций по теории вероятностей и математической статистике. М.: Айрис-пресс, 2004. – 256 с.

2.7.6. Чистяков В.П. Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1998. – 198 с.

2.7.7. Колемаев В.А., Калинина В.Н. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высшее образование, 2001. – 302 с.

1.8. Учебные пособия:

2.8.1. Карточки с заданиями и методическими указаниями по выполнению практических работ.

2.8.2. Методические указания и индивидуальные варианты заданий для выполнения расчетно-графических работ.

4. Учебно-методическая (технологическая) карта дисциплины

Номер недели	Номер темы	Вопросы, изучаемые на лекции	Занятия		Используемые наглядные и методические пособия	Самостоятельная работа студентов		Форма контроля
			Практические	Лабораторные		Содержание	Часы	
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2.2.1	2.3.1	-	2.8.1	2.4.1	40	ко[1]
2			2.3.2	-				
3			2.3.3	-				ко
4	2	2.2.2	2.3.4	-				
5			2.3.5	-				ко
6			2.3.6	-				
7			2.3.7	-				ко
8			2.3.8	-				
9	3	2.2.3	2.3.9	-				ко, сб.[2]
10			2.3.10	-				
11			2.3.11	-	2.8.1 2.8.2	2.4.2	10	ко
12			2.3.12	-				
13			2.3.13	-				ко, защ.[3]
14	4	2.2.4	2.3.14	-				
15			2.3.15	-		2.4.3	10	ко
16			2.3.16	-				
17			2.3.17	-				ко, защ.
18			2.3.18	-				

[1] Контрольный опрос знаний теоретического материала

[2] Собеседование по результатам самостоятельной работы студентов

[3] Защита расчетно-графической работы

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

По дисциплине: Теория вероятностей, математическая статистика и случайные процессы

Для специальностей: 230201 – Информационные системы и технологии

Курс: 2 Семестр: 4

Лекции: 36 (час.) Экзамен: 4 семестр

Практические занятия: 36 (час.) Зачет: нет

Лабораторные занятия: нет

Самостоятельная работа: 56 (час.)

Всего часов: 128 (час.)

Составитель: Ерёмина В.В.

Факультет Математики и информатики

Кафедра Информационных и управляющих систем

1. Цели и задачи дисциплины, ее место в учебном процессе

1.1 Цель преподавания дисциплины

Изложение курса теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов и способов решения задач всех основных разделов данной дисциплины. Показать их важность для решения прикладных задач.

1.2 Задачи изучения дисциплины

По завершению курса «Теория вероятностей, математическая статистика и случайные процессы», обучаемые должны приобрести устойчивые навыки и умения по решению задач всех основных разделов математического анализа.

1.3 Перечень разделов (тем) необходимых дисциплин

1.3.1 математический анализ: понятие функции, дифференциальное и интегральное исчисление.
1.3.2 алгебра и геометрия: системы линейных уравнений, декартова прямоугольная система координат на плоскости и в пространстве.

2. Содержание дисциплины

2.1 Федеральный компонент
Обще математическая и естественнонаучная дисциплина
ГОС ВПО: 1898 ЕН – Ф.5

2.2 Лекционные занятия
2.2.1 Тема 1. События и вероятность: понятие случайного события; классическое, статистическое, геометрическое определения вероятности; аксиоматический подход к вероятности; условная вероятность; схема испытаний Бернулли – 6 ч.
2.2.2 Тема 2. Случайные величины: понятие случайной величины; конечные величины и их числовые характеристики; функция распределения; непрерывные случайные величины и их числовые характеристики; нормальное распределение – 10 ч.
2.2.3 Тема 3. Точечные и интервальные оценки: основные понятия; точечные оценки; некоторые статистические распределения; интервальные оценки – 10 ч.
2.2.4 Тема 4. Статистические гипотезы: статистические гипотезы; гипотезы о параметрах нормального распределения; гипотеза о функции распределения; однофакторный дисперсионный анализ – 10 ч.

2.3 Практические занятия
2.3.1 Практическая работа 1. Случайные события – 2 ч.
2.3.2 Практическая работа 2. Комбинаторика – 2 ч.
2.3.3 Практическая работа 3. Классическое, статистическое и геометрические определения вероятностей – 2 ч.
2.3.4 Практическая работа 4. Теоремы сложения и умножения вероятностей – 2 ч.
2.3.5 Практическая работа 5. Условная вероятность – 2 ч.
2.3.6 Практическая работа 6. Формула полной вероятности. Формулы Бейеса – 2 ч.
2.3.7 Практическая работа 7. Независимые повторные испытания – 2 ч.
2.3.8 Практическая работа 8. Контрольная работа – 2 ч.
2.3.9 Практическая работа 9. Дискретные случайные величины – 2 ч.

2.3.10 Практическая работа 10. Непрерывные случайные величины – 2 ч.
2.3.11 Практическая работа 11. Системы двух случайных величин (семинарское занятие) – 2 ч.
2.3.12 Практическая работа 12. Системы двух случайных величин – 2 ч.
2.3.13 Практическая работа 13. Выборочный метод (семинарское занятие) – 2 ч.
2.3.14 Практическая работа 14. Выборочный метод – 2 ч.
2.3.15 Практическая работа 15. Интервальные оценки параметров распределения (семинарское занятие) – 2 ч.
2.3.16 Практическая работа 16. Интервальные оценки параметров распределения – 2 ч.
2.3.17 Практическая работа 17. Проверка статистических гипотез о законах распределения (семинарское занятие) – 2 ч.
2.3.18 Практическая работа 18. Проверка статистических гипотез о законах распределения – 2 ч.

2.4 Самостоятельная работа студентов

Самостоятельное практическое решение задач: рассмотрение качественных вопросов, которые предлагаются на экзамене по данной дисциплине – 56 ч.

Рекомендуемая литература:

3. Лунгу К.Н., Письменный Д.Т., Федин С.Н., Шевченко Ю.А. Сборник задач по высшей математике. В 2-х ч. М.: Айрис-пресс, 2003. – 576 с.
4. Письменный Д.Т. Конспект лекций по теории вероятностей и математической статистике. М.: Айрис-пресс, 2004. – 256 с.

2.5 Вопросы к экзамену

2.5.1 Основные этапы развития ТВ
2.5.2 Случайное событие.
2.5.3 Действия над случайными событиями.
2.5.4 Классическое определение вероятности.
2.5.5 Относительная частота. Статистическое определение вероятности
2.5.6 Геометрическая вероятность
2.5.7 Теорема сложения вероятностей несовместных событий
2.5.8 Полная группа событий
2.5.9 Противоположные события
2.5.10 Условная вероятность. Теорема умножения вероятностей
2.5.11 Независимые события. Теорема умножения для независимых событий.
2.5.12 Вероятность появления хотя бы одного события

2.5.13 Теорема сложения вероятностей совместных событий
2.5.14 Формула полной вероятности
2.5.15 Вероятность гипотез. Формулы Бейеса
2.5.16 Формула Бернулли
2.5.17 Локальная теорема Лапласа
2.5.18 Интегральная теорема Лапласа
2.5.19 Вероятность отклонения относительной частоты от постоянной вероятности в независимых испытаниях
2.5.20 Случайная величина. Виды СВ
2.5.21 Закон распределения вероятностей дискретной СВ
2.5.22 Биномиальное распределение
2.5.23 Распределение Пуассона (вывод)
2.5.24 Геометрическое распределение. Гипергеометрическое распределение
2.5.25 Математическое ожидание дискретной СВ
2.5.26 Свойства математического ожидания
2.5.27 Математическое ожидание числа появлений события в независимых испытаниях
2.5.28 Отклонение СВ от ее математического ожидания. Дисперсия дискретной СВ
2.5.29 Свойства дисперсии
2.5.30 Дисперсия числа появления события в независимых испытаниях
2.5.31 Математическое ожидание и дисперсия распределения Пуассона
2.5.32 Среднее квадратическое отклонение
2.5.33 Одинаково распределенные взаимно-независимые СВ
2.5.34 Неравенство Чебышева
2.5.35 Теорема Чебышева
2.5.36 Теорема Бернулли
2.5.37 Функция распределения
2.5.38 Свойства функции распределения
2.5.39 График функции распределения
2.5.40 Плотность распределения
2.5.41 Вероятность попадания непрерывной СВ в заданный интервал
2.5.42 Нахождение функции распределения по известной плотности распределения
2.5.43 Свойства плотности распределения
2.5.44 Закон равномерного распределения вероятностей
2.5.45 Числовые характеристики непрерывных СВ
2.5.46 Закон нормального распределения
2.5.47 Нормальная кривая
2.5.48 Влияние параметров нормального распределения на форму нормальной кривой
2.5.49 Вероятность попадания в заданный интервал нормальной СВ
2.5.50 Вычисление вероятностей заданного отклонения

2.5.51 Правило тех сигм.
2.5.52 Центральная предельная теорема
2.5.53 Начальные моменты
2.5.54 Центральные моменты
2.5.55 Асимметрия
2.5.56 Функция одного случайного аргумента
2.5.57 Математическое ожидание функции одного случайного аргумента
2.5.58 Функция двух случайных аргументов
2.5.59 Показательное распределение
2.5.60 Вероятность попадания в заданный интервал показательного распределения
2.5.61 Числовые характеристики показательного распределения
2.5.62 Функция надежности
2.5.63 Показательный закон надежности
2.5.64 Характеристическое свойство показательного закона надежности
2.5.65 Система нескольких СВ
2.5.66 Закон распределения вероятностей дискретной двумерной СВ
2.5.67 Функция распределения двумерной СВ
2.5.68 Вероятность попадания случайной точки в прямоугольник
2.5.69 Плотность совместного распределения вероятностей непрерывной двумерной СВ
2.5.70 Нахождение плотностей вероятности составляющих двумерной СВ
2.5.71 Условные законы распределения составляющих системы дискретных СВ
2.5.72 Условные законы распределения составляющих системы непрерывных СВ
2.5.73 Условное математическое ожидание
2.5.74 Зависимые и независимые СВ
2.5.75 Числовые характеристики системы двух СВ.
2.5.76 Корреляционный момент. Коэффициент корреляции
2.5.77 Коррелированность и зависимость СВ
2.5.78 Линейная корреляция
2.5.79 Расчет прямых регрессии
2.5.80 Задачи математической статистики
2.5.81 Генеральная совокупность и выборка
2.5.82 Статистическое распределение выборки.
2.5.83 Эмпирическая функция распределения. Кумулята
2.5.84 Полигон, гистограмма
2.5.85 Выборка как набор СВ
2.5.86 Генеральная и выборочная средние. Методы их расчета
2.5.87 Генеральная и выборочная дисперсии

2.5.88 Оценки параметров распределения
2.5.89 Надежность. Доверительные интервалы
2.5.90 Доверительный интервал для математического ожидания при известном σ
2.5.91 Доверительный интервал для математического ожидания при неизвестном σ
2.5.92 Доверительный интервал для среднего квадратического отклонения
2.5.93 Оценка истинного значения измеряемой величины
2.5.94 Оценка точности измерений
2.5.95 Гипотеза
2.5.96 Проверка статистических гипотез. Критерий согласия Пирсона
2.5.97 Дисперсия суммы СВ
2.5.98 Случайные процессы и их виды

2.6 Оценочные критерии

При оценке знаний на экзамене учитывается: правильность и осознанность изложения содержания ответа на вопросы, полнота раскрытия понятий и закономерностей, точность употребления и трактовки общенаучных и специальных терминов; степень сформированности интеллектуальных и научных способностей экзаменуемого; самостоятельность ответа; речевая грамотность и логическая последовательность ответа.

Критерии оценок:

- отлично – полно раскрыто содержание вопросов в объеме программы и рекомендованной литературы; четко и правильно даны определения и раскрыто содержание концептуальных понятий, закономерностей, корректно использованы научные термины; для доказательства использованы различные теоретические знания, выводы из наблюдений и опытов; ответ самостоятельный, исчерпывающий, без наводящих дополнительных вопросов, с опорой на знания, приобретенные в процессе специализации по выбранному направлению информатики.
- хорошо – раскрыто основное содержание вопросов; в основном правильно даны определения понятий и использованы научные термины; ответ самостоятельный; определения понятий неполные, допущены нарушения последовательности изложения, небольшие неточности при использовании научных терминов или в выводах и обобщениях, исправляемые по дополнительным вопросам экзаменаторов.
- удовлетворительно – усвоено основное содержание учебного материала, но изложено фрагментарно, не всегда последовательно; определение понятий недостаточно четкое; не использованы в качестве доказательства выводы из наблюдений и опытов или допущены

ошибки при их изложении; допущены ошибки и неточности в использовании научной терминологии, определении понятий.
- неудовлетворительно – ответ неправильный, не раскрыто основное содержание программного материала; не даны ответы на вспомогательные вопросы экзаменаторов; допущены грубые ошибки в определении понятий, при использовании терминологии.

4. Учебно-методические материалы по дисциплине

2.7 Используемая и рекомендуемая литература

Основная:

2.7.1 Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высшая школа, 2003. – 231 с.
2.7.2 Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М.: Высшая школа, 2003. – 272 с.
2.7.3 Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х частях. М.: Высшая школа, 1997. – 240 с.
2.7.4 Лунгу К.Н., Письменный Д.Т., Федин С.Н., Шевченко Ю.А. Сборник задач по высшей математике. В 2-х ч. М.: Айрис-пресс, 2003. – 576 с.
2.7.5 Письменный Д.Т. Конспект лекций по теории вероятностей и математической статистике. М.: Айрис-пресс, 2004. – 256 с.
2.7.6 Чистяков В.П. Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1998. – 198 с.
2.7.7 Колемаев В.А., Калинина В.Н. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высшее образование, 2001. – 302 с.

2.8Учебные пособия:

2.8.1 Карточки с заданиями и методическими указаниями по выполнению практических работ.
2.8.2 Методические указания и индивидуальные варианты заданий для выполнения расчетно-графических работ.

4. Учебно-методическая (технологическая) карта дисциплины

Номер недели	Номер темы	Вопросы, изучаемые на лекции	Занятия		Используемые наглядные и методические пособия	Самостоятельная работа студентов		Форма контроля
			Практические	Лабораторные		Содержание	Часы	
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2.2.1	2.3.1	-	2.8.1	2.4.1	56	ко
2			2.3.2	-				
3			2.3.3	-				ко
4	2	2.2.2	2.3.4	-				
5			2.3.5	-				ко
6			2.3.6	-				
7			2.3.7	-				ко
8			2.3.8	-				
9	3	2.2.3	2.3.9	-				ко
10			2.3.10	-				
11			2.3.11	-				ко
12			2.3.12	-				
13			2.3.13	-				ко
14	4	2.2.4	2.3.14	-				
15			2.3.15	-				ко
16			2.3.16	-				
17			2.3.17	-				ко, сб.
18			2.3.18	-				

Содержание лекционного курса

Тема 1. События и вероятность: понятие случайного события; классическое, статистическое, геометрическое определения вероятности; аксиоматический подход к вероятности; условная вероятность; схема испытаний Бернулли – 6 ч.

I. Случайные события

1. Случайное событие

Человека окружает мир событий. Он часто замечает такой факт: одни события при реализации данного комплекса условий непременно происходят, другие же могут произойти, а могут и не произойти.

Случайным событием называется такой исход наблюдения или эксперимента, который при реализации данного комплекса условий может произойти, а может не произойти.

2. Пространство элементарных исходов. Операции над событиями

Пространством элементарных исходов Ω («омега») называется множество, содержащее все возможные результаты данного случайного эксперимента, из которых в эксперименте происходит ровно один. Элементы этого множества называют *элементарными исходами* и обозначают буквой ω («омега») с индексами или без.

Событиями мы будем называть подмножества множества Ω. Говорят, что в результате эксперимента *произошло событие* $A \subseteq \Omega$, если в эксперименте произошел один из элементарных исходов, входящих в множество A.

Замечание. Вообще говоря, можно назвать событиями не обязательно все подмножества множества Ω, а лишь множества из некоторого набора подмножеств.

Пример 1. Один раз подбрасывается одна *игральная кость* (кубик). Самый разумный способ задать пространство элементарных исходов таков: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, элементарные исходы здесь соответствуют здесь числу выпавших очков.

Примеры событий: $A = \{1, 2\}$ – выпало одно или два очка, $A = \{1, 3, 5\}$ – выпало нечетное число очков.

Пример 2. Два раза подбрасывается одна *игральная кость* (кубик). Или, что то же самое, один раз подбрасывается две игральные кости. Как мы увидим в дальнейшем, здесь самый разумный способ задать пространство элементарных исходов – считать результатом эксперимента упорядоченную пару чисел (i, j), в которой $1 \le i, j \le 6$ и $i(j)$ есть число очков, выпавших при первом (втором) подбрасывании: $\Omega = \{(i, j)$, где $1 \le i, j \le 6\}$.

Примеры событий:

$A = \{(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6)\}$ – при первом подбрасывании выпало одно очко,

A = {(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)} – при двух подбрасываниях выпало одинаковое число очков.

Пример 3. На поверхность стола бросается монета. Результатом эксперимента можно считать координату центра монеты (если не безразличен угол поворота монеты, то можно добавить и величину этого угла). Пространство элементарных исходов – множество точек стола (во втором случае - множество пар $\{(x,\varphi)\}$, где $x\in \boldsymbol{R}^2$ – точка стола и $\varphi \in [0, 2\pi)$ – угол поворота). Число элементарных исходов такого эксперимента несчетно.

Пример 4. Монета подбрасывается до тех пор, пока не выпадет вверх орлом. Пространство элементарных исходов состоит из бесконечного, но счетного числа исходов: $\Omega=\{p, po, ppo, pppo, ppppo, pppppo, \ldots .\}$, где p и o обозначают выпадение решки и орла при одном подбрасывании, соответственно.

3. Достоверное и невозможное событие

Достоверным называется событие, которое обязательно происходит в результате эксперимента, то есть единственное событие, включающее все без исключения элементарные исходы - событие Ω.

Невозможным называется событие, которое не может произойти в результате эксперимента, то есть событие, не содержащее ни одного элементарного исхода («пустое множество» $\varnothing$). Заметим, что всегда $\varnothing\subset\Omega$.

4. Операции над событиями. Отношения между событиями

Пусть A и B – события. *Объединением* $A\cup B$ событий A и B называется событие, состоящее в том, что произошло либо A, либо B, либо оба события одновременно. На языке теории множеств $A\cup B$ есть множество, содержащее как элементарные исходы, входящие в A, так и элементарные исходы, входящие в B. *Пересечением* $A\cap B$ событий A и B называется событие, состоящее в том, что оба события A и B произошли одновременно. То есть $A\cap B$ есть множество, содержащее элементарные исходы, входящие одновременно в A и в B. *Дополнением* A/B события B до A называется событие, состоящее в том, что произошло событие A, но не произошло событие B. То есть A/B есть множество, содержащее элементарные исходы, входящие в A, но не входящие в B.

Противоположным (или *дополнительным*) к событию A называется событие $\overline{A}=\Omega/A$, состоящее в том, что событие A в результате эксперимента не произошло. Иначе говоря, $\overline{A}$ есть множество, содержащее элементарные исходы, не входящие в A.

События A и B называются *несовместными*, если $A\cap B=\varnothing$.

События $A_1, \ldots, A_n$ называются *попарно несовместными*, если для любых $i\neq j$, в которой $1\leq i, j\leq n$, события A_i и A_j несовместны.

Говорят, что событие A *влечет* событие B, и пишут $A\subseteq B$, если всегда, как только происходит событие A, происходит и событие B. На языке теории множеств это означает, что любой элементарный исход, входящий в А, одновременно входит и в событие B.

II. Комбинаторика

1. Общие правила комбинаторики

Комбинаторикой называется область математики, в которой изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из элементов, принадлежащих заданному множеству.

Правило суммы: Если некоторый объект A можно выбрать m способами, а объект B – k способами (не такими, как A), то объект «либо A, либо B» можно выбрать $m + k = n$ способами.

Правило произведения: Если объект A можно выбрать m способами, а после каждого такого выбора другой объект B можно выбрать (независимо от выбора объекта А) k способами, то пары объектов A и B можно выбрать $m \cdot k$ способами.

2. Генеральная совокупность без повторений. Выборки без повторений

Генеральная совокупность без повторений – это набор некоторого конечного числа различных элементов: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$.

Выборкой без повторений объема m ($m \leq n$) называется произвольная группа m элементов генеральной совокупности без повторений.

Минимальным признаком отличия одной выборки от другой может быть:

a) их различие по крайней мере одним элементом;

b) их различие порядком расположения элементов.

Размещениями без повторений из n элементов по m называются такие выборки, которые имея по m элементов, выбранных из числа данных n элементов генеральной совокупности без повторений, отличаются одна от другой либо составом элементов, либо порядком их расположения.

Число размещений без повторений определяется формулой

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Перестановками без повторений из n элементов называются размещения без повторений из n элементов по n, т. е. размещения, отличающиеся одно от другого только порядком расположения элементов.

Число перестановок без повторений определяется формулой:

$P_n = n!$.

Сочетаниями без повторений из n элементов по m называются такие размещения без повторений из n элементов по m элементов, которые одно от другого отличаются хотя бы одним элементом.

Число сочетаний без повторений определяется формулой:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

3. Генеральная совокупность с повторениями. Выборки с повторениями

Генеральная совокупность с повторениями – это набор элементов n различных классов, когда элементы, принадлежащие одному классу, считаются одинаковыми:

$$\underbrace{a, a, \ldots, a}_{\text{1-й класс}}\ \underbrace{b, b, \ldots, b}_{\text{2-й класс}}\ \underbrace{l, l, \ldots, l}_{\text{n-й класс}}$$

Число элементов в каждом из этих n классов неограниченное.

Выборкой с повторениями объема m называется произвольная группа m элементов генеральной совокупности с повторениями.

Минимальным признаком отличия одной выборки от другой может быть:
a) их различие по крайней мере одним элементом;
b) их различие порядком расположения элементов.

Размещениями с повторениями из элементов n классов по m называются такие выборки, которые имея по m элементов, выбранных из числа элементов данных n классов генеральной совокупности с повторениями, отличаются одна от другой либо составом элементов, либо порядком их расположения.

Число размещений с повторениями определяется формулой

$$\overline{A}_n^m = n^m.$$

Перестановками с повторениями по k элементов из n различных классов называются размещения с повторениями объема k, которые одно от другого отличаются только порядком расположения элементов, когда от i-го класса в каждой выборке участвует k_i элементов.

Число перестановок с повторениями определяется формулой:

$$P_{k_1;k_2;\ldots;k_n} = \frac{k!}{k_1!k_2!\ldots k_n!},$$

где $k=k_1+k_2+\ldots+k_n$.

Сочетаниями с повторениями из элементов n классов по m называются такие размещения с повторениями из элементов n классов по m, которые одно от другого отличаются хотя бы одним элементом.

Число сочетаний с повторениями определяется формулой:

$$\overline{C}_n^m = \frac{(m+n-1)!}{m!(n-1)!}.$$

III. Классическое, статистическое и геометрические определения вероятностей.

1. Классическое определение вероятности

Вероятностью случайного события A называется отношение числа m равновозможных элементарных событий, благоприятствующих этому событию, к числу n всех равновозможных элементарных событий пространства Ω, определяемого данным испытанием, т. е.

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Свойства вероятности:

1. $0 \le P(A) \le 1$;
2. $P(\varnothing) = 0$;
3. $P(\Omega) = 1$;
4. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$;
5. $P(A + B) = P(A) + P(B)$, если $AB = \varnothing$.

2. Статистическое определение вероятности

Относительной частотой события A называется величина, определяемая равенством

$$W(A) = \frac{m}{n},$$

где m – число испытаний, в которых событие A наступило, n – общее число произведенных испытаний. При статистическом определении в качестве вероятности события принимают его относительную частоту.

3. Геометрическое определение вероятности

Пусть пространство элементарных событий Ω представляет собой некоторую область плоскости. Тогда в качестве событий будем рассматривать области A, содержащиеся в Ω.

Вероятность попадания в область A точки, наудачу выбранной из области Ω, называется геометрической вероятностью события A и находится по формуле:

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)},$$

где $S(A)$ и $S(\Omega)$ площади областей A и Ω соответственно.

Случай, когда Ω представляет собой отрезок или трехмерную область, рассматривается аналогично.

IV. Теоремы сложения и умножения вероятностей

1. Вероятность появления несовместных событий

Теорема. Вероятность появления одного из двух несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:

$P(A + B) = P(A) + P(B)$.

Следствие. Вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:

$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$.

2. Полная группа событий

Теорема. Сумма вероятностей событий A_1, A_2, ..., A_n образующих полную группу, равна единице:

$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1.$

3. Противоположные события

Теорема. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице: $P(A) + P(\overline{A}) = 1.$

V. Условная вероятность

1. Условная вероятность

Условной вероятностью $P_A(B)$ называют вероятность события B, вычисленную в предположении, что событие A уже наступило ($P(A) > 0$), т. е.

$P_A(B) = P(AB) / P(A).$

2. Теорема умножения вероятностей

Теорема. Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое уже наступило:

$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B).$

Следствие. Вероятность совместного появления нескольких событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, причем вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие события уже появились:

$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P_{A1}(A_2) \cdot \ldots P_{A1\,A2\,\cdot \ldots \cdot An\text{-}1}(A_n).$

3. Независимые события. Теорема умножения для независимых событий

Событие B называют независимым от события A, если появление события A не изменяет вероятности события B, т. е. условная вероятность события B равна его безусловной вероятности:

$P_A(B) = P(B).$

Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий (теорема умножения независимых событий):

$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$

4. Вероятность появления хотя бы одного события

Несколько событий называют независимыми в совокупности (или просто независимыми), если независимы каждые два из них и независимы каждое событие и все возможные произведения остальных.

Теорема. Вероятность появления хотя бы одного из событий A_1, A_2, ..., A_n, независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятности противоположных событий $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \ldots, \overline{A}_n$.

5. Вероятность появления совместных событий

Теорема. Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

Следствие. Теорема может быть обобщена на любое конечное число совместных событий. Для тех совместных событий:

$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$.

VI. Формула полной вероятности. Формулы Бейеса

1. Формула полной вероятности

Пусть событие A может наступить при условии появления одного из несовместных событий B_1, B_2, …, B_n, которые образуют полную группу, причем $P(B_1)$, $P(B_2)$, …, $P(B_n)$ известны и $P(B_1) + P(B_2) + \ldots + P(B_n) = 1$, и пусть условные вероятности $P_{B1}(A)$, $P_{B2}(A)$, …, $P_{Bn}(A)$ известны.

Теорема. Вероятность события A, которое может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий B_1, B_2, …, B_n, образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события А:

$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B2}(A) + \ldots + P(B_n) \cdot \mathrm{P}_{\mathrm{Bn}}(A)$.

2. Вероятность гипотез. Формулы Бейеса

Пусть событие A может наступить при условии появления одного из несовместных событий (гипотез) B_1, B_2, …, B_n, которые образуют полную группу событий. Если событие A уже произошло, то вероятности гипотез могут быть переоценены по формулам Бейеса:

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i) \cdot P_A(B_i)}{P(A)} \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

где $P\ (A) = P(B_1) \cdot P_{B1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B2}(A) + \ldots + P(B_n) \cdot P_{Bn}(A)$.

VII. Независимые повторные испытания

1. Формула Бернулли

Пусть производятся n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A постоянна и равна p ($0<p<1$), а вероятность не наступления события A равна $q = 1 - p$. Тогда вероятность того, что событие A наступит ровно k раз, находится по формуле Бернулли:

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k},\ k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Вероятность того, что в n испытаниях событие наступит:

a) менее k раз, - находят по формуле $P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(k-1)$;
b) более k раз, - находят по формуле $P_n(k+1) + P_n(k+2) + \ldots + P_n(n)$;
c) не менее k раз, - находят по формуле $P_n(k) + P_n(k+1) + \ldots + P_n(n)$;
d) не более k раз, - находят по формуле $P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(k)$;
e) хотя бы один раз, - находят по формуле $P_n(k \geq 1) = 1 - q^n$;

f) не менее k_1 раз и не более k_2 раз, - находят по формуле $P_n(k_1 \le k \le k_2) = P_n(k_1) + ... + P_n(k_2)$.

Непосредственное применение формулы Бернулли при большом числе испытаний связано с громоздкими вычислениями. Поэтому, при больших n вместо нее, как правило, используют приближенные формулы Пуассона и Муавра-Лапласа.

2. Формула Пуассона

Если число испытаний n достаточно велико, а вероятность p достаточно мала (т. е. $p < 0{,}1$; $npq < 10$; $np=\lambda$), то вероятность $P_n(k)$ можно приближенно найти по формуле Пуассона:

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}.$$

3. Локальная теорема Лапласа

Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p ($0<p<1$), событие наступит ровно k раз (безразлично, в какой последовательности), приближенно равна (тем точнее, чем больше n)

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x),$$

где

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}.$$

Таблица функции $\varphi(x)$ для положительных значений x приведена в приложении 2; для отрицательных значений x пользуются этой же таблицей, т. к. функция $\varphi(x)$ четная, следовательно, $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

4. Интегральная теорема Лапласа

Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p ($0<p<1$), событие наступит не менее k_1 раз и не более k_2 раз, приближенно равна

$$P(k_1; k_2) = \Phi(x'') - \Phi(x'),$$

где

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$ - функция Лапласа,

$$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Таблица функции Лапласа для положительных значений x ($0 \le x \le 5$) приведена в приложении 2; для значений $x > 5$ полагают $\Phi(x)=0{,}5$. Для отрицательных значений x пользуются этой же таблицей, учитывая, что функция Лапласа нечетная, т. е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

5. Отклонение относительной частоты от постоянной вероятности в независимых испытаниях

Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события A постоянна и равна p ($0<p<1$), абсолютная величина отклонения относительной частоты появления события от вероятности появления события не превысит положительного числа ε, приближенно равна удвоенной функции Лапласа при $x = \varepsilon\sqrt{\dfrac{n}{pq}}$:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

6. Наивероятнейшее число появлений события в независимых испытаниях

Число k_0 (наступления события в независимых испытаниях в каждом из, которых вероятность появления события равна p) называют наивероятнейшим, если вероятность того, что событие наступит в этих испытаниях k_0 раз, превышает (или не меньше) вероятности остальных возможных исходов испытаний.

Наивероятнейшее число k_0, определяют из неравенства

$$np - q \le k_0 < np + p,$$

причем:

a) если число np - q – дробное, то существует одно наивероятнейшее число k_0;

b) если число np - q – целое, то существует два наивероятнейших числа, а именно k_0 и $k_0 + 1$;

c) если число np – целое, то существует два наивероятнейших числа, а именно $k_0 = np$.

Тема 2. Случайные величины: понятие случайной величины; конечные величины и их числовые характеристики; функция распределения; непрерывные случайные величины и их числовые характеристики; нормальное распределение – 10 ч.

I. Дискретные случайные величины

1. Случайная величина (СВ). Функция распределения СВ

Случайной называют величину, которая в результате испытания примет одно и только одно возможное значение, наперед не известное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены.

Используя теоретико-множественную трактовку, можно дать более строгое определение: случайная величина X есть числовая функция, определенная на пространстве элементарных событий Ω, т. е. СВ X каждому элементарному событию ω ставит в соответствие действительное число $X=X(\omega)$, $\omega\in \Omega$.

Случайная величина задается законом распределения. Закон распределения СВ − любое правило (таблица, функция или график), которое позволяет находить вероятности того, что данная СВ примет конкретное значение или попадет в заданный интервал. Если СВ X задана законом распределения, то говорят, что она распределена по этому закону.

Универсальным способом задания закона распределения СВ X является функция распределения. Функцией распределения СВ X называется функция $F(x)$, которая для $\forall\ x \in \boldsymbol{R}$ равна вероятности события $\{X< x\}$, т. е. $F(x) = P(X< x)$.

Свойства функции распределения:

1. $0 \le F(x) \le 1$;
2. $F(x)$ − неубывающая функция, т. е. $F(x_1) \ge F(x_2)$, если $x_1 \ge x_2$;
3. $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$;
4. $F(x)$ − непрерывна слева в любой точке x, т. е. $F(x - 0) = F(x)$, $x \in \boldsymbol{R}$;
5. $P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$.

2. Дискретная случайная величина (ДСВ)

Дискретной называют СВ, возможные значения которой, есть отдельные изолированные числа, которые эта величина принимает с определенными вероятностями. Число возможных значений ДСВ может быть конечным или бесконечным (счетным).

Законом распределения ДСВ называется перечень ее возможных значений и соответствующих им вероятностей. Закон распределения ДСВ X может быть задан в виде таблицы (ряда распределения), первая строка которой содержит возможные значения x_i, а вторая – вероятности p_i:

X	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

где $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Графически ряд распределения изображают в виде многоугольника распределения (полигона), для чего в прямоугольной системе координат строят точки $M_i(x_i; p_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ (x_i – возможные значения X, p_i – соответствующие вероятности), и соединяют их отрезками прямых.

Функция распределения ДСВ имеет вид

$F(x) = \Sigma\, p_i$,

где суммирование ведется по всем индексам i, для которых $x_i < x$.

3. Основные законы распределения ДСВ

<table>
<tr><th>Закон распределения</th><th>Формула</th><th colspan="2">Условия</th></tr>
<tr><td>Биномиальное</td><td>$P_n(X=k)=C_n^k\cdot p^k\cdot q^{n-k}$</td><td rowspan="3">Производятся n независимых испытаний, вероятность появления каждого постоянна и равна p ($0<p<1$), а вероятность не наступления равна $q=1-p$. k – значение СВ X.</td><td>В n испытаниях событие A произошло k раз</td></tr>
<tr><td>Распределение Пуассона</td><td>$P_n(X=k)=\dfrac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda}$</td><td>В n испытаниях событие A произошло k раз. $\lambda=np,\ n\to\infty$, $p\to 0$</td></tr>
<tr><td>Геометрическое распределение</td><td>$P(X=k)=p\cdot q^{k-1}$</td><td>Испытания проводятся до первого появления события A. k – количество проведенных испытаний.</td></tr>
<tr><td>Гипергеометрическое</td><td>$P(X=k)=\dfrac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$</td><td colspan="2">Среди N элементов имеется M элементов с заданными качествами. Отбирают n изделий, среди которых k с заданными свойствами.</td></tr>
<tr><td>Равномерное</td><td>$P(X=k)=\dfrac{1}{n}$</td><td colspan="2">Рассматривается в случае одного испытания, элементарные исходы которого равновозможны. k – значение СВ X.</td></tr>
</table>

4. Схема решения задач на составление ряда распределения ДСВ

1) Определить СВ в рассматриваемой задаче.
2) Перечислить все возможные значения СВ.
3) Определить закон распределения вероятностей СВ согласно условию задачи.
4) Найти вероятности возможных значений СВ по соответствующей формуле.
5) Выполнить проверку $\sum\limits_i p_i = 1$.

5. Числовые характеристики ДСВ

Закон распределения полностью характеризует СВ. Часто закон распределения неизвестен и приходится ограничиваться меньшими сведениями, т. е.

числами, которые описывают СВ суммарно. Такие числа называют числовыми характеристиками СВ. К числу важных характеристик относятся:
a) Математическое ожидание (или среднее значение) $M(X)$ ДСВ X называется сумма произведений всех ее возможных значений x_i на их соответствующие вероятности:

$$M(X) = \sum_i x_i p_i .$$

Если ДСВ принимает конечное число значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то ее математическое ожидание находится по формуле

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i .$$

Если же ДСВ принимает счетное число значений, то

$$M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i ,$$

при этом математическое ожидание существует, если ряд в правой части этой формулы абсолютно сходится.
b) Дисперсия (рассеяние) ДСВ X – математическое ожидание квадрата отклонения СВ от ее математического ожидания:

$$D(X) = M(X - M(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - M(X)\right)^2 \cdot p_i .$$

Часто для вычисления дисперсии используется формула:

$$D(X) = M(X)^2 - M^2(X) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i\right)^2 \cdot p_i - M^2(X) .$$

c) Среднее квадратическое отклонение СВ X называется число $\sigma(X)$, определяемое равенством $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

II. Непрерывные случайные величины

1. Понятие непрерывной СВ

Случайная величина X называется непрерывной, если ее функция распределения $F(X)$ непрерывна на всей числовой оси.

Для непрерывной СВ вероятность отдельного значения равна нулю:

$P(X=x) = 0, \ \forall x \in \boldsymbol{R}$.

Поэтому для непрерывной СВ имеем:

$$P(a \le X < b) = \mathrm{P}(a < X < b) = P(a < X \le b) = P(a \le X \le b) = F(b) - F(a).$$

2. Плотность распределения непрерывной СВ

Плотность распределения вероятностей непрерывной СВ X называются функцию $f(x)$ − первую производную от функции распределения $F(X)$, т. е. $f(x) = F'(X)$.

Свойства плотности распределения:

1. $f(x) \ge 0$;

2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$;

3. $P(a \le X \le b) = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx$;

4. $F(X) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$;

5. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$.

График плотности распределения $f(x)$ называется кривой распределения.

3. Числовые характеристики непрерывных СВ

Математическим ожиданием непрерывной СВ X с плотностью вероятности $f(x)$ называют величину несобственного интеграла (если он сходится)

$$M(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx.$$

Дисперсией непрерывной СВ X, математическое ожидание которой $M(X)=a$ и функция $f(x)$ является ее плотностью вероятности, называются величина несобственного интеграла (если он сходится)

$$D(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^2 \cdot f(x)dx$$

или

$$D(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)dx - a^2 .$$

Математическое ожидание и дисперсия непрерывной СВ имеют те же свойства, что и математическое ожидание и дисперсия дискретной СВ.

Для непрерывных СВ X среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$ определяется, как и для ДСВ, формулой

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} .$$

Начальным моментом порядка k ($k = 0, 1, 2, \ldots$) СВ X называется число ν_k, определяемое по формуле

$$\nu_k = M(X^k) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^k \cdot f(x)dx .$$

Центральным моментом порядка k СВ X называется число μ_k, определяемое по формуле

$$\mu_k = M(X - a)^k = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^k \cdot f(x)dx .$$

Коэффициент асимметрии («скошенности»), или асимметрия СВ X есть величина

$$A = \frac{\mu_3}{\sigma^3(X)}.$$

Коэффициент эксцесса («островершинности»), или эксцесс СВ X есть величина

$$E = \frac{\mu_4}{\sigma^4(X)} - 3.$$

Мода непрерывной СВ X с плотностью $f(x)$ есть то ее значение $M_0(X)$, при котором функция $f(x)$ достигает максимума.

Медиана СВ X (обозначение $M_e(X)$) − есть такое ее значение x_p, для которого одинаково вероятно, окажется ли СВ X меньше x_p или больше x_p, т. е.

$P(X< x_p) = P(X> x_p) = ½$.

Квантилью уровня p СВ X называется число x_p, удовлетворяющее уравнению $P(X< x_p) = p$.

4. Важнейшие распределения непрерывных СВ

Распределение	Плотность вероятности	Числовые характеристики
Равномерное	$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, при\, x \in [a;b], \\ 0, \quad при\, x \notin [a;b]. \end{cases}$	$M(X) = \dfrac{a+b}{2}, D(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}.$
Показательное (экспоненциальное)	$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x}, при\, x \geq 0, \\ 0, \quad при\, x < 0. \end{cases}$	$M(X) = \dfrac{1}{\lambda}, D(X) = \dfrac{1}{\lambda^2},$ $\sigma(X) = \dfrac{1}{\lambda}.$
Нормальное	$f(x) = \dfrac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$	$a = M(X), \sigma = \sigma(X),$ $D(X) = \sigma^2.$

5. Нормальная кривая

График плотности нормального распределения $f(x) = \dfrac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ называют нормальной кривой (кривой Гаусса) см. рисунок 2.

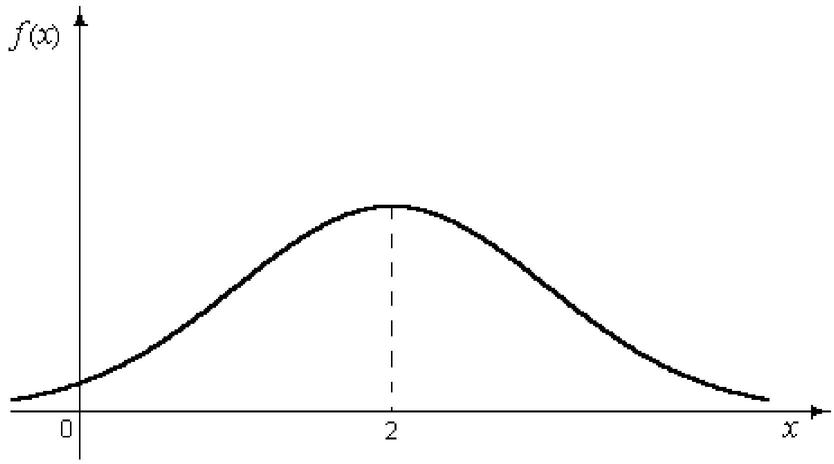


Рисунок 2.

1. Функция определена на всей оси *x*.
2. Нормальная кривая расположена над осью О*x*.
3. Ось О*x* служит горизонтальной асимптотой графика.
4. При $x = a$ функция имеет максимум, равный $1/\left(\sigma\sqrt{2\pi}\right)$.
5. График функции симметричен относительно примой $x = a$.
6. Точки графика $\left(a-\sigma, 1/\left(\sigma\sqrt{2\pi e}\right)\right)$ и $\left(a+\sigma, 1/\left(\sigma\sqrt{2\pi e}\right)\right)$ являются точками перегиба.

Изменение величины параметра *a* (математического ожидания) не изменяет формы нормальной кривой, а приводит лишь к ее сдвигу вдоль оси О*x*: вправо, если *a* возрастает, и влево, если *a* убывает.

С возрастанием σ максимальная ордината нормальной кривой убывает, а сама кривая становится более пологой, т. е. сжимается к оси О*x*; при убывании σ нормальная кривая становится более «островершинной» и растягивается в положительном направлении оси О*y*.

При любых значениях параметров *a* и σ площадь, ограниченная нормальной кривой и осью О*x*, остается равной единице.

При $a = 0$ и $\sigma = 1$ нормальную кривую $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ называют нормированной.

6. Вероятность попадания в заданный интервал нормальной СВ

Если СВ *X* задана плотностью распределения *f*(*x*), то вероятность того, что *X* примет значение, принадлежащее интервалу $(\alpha; \beta)$, такова:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-z^2/2}dz$ – функция Лапласа, значение которой находят по таблице (приложение 3).

7. Вычисление вероятности заданного отклонения

Вероятность того, что отклонение нормально распределенной СВ X по абсолютной величине меньше заданного положительного числа δ, вычисляется по формуле:

$$P(|X-a|<\delta)=2\Phi(\delta/\sigma).$$

8. Правило трех сигм

Если $\delta = 3\sigma$, то

$$P(|X-a|<3\sigma)=2\Phi(3\sigma/\sigma)=2\Phi(3)=2\cdot 0{,}49865=0{,}9973.$$

Другими словами, вероятность того, что абсолютная величина отклонения превысит утроенное среднее квадратическое отклонение, очень мала, а именно равна 0,0027, т. е. лишь в 0,27% случаев так может произойти. Такие события, исходя из принципа невозможности маловероятных событий, можно считать практически невозможными. В этом и состоит сущность правила трех сигм: если СВ распределена нормально, то абсолютная величина ее отклонения от математического ожидания не превосходит утроенного среднего квадратического отклонения.

На практике правило трех сигм применяется следующим образом: если распределение изучаемой СВ неизвестно, но условие, указанное в приведенном правиле, выполняется, то есть основание предполагать, что изучаемая величина распределена нормально, в противном случае она не распределена нормально.

9. Центральная предельная теорема

Если СВ X представляет собой сумму очень большого числа взаимно независимых СВ, влияние каждой из которых на всю сумму ничтожно мало, то X имеет распределение, близкое к нормальному.

III. Системы двух случайных величин

1. Закон распределения двумерной случайной величины

Двумерной называют случайную величину (X,Y), возможные значения которой есть пары чисел (x, y). Составляющие X и Y, рассматриваемые одновременно, образуют систему двух СВ (случайных величин).

Двумерную СВ (X,Y) геометрически можно истолковать либо как случайную точку $M(X,Y)$ на плоскости Oxy (т. е. как точку со случайными координатами) либо как случайный вектор $\vec{OM}$.

Дискретной называют двумерную величину, составляющие которой дискретны.

Непрерывной называют двумерную величину, составляющие которой непрерывны.

Законом распределения вероятностей двумерной СВ называют соответствие между возможными значениями и их вероятностями.

Закон распределения дискретной двумерной СВ может быть задан:

a) в виде таблицы с двойным входом, содержащей возможные значения и их вероятности;

b) аналитически, например в виде функции распределения.

Функцией распределения вероятностей двумерной СВ (X,Y) называют функцию $F(x,y)$, определяющую для каждой пары чисел (x, y) вероятность того, что X примет значение, меньшее x, и при этом x, Y примет значение, меньшее y: $F(x,y)=P(X<x,\ Y<y)$.

Геометрически это равенство можно истолковать так: $F(x,y)$ есть вероятность того, случайная точка (X,Y) попадет в бесконечный квадрант с вершиной (x, y), расположенный левее и ниже этой вершины.

Иногда вместо термина «функция распределения» используют термин «интегральная функция».

Функция распределения обладает следующими свойствами:

1. Значения функции распределения удовлетворяют двойному неравенству: $0 \le F(x,y) \le 1$.
2. $F(X,Y)$ есть неубывающая функция по каждому аргументу, т. е.

$$F(x_2, y) \ge F(x_1, y), если\, x_2 > x_1;$$

$$F(x, y_2) \ge F(x, y_1), если\, y_2 > y_1.$$

3. Имеют место предельные соотношения:

a) $F(-\infty, y) = 0$,

b) $F(x, -\infty) = 0$,

c) $F(-\infty, -\infty) = 0$,

d) $F(\infty, \infty) = 1$.

4. a) При $y = \infty$ функция распределения системы становится функцией распределения составляющей X: $F(x, \infty) = F_1(x)$.

b) При $x = \infty$ функция распределения системы становится функцией распределения составляющей Y: $F(\infty, y) = F_2(y)$.

Используя функцию распределения, можно найти вероятность попадания СВ в прямоугольник $x_1<X<x_2$, $y_1<Y<y_2$:

$$P(x_1 \le X < x_2, y_1 \le Y < y_2) = [F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2)] - [F(x_2, y_1) - F(x_1, y_1)].$$

Плотностью совместного распределения вероятностей $f(x, y)$ двумерной непрерывной СВ (X,Y) называют вторую смешанную частную производную от функции распределения:

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}.$$

Иногда вместо термина «двумерная плотность вероятности» используют термин «дифференциальная функция системы».

Плотность совместного распределения можно рассматривать как предел отношения вероятности попадания случайной точки в прямоугольник со сторонами Δx и Δy к площади этого прямоугольника, когда обе стороны его стремятся к нулю; геометрически ее можно истолковать как поверхность, которую называют поверхностью распределения.

Зная плотность распределения, можно найти функцию распределения по формуле:

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(x,y)dxdy.$$

Вероятность попадания случайной точки (X,Y) в область D определяется равенством

$$P[(X,Y)\subset D]=\iint_{(D)} f(x,y)dxdy.$$

Двумерная плотность вероятности обладает следующими свойствами:

1. Двумерная плотность вероятности неотрицательна, т. е. $f(x, y)\geq 0$.
2. Двойной несобственный интеграл с бесконечными пределами от двумерной плотности равен единице: $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy=1$.

В частности, если все возможные значения (X,Y) принадлежат конечной области D , то $\int\int_{(D)} f(x,y)dxdy=1$.

2. Условные законы распределения вероятностей составляющих дискретной двумерной СВ

Пусть дана дискретная двумерная СВ (X,Y). Пусть возможные значения составляющих таковы: x_i; y_j ($i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, m$).

Условным распределением составляющей X при $Y=y_j$ называют совокупность условных вероятностей $p(x_1/y_j)$, $p(x_2/y_j)$, …, $p(x_n/y_j)$, вычисленных в предположении, что событие $Y=y_j$ (j имеет одно и то же значение при всех значениях X) уже наступило.

Аналогично определяется условное распределение составляющей Y.

Условные вероятности составляющих X и Y вычисляют соответственно по формулам $p(x_i/y_j)=p(x_i,y_j)/p(y_j)$, $p(y_j/x_i)=p(x_i,y_j)/p(x_i)$.

Для контроля вычислений целесообразно убедиться, что сумма вероятностей условного распределения равна единице, т. е. при фиксированном y_j имеет место

$$\sum_{i=1} p(x_i / y_j) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i, y_j) / p(y_j) = p(y_j) / p(y_j) = 1,$$

а при фиксированном x_i вытекает

$$\sum_{j=1}^{m} p(y_j / x_i) = 1.$$

3. Отыскание плотностей и условных законов распределения составляющих непрерывной двумерной СВ

Плотность распределения одной из составляющих равна несобственному интегралу с бесконечными пределами от плотности совместного распределения системы, причем переменная интегрирования соответствует другой составляющей:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy, \quad f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx.$$

Здесь предполагается, что возможные значения каждой из составляющих принадлежат всей числовой оси; если же возможные значения принадлежат конечному интервалу, то в качестве пределов интегрирования принимают соответствующие конечные числа.

Условной плотностью распределения составляющей X при заданном значении Y=y называют отношение плотности совместного распределения системы к плотности распределения составляющей Y:

$$\varphi(x / y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)} = \frac{f(x, y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx},$$

где $f_2(x) \neq 0$.

Аналогично определяется условная плотность распределения составляющей Y:

$$\varphi(y / x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)} = \frac{f(x, y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy},$$

где $f_1(x) \neq 0$.

Если условные плотности распределения СВ X и Y равны их безусловным плотностям, то такие величины независимы и имеет место равенство:

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y).$$

Теорема умножения плотностей распределения:

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f(y / x) = f_2(y) \cdot f(x / y).$$

Равномерным называют распределение двумерной непрерывной СВ (X,Y), если в области, которой принадлежит все возможные значения (x,y), плотность совместного распределения вероятностей сохраняет постоянное значение.

4. Числовые характеристики непрерывной системы двух СВ

Зная плотности распределения составляющих X и Y непрерывной двумерной СВ (X,Y), можно найти их математические ожидания и дисперсии:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_1(x)dx\,,\ M(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_2(y)dy\,;$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^2 \cdot f_1(x) \cdot dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_1(x)dx - [M(X)]^2\,;$$

$$D(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} [y - M(Y)]^2 \cdot f_2(y) \cdot dy = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_2(y)dy - [M(Y)]^2\,.$$

Иногда удобнее использовать формулы, содержащие двумерную плотность вероятности (двойные интегралы берутся по области возможных значений системы):

$$M(X) = \iint x \cdot f(x,y)dxdy\,,\ M(Y) = \iint y \cdot f(x,y)dxdy\,;$$

$$D(X) = \iint [x - M(X)]^2 f(x,y)dxdy = \iint x^2 f(x,y)dxdy - [M(X)]^2\ .$$

$$D(Y) = \iint [y - M(Y)]^2 f(x,y)dxdy = \iint y^2 f(x,y)dxdy - [M(Y)]^2\ .$$

Начальным моментом $\nu_{k,\,s}$ порядка k+s системы (X,Y) называют математическое ожидание произведения $X^k Y^s$:

$$\nu_{k,\,s} = M[X^k Y^s].$$

В частности,

$$\nu_{1,0} = M(X)\,,\ \nu_{0,1} = M(Y)\,.$$

Центральным моментом $\mu_{k,s}$ порядка k+s системы (X,Y) называют математическое ожидание произведения отклонений соответственно k-ой и s-ой степеней:

$$\mu_{k,s} = M\{[X - M(X)]^k \cdot [Y - M(Y)]^s\}\,.$$

В частности,

$$\mu_{1,0} = M[X - M(X)] = 0\,,\ \mu_{0,1} = M[Y - M(Y)] = 0\,;$$

$$\mu_{2,0} = M[X - M(X)]^2 = D(X)\,,\ \mu_{0,2} = M[Y - M(Y)]^2 = D(Y)\,.$$

Корреляционным моментом μ_{xy} системы (X,Y) называют центральный момент $\mu_{1,1}$ порядка 1+1:

$$\mu_{xy} = M\{[X - M(X)] \cdot [Y - M(Y)]\}\,.$$

Коэффициентом корреляции величин X и Y называют отношение корреляционного момента к произведению средних квадратических отклонений этих величин:

$$r_{xy} = \mu_{xy} / (\sigma_x \sigma_y)\,.$$

Коэффициент корреляции – безразмерная величина, характеризующая степень линейной зависимости случайных величин X и Y. Чем ближе абсолютная величина коэффициента корреляции к единице, тем связь сильнее; чем ближе абсолютная величина коэффициента корреляции к нулю, тем связь слабее.

Свойства коэффициента корреляции

1. $-1 \le r_{xy} \le 1$;
2. Если X и Y – независимые СВ, то $r_{xy} = 0$;
3. Если СВ X и Y связаны линейной зависимостью $Y = aX + b$, $a \ne 0$, то $|r_{xy}| = 1$;
4. Если $|r_{xy}| = 1$, то СВ X и Y связаны линейной функциональной зависимостью.

Коррелированными называют две СВ, если их корреляционный момент отличен от нуля.

Некоррелированными называют две СВ, если их корреляционный момент равен нулю.

Две коррелированные величины также и зависимы; если две величины зависимы, то они могут быть как коррелированными, так и некоррелированными. Из независимости двух величин следует их некоррелированность, но из некоррелированности еще нельзя сделать вывод о независимости этих величин (для нормально распределенных величин из некоррелированности этих величин вытекает их независимость).

Для непрерывных величин X и Y корреляционный момент может быть найден по формулам:

$$\mu_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[x - M(X)] \cdot [y - M(Y)] f(x, y)dxdy,$$

$$\mu_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x, y)dxdy - M(X)M(Y).$$

Тема 3. Точечные и интервальные оценки: основные понятия; точечные оценки; некоторые статистические распределения; интервальные оценки – 10 ч

I. Элементы математической статистики

1. Задачи математической статистики

Мы приступаем к изучению элементов математической статистики, в которой разрабатываются научно обоснованные методы сбора статистических данных и их обработки. Установление закономерностей, которым подчинены массовые случайные явления, основано на изучении методами теории вероятностей статистических данных – результатов наблюдений.

Первая задача математической статистики – указать способы сбора и группировки статистических сведений, полученных в результате специально поставленных экспериментов.

Вторая задача математической статистики – разработать методы анализа статистических данных в зависимости от целей исследования. Сюда относятся:

a) оценка неизвестной вероятности события; оценка неизвестной функции распределения; оценка параметров распределения, вид которого известен; оценка зависимости случайной величины от одной или нескольких случайных величин и др.;

b) проверка статистических гипотез о виде неизвестного распределения или о величине параметров распределения, вид которого известен.

Современная математическая статистика разрабатывает способы определения числа необходимых испытаний до начала исследования (планирования эксперимента), в ходе исследования (последовательный анализ) и решает многие другие задачи. Современную математическую статистику определяют как науку о принятии решений в условиях неопределенности.

Итак, задача математической статистики состоит в создании методов сбора и обработки статистических данных для получения научных и практических выводов.

2. Генеральная совокупность и выборка

Пусть требуется изучить совокупность однородных объектов относительно некоторого *качественного* или *количественного признака*, характеризующего эти объекты. Например, если имеется партия деталей, то качественным признаком может служить стандартность детали, а количественным – контролируемый размер детали.

Лучше всего произвести сплошное обследование, т. е. изучить каждый объект. Однако в большинстве случаев по разным причинам это сделать невозможно. Препятствовать сплошному обследованию может большое число объектов, недоступность их. Если, например, нужно знать среднюю глубину воронки при взрыве снаряда из опытной партии, то, производя сплошное обследование, мы уничтожим всю партию.

Если сплошное обследование невозможно, то из всей совокупности выбирают для изучения часть объектов.

Статистическая совокупность, из которой отбирают часть объектов, называется *генеральной совокупностью.*

Множество объектов, случайно отобранных из генеральной совокупности, называют *выборкой.*

Число объектов генеральной совокупности и выборки называют соответственно *объемом* генеральной совокупности и *объемом* выборки.

Пример. Плоды одного дерева (200 штук) обследуют на наличие специфического для данного сорта вкуса. Для этого отбирают 10 шт. Здесь 200 – объем генеральной совокупности, а 10 – объем выборки.

Если выборку отбирают по одному объекту, который обследуют и снова возвращают в генеральную совокупность, то выборка называется *повторной*.

Если объекты выборки уже не возвращаются в генеральную совокупность, то выборка называется *бесповторной.*

На практике чаще используется бесповторная выборка. Если объем выборки составляет небольшую долю объема генеральной совокупности, то разница между повторной и бесповторной выборками незначительна.

Свойства объектов выборки должны правильно отражать свойства генеральной совокупности, или, как говорят, выборка должна быть *репрезентативной* (представительной). Считается, что выборка репрезентативна, если все объекты генеральной совокупности имеют одинаковую вероятность попасть в выборку, т. е. выбор производится случайно. Например, для того чтобы оценить будущий урожай, можно сделать выборку из генеральной совокупности еще не созревших плодов и исследовать их характеристики (массу, качество и пр.). Если вся выборка будет сделана с одного дерева, то она не будет репрезентативной. Репрезентативная выборка должна состоять из случайно выбранных плодов со случайных деревьев.

3. Статистическое распределение выборки. Полигон. Гистограмма

Пусть из генеральной совокупности извлечена выборка, причем x_1 наблюдалось n_1 раз, x_2 - n_2 раз, …, x_k – n_k раз и $n_1+n_2+\ldots+n_k=n$ – объем выборки. Наблюдаемые значения x_1, x_2, …, x_k называют *вариантами*, а последовательность вариант, записанная в возрастающем порядке, - *вариационным рядом*. Числа наблюдений $n_1,n_2,\ldots, n_k$ называют *частотами*, а их отношения к объему выборки $n_1/n = p_1^{8}$, $n_2/n = p_{2}^{8}$, …, $n_k/n = p_k^{8}$ - *относительными частотами*. Сумма относительных частот равна единице: $p_1^* + p_2^* + \ldots\ p_k^* = 1$.

Статистическим распределением выборки называют перечень вариант и соответствующих им частот или относительных частот.

Статистическое распределение можно задать также в виде последовательности интервалов и соответствующих им частот (непрерывное распределение). В качестве частоты, соответствующей интервалу, принимают сумму частот вариант, попавших в этот интервал.

Замечание. В теории вероятностей под *распределением* понимают соответствие между возможными значениями случайной величины и их вероятностями, а в математической статистике – соответствие между наблюдаемыми вариантами и их частотами, или относительными частотами.

Пример. Задано распределение частот выборки объема n=20.

x_i	2	6	12
n_i	3	10	7

Написать распределение относительных частот.

Решение. Найдем относительные частоты, для чего разделим частоты на объем выборки:

p_1^*=3/20=0,15; p_2^*=10/20=0,5; p_3^*=7/20=0,35.

Напишем распределение относительных частот.

x_i	2	6	12
p_i*	0,15	0,5	0,35

Контроль: 0,15+0,5+0,35=1.

4. Эмпирическая функция распределения

Пусть известно статистическое распределение частот количественного признака X. Введем обозначения: n_x –число наблюдений, при которых наблюдалось значение признака, меньшее x; n – общее число наблюдений (объем выборки). Относительная частота события $X<x$ равна n_x/n. Если x изменяется, то, вообще говоря, изменяется и относительная частота, т. е. Относительная частота n_x/n есть функция от x. Так как эта функция находится эмпирическим (опытным) путем, то ее называют эмпирической.

Эмпирической функцией распределения (функцией распределения выборки) называют функцию $F^*(x)$, определяющую для каждого значения x относительную частоту события $X<x$:

$$F^*(x)= n_x/n,$$

где n_x – число вариант, меньших x; n – объем выборки.

В отличие от эмпирической функции распределения выборки функцию распределения $F(x)$ генеральной совокупности называют *теоретической функцией распределения*. Различие между эмпирической и теоретической функциями состоит в том, что теоретическая функция $F(x)$ определяет вероятность события $X<x$, а эмпирическая функция $F^*(x)$ определяет относительную частоту этого же события. Из теоремы Бернулли следует, что при больших n числа $F^*(x)$ и $F(x)$ мало отличаются одно от другого, т. е.

$$Lim\, P\left[\left|F(x) - F^*(x)\right| < \varepsilon\right] = 1, (\varepsilon > 0).$$

Уже отсюда следует целесообразность использования эмпирической функции распределения выборки для приближенного представления теоретической (интегральной) функции распределения генеральной совокупности.

Такое заключение подтверждается и тем, что $F^*(x)$ обладает всеми свойствами $F(x)$. Итак, эмпирическая функция распределения выборки служит для оценки теоретической функции распределения генеральной совокупности.

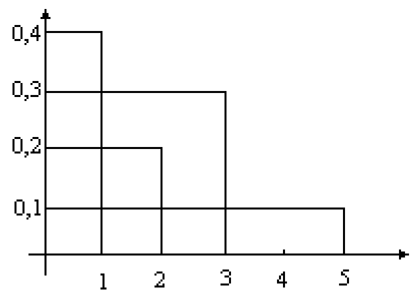
Полигон и гистограмма. Для наглядности строят различные графики статистического распределения и, в частности, полигон и гистограмму.

Полигоном частот (*относительных* частот) называют ломаную, отрезки которой соединяют точки (x_1; n_1), (x_2; n_2), …, (x_k; n_k) ((x_1; p_1^*), (x_2; p_2^*), …, (x_k; p_k^*)).

Для построения полигона частот на оси абсцисс откладывают варианты x_i, а на оси ординат – соответствующие им частоты n_i. Точки (x_i; n_i) соединяют отрезками прямых и получают полигон частот. Аналогично строят полигон относительных частот.

Пример. На рисунке изображен полигон относительных частот следующего распределения

x_i	1	2	3	5
p_i*	0,4	0,2	0,3	0,1



Полигоном обычно пользуются в случае небольшого числа вариант. В случае большого числа вариант и в случае непрерывного признака целесообразно строить гистограмму. Для чего интервал, в котором заключены все наблюдаемые значения признака, разбивают на несколько частичных интервалов длиной h и находят для каждого частичного интервала n_i – сумму частот вариант, попавших в i – й интервал.

Гистограммой частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиною h, а высоты равны отношению ${n_i}/{n}$ (плотность частоты).

Для построения гистограммы частот на оси абсцисс откладывают частичные интервалы, а над ними проводят отрезки, параллельные оси абсцисс на расстоянии ${n_i}/{h}$.

Площадь i – го частичного прямоугольника равна ${h n_i}/{h} = n_{ii}$ - сумме частот вариант i – го интервала; следовательно, *площадь гистограммы частот равна сумме всех частот, т. е. объему выборки.*

Аналогично для гистограммы относительных частот.

Пример. На рисунке изображена гистограмма непрерывного распределения объема n=100, приведенного в следующей таблице:

Частичный интервал h	Сумма частот вариант частичного интервала n_i	n_i/h
5-10	4	0,8
10-15	6	1,2
15-20	16	3,2
20-25	36	7,2
25-30	24	4,8
30-35	10	2
35-40	4	0,8

II. Оценки параметров генеральной совокупности по ее выборке

1. Выборка как набор случайных величин

Пусть имеется некоторая генеральная совокупность, каждый объект которой наделен количественным признаком X. При случайном извлечении объекта из генеральной совокупности становится известным значение x признака X этого объекта. Таким образом, мы можем рассматривать извлечение объекта из генеральной совокупности как испытание, X – как случайную величину, а x – как одно из возможных значений X.

Допустим, что из теоретических соображений удалось установить, к какому типу распределений относится признак X. Естественно, возникает задача оценки (приближенного нахождения) параметров, которыми определяется это распределение. Например, если известно, что изучаемый признак распределен в генеральной совокупности нормально, то необходимо оценить, т. е. приближенно найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение, так как эти два параметра полностью определяют нормальное распределение.

Обычно в распоряжении исследователя имеются лишь данные выборки генеральной совокупности, например, значения количественного признака x_1, x_2, …, x_n, полученные в результате n наблюдений (здесь и далее наблюдения предполагаются независимыми). Через эти данные и выражают оцениваемый параметр.

Опытные значения признака X можно рассматривать и как значения разных случайных величин X_1, X_2, …, X_n с тем же распределением, что и X, и, следовательно, с теми же числовыми характеристиками, которые имеет X. Значит, $M(X_i)= M(X)$ и $D(X_i)= D(X)$. Величины X_1, X_2, …, X_n можно считать независимыми в силу независимости наблюдений. Значения x_1, x_2, …, x_n в этом случае *называют реализациями* случайных величин X_1, X_2, …, X_n. Отсюда и из предыдущего следует, что найти оценку неизвестного параметра – значит найти функцию от наблюдаемых случайных величин X_1, X_2, …, X_n, которая и дает приближенное значение оцениваемого параметра.

2. Генеральная и выборочная средние. Методы их расчета

Пусть изучается дискретная генеральная совокупность объема N относительно количественного признака X.

Генеральной средней $\bar{x}_r$ (или a) называется среднее арифметическое значение признака генеральной совокупности.

Если все значения x_1, x_2, …, x_N признака генеральнеой совокупности объема N различны, то

$$\bar{x}_r = \frac{1}{N}\left(x_1 + x_2 + \ldots + x_N\right)$$

Если же значения признака x_1, x_2, …, x_k имеют соответственно частоты N_1, N_2, …, N_k, причем $N_1 + N_2 + \ldots + N_k = N$, то

$$\bar{x}_r = \frac{1}{N}\left(x_1N_1 + x_2N_2 + \ldots + x_kN_k\right)$$

или

$$\bar{x}_r = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} x_iN_i\ . \qquad (1)$$

Как уже отмечалось, извлечение объекта из генеральной совокупности есть наблюдение случайной величины X.

Пусть все значения x_1, x_2, …, x_N различны. Так как каждый объект может быть извлечен с одной и той же вероятностью $1/N$, то

$$M(X) = x_1 \cdot \frac{1}{N} + x_2 \cdot \frac{1}{N} + \ldots + x_N \cdot \frac{1}{N} = \bar{x}_r,$$

т. е.

$$M(X) = \bar{x}_r. \qquad (2)$$

Такой же итог следует, если значения x_1, x_2, …, x_k имеют соответственно частоты N_1, N_2, …, N_k.

В случае непрерывного распределения признака X по определению полагают $\bar{x}_r = M(X)$.

Пусть для изучения генеральной совокупности относительно количественного признака X произведена выборка объема n.

Выборочной средней $\bar{x}_B$ называется среднее арифметическое значений признака выборочной совокупности

Если все значения x_1, x_2, …, x_n признака выборки объема n различны, то

$$\bar{x}_B = \frac{1}{n}\left(x_1 + x_2 + \ldots + x_n\right). \qquad (3)$$

Если же значения признака x_1, x_2, …, x_k имеют соответственно частоты n_1, n_2, …, n_k, причем $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, то

$$\bar{x}_B = \frac{1}{n}\left(x_1 n_1 + x_2 n_2 + \ldots + x_k n_k\right)$$

или

$$\bar{x}_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i\,. \qquad (4)$$

Пример. Выборочным путем были получены следующие данные о массе 20 морских свинок при рождении (г) 30, 30, 25, 32, 30, 25, 33, 32, 29, 28, 27, 36, 31, 34, 30, 23, 28, 31, 36, 30. Найти выборочную среднюю $\bar{x}_B$.

Согласно формуле (4)

$$\bar{x}_B = \frac{1}{20}\left(30\cdot 5 + 25\cdot 2 + 32\cdot 2 + 33 + 29 + 28\cdot 2 + 27 + 36\cdot 2 + 31\cdot 2 + 34 + 23\right) = 30$$

Итак, $\bar{x}_B = 30г$.

Здесь для облегчения вычислений можно использовать калькулятор. То же следует иметь в виду и в ряде других примеров этой главы.

Ниже, не уменьшая общности рассуждений, будем считать значения x_1, x_2, …, x_n признака различными.

Разумеется, выборочная средняя для различных выборок того же объема n из той же генеральной совокупности будет получаться, вообще говоря, различной. И это не удивительно – ведь извлечение i – го по счету объекта есть наблюдение случайной величины X_i, а их среднее арифметическое

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\left(X_1 + X_2 + ... + X_n\right)$$

есть тоже случайная величина.

Таким образом, всевозможные могущие получиться выборочные средние есть возможные значения случайной величины $\overline{X}$, которая называется *выборочной средней случайной величиной.*

Найдем $M(\overline{X})$, пользуясь тем, что $M(X_i) = M(X)$.

С учетом свойств математического ожидания получаем

$$M(\overline{X}) = M\left[\frac{1}{n}\left(X_1 + X_2 + ... + X_n\right)\right] = \frac{1}{n}\left[M\left(X_1\right) + M\left(X_2\right) + ... + M\left(X_n\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{n}\left[M\left(X\right) + M\left(X\right) + ... + M\left(X\right)\right] = \frac{1}{n}na = a$$

Итак, $M(\overline{X})$ (математическое ожидание выборочной средней) совпадает с a (генеральной средней).

Найдем $D(\overline{X})$. Т. к. $D(X_i) = D(X)$ и X_1, X_2, …, X_n независимы, то согласно свойствам дисперсии получаем:

$$D(\overline{X}) = D[1/n(X_1 + X_2 + ... + X_n)] = 1/n^2[D(X_1 + D(X_2) + ... + D(X_n)] =$$

$$= 1/n^2[D(X) + D(X) + ... + D(X)] = 1/n^2 \cdot nD(X) = D(X)/n,$$

т. е. $D(\overline{X}) = D(X)/n$. (5)

Если варианта x_i – большие числа, то для облнгчения вычисления выборочной средней применяют следующий прием. Пусть C – константа.

Т. к.

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n}(x_i - C) + nC,$$

то формула (3) преобразуется к виду

$$\overline{x_в} = C + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - C). \qquad (6)$$

Константу C (так называемый, ложный нуль) берут такой, чтобы, во-первых, разности x_i – C были небольшими и, во-вторых, число C было по возможности «круглым».

3. Генеральная и выборочная дисперсии.

Для того, чтобы охарактеризовать рассеяние значений количественного признака X генеральной совокупности вокруг своего среднего значения, вводят сводную характеристику – генеральную дисперсию.

Генеральной дисперсией $D_г$ называют среднее арифметическое квадратов отклонений значений признака генеральной совокупности от их среднего значения $\overline{x}_г$.

Если все значения x_1, x_2, …, x_N признака генеральной совокупности объема N различны, то

$$Dr = \left(\sum_{i=1}^{N} \left(x_i - \overline{x}_r \right)^2 / N \right).$$

Если же значения признака $x_1, x_2, \ldots, x_k$ имеют соответственно частоты $N_1, N_2, \ldots, N_k$, причем $N_1 + N_2 + \ldots + N_k = N$, то

$$Dr = \left(\sum_{i=1}^{k} N_i \left(x_i - \overline{x}_r \right)^2 / N \right),$$

т. е. генеральная дисперсия есть средняя взвешенная квадратов отклонений с весами, равными соответствующим частотам.

Кроме дисперсии для характеристики рассеяния значений признака генеральной совокупности вокруг своего среднего значения пользуются сводной характеристикой – средним квадратическим отклонением.

Генеральной средним квадратическим отклонением (стандартом) называют квадратный корень из генеральной дисперсии:

$$\sigma_r = \sqrt{D_r}\ .$$

Для того, чтобы охарактеризовать рассеяние наблюдаемых значений количественного признака выборки вокруг своего среднего значения $\overline{x}_в$, вводят сводную характеристику – выборочную дисперсию.

Выборочной дисперсией $D_в$ называют среднее арифметическое квадратов отклонения наблюдаемых значений признака от их среднего значения $\overline{x}_в$.

Если все значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ признака выборки объема n различны, то

$$D_в = \left(\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \overline{x}_в \right)^2 / n \right).$$

Если же значения признака $x_1, x_2, \ldots, x_k$ имеют соответственно частоты $n_1, n_2, \ldots, n_k$, причем $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, то

$$D_в = \left(\sum_{i=1}^{k} n_i \left(x_i - \overline{x}_в \right)^2 / n \right),$$

т. е. выборочная дисперсия есть средняя взвешенная квадратов отклонений с весами, равными соответствующим частотам.

Кроме дисперсии для характстеристики рассеяния значений признака выборочной совокупности вокруг своего среднего значения пользуются сводной характеристикой – средним квадратическим отклонением.

Выборочным средним квадратическим отклонением (стандартом) называют квадратный корень из выборочной дисперсии:

$$\sigma_в = \sqrt{D_в}\ .$$

Выборочную дисперсию, рассматриваемую как СВ, будем обозначать $\widetilde{S}^2$:

$$\widetilde{S}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2\ .$$

Теорема. Математическое ожидание выборочной дисперсии равно:

$$M(\widetilde{S}^2) = \frac{n-1}{n} D_r .$$

Если варианты x_i – большие числа, то для облнгчения вычисления выборочной дисперсии формулу преобразуют к следующему виду:

$$D_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - C)^2 - (\overline{x}_в - C)^2 ,$$

где C – ложный нуль.

4. Несмещенные, эффективные и состоятельные оценки

Уже говорилось о том, что одной из задач статистики является оценка параметров распределения СВ X по данным выборки. Для того чтобы статитические оценки давали «хорошие» приближения оцениваемых параметров, они должны удовлетворять определенным требованиям.

Пусть θ* - статистическая оценка неизвестного параметра θ теоретического распределения. Допустим, что по выборке объема n найдена оценка θ^*_1. Повторим опыт, т. е. извлечем из генеральной совокупности другую выборку того же объема и по ее данным найдем оценку θ^*_2. Повторяя опыт многократно, получим числа θ^*_1, θ^*_2, …, θ^*_k, которые, вообще говоря, различны между собой. Таким образом, оценку θ* можно рассматривать как случайную величину, а числа θ^*_1, θ^*_2, …, θ^*_k – как ее возможныезначения.

Представим себе, что оценка θ* дает приближенное значение θ с избытком; тогда каждое найденное по данным выборок число θ^*_i (i=1, 2, …, k) больше истинного значения θ. Ясно, что в этом случае и математическое ожидание (среднее значение) СВ θ* больше, чем θ, т. е. $M(\theta^*) > \theta$. Очевидно, что если θ* дает оценку с недостатком, то $M(\theta^*) < \theta$.

Т. о., использование статистической оценки, математическое ожидание которой не равно оцениваемому параметру, привело бы к систематическим (одного знака) ошибкам. По этой причине естественно потребовать, чтобы математическое ожидание оценки θ*было равно оцениваемому параметру. Хотя соблюдение этого требования не устранит ошибок (одни значения θ* больше, а другие меньше θ), однако ошибки разных знаков будут встречаться одинаково часто. Иными словами, соблюдение требований $M(\theta^*)= \theta$ гарантирует от получения систематических ошибок.

Несмещенной называют статистическую оценку θ*, математическое ожидание которой равно оцениваемому параметру θ при любом объеме выборки, т. е.

$M(\theta^*)= \theta$.

Смещенной называют оценку, математическое ожидание которой не равно оцениваемому параметру.

Однако было бы ошибочным считать, что несмещенная оценка всегда дает хорошее приближение оцениваемого параметра. Действительно, возможные значения θ* могут быть сильно рассеяны вокруг своего среднего значения, т. е. дисперсия D(θ*) может быть значительной. В этом случае найденная по данным одной выборки оценка, найденная по данным одной выборки оценка, например θ^*_1, может оказаться весьма удаленнойот среднего значения $\overline{\theta^*}$, а значит, и от самого оцениваaемого параметра θ; приняв θ^*_1 в качестве приближенного значения θ, мы ждопустили бы большую ошибку. Если же потребовать, чтобы дисперсия θ^* была малой, то возможность допустить большую ошибку будет исключена. По этой причине к статистической оценке предъявляется требование эффективности.

Эффективной называют статистическую оценку, котроая (при заданном объеме выборки n) имеет наименьшую возможную дисперсию.

При рассмотрении выборок большого объема (n велико) к статистическим оценкам предъявляется требование состоятельности.

Состоятельной называют статистическую оценку, которая при $n \to \infty$ стремится по вероятности к оцениваемому параметру. Напрмер, если дисперсия несмещенной оценки при $n \to \infty$ стремится к нулю, то такая оценка оказывается и состоятельной.

Тема 4. Статистические гипотезы: статистические гипотезы; гипотезы о параметрах нормального распределения; гипотеза о функции распределения; однофакторный дисперсионный анализ – 10 ч.

I. Введение в теорию случайных процессов и теорию массового обслуживания. СП и их виды

1. Дисперсия суммы СВ

Если СВ *X*, *Y* зависимы, то дисперсия их суммы и разности записывается в следующем виде:

$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y) \pm 2\operatorname{cov}(X, Y), \qquad (1)$$

где $\operatorname{cov}(X,Y) = M((X - M(X))(Y - M(Y)) = M(XY) - M(X)M(Y)$ (2) - коэффициент ковариации (совместной вариации) СВ *X*, *Y*.

1. Случайные процессы и их виды

Случайным процессом называется семейство СВ $X(t, \omega)$, заданных на одном и том же пространстве элементарных событий Ω и зависящих от параметра $t \in T$.

В большинстве практических приложений параметр t трактуется как время. Далее будем придерживаться именно такой трактовки.

При фиксированном $t=t_0$ $X(t_0, \omega)$ представляет собой обычную СВ (*сечение* процесса в момент t_0), при фиксированном ω $X(t, \omega)$ является траекторией случайного процесса.

Математическим ожиданием СП называется траектория математических ожиданий составляющих этот процесс случайных величин

$$a(t) = M(X(t, \omega)). \qquad (3)$$

Дисперсией СП называется траектория дисперсий составляющих этот процесс случайных величин

$$\sigma^2(t) = D(X(t, \omega). \qquad (4)$$

Ковариационной (автоковариационной) *функцией* СП называется функция двух переменных t, s $\in$ T, значения которой представляют собой коэффициенты ковариации сечений процесса в соответствующие моменты времени:

$$B(t,s) = \operatorname{cov}[X(t,\omega)X(s,\omega)]. \qquad (5)$$

Далее аргумент ω опустим, но он будет подразумеваться по умолчанию.

Конечномерным распределением СП в моменты t_1, …, t_n называется распределение многомерной СВ, составленной из сечений в моменты t_1, …, t_n:

$$F_{t1,\ldots,tn}(x_1,\ldots,x_n) = P\{X(t_1) < x_1,\ldots,X(t_n) < x_n\}. \qquad (6)$$

Процесс называется *регулярным*, если его поведение полностью определяется конечномерными распределениями и они согласованы. Под согласованностью понимается следующее: любые два распределения в моменты $(t_1,\ldots,t_k,\bar{t}_{k+1},\ldots,\bar{t}_n)$ и $(t_1,\ldots,t_k,\bar{\bar{t}}_{k+1},\ldots,\bar{\bar{t}}_n)$ приводят к одному и тому же распределению в моменты $(t_1,\ldots,t_k)$. Здесь $t_1,\ldots,t_k$ для удобства записи выбраны следующими подряд, однако имеется в виду, что они могут чередоваться с $\bar{t}_i,\bar{\bar{t}}_j$.

Процесс называется *процессом с непрерывным* (*дискретным*) *временем*, если множество T непрерывно, т. е. T=[0, ∞) (дискретно, т. е. T=), 1, 2, … .).

Процесс называется *процессом с непрерывными* (*дискретными*) *значениями*, если составляющие его СВ принимают непрерывные (дискретные) значения.

Процесс является *процессом с независимыми значениями*, если *X*(t) не зависит от *X*(s) при t≠s, t, s $\in$ T.

Процесс называется *стационарным в широком смысле*, если его математическое ожидание и дисперсия не зависят от времени, а ковариационная функция зависит только от разности моментов времени:

$$B(t,t+s) = B(s). \qquad (7)$$

Процесс называется *стационарным в узком смысле*, если его конечномерные распределения инвариантны относительно сдвига по времени h>0:

$$F_{t1+h,\ldots,tn+h}(x_1,\ldots,x_n) = F_{t1,\ldots,tn}(x_1,\ldots,x_n). \qquad (8)$$

Из стационарности в узком смысле следует стационарность в широком смысле, но не наоборот.

Процесс называется *гауссовским*, если все его многомерные распределения являются нормальными.

Среди СП особое место занимают Марковские СП. *Марковские процессы* обладают следующим важным свойством: при известном настоящем их будущее не зависит от прошлого $(t_1<t_2<\ldots<t_n<s<t)$:

$$P\{X(t) < x / X(t_1) < x_1,\ldots,X(t_n) < x_n, X(s) < y\} = P\{X(t) < x / X(s) < y\} \qquad (9)$$

т. е. будущее поведение системы, описываемой марковским процессом, целиком определяется ее состоянием в последний из известных моментов времени.

II. Марковские СП с непрерывным временем и дискретным множеством состояний

Марковский процесс с непрерывным временем и дискретным множеством состояний составляет теоретическую основу для исследования реальных систем массового обслуживания. Под состоянием системы массового обслуживания понимается число требований (заявок) на обслуживание, находящихся в системе. Поэтому далее изучается марковский СП с непрерывным временем, который принимает значения i=0, 1, …, N, где N – максимальное число требований, которое может находиться в системе.

Для таких процессов марковское условие (9) запишется в следующей форме:

$$P\{X(t)=j/X(t_1)=i_1,...,X(t_n)=i_n,X(s)<i\}=P\{X(t)=j/X(s)=i\} \quad (10)$$

Вероятности в правой части (10) называют *переходными вероятностями* и обозначаются следующим образом:

$$p_{ij}(s,t)=P\{X(t)=j/X(s)=i\}, \quad (11)$$

$$\sum_{j=0}^{N} p_{ij}(s,t)=1.$$

Если переходные вероятности зависят только от разности моментов времени (т. е. только от длины интервала) $p_{ij}(s,t)=p_{ij}(t-s)$, то такой марковский процесс называется *однородным по времени*. Будем рассматривать только однородные марковские процессы.

Кроме того, исходя из поведения реальной системы массового обслуживания, будем считать, что на конечном интервале процесс может менять свое состояние не более чем счетное число раз, такие процессы называют *сепарабельными*. Т. о., траектории изучаемых процессов являются кусочно-постоянными (ступенчатыми).

По этим же соображениям будем рассматривать только *стохастически непрерывные* марковские СП, для которых при $s \to 0$

$$X(t+s) \Rightarrow X(t), \quad (12)$$

т. е. для любого ε

$$\lim_{s \to 0} P\{|X(t+s)-X(t)|>\varepsilon\}=0,$$

откуда следует:

$$\lim_{s \to 0} P\{X(t+s)\neq X(t)\}=0. \quad (13)$$

Из условия (13) и, следовательно, из условия стохастической непрерывности вытекает, что при $s \to 0$ и $i \neq j$

$$p_{ij}(t+s) \to p_{ij}(t),\ p_{ij}(s) \to 0. \quad (14)$$

Переходные вероятности удовлетворяют следующим уравнениям Колмогорова-Чепмена:

$$p_{ij}(t+s)\sum_{k=0}^{N} p_{ik}(t)p_{kj}(s). \quad (15)$$

Матрица, составленная из переходных вероятностей, называется *стохастической*:

$$P(t) = \left\| p_{ij}(t) \right\|, i, j = 0,1,\dots,N.$$

В матричном виде уравнения (15) выглядят так:

$$P(t+s) = P(t)P(s).$$

Стохастически непрерывные сепарабельные марковские процессы удовлетворяют следующим предельным соотношениям:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1 - p_{ij}(\Delta t)}{\Delta t} = \lambda_i, 1 - p_{ij}(\Delta t) = \lambda_i \Delta t + o(\Delta t), \qquad (16)$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_{ij}(\Delta t)}{\Delta t} = \lambda_{ij}, p_{ij}(\Delta t) = \lambda_{ij} \Delta t + o(\Delta t).$$

Постоянные λ_i называют плотностями вероятности выхода из состояния, а λ_{ij} – плотностями вероятности перехода из состояния в состояние.

Уравнения Колмогорова

Пользуясь соотношениями (16) для плотностей вероятности выхода из состояния и перехода из одного состояния в другое состояние, можно вывести дифференциальные уравнения для переходных вероятностей и для вероятностей состояний.

Прямая система уравнений Колмогорова

Пользуясь уравнениями Колмогорова-Чепмена и соотношениями (16), имеем:

$$p_{ij}(t+\Delta t) = \sum_{k=0}^{N} p_{ik}(t) p_{kj}(\Delta t) = (1 - \lambda_j \Delta t) p_{ij}(t) + \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{N} p_{ik}(t) \lambda_{kj} \Delta t + o(\Delta t) \quad (17)$$

поэтому

$$\frac{p_{ij}(t+\Delta t) - p_{ij}(t)}{\Delta t} = -\lambda_j p_{ij}(t) + \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{N} p_{ik}(t) \lambda_{kj} + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}.$$

Переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, окончательно получаем прямую систему уравнений Колмогорова:

$$\frac{dp_{ij}}{dt} = \sum_{k=0}^{N} p_{ik} \lambda_{kj}, \lambda_{ij} = -\lambda_j, i, j = 0,1,\dots,N. \qquad (18)$$

Обратная система уравнений Колмогорова

Если уравнения Колмогорова-Чепмена для переходных вероятностей записать в следующей форме

$$p_{ij}(t+\Delta t) = \sum_{k=0}^{N} p_{ik}(\Delta t) p_{kj}(t),$$

то аналогичным образом может быть получена обратная система уравнений Колмогорова

$$\frac{dp_{ij}}{dt} = \sum_{k=0}^{N} \lambda_{ik} p_{kj}. \qquad (19)$$

Уравнения Колмогорова для вероятностей состояний

Если задано начальное распределение вероятностей $q=(q_0,q_1,...,q_N)$, где $q_i = P\{X(0)=i\}, \sum_{i=0}^{N} q_i = 1$, то

$$p_j(t) = P\{X(t)=j\} = \sum_{i=0}^{N} q_i p_{ij}(t).$$

Умножая каждое из прямых уравнений Колмогорова (18) на q_i и складывая их, получим следующую систему уравнений для вероятностей состояний:

$$\frac{dp_j}{dt} = \sum_{k=0}^{N} p_k \lambda_{kj}, \qquad (19)$$

или в матричной форме

$$\frac{dp}{dt} = p\Lambda, p(0)=q,$$

где $p=(p_0,p_1,...,p_N)$ - вектор-строка вероятностей состояний.

Система уравнений (19) имеет стационарную точку, в которой $\frac{dp}{dt}=0$; в стационарной точке дифференциальные уравнения переходят в линейные алгебраические:

$$p\Lambda = 0. \qquad (20)$$

Определитель этой системы равен нулю, поскольку сумма его столбцов равна нулю, то система линейных алгебраических уравнений для стационарных вероятностей:

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{N} p_k \lambda_{kj} = 0, j = 0,1,...,N-1, \\ \sum_{k=0}^{N} p_k = 1. \end{cases} \qquad (21)$$

III. Понятие об имитации функционирования СМО

Как только не выполняется одно из предположений, сделанных выше для обеспечения аналитического исследования системы вплоть до получения формул для важнейших операционных характеристик, так приведенные формулы становятся, вообще говоря, неправильными.

Повторим эти предположения:

1. Входящий поток требований – простейший, при таком потоке время между приходом двух требований имеет показательный закон распределения с параметром λ;
2. все каналы обслуживающей системы – показательные с параметром μ;

3. система без приоритетов, т. е. все поступающие заявки обслуживаются в порядке очереди;
4. система однофазная, т. е. производится один вид обслуживания;
5. система разомкнутая.

Имеющиеся имитационные пакеты прикладных программ моделируют:

- Длительность обслуживания с любым законом распределения;
- Время между приходом заявок также с любым законом распределения;
- Процесс функционирования СМО при строго формализованном алгоритме такого функционирования.

Для имитации на ПЭВМ функционирования изучаемой СМО необходимо:

1. составить блок-схему и алгоритм функционирования СМО;
2. установить законы (с точным указанием параметров распределения) для промежутков времени между поступлением заявок во всех входящих потоках и для времени обслуживания каждого канала;
3. подобрать пакет прикладных программ, пригодный для имитации изучаемой системы;
4. описать на языке пользователя функционирование изучаемой системы;
5. ввести указанные сведения в программную систему и провести на ПЭВМ имитацию функционирования СМО, в результате чего будут получены оценки операционных характеристик, тем более точные, чем больше заявок во входящих потоках будет разыграно.

Практические занятия

Практическое занятие №1

Тема: Случайные события

Задания к практическому занятию

1. Какие из следующих событий достоверные:
A – «два попадания при трех выстрелах»;
B – «выплата рубля семью монетами»;
C – «наугад выбранное трехзначное число не больше 1000»;
E – «наугад выбранное число, составленное из цифр 1, 2, 3 без повторений меньше 400»?
2. Какие из следующих событий невозможные:
A – «опаздывание ленинградского экспресса в субботние дни»;
B – «появление 17 очков при бросании 3 игральных костей»;
C – «появление слова «мама» при случайном наборе букв а, а, м, м»;
E – «появление составленного из цифр 1, 23, 3, 7, 8 и кратного 9 числа при случайном однократном наборе указанных цифр»;
D – «появление составленного из цифр 1, 2, 3, 7, 8 и кратного 3 числа при произвольном однократном наборе указанных цифр»?
3. Укажите достоверные и невозможные события:
A – «выплата десяти рублей 4 монетами»;
B – «появление сразу 3 лайнеров над аэропортом»;
C – «попадание в мишень при 3 выстрелах»;
E – «появление в окошке счетчика трехзначного числа, составленного из цифр 1, 2, 3 и кратного 5».
4. Какие из событий являются частью другого события:
a. *A* – «попадание в мишень первым выстрелом»;
B – «попадание в мишень по меньшей мере одним из 4 выстрелов»;
C – «попадание точно в мишень одним из 2 выстрелов»;
E – «попадание в мишень не более чем 5 выстрелами»?
b. Мишень изображена на рисунке 1:

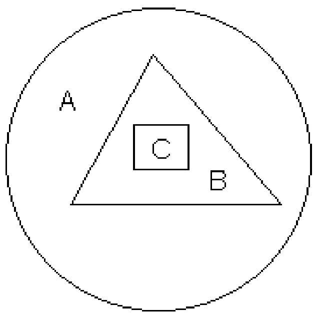


Рисунок 1.

A – «попадание в круг»;
B – «попадание в треугольник»;
C – «попадание в квадрат».

5. Событие A – «попадание в мишень первым выстрелом», событие B – «попадание в мишень вторым выстрелом». В чем состоит событие $A \cup B$?
6. Событие A – «ученик учится без троек», событие B – «ученик учится без двоек», событие C – «ученик не отличник». В чем состоит событие $A \cup B \cup C$?
7. Событие A – «лотерейный выигрыш 1 тыс.», событие B – «лотерейный выигрыш 2 тыс.», событие C – «лотерейный выигрыш 3 тыс.», событие D – «лотерейный выигрыш 4 тыс.». В чем состоит событие $A \cup B \cup C \cup D$?
8. Событие A – «появление двух орлов при подбрасывании двух монет», событие B – «появление орла и решки при подбрасывании двух монет». В чем состоит событие $A \cup B$?
9. Событие A – «попадание в мишень первым выстрелом», событие B – «попадание в мишень вторым выстрелом». В чем состоит событие $A \cap B$?
10. Событие А – «появление нечетного числа очков при бросании игральной кости», событие B – «не появление 3 очков при подбрасывании игральной кости», событие C – «не появление 5 очков при бросании игральной кости ». В чем состоят событие $A \cap B \cap C$, $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$?
11. Рассмотрев конкретные события A, B, C, убедитесь в том, что:
$A \cap B = B \cap A$; $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$; $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$; $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$; $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;
$(A \cup B) \cap (A \cup C) \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

При решении пользуйтесь геометрическим представлением событий и их соотношений.

Контрольные вопросы по теме

1. Что называют случайным событием
2. Приведите примеры случайных событий
3. Достоверные и невозможные случайные события
4. Действия над случайными событиями

Практическое занятие №2

Тема: Комбинаторика

Задания к практическому занятию

1. Сколькими способами можно расположить на шахматной доске 8 ладей так, чтобы они не могли взять друг друга?
2. В группе 25 студентов. Необходимо избрать старосту, заместителя старосты и культорга группы. Сколькими способами можно образовать эту руководящую тройку, если одно лицо может занимать только один пост?
3. Для полета на Марс необходимо укомплектовать следующий экипаж космического корабля: командир корабля, первый его помощник, второй помощник, два бортинженера и один врач. Командующая тройка может быть отобрана из числа 25 готовящихся к полету летчиков, два бортинженера – из числа 20 специалистов, в совершенстве знающих устройство космического корабля, а врач –

из числа 8 медиков. Сколькими способами можно укомплектовать экипаж исследователей космоса?

4. Сколько разных пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5 при условии, что ни одна цифра не повторяется?

5. Игрок сначала бросает белую игральную кость, потом черную. Сколько может быть случаев, когда число очков, появившихся на белой кости, больше числа очков, появившихся на черной?

6. Сколько разных трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5 при условии, что ни одна цифра не повторяется?

7. В одной арабской сказке речь идет о такой задаче. Вокруг костра сидят 12 разбойников. Каждый из них смертельно ненавидит двух ближайших соседей. С целью спрятать награбленное необходимо выделить 5 разбойников. Сколькими способами атаман может назначить пятерых так, чтобы между ними не было распрей?

8. В колоде 32 карты. Раздаются 3 карты. Сколько может быть случаев появления одного туза среди розданных карт?

9. Сколько можно составить трехзначных чисел из цифр 1, 2, 3, 4 и 5, если цифры могут повторяться?

10. На книжной полке плотно уставлено n книг. Сколькими способами можно взять с полки k книг при условии, что ни разу не будут вынуты рядом стоящие дети?

11. Докажите, что $C_n^m = C_n^{n-m}$.

Контрольные вопросы по теме

1. Что называют комбинаторикой?
2. Сформулируйте правила комбинаторики.
3. Что такое генеральная совокупность и выборка без повторений?
4. Дайте определения размещениям, перестановкам, сочетаниям без повторений и выведите для них формулы.
5. Что такое генеральная совокупность и выборка с повторениями?
6. Дайте определения размещениям, перестановкам, сочетаниям с повторениями и выведите для них формулы.

Практическое занятие №3

Тема: Классическое, статистическое и геометрические определения вероятностей.

Задачи к практическому занятию

1. Брошены две игральные кости. Найти вероятности следующих событий: a) сумма выпавших очков равна семи; b) сумма выпавших очков равна восьми, а разность – четырем; c) сумма выпавших очков равна восьми, если известно, что их разность равна четырем; d) сумма выпавших очков равна пяти, а произведение – четырем.

2. Куб, все грани которого окрашены, распилен на тысячу кубиков одинакового размера, которые затем тщательно перемешаны. Найти вероятность, что наудачу извлеченный кубик имеет окрашенных граней: a) одну; b) две; c) три.
3. Монета брошена два раза. Найти вероятность того, что хотя бы один раз появится «решка».
4. В коробке шесть одинаково занумерованных кубиков. Наудачу по одному извлекают все кубики. Найти вероятность того, что номера извлеченных кубиков появятся в возрастающем порядке.
5. Найти вероятность того, что при бросании трех игральных костей шестерка выпадет на одной (безразлично какой) кости, если на гранях двух других костей выпадут числа очков, не совпадающие между собой (и не равные шести)
6. В ящике имеется 15 деталей, среди которых 10 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает три детали. Найти вероятность того, что извлеченные детали окажутся окрашенными.
7. В ящике 100 деталей, из них 10 бракованных. Наудачу извлечены четыре детали. Найти вероятность того, что среди извлеченных деталей: a) нет бракованных; b) нет годных.
8. Набирая номер телефона, абонент забыл последние три цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.
9. В цехе работают шесть мужчин и четыре женщины. По табельным номерам наудачу отобраны семь человек. Найти вероятность того, что среди отобранных лиц окажутся три женщины.
10. В группе 12 студентов, среди которых 8 отличников. По списку наудачу отобраны 9 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных 5 отличников.
11. В коробке 5 одинаковых изделий, причем 3 из них окрашенные. Наудачу извлечены 2 изделия. Найти вероятность того, что среду двух извлеченных изделий окажутся: а) одно окрашенное изделие; б) два окрашенных изделия; в) хотя бы одно окрашенное изделие.
12. По цели произведено 20 выстрелов, при этом было зарегистрировано 18 попаданий. Найти относительную частоту попаданий в цель.
13. При испытаниях партии приборов относительная частота годных приборов оказалась равной 0,9. найти число годных приборов, если всего было проверено 200 штук.
14. На отрезке L длины 20 см помещен меньший отрезок l длины 10 см. найти вероятность того, что точка, наудачу поставленная на больший отрезок, попадет также и на меньший отрезок. Предполагается, что вероятность попадания пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения.
15. В круге радиуса R помещен меньший круг радиуса r. Найти вероятность того, что точка, наудачу поставленная внутри большого круга, попадет также и в малый круг. Предполагается, что вероятность попадания точки в круг пропорциональна его площади и не зависит от месторасположения.

16.Плоскость разграфлена прямыми параллельными линиями, находящимися друг от друга на расстоянии $2a$. На плоскость наудачу брошена монета радиуса $r < a$. Найти вероятность того, что монета не пересечет ни одной из линий.

Контрольные вопросы по теме

1. Что называется равновозможными элементарными событиями?
2. Что называется благоприятствующим событием?
3. Дайте классическое определение вероятностей.
4. Дайте статистическое определение вероятностей. Чем отличаются классическое и статистическое определения вероятностей?
5. Сформулируйте геометрическое определение вероятностей. Решите задачу Бюффона.

Практическое занятие №4

Тема: Теоремы сложения и умножения вероятностей

Задачи к практическому занятию

1. В ящике 10 деталей, из которых четыре окрашены. Сборщик наудачу взял три детали. Найти вероятность того, что хотя бы одна из взятых деталей окрашена.
2. Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сигнализатор сработает, равна 0,95 для первого сигнализатора и 0,9 для второго. Найти вероятность того, что при аварии сработает только один сигнализатор.
3. Вероятность одного попадания в цель при одном залпе из двух орудий равна 0,38. Найти вероятность поражения цели при одном выстреле первым из орудий, если известно, что для второго орудия эта вероятность равна 0,8.
4. Устройство состоит из трех элементов, работающих независимо. Вероятности безотказной работы (за время t) первого, второго и третьего элементов соответственно равны 0,6; 0,7; 0,8. Найти вероятности того, что за время t безотказно будут работать: a) только один элемент; b) только два элемента; c) все три элемента.
5. Вероятности того, что нужная сборщику деталь находится в первом, втором, третьем, четвертом ящике, соответственно равны 0,6; 0,7; 0,8; 0,9. Найти вероятности того, что деталь содержится: a) не более чем в трех ящиках; b) не менее чем в двух ящиках.
6. Вероятность попадания в мишень стрелком при одном выстреле равна 0,8. Сколько выстрелов должен произвести стрелок, чтобы с вероятностью, меньшей 0,4, можно было ожидать, что не будет ни одного промаха?
7. В круг радиуса R вписан правильный треугольник. Внутрь круга наудачу брошены четыре точки. Найти вероятности следующих событий: a) все четыре точки попадут внутрь треугольника; b) одна точка попадет внутрь треугольника и по одной точке попадет на каждый «малый» сегмент. Предполагается, что ве-

роятность попадания точки в фигуру пропорциональна площади фигуры и не зависит от ее расположения.

8. На стеллаже библиотеки в случайном порядке расставлено 15 учебников, причем пять из них в переплете. Библиотекарь берет наудачу три учебника. Найти вероятность того, что хотя бы один из взятых учебников окажется в переплете (событие A).

9. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,7, а для второго – 0,8. Найти вероятность того, что при одном залпе в мишень попадает только один из стрелков.

Контрольные вопросы по теме

1. Какие события называются несовместными?
2. Сформулируйте и докажите теорему о сумме несовместных событий, и следствия из нее.
3. Полная группа событий. Теорема о сумме вероятностей событий, образующих полную группу.
4. Дайте определение противоположных событий. Докажите теорему о сумме вероятностей противоположных событий

Практическое занятие №5

Тема: Условная вероятность

Задачи к практическому занятию

1. Среди 100 лотерейных билетов есть 5 выигрышных. Найти вероятность того, что 2 наудачу выбранные билета окажутся выигрышными.
2. В ящике 10 деталей, среди которых шесть окрашенных. Сборщик наудачу извлекает четыре детали. Найти вероятность того, что все извлеченные детали окажутся окрашенными.
3. Из стандартного набора домино (28 штук) берется наудачу одна кость. Какова вероятность того, что эта кость будет дублем (т. е. будет иметь вид 1-1, 4-4 и т. д.), если известно, что сумма очков на ней – четное число?
4. Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Найти вероятность того, что студент знает предложенные ему экзаменатором три вопроса.
5. По данным переписи населения (1891 г.) Англии и Уэльса установлено: темноглазые отцы и темноглазые сыновья (AB) составили 5% обследованных лиц, темноглазые отцы и светлоглазые сыновья ($A\overline{B}$) – 7,9%, светлоглазые отцы и темноглазые сыновья ($\overline{A}B$) – 8,9%, светлоглазые отцы и светлоглазые сыновья ($\overline{A}\overline{B}$) – 78,2%. Найти связь между цветом глаз отца и сына.
6. Устройство содержит два независимо работающих элемента. Вероятности отказа элементов соответственно равны 0,05 и 0,08. Найти вероятности отказа устройства, если для этого достаточно, чтобы отказал хотя бы один элемент.
7. Вероятность попадания в мишень каждым из двух стрелков равна 0,3. Стрелки стреляют по очереди, причем каждый должен сделать по два выстрела. Попавший в мишень первым получает приз. Найти вероятность того, что стрелки получат приз.

8. Вероятность хотя бы одного попадания в цель при четырех выстрелах равна 0, 9984. Найти вероятность попадания в цель при одном выстреле.
9. Для разрушения моста достаточно попадания одной авиационной бомбы. Найти вероятность того, что мост будет разрушен, если на него сбросить четыре бомбы, вероятности попадания которых соответственно равны: 0,3; 0,4; 0,6; 0,7.
10. В урне имеется пять шаров с номерами от 1 до 5. Наудачу по одному извлекают три шара без возвращения. Найти вероятности следующих событий: a) последовательно появятся шары с номерами 1, 4, 5; b) извлеченные шары будут иметь номера 1, 4, 5 независимо от того, в какой последовательности они появились.

Контрольные вопросы по теме

1. Дайте определение условной вероятности
2. Докажите теорему умножения вероятностей и сформулируйте следствие из нее.
3. Что такое независимые события, докажите теорему умножения для независимых событий.
4. Вероятность появления хотя бы одного события.
5. Какие события называются совместными.
6. Докажите теорему сложения вероятностей совместных событий.
7. Сформулируйте теорему сложения вероятностей совместных, независимых и зависимых событий

Практическое занятие №6

Тема: Формула полной вероятности. Формулы Бейеса

Задачи к практическому занятию

1. В урну, содержащую *n* шаров, опущен белый шар, после чего наудачу извлечен один шар. Найти вероятность того, что извлеченный шар окажется белым, если равновозможные предположения о первоначальном составе шаров (по цвету).
2. В пирамиде пять винтовок, три из которых снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,7. Найти вероятность того, что мишень будет поражена, если стрелок произведет один выстрел из наудачу взятой винтовки.
3. В пирамиде десять винтовок, четыре из которых снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,8. Стрелок поразил мишень из наудачу взятой винтовки. Что вероятнее: стрелок стрелял из винтовки с оптическим прицелом или без него?

4. В первой урне содержится 10 шаров, из них 8 белых; во второй урне 20 шаров, из них 4 белых. Из каждой урны наудачу извлекли по одному шару, а затем из этих двух шаров наудачу взят один шар. Найти вероятность того, что взят белый шар.

5. В каждой из трех урн содержится 6 черных и 4 белых шара. Из первой урны наудачу извлечен один шар и переложен во вторую урну, после чего из второй урны наудачу извлечен один шар и переложен в третью урну. Найти вероятность того, что шар, наудачу извлеченный из третьей урны, окажется белым.

6. В специализированную больницу поступают в среднем 50% больных с заболеванием *K*, 30% - с заболеванием *L*, 20% - с заболеванием *M*. Вероятность полного излечения болезни *K* равна 0,7; для болезней *L* и *M* эти вероятности соответственно равны 0,8 и 0,9. Больной, поступивший в больницу, был выписан здоровым. Найти вероятность того, что этот больной страдал заболеванием *K*.

7. Событие A может появиться при условии появления лишь одного из несовместных событий (гипотез) B_1, B_2, …, B_n, образующих полную группу событий. После появления события A были переоценены вероятности гипотез, т. е. были найдены условные вероятности $P_A(B_i)$ (i = 1, 2, …, n). Доказать, что $\sum_{i=1}^{n} P_A(B_i) = 1$.

8. Событие A может появиться при условии появления одного из несовместных событий (гипотез) B_1, B_2, …, B_n, образующих полную группу событий. После появления события A были переоценены вероятности гипотез, т. е. были найдены условные вероятности этих гипотез, причем оказалось, что $P_A(B_1) = 0,6$ и $P_A(B_2) = 0,3$. Чему равна условная вероятность $P_A(B_3)$ гипотезы B_3?

Контрольные вопросы по теме

1. Какие события образуют полную группу?
2. Дайте определение условной вероятности.
3. Выведите формулу полной вероятности.
4. Получите формулы Бейеса.

Практическое занятие №7

Тема: Независимые повторные испытания

Задания к практическому занятию

Вариант I

1. Десять человек пришли на избирательный участок и случайным образом отдали свои голоса за одного из пяти кандидатов в президенты. Какова вероятность того, что за первого по списку кандидата проголосовало 3 человека?

2. Некачественные изделия составляют 2% всей продукции цеха. Какова вероятность того, что среди восьми наудачу взятых изделий окажется: a) не более 5 некачественных изделий; b) два или три некачественных изделия.

3. Телефонная станция A, обслуживающая 2000 абонентов, соединяет их со станцией B. Устанавливать 2000 проводов от станции A до B нерационально. Сколько линий проводов необходимо провести от A до B, чтобы только один из сотни абонентов станции A, наугад выбравший момент разговора с абонентом станции B, нашел бы все линии занятыми? Вероятность того, что при случайном звонке линия занята, равна 1/30.
4. 10000 деталей произвольно распределяются по 9 ящикам. Какова вероятность того, что в первом ящике не менее 1100 и не более 1200 деталей?
5. Вероятность появления события в каждом из 900 независимых испытаний равна 0,5. найти вероятность того, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,02.
6. Прибор состоит из пяти независимо работающих элементов. Вероятность отказа элемента в момент включения прибора равна 0,2. Найти: a) наивероятнейшее число отказавших элементов; b) вероятность наивероятнейшего числа отказавших элементов; c) вероятность отказа прибора, если для этого достаточно, чтобы отказали хотя бы четыре элемента.

Вариант II

1. Вероятность выигрыша по билету лотереи «Золотой ключик» равна 0,125. Найти вероятность выиграть не менее чем по двум билетам из пяти.
2. Какова вероятность того, что среди 730 пассажиров поезда: a) пятеро родились 8 марта; b) трое родились 12 июля?
3. Чему равна вероятность p наступления события в каждом из 39 независимых испытаний. Если наивероятнейшее число наступлений события в этих испытаниях равно 25?
4. Игральную кость бросают 80 раз. Найти с вероятностью 0,99 границы, в которых будет заключено число m выпадений шестерки.
5. Игральную кость бросают 12000 раз. Какова вероятность того, что шестерка появится не менее 1900 и не более 2100 раз?
6. Вероятность отказа каждого прибора при испытании равна 0,2. Приборы испытываются независимо друг от друга. Что вероятнее: отказ 10 приборов при испытании 80, или отказ 15 при испытании120?

Вариант III

1. По статистике в городе N в среднем 10% заключенных браков в течение года заканчиваются разводом. Какова вероятность того, что из 8 случайно отобранных пар, заключивших брак, в течение года: a) ни одна пара не разведется; b) разведутся 2 пары?
2. Вероятность допустить ошибку при наборе некоторого текста, состоящего из 1200 знаков, равна 0,005. Найти вероятность того, что при наборе будет допущено: a) 6 ошибок; b) хотя бы одна ошибка.
3. Монета подбрасывается 2020 раз. Какова вероятность того, что орел выпадет 1000 раз?

4. Найдите такое число k, чтобы с вероятностью 0,9 можно было бы утверждать, что среди 900 новорожденных более k мальчиков. Вероятность рождения мальчика 0,515.
5. Отдел технического контроля проверяет 475 изделий на брак. Вероятность того, что изделие бракованное, равна 0,05. Найти с вероятностью 0,95 границы, в которых будет заключено число m бракованных изделий среди проверенных.
6. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,7. Найти число испытаний n, при котором наивероятнейшее число появлений события равно 20.

Вариант IV

1. Вероятность выхода на линию каждого из 18 такси равна 0,9. Какова вероятность нормальной работы таксопарка в течение дня, если для этого необходимо иметь на линии не менее 15 такси?
2. Вероятность выхода из строя одного элемента устройства, в течение t часов работы, равна 0,002. Какова вероятность того, что за время t из 1500 независимо работающих элементов выйдет из строя: a) 4 элемента; b) не более 3 элементов?
3. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,3. Найти число испытаний n, при котором наивероятнейшее число появлений события равно 30.
4. Вероятность появления события в каждом из 10000 независимых испытаний равна 0,75. Найти такое положительное число ε, чтобы с вероятностью 0,98 абсолютная величина отклонения относительной частоты появления события от его вероятности 0,75 не превысила ε.
5. Всхожесть семян данного сорта пшеницы составляет 70%. Найти вероятность того, что из 700 посаженных семян взойдут 500.
6. 70% продукции объединения «Вилия» высшего сорта. Какова вероятность того, что среди 1000 изделий этого объединения высшего сорта будет не менее 682 и не более 760 изделий?

Вариант V

1. В электричку из 4 вагонов садятся наудачу 8 пассажиров. Какова вероятность того, что в каждый вагон вошло по 2 человека?
2. Вероятность попадания в мишень стрелком примерно 0,001. Какова вероятность того, что при 5000 выстрелов будет не меньше трех попаданий?
3. В каждом из 1000 ящиков 5000 белых и столько же черных пуговиц. Из каждого ящика наугад вынимаются по 3 пуговицы. Какова вероятность, что число ящиков, из которых вынуты 3 пуговицы одного цвета, не меньше чем 220 и не больше чем 260?
4. В городе М из каждых 100 семей 85 имеют цветные телевизоры. какова вероятность того, что из 400 семей 340 имеют такие телевизоры?

5. Вероятность появления события в каждом из 900 независимых испытаний равна 0,5. Найти такое положительное число ε, чтобы с вероятностью 0,77 абсолютная величина отклонения относительной частоты появления события от его вероятности 0,5 не превысила ε.
6. Два стрелка одновременно стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,8, а для второго – 0,6. Найти наивероятнейшее число залпов, при которых оба стрелка попадут в мишень, если будет произведено 15 залпов.

Вариант VI

1. Считая, что в среднем 15% открывающихся малых предприятий становятся в течение года банкротами, найти вероятность того, что из 10 новых малых предприятий за это время банкротами станут: а) одно предприятие; b) более трех предприятий.
2. Какова вероятность того, что среди 500 наугад отобранных человек: а) пятеро родились 4 апреля; b) трое родились 12 июля; с) ни один не родился 22 сентября?
3. Найти наивероятнейшее число правильно набитых перфораторщицей перфокарт среди 19 перфокарт, если вероятность того, что перфокарта набита неверно, равна 0,1.
4. В урне содержатся белые и черные шары в отношении 4:1. После извлечения шара регистрируется его цвет и шар возвращается в урну. Чему равно наименьшее число извлечений n, при котором с вероятностью 0,95 можно ожидать, что абсолютная величина отклонения относительной частоты появления белого шара от его вероятности будет не более чем 0,01?
5. Вероятность появления положительного результата в каждом из n опытов равна 0,9. Сколько нужно произвести опытов, чтобы с вероятностью 0,98 можно было ожидать, что не менее 150 опытов дадут положительный результат?
6. Вероятность изготовления доброкачественного изделия равна 0,9. Найти вероятность того, что среди взятых наудачу 300 изделий 95% окажется доброкачественных.

Контрольные вопросы по теме

1. Дайте определение последовательности независимых испытаний.
2. Изложите схему Бернулли.
3. Докажите формулу Бернулли.
4. Сформулируйте локальную теорему Муавра – Лапласа.
5. Докажите теорему Пуассона.
6. Области применения теоремы Пуассона и локальной теоремы Муавра – Лапласа.

Практическое занятие №8

Контрольная работа

Практическое занятие №9

Тема: Дискретные случайные величины

Пример 1. В хлопке число длинных волокон составляет 80%. Построить ряд распределения числа длинных волокон среди 4 взятых наудачу волокон.

Решение: Дискретная случайная величина X – число длинных волокон . Возможные значения ДСВ X: 0, 1, 2, 3, 4. Проводимые испытания независимы. Каждое испытание имеет два исхода: событие A – взято длинное волокно, событие $\overline{A}$ – взято короткое волокно. Вероятность события A постоянна и равна p = 0,8. Следовательно, ДСВ имеет биномиальное распределение.

Найдем вероятности возможных значений ДСВ по формуле $P_n(X=k)=C_n^k\cdot p^k\cdot q^{n-k}$, где k – принимает значения 0, 1, 2, 3, 4, n = 4, q = 1 – 0,8 = 0,2. Полученные значения занесем в таблицу:

X	0	1	2	3	4
P	0,0016	0,0256	0,1536	0,4096	0,4096

Сделаем проверку:

$\Sigma\, p_i$ = 0,0016 + 0,0256 + 0,1536 + 0,4096 + 0,4096 = 1.

Пример 2. В команде 16 спортсменов, из которых 6 перворазрядников. Наудачу выбирают двух спортсменов. Построить ряд распределения числа перворазрядников среди выбранных.

Решение: Дискретная случайная величина X – число перворазрядников в выборке. Возможные значения ДСВ X: 0, 1, 2. ДСВ имеет гипергеометрическое распределение.

Найдем вероятности возможных значений ДСВ по формуле

$$P(X=k)=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n},$$

где k – принимает значения 0, 1, 2; n = 2; N = 16; M = 6.

Полученные значения занесем в таблицу:

X	0	1	2
P	3/8	4/8	1/8

Сделаем проверку:

$\Sigma\, p_i$ = 3/8 + 4/8 + 1/8 = 1.

Задания к практическому занятию

Вариант I

1. Дискретная случайная величина X задана таблицей распределения:

X	-3	-2	0	1	3
P	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

Вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P(X > 0)$, $P(|X| > 2)$.

2. Вероятность попадания из винтовки с оптическим прицелом в цель при одном выстреле равна ¾. Составить таблицу распределения числа попаданий при четырех выстрелах. Найти $M(X)$, $D(X)$, σ (X). Построить многоугольник распределения.
3. У спортсмена перворазрядника 4 патрона. Он стреляет по мишени, пока не попадет, или пока не кончатся патроны. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,8. Составить таблицу распределения числа выстрелов. Сколько раз в среднем придется стрелять спортсмену?
4. В ящике стола 5 синих карандашей и 3 желтых. Выбирают наудачу 3 карандаша. Составить таблицу распределения случайной величины X – числа желтых карандашей среди трех выбранных. Найти функцию распределения $F(x)$, построить ее график.
5. Найти среднее число страниц с опечатками, если книга содержит 1000 страниц, а вероятность опечатки на одной странице равна 0,05.

Вариант II

1. Дискретная случайная величина X задана таблицей распределения:

X	0	2	4	6	8
P	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

Вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P(X > 2)$, $P(X < 2)$.

12. По одному и тому же маршруту следуют три автобуса. Для каждого автобуса вероятность прибыть на конечную остановку по расписанию равна 0,8. Составить рад распределения числа автобусов, прибывших на конечную остановку по расписанию. Найти $M(X)$, $D(X)$, σ (X). Построить многоугольник распределения.
13. Жонглер в цирке, имея 5 колец, набрасывает их на колышек либо до первого попадания, либо до полного израсходования колец. Составить ряд распределения числа бросков. Сколько в среднем бросков придется сделать жонглеру?
14. В партии из шести лампочек имеется 2 бракованные. Наудачу отобраны четыре лампочки. Составить закон распределения числа бракованных лампочек среди отобранных. Найти функцию распределения $F(x)$, построить ее график.
15. Наладчик обслуживает в цехе 300 станков. Вероятность поломки в течение времени t на станке одинакова и равна 0,05. Каково среднее число поломок за время t?

Вариант III

1. Дискретная случайная величина X задана таблицей распределения:

X	1	2	3	4	5
P	0,4	0,3	0,1	0,1	0,1

Вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P(X > 0)$, $P(X^2 > 2)$.

2. Вероятность того, что студент найдет в библиотеке нужную ему книгу, равна 0,4. Построить ряд распределения числа библиотек, которые он может посетить, если ему доступны 4 библиотеки. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$. Построить многоугольник распределения.

3. Бросается игральная кость до первого выпадения шести очков. Составить ряд распределения числа бросков. Сколько раз в среднем придется бросать игральную кость?

4. На заводе имеется 15 инженеров, среди которых 2 женщины. Для дежурства на смену выходят 5 человек. Составить ряд распределения числа бракованных женщин, попавших в выборку. Найти функцию распределения $F(x)$, построить ее график.

5. АТС содержит 2000 одинаково надежных проводов, вероятность отказа для каждого из которых равна 0,005. Каково для данной АТС среднее число оказавших проводов?

Вариант IV

1. Дискретная случайная величина X задана таблицей распределения:

X	-3	-2	0	4	5
P	0,4	0,3	0,1	0,1	0,1

Вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P(X > 0)$, $P(X > 2)$.

2. Тест по математике содержит четыре вопроса. На каждый вопрос приведено 4 ответа, один из которых правильный. Ученик к тесту не готов и просто угадывает правильный ответ. Составить ряд распределения числа правильных ответов, данных учеником. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$. Построить многоугольник распределения.

3. Ребенок бросает мяч в корзину до первого попадания. Составить закон распределения числа бросков, если ребенок забрасывает мяч в корзину с вероятностью 0,6 и он может сделать не более 4 бросков. Сколько в среднем сделает броско ребенок?

4. Группа студентов, состоящая из 12 человек, среди которых семь девушек, распределяет по жребию 3 билета в театр. Составить закон распределения числа юношей, получивших билеты. Найти функцию распределения $F(x)$, построить ее график.

5. Производится 25 независимых опытов, в каждом из которых вероятность появления успеха равна 0,2. Найти дисперсию числа появления успеха в этих испытаниях.

Вариант V

2. Дискретная случайная величина X задана таблицей распределения:

X	2	4	6	8	10
P	0,4	0,3	0,1	0,1	0,1

Вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P(X > 8)$, $P(X < 4)$.

2. Всхожесть семян пшеницы составляет 70%. Посеяно 5 семян. Составить закон распределения числа взошедших семян. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$. Построить многоугольник распределения.
3. Дети играют в фанты. Один ребенок (ведущий) отворачивается, все остальные загадывают желание. Если ведущий отгадал желание, то его меняют на другого ведущего. Если не отгадал, то он снова отворачивается и все повторяется сначала. Если ведущий не отгадал желание с четырех попыток, то для него игра прекращается. Составить закон распределения числа попыток ведущего отгадать желание. Найти среднее число попыток для ведущего?
4. У дежурного имеется набор из 7 ключей, среди которых 2 одинаковых. Выбирают наудачу 4 ключа. Составить закон распределения числа одинаковых ключей, оказавшихся в выборке. Найти функцию распределения $F(x)$, построить ее график.
5. Прядильщица обслуживает в цехе 1000 веретен. Вероятность обрыва нити в течение времени t на каждом веретене одинакова и равна 0,0005. Каково среднее число обрывов нити за время t?

Вариант VI

1. Дискретная случайная величина X задана таблицей распределения:

X	2	4	6	8	10
P	0,3	0,3	0,2	0,1	0,1

Вычислить $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P(X > 4)$, $P(X < 11)$.
2. Из всей выпускаемой заводом продукции 95% составляют стандартные изделия. Наугад отобрано 6 деталей. Составить закон распределения стандартных деталей среди шести отобранных. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$. Построить многоугольник распределения.
3. Дети затеяли интересную игру. В одной из трех совершенно одинаковых шкатулок спрятан красивый значок. Желающий отгадать наугад выбирает шкатулку и проверяет, есть ли в ней значок. Если значка в ней не оказалось, он должен отвернуться. За его спиной шкатулки переставляются местами. Ему предлагают попытать счастье еще раз. Игра продолжается до обнаружения значка. Составить закон распределения числа попыток ведущего отгадать шкатулку со значком. Найти среднее число попыток для ведущего?
4. Имеется 8 билетов в театр, из которых 6 билетов в партер. Наудачу выбирается 4 билета. Составить закон распределения числа билетов в партер, оказавшихся в выборке. Найти функцию распределения $F(x)$, построить ее график.
5. АТС получает в среднем за час 540 вызовов. Какова вероятность того, что в данную минуту она получит ровно 20 вызовов?

Контрольные вопросы по теме

1. Дайте определение случайной величины. Что называют значением СВ?
2. Какую СВ называют дискретной случайной величиной?
3. Что такое закон распределения ДСВ?
4. Что такое ряд распределения ДСВ?
5. Всегда ли закон распределения ДСВ имеет вид ряда?

6. Дайте определение функции распределения ДСВ. Сформулируйте и докажите ее свойства.
7. Дайте определение математического ожидания ДСВ, сформулируйте и докажите его свойства.
8. Дайте определение дисперсии ДСВ, сформулируйте и докажите ее свойства.
9. Дайте определение среднего квадратического отклонения.
10. Перечислите известные законы распределения ДСВ, запишите формулы, по которым определяются вероятности в каждом из распределений. Что является СВ в каждом из законов распределения?
11. Докажите, что для биномиального распределения $M(X)=np$, $D(X)=npq$.
12. Докажите, что для распределения Пуассона $M(X) = \lambda$, $D(X) = \lambda$.
13. Как связаны между собой закон Пуассона и биномиальный закон?
14. Докажите, что для геометрического распределения $M(X) = 1/p$, $D(X) = (1 - p)/p^2$.

Практическое занятие №10

Тема: Непрерывные случайные величины

Задания к практическому занятию

Вариант I

1. Задана функция распределения непрерывной СВ X

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<3,\\ C(x-3)^2, & 3\le x\le 5,\\ 1, & 5<x.\end{cases}$$

Найти:

a) коэффициент C;

b) плотность распределения $f(x)$ СВ X и построить графики функций $f(x)$ и $F(X)$;

c) $P(3 < X < 4)$.

2. Плотность вероятности непрерывной СВ X равна

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ b\cdot x, & 0\le x\le 5{,}8,\\ 0, & 5{,}8<x.\end{cases}$$

a) построить функцию распределения $F(X)$ и начертить ее график;

b) найти числовые характеристики СВ.

3. Нормально распределенная СВ X задана плотностью вероятности

$$f(x)=\frac{1}{7\cdot\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-2)^2}{98}}.$$

Найти вероятность того, что СВ X примет значение в интервале (6; 9).

4. Используя свойства кривой плотности вероятностей СВ X, подчиненной нормальному закону распределения, найдите ее математическое ожидание, если из-

вестно, что P(– ∞ < X < -2) = P(6 < X < + ∞). Запишите выражение для $f(x)$, если σ = 2, и схематически изобразите график $f(x)$.

5. Деталь изготавливается на станке с систематической ошибкой 3, среднеквадратической ошибкой 4 и считается годной, если ее отклонение от номинала менее 12. Найти вероятность того, что три наудачу взятые детали из пяти будут годными.

Вариант II

1. Задана функция распределения непрерывной СВ X

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < \dfrac{\pi}{3}, \\ C\cos x, & \dfrac{\pi}{3} \le x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 1, & \dfrac{\pi}{2} < x. \end{cases}$$

Найти:

a) коэффициент C;

b) плотность распределения $f(x)$ СВ X и построить графики функций $f(x)$ и $F(X)$;

c) P(π /3 < X < π /2), P(π /4 < X < 2π), P(X = π /2).

2. Плотность вероятности непрерывной СВ X равна

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ b \cdot x, & 0 \le x \le 4, \\ 0, & 4 < x. \end{cases}$$

a) построить функцию распределения $F(X)$ и начертить ее график;

b) найти числовые характеристики СВ.

3. СВ X распределена нормально. $M(X)$ = 10, $D(X)$ = 100. Найти вероятность того, что отклонение СВ от ее математического ожидания по абсолютной величине будет:

a) меньше четырех;

b) больше четырех.

4. СВ X подчинена нормальному закону распределения. Математическое ожидание a = 10. Вероятность попадания в интервал (10; 20) равна 0,4. Чему равна вероятность попадания СВ в интервал (0; 10)? Запишите выражение для $f(x)$, если σ = 12, и схематически изобразите график $f(x)$.

5. Стрельба из орудия ведется вдоль определенного направления. Средняя дальность полета снаряда 10 тысяч метров. Предполагая, что дальность полета X подчинена нормальному закону с дисперсией 1600 м^2, найдите, какой процент выпускаемых снарядов дает перелет от 100 до 200 м.

Вариант III

1. Задана функция распределения непрерывной СВ X

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ Cx^2, & 0\le x\le 1,\\ 1, & 1<x.\end{cases}$$

Найти:
a) коэффициент C;
b) плотность распределения $f(x)$ СВ X и построить графики функций $f(x)$ и $F(X)$;
c) P(π /3 < X < π /2), P(π /4 < X < 2π), P(X = π /2).
2. Плотность вероятности непрерывной СВ X равна

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ c\left(x^2+2x\right), & 0\le x\le 1,\\ 0, & 1<x.\end{cases}$$

a) построить функцию распределения $F(X)$ и начертить ее график;
b) найти числовые характеристики СВ.
3. СВ X распределена нормально. $M(X)$ = 30, $D(X)$ = 100. Написать функцию, задающую плотность вероятностей данной СВ. Найти P(10 < X < 50).
4. Используя свойства кривой плотности вероятностей СВ X, подчиненной нормальному закону распределения, найдите ее математическое ожидание, если известно, что P(-∞ < X < -3)= P(7 < X < +∞). Запишите выражение для $f(x)$, если σ = 2, и схематически изобразите график $f(x)$.
5. Распределение веса деталей, выпускаемых заводом, подчиняется нормальному закону со средним весом 0,25 килограмм и средним квадратическим отклонением, равным 0,005 килограмм. Определить вероятность того, что отклонение веса деталей от среднего веса по абсолютной величине не превысит 0,008 килограмм.

Вариант IV

1. Задана функция распределения непрерывной СВ X

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-2,\\ C\left(x+2\right), & -2\le x\le 3,\\ 1, & 3<x.\end{cases}$$

Найти:
a) коэффициент C;
b) плотность распределения $f(x)$ СВ X и построить графики функций $f(x)$ и $F(X)$;
c) P(-2 < X < -1), P(X > 2), P(X = 3).
2. Плотность вероятности непрерывной СВ X равна

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ x-3, & 0\le x\le 1,\\ 0, & 1<x.\end{cases}$$

a) построить функцию распределения $F(X)$ и начертить ее график;

b) найти числовые характеристики СВ.

3. $M(X)$=10 и среднее квадратическое отклонение равно двум для нормально распределенной СВ X. Написать функцию, задающую плотность вероятностей данной СВ. Найти P(12 < X < 14).

4. СВ X подчинена нормальному закону распределения. Ее математическое ожидание a=2, P(-1 < X < 1)= 0,16. Чему равна вероятность попадания X в интервал (3; 5)? Запишите выражение для $f(x)$, если $\sigma = 1$, и схематически изобразите график $f(x)$.

5. Производится взвешивание некоторого вещества без систематических ошибок. Случайные ошибки взвешивания подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением, равным 0,02 кг. Найти вероятность того, что взвешивание будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 0,01 кг.

Вариант V

1. Задана функция распределения непрерывной СВ X

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ C(x+2), & 0 \le x \le 4, \\ 1, & 4 < x. \end{cases}$$

Найти:

a) коэффициент C;

b) плотность распределения $f(x)$ СВ X и построить графики функций $f(x)$ и $F(X)$;

c) P(-2 < X < -1), P(**X** > 2), P(X = 3).

2. Плотность вероятности непрерывной СВ X равна

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 2, \\ -\frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x - 3, & 2 \le x \le 4, \\ 0, & 4 < x. \end{cases}$$

a) построить функцию распределения $F(X)$ и начертить ее график;

b) найти числовые характеристики СВ.

3. Написать дифференциальную функцию нормально распределенной СВ X, если $M(X)$=4, $D(X)$ = 100. Найти вероятность того, что СВ примет значение в интервале (6; 12), примет значение вне этого интервала.

4. СВ X распределена нормально с математическим ожиданием a = 3. Вероятность попадания X в интервал (-1; 1) равна 0,15. Чему равна вероятность попадания X в интервал (5; 7)? Схематически изобразите график $f(x)$, если $\sigma = 1$.

5. Станок изготавливает детали, причем контролируется их размер X. Считая, что X – нормально распределенная СВ с $M(X)$=0,1 см и σ = 0,01, найти интервал, в котором с вероятностью 0,9973 будут заключены размеры изготовленных деталей.

Вариант VI

1. Задана функция распределения непрерывной СВ X

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ Cx+\dfrac{2}{3}, & 0\le x\le 4,\\ 1, & 4<x.\end{cases}$$

Найти:

a) коэффициент C;

b) плотность распределения $f(x)$ СВ X и построить графики функций $f(x)$ и $F(X)$;

c) P(-2 < X < -1), P(X > 2), P(X = 3).

2. Плотность вероятности непрерывной СВ X равна

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{1}{2}\sin x, & 0\le x\le \pi,\\ 0, & \pi<x.\end{cases}$$

a) построить функцию распределения $F(X)$ и начертить ее график;

b) найти числовые характеристики СВ.

3. При средней длине некоторой детали в 20 см найдено, что отклонения, превосходящие ±0,5 см, встречаются в среднем 4 раза на 100 деталей. Считая, что длина детали распределена по нормальному закону, определите ее среднее стандартное отклонение.

4. Максимальное значение плотности вероятности СВ X, которая подчинена нормальному закону распределения, равно $1/8\sqrt{\pi}$. Найдите среднее квадратическое отклонение СВ X. Запишите выражение для f(x), если $M(X)$=4, и схематически изобразите график $f(x)$.

5. При измерении детали ее длина есть СВ X, распределенная по нормальному закону с параметрами a = 220 мм и σ = 2 мм. Найдите интервал, в который с вероятностью 0,9544 попадает СВ X.

Контрольные вопросы по теме

1. Какая СВ называется непрерывной?
2. Вероятностью какого случайного события является функция распределения СВ?
3. Докажите свойства функции распределения.
4. Как связаны P(a < X < b) и функция распределения $F(X)$, $F(X)$ и $f(x)$?
5. Перечислите и докажите свойства $f(x)$.
6. Запишите плотность распределения $f(x)$ для непрерывной величины, которая распределена равномерно.
7. Как связаны $P(a < X <$ b) и $f(x)$?
8. Дать определения математического ожидания и дисперсии для непрерывной СВ?
9. Запишите плотность распределения $f(x)$ для непрерывной величины, которая распределена нормально.

10. Как изменится максимальное значение ординаты кривой Гаусса, если дисперсия СВ увеличится в 16 раз?
11. Чему равна $P(a < X < b)$, если СВ X распределена нормально?
12. Получите формулу $P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$ для нормально распределенной СВ X?
13. В чем заключается правило трех сигм?
14. Сформулируйте центральную предельную теорему.

Практическое занятие №11

Тема: Системы двух случайных величин
(семинарское занятие)

Вопросы семинарского занятия

1. Понятие двумерной величины.
2. Виды двумерных величин.
3. Закон распределения вероятностей двумерной СВ.
4. Понятие функции распределения двумерной СВ, ее свойства.
5. Двумерная плотность вероятности, ее свойства.
6. Условное распределение вероятностей составляющих дискретной двумерной СВ.
7. Плотности и условные законы распределения составляющих непрерывной двумерной СВ.
8. Числовые характеристики непрерывной системы двух СВ.

Практическое занятие №12

Тема: Системы двух случайных величин

Задания к практическому занятию

Вариант I

1. Задана таблица распределения дискретной двумерной СВ

$X \setminus Y$	1	2	3	4
1	0,10	0,15	0,04	0,06
2	0,12	0,08	0,05	0,04
3	0,03	0,02	0,11	D

Найти:
a) значение числа D;
b) безусловные законы распределения СВ X и Y;
c) вероятности событий $\{X = 1,\ Y \geq 2\}$ и $\{X = Y\}$.
2. Используя условие задачи 1, найти:
a) математические ожидания $M(X)$ и $M(Y)$;
b) дисперсии $D(X)$ и $D(Y)$;

c) среднеквадратические отклонения $\sigma(X)$ и $\sigma(Y)$.

3. Используя условие задачи 1, найти корреляционный момент μ_{xy} (ковариацию) и коэффициент корреляции r_{xy}.

4. Совместное распределение СВ X и Y задано плотностью распределения вероятностей

$$f(x,y)=\begin{cases} C\cdot(y-xy), (x,y)\in D, \\ 0, \qquad\qquad (x,y)\notin D, \end{cases}$$

где область $D = \{(x, y)$: $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$. Найти:

a) коэффициент C;

b) плотности распределения отдельных компонент X и Y;

c) вероятность попадания случайной точки (X, Y) в область $D_1 = \{(x, y)$: $0{,}7 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 0{,}3\}$;

d) совместную функцию распределения $F(x, y)$.

5. Используя условие задачи 4, найти:

a) математические ожидания $M(X)$ и $M(Y)$;

b) дисперсии $D(X)$ и $D(Y)$.

Вариант II

1. Двумерная СВ (X, Y) задана законом распределения

$X \setminus Y$	0	1
0	0,12	0,18
1	0,28	0,42

Найти:

a) функцию распределения ДСВ X;

b) функцию распределения двумерной СВ (X, Y);

c) вероятность события $\{X \le Y\}$.

2. Используя условие задачи 1, найти:

a) математические ожидания $M(X)$ и $M(Y)$;

b) дисперсии $D(X)$ и $D(Y)$;

c) среднеквадратические отклонения $\sigma(X)$ и $\sigma(Y)$.

3. Используя условие задачи 1, найти корреляционный момент μ_{xy} (ковариацию) и коэффициент корреляции r_{xy}.

4. Совместное распределение СВ X и Y задано плотностью распределения вероятностей

$$f(x,y)=\frac{C}{\left(\frac{1}{3}+x^2\right)\cdot\left(3+y^2\right)}, x\in R, y\in R\,.$$

Найти:

a) коэффициент C;

b) плотности распределения отдельных компонент X и Y;

c) вероятность события $A = \{\, X < 1,\ Y < \sqrt{3}\,\}$;

d) совместную функцию распределения $F(x, y)$.

5. Используя условие задачи 4, найти:
a) математические ожидания $M(X)$ и $M(Y)$;
b) дисперсии $D(X)$ и $D(Y)$.

Вариант III

1. По мишени производится один выстрел. Вероятность попадания равна 0,75. Пусть СВ X – число попаданий; СВ Y – число промахов. Составить таблицу совместного распределения вероятностей СВ X и Y. Описать функцию распределения $F(x, y)$ системы СВ (X, Y).
2. Используя условие задачи 1, найти:
a) математические ожидания $M(X)$ и $M(Y)$;
b) дисперсии $D(X)$ и $D(Y)$;
c) среднеквадратические отклонения $\sigma(X)$ и $\sigma(Y)$.
3. Используя условие задачи 1, найти корреляционный момент μ_{xy} (ковариацию) и коэффициент корреляции r_{xy}.
4. Совместное распределение СВ X и Y задано плотностью распределения вероятностей

$$f(x,y)=\begin{cases} C\cdot xy, (x,y)\in D, \\ 0, \quad (x,y)\notin D, \end{cases}$$

где область $D = \{(x, y)\colon x \geq 0, y \geq 0\ \ x + y \leq 1\}$. Найти:
a) коэффициент C;
b) плотности распределения отдельных компонент X и Y;
c) вероятность события $A = \{ X > 1/2, Y \leq 1\}$;
d) функции распределения отдельных компонент.
5. Используя условие задачи 4, найти:
a) математические ожидания $M(X)$ и $M(Y)$;
b) дисперсии $D(X)$ и $D(Y)$.

Вариант IV

1. По цели производится два независимых выстрела. Вероятность попадания в цель при первом выстреле равна 0,8, при втором 0,9. СВ X – число попаданий при первом выстреле, Y – число попаданий при втором выстреле. Найти:
a) закон распределения системы СВ (X, Y);
b) безусловные законы распределения отдельных компонент X и Y и их функции распределения;
c) функцию распределения $F_{XY}(x, y)$.
2. Используя условие задачи 1, найти:
a) математические ожидания $M(X)$ и $M(Y)$;
b) дисперсии $D(X)$ и $D(Y)$;
c) среднеквадратические отклонения $\sigma(X)$ и $\sigma(Y)$.
3. Используя условие задачи 1, найти корреляционный момент μ_{xy} (ковариацию) и коэффициент корреляции r_{xy}.
4. Совместное распределение СВ X и Y задано плотностью распределения вероятностей

$$f(x,y)=\begin{cases} C\cdot\sin(x+y), (x,y)\in D, \\ 0, \qquad\qquad (x,y)\notin D, \end{cases}$$

где область $D = \{(x, y){:}\ x \geq 0,\ \ x \leq \pi/2,\ y \geq 0,\ y \leq \pi/2\}$. Найти:

a) коэффициент С;

b) плотности распределения отдельных компонент X и Y;

c) вероятность попадания случайной точки (X, Y) в прямоугольник $x = 0$, $x = \pi/6$, $y = 0$, $y = \pi/2$;

d) совместную функцию распределения $F(x, y)$.

5. Используя условие задачи 4, найти:

a) математические ожидания $M(X)$ и $M(Y)$;

b) дисперсии $D(X)$ и $D(Y)$.

Вариант V

1. Симметричную монету подбрасывают 3 раза. Пусть СВ X – число гербов, выпавших в первом и втором испытаниях, Y – число гербов, выпавших во втором и третьем испытаниях. Найти:

a) совместное распределение СВ X и Y;

b) вероятность события $\{\ X \neq Y\ \}$.

2. Используя условие задачи 1, найти:

a) математические ожидания $M(X)$ и $M(Y)$;

b) дисперсии $D(X)$ и $D(Y)$;

c) среднеквадратические отклонения $\sigma(X)$ и $\sigma(Y)$.

3. Используя условие задачи 1, найти корреляционный момент μ_{xy} (ковариацию) и коэффициент корреляции r_{xy}.

4. Совместное распределение СВ X и Y задано плотностью распределения вероятностей

$$f(x,y)=\begin{cases} C, (x,y)\in D, \\ 0,\ (x,y)\notin D, \end{cases}$$

где область $D = \{(x, y){:}\ x + y \leq 1,\ \ 2y - x \leq 2,\ y \geq 0\}$. Найти:

a) коэффициент С;

b) плотности распределения отдельных компонент X и Y;

c) вероятность события $\{X \geq 0\}$;

d) совместную функцию распределения $F(x, y)$.

5. Используя условие задачи 4, найти:

a) математические ожидания $M(X)$ и $M(Y)$;

b) дисперсии $D(X)$ и $D(Y)$.

Вариант VI

1. Задана таблица распределения дискретной двумерной СВ

$X \setminus Y$	1	2	3
1	0,16	0,12	0,08
2	0,28	0,11	0,25

Найти:

a) законы распределения СВ X и Y;

b) функцию распределения системы СВ (X, Y).

2. Используя условие задачи 1, найти:
a) математические ожидания $M(X)$ и $M(Y)$;
b) дисперсии $D(X)$ и $D(Y)$;
c) среднеквадратические отклонения $\sigma(X)$ и $\sigma(Y)$.
3. Используя условие задачи 1, найти корреляционный момент μ_{xy} (ковариацию) и коэффициент корреляции r_{xy}.
4. Совместное распределение СВ X и Y задано плотностью распределения вероятностей

$$f(x,y)=\begin{cases} C\cdot e^{-x-y}, x\geq 0, y\geq 0, \\ 0, \qquad\qquad x<0, y<0. \end{cases}$$

Найти:
a) коэффициент С;
b) плотности распределения отдельных компонент X и Y;
c) вероятность события $A = \{ X < 0,\ Y < 2\}$;
d) совместную функцию распределения $F(x, y)$.
5. Используя условие задачи 4, найти:
a) математические ожидания $M(X)$ и $M(Y)$;
b) дисперсии $D(X)$ и $D(Y)$.

Контрольные вопросы по теме

1. Какую величину называют двумерной?
2. Какие двумерные величины различают?
3. Что называется законом распределения вероятностей двумерной СВ?
4. Дайте определение функции распределения двумерной СВ, перечислите ее свойства.
5. Что называется двумерной плотностью вероятности, перечислите ее свойства.
6. Дайте определение условному распределению вероятностей составляющих дискретной двумерной СВ.
7. Как найти плотности и условные законы распределения составляющих непрерывной двумерной СВ.
8. Числовые характеристики непрерывной системы двух СВ.

Практическое занятие №13

Тема: Выборочный метод
(семинарское занятие)

Вопросы семинарского занятия

1. Математическая статистика: определение, задачи, методы).
2. Основные понятия математической статистики.
3. Эмпирическая функция распределения.
4. Кумулята. Мода. Медиана.
5. Выборочная средняя. Выборочная дисперсия.

6. Центральные эмпирические моменты. Коэффициент асимметрии. Эксцесс.

Практическое занятие №14

Тема: Выборочный метод

Пример выполнения лабораторной работы

Даны наблюденные значения СВ. Требуется:

1. Построить сгруппированный статистический ряд.
2. Построить кумуляту.
3. Построить гистограмму и полигон относительных частот.
4. Найти выборочные точечные характеристики: среднюю, дисперсию, асимметрию, эксцесс, моду, медиану, коэффициент вариации.
5. Проверить гипотезу относительно близости распределения к нормальному.

185	151	187	211	155	208	178	193	149	175
193	163	166	131	200	173	145	166	216	216
156	174	174	161	225	178	188	157	177	183
206	187	209	157	180	163	189	196	204	199
242	192	160	123	181	172	183	120	164	197
134	204	148	157	133	151	169	219	189	134

Решение

Найдем число интервалов. Т. к. объем выборки n = 60, то по формуле
$k = 1 + 3{,}322 \lg 60 \approx 6{,}9$.

Следует взять 6 – 7 интервалов. Т.к. x_{min} = 120, x_{max} = 242, то длина интервала по формуле примерно равна:

$$h = \frac{242 - 120}{1 + 3{,}322 \lg 60} \approx 17{,}7 .$$

Чтобы не получилось больше 7 интервалов, примем h = 20. Тогда по формуле:

$X_{нач} = 120 - 0{,}5 \cdot 20 = 110$.

Получим сгруппированный статистический ряд (договоримся не включать в интервал значения, равные правому концу интервала).

Таблица 1

Границы интервалов x_i ; x_{i-1}	110;130	130;150	150;170	170;190	190;210	210;230	230;250
Частоты n_i	2	7	15	18	12	5	1

Для построения кумуляты, гистограммы и полигона относительных частот составим таблицу 2.

Таблица 2

Границы интервалов x_i ; x_{i-1}	110;130	130;150	150;170	170;190	190;210	210;230	230;250
Частоты n_i	2	7	15	18	12	5	1
Относительны частоты $p_i^* = \frac{n_i}{n} = \frac{n_i}{60}$	0,033	0,117	0,250	0,300	0,200	0,083	0,017
Плотность относительной часоты $\frac{p_i^*}{h}$	0,002	0,006	0,013	0,015	0,010	0,004	0,001
Накопленная частота	0,033	0,150	0,400	0,700	0,900	0,983	1
Середины интервалов x_i^*	120	140	160	180	200	220	240

Построим гистограмму относительных частот, откладывая по оси Оy значения плотности относительной частоты $\frac{n_i}{nh}$, а на оси Оx отмачая интервалы x_i ; x_{i-1} (рисунук 1).

Полигон строим, соединяя отрезками серидины верхних сторон прямоугольников гистограммы.

По данным таблицы 2 строим кумуляту.

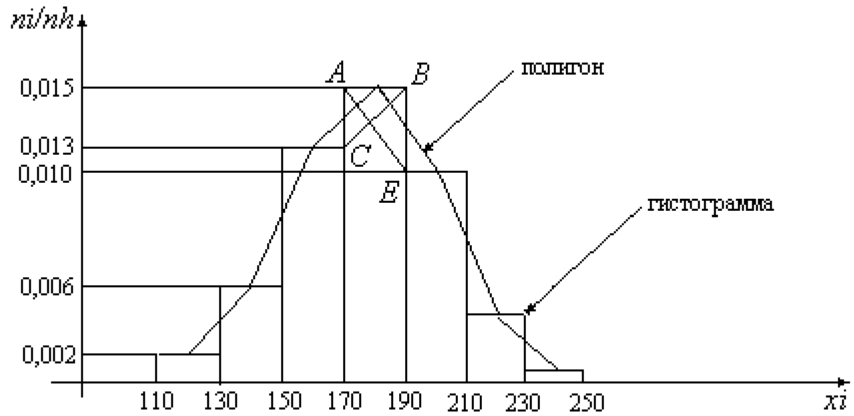


Рисунок 1.

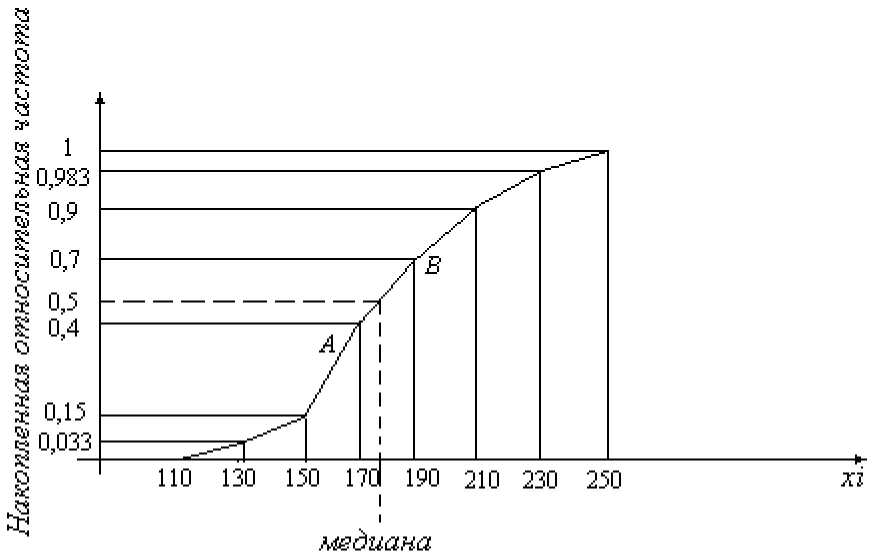


Рисунок 2.

Найдем выборочные точечные характеристики. Выборочную среднюю найдем по формуле:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i^* n_i = \frac{1}{60}(120\cdot 2 + 140\cdot 7 + 160\cdot 15 + 180\cdot 18 + 200\cdot 12 + 220\cdot 5 + 240\cdot 1) \approx 177$$

Выборочную дисперсию найдем по формуле:

$$D_B = \frac{1}{n}\sum n_i\left(x_i^* - \bar{x}\right)^2 = \frac{1}{60}(\left(120-177\right)^2\cdot 2 + \left(140-177\right)^2\cdot 7 + \left(160-177\right)^2\cdot 15 +$$
$$+\left(180-177\right)^2\cdot 18 + \left(200-177\right)^2\cdot 12 + \left(220-177\right)^2\cdot 5 + \left(240-177\right)^2\cdot 1) = 669$$

Выборочное среднее квадратическое отклонение найдем по формуле:

$$\sigma_B = \sqrt{D_B} = \sqrt{669} \approx 25{,}87.$$

Для того, чтобы найти коэффициент асимметрии и эксцесс, найдем центральные эмпирические моменты третьего и четвертого порядка по формуле:

$$m_3 = \frac{1}{n}\sum n_i\left(x_i^* - \bar{x}\right)^3 = \frac{1}{60}(\left(120-177\right)^3\cdot 2 + \left(140-177\right)^3\cdot 7 + \left(160-177\right)^3\cdot 15 +$$
$$+\left(180-177\right)^3\cdot 18 + \left(200-177\right)^3\cdot 12 + \left(220-177\right)^3\cdot 5 + \left(240-177\right)^3\cdot 1) = -4580$$

$$m_4 = \frac{1}{n}\sum n_i\left(x_i^* - \bar{x}\right)^4 = \frac{1}{60}(\left(120-177\right)^4\cdot 2 + \left(140-177\right)^4\cdot 7 + \left(160-177\right)^4\cdot 15 +$$
$$+\left(180-177\right)^4\cdot 18 + \left(200-177\right)^4\cdot 12 + \left(220-177\right)^4\cdot 5 + \left(240-177\right)^4\cdot 1) = 1194841$$

Найдем коэффициент асимметрии:

$$a_s = \frac{m_3}{\sigma_B^3} = \frac{-4580}{\left(25{,}87\right)^3} = -0{,}26.$$

Найдем эксцесс:

$$e = \frac{m_4}{\sigma_B^4} - 3 = \frac{1194841}{\left(25{,}87\right)^4} - 3 = 2{,}67 - 3 = -0{,}33.$$

Т.о., кривая эмпирического распределения имеет незначительную левостороннюю асимметрию, т.е. «длинная часть» кривой распределения расположена слева от математического ожидания. Т.к. эксцесс отрицательный, то кривая эмпирического распределения имеетболее низкую и 2плоскую2 вершину, чем нормальная кривая. Но, поскольку значение эксцесса по модулю мало, то это различие незначительно. Можно предположить, что эмпирическая кривая близка к нормальной кривой.

Коэффициент вариации:

$$V = \frac{\sigma_B}{\bar{x}} \cdot 100\% = \frac{25{,}87}{177} \cdot 100\% = 14{,}6\%.$$

По значению коэффициента вариации делаем вывод об однородности выборочной совокупности. Моду и медиану найдем с помощью рисунков 1 и 2.

Отметим на графике, представляющем кистограмму отрезки *AE* и *CB*, концы которых имеют к оординаты: *A*(170; 0,015), *B*(190; 0Б015), *C*(170; 0,013), *E*(190; 0,01). Составим уравнение прямой *AE*:

$$\frac{x-170}{190-170} = \frac{y-0{,}015}{0{,}01-0{,}015},$$

откуда получаем:

$$y = -0{,}00025x + 0{,}0575. \qquad (1)$$

Составим уравнение прямой *CB*:

$$\frac{x-170}{190-170} = \frac{y-0{,}013}{0{,}015-0{,}013},$$

откуда получим:

$$y = 0{,}0001x - 0{,}004. \qquad (2)$$

Решая систему двух уравнений (1) и (2), найдем абсциссу точки пересечения прямых *AE* и *CB*:

$X = 176$.

Данное значение и есть значение моды. Т.о., $M_0 = 176$.

Следовательно, эмпирическая вероятность данного значения признака максимальна.

Медиану найдем по графику кумуляты. Для этого (рисунок 2) на оси относительных частот отметим значение 0,5. Найдем значение варианты, соотвтсвующей этой относительной частоте. Составим уравнение прямой *Aв*, где *A*(170; 0,4), *B*(190; 0,7),

$$\frac{x-170}{190-170} = \frac{y-0{,}4}{0{,}7-0{,}4},$$

откуда получим:

$$0{,}3x+ = 20y + 43. \qquad (3)$$

Подставив в уравнение (3) значение $y = 0{,}5$, найдем $x = 177$.

Т.о., $M_e = 177$.

Проверим предположение о близости эмпирического распределения к нормальному. Найдем выравнивающие частоты:

$$n'_1 = \frac{60 \cdot 20}{25,87} \cdot \varphi\left(\frac{120 - 177}{25,87}\right) = 1,65;$$

$$n'_2 = \frac{60 \cdot 20}{25,87} \cdot \varphi\left(\frac{420 - 177}{25,87}\right) = 6,66;$$

$$n'_3 = \frac{60 \cdot 20}{25,87} \cdot \varphi\left(\frac{160 - 177}{25,87}\right) = 14,89;$$

$$n'_4 = \frac{60 \cdot 20}{25,87} \cdot \varphi\left(\frac{180 - 177}{25,87}\right) = 18,37;$$

$$n'_5 = \frac{60 \cdot 20}{25,87} \cdot \varphi\left(\frac{200 - 177}{25,87}\right) = 12,45;$$

$$n'_6 = \frac{60 \cdot 20}{25,87} \cdot \varphi\left(\frac{220 - 177}{25,87}\right) = 4,67;$$

$$n'_7 = \frac{60 \cdot 20}{25,87} \cdot \varphi\left(\frac{240 - 177}{25,87}\right) = 0,94.$$

Составим таблицу 3.

Таблица 3

x_i^*	120	140	160	180	200	220	240
n_i	2	7	15	18	12	5	1
n_i^*	1,7	6,7	14,9	18,4	12,5	4,7	0,9

Т.к. эмпирические и теоретические частоты отличаются мало, то можно считать, что нормальная кривая удовлетворительно отражает данные наблюдений.

Задания к практическому занятию

Даны наблюденные значения СВ. Требуется:

1. Построить сгруппированный статистический ряд.
2. Построить кумуляту.
3. Построить гистограмму и полигон относительных частот.
4. Найти выборочные точечные характеристики: среднюю, дисперсию, асимметрию, эксцесс, моду, медиану, коэффициент вариации.
5. Проверить гипотезу относительно близости распределения к нормальному.

Вариант 1

86	72	67	84	75	51	77
74	55	79	82	99	69	64
49	68	63	58	76	72	53
90	71	52	87	84	48	66
83	96	70	65	60	80	63
59	79	62	74	70	81	91
68	53	76	67	62	57	77
61	56	46	46	71	68	52

Вариант 2

34	25	29	34	12	28	13
28	28	17	28	36	27	17
27	26	23	31	32	23	17
22	34	22	25	28	37	28
31	25	23	33	24	24	25
28	26	19	29	21	30	18
26	19	29	24	25	26	30
30	21	30	19	20	30	34
20	36	35	31	22	30	22

Вариант 3

26	39	16	30	16	34	25
30	20	28	27	22	23	31
31	34	28	26	34	29	25
31	24	17	27	22	34	23
30	23	28	31	25	12	33
24	19	36	32	28	28	24
28	26	27	23	37	12	24
25	25	16	17	28	13	25
36	31	27	28	26	26	26

Вариант 4

37	49	43	38	47	40	43	43	41	44
48	39	44	45	42	43	41	45	51	47
41	44	43	44	39	43	39	44	46	42
46	47	40	43	46	41	44	44	46	39
45	42	43	45	41	43	48	43	46	42
44	46	45	42	43	41	43	45	46	43
41	43	38	40	48	45	49	39	40	48

Вариант 5

61	41	27	42	50	58	47	43	39	50
49	54	34	44	38	49	54	26	45	48
37	48	53	60	31	47	52	35	66	36
49	46	51	57	50	40	46	51	42	64
74	39	50	55	43	31	44	50	30	61
45	28	41	49	33	46	37	48	53	42
56	44	36	47	52	45	69	41	47	32
51	59	48	40	46	29	43	65	34	46

Вариант 6

95	93	100	94	95	94	101	90	95	103
99	91	94	95	94	89	93	98	95	93
107	100	98	101	90	95	103	98	99	94
94	89	93	95	93	96	97	102	97	106
96	94	100	95	92	93	96	97	99	104
98	109	98	104	95	100	102	96	95	99
99	98	102	98	103	95	94	98	97	94
97	91	96	108	100	91	93	106	93	97

Контрольные вопросы по теме

1. Что такое выборка? Какая выборка является репрезентативной?
2. Дайте понятие статистического ряда распределения.
3. Как строится сгруппированный статистический ряд?
4. Что такое полигон и гистограмма?
5. Покажите, что площадь фигуры, ограниченная гистограммой частот равна объему выборки, а площадь фигуры, ограниченная гистограммой относительных частот, равна единице.
6. Дайте определение эмпирической функции распределения.
7. Что такое кумулята? Как она строится?
8. Что такое мода и медиана? Как графически их можно найти?
9. Запишите формулы для вычисления выборочной средней и выборочной дисперсии: *a*) если имеется дискретный статистический ряд, *b*) если имеется сгруппированный статистический ряд.
10. Как вычисляются центральные эмпирические моменты статистического распределения?
11. Что показывают коэффициент асимметрии и эксцесс? Как они вычисляются?
12. На основании чего можно сделать предположение о том, что изучаемая величина распределена по некоторому определенному закону? Как можно проверить это предположение?
13. По какой формуле находятся выравнивающие частоты в случае предположения о близости эмпирического распределения к нормальному?

Практическое занятие №15

Тема: Интервальные оценки параметров распределения
(семинарское занятие)

Вопросы семинарского занятия

1. Понятие оценки.
2. Точечные оценки математического ожидания и дисперсии.
3. Доверительные интервалы для оценки параметров нормального распределения.

Практическое занятие №16

Тема: Интервальные оценки параметров распределения

Пример выполнения лабораторной работы

Имеются результаты измерения некоторой величины:

2,2 4,5 3,5 5,6 4,6 3,0 2,3 3,5 4,4 3,2

Будем рассматривать эти результаты как *n* реализаций СВ *X*, в предположении, что *X* имеет нормальное распределение:

1. Найти точечные несмещенные оценки математического ожидания a и среднего квадратического отклонения σ.
2. Найти доверительный интервал, покрывающий математическое ожидание с заданной доверительной вероятностью $\gamma = 0,95$.
3. Найти погрешность, с которой среднее арифметическое оценивает математическое ожидание a СВ X, если доверительная вероятность $\gamma = 0,99$, $\gamma = 0,999$.
4. Найти доверительный интервал, покрывающий неизвестное среднее квадратическое отклонение с заданной доверительной вероятностью $\gamma = 0,95$.
5. Найти минимальный объем выборки, чтобы с доверительной вероятностью $\gamma = 0,95$ можно было утверждать, что принимая среднее арифметическое за математическое ожидание СВ X, допускаем погрешность $\varepsilon = \frac{1}{2}\sigma$.

Решение

1. Найдем несмещенные оценки для математического ожидания и среднего квадратического отклонения по формулам:

$$\bar{x}_{\text{В}} = \frac{\sum x_i}{n}; \; s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum\left(x_i - \bar{x}_B\right)^2}.$$

Для этого составим таблицу 1.

Заполнив второй столбец таблицы, найдем выборочную среднюю:

$$\bar{x}_{\text{В}} = \frac{\sum x_i}{10} = \frac{37,1}{10} = 3,71.$$

После этого заполняем столбцы 3 и 4.

По столбцу 4 находим исправленное среднее квадратическое отклонение:

$$s = \sqrt{\frac{1}{9}\sum\left(x_i - \bar{x}_B\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{9}\cdot 9,909} = \sqrt{1,101} \approx 1,049$$

Таблица

1	2	3	4
i	x_i	$x_i - \bar{x}_B$	$\left(x_i - \bar{x}_B\right)^2$
1	2,2	-1,51	2,2801
2	4,5	0,79	0,6241
3	3,8	0,09	0,0081
4	5,6	1,89	3,5721
5	4,6	0,39	0,1521
6	3,0	-0,71	0,5041
7	2,3	-1,41	1,9881
8	3,5	-0,21	0,0441
9	4,4	0,69	0,4761
10	3,2	-0,51	0,2601
$\sum$	37,1	-0,5	9,909

Т.о., получили точечные оценки математического ожидания и среднего квадратического отклонения:

$\bar{x}_{\text{В}} = 3{,}71$; $s = 1{,}049$.

2. В предположении, что СВ X распределена нормально, найдем доверительный интервал, покрывающий математическое ожидание с надежностью $\gamma = 0{,}95$, поскольку σ неизвестно, то доверительный интервал имеет вид:

$$\left(\bar{x}_B - \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}}; \bar{x}_B + \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}}\right).$$

t_γ найдем по таблице Приложения 1 по значениям $n = 10$, $\gamma = 0{,}95$: $t_\gamma = 2{,}26$.

Найдем точность оценки:

$$\varepsilon = \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}} = \frac{2{,}26 \cdot 1{,}049}{\sqrt{10}} = 0{,}750.$$

Тогда доверительный интервал для математического ожидания будет следующим:

(3,71 - 0,75; 3,71 + 0,75)

или

$2{,}96 < a < 4{,}46$.

Смысл полученного результата в том, что если будет проведено достаточно большое число серий, состоящих из 10 измереннний данной величины, то в 95% случаев из них найденный доверительный интервал накроет математичское ожидание и только в 5% случаев математическое ожидание может выйти за границы доверительного интервала.

3. Если $\gamma = 0{,}99$ и $n = 10$, то $t_\gamma = 3{,}25$. Точность оценки при этом будет равна:

$$\varepsilon = \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}} = \frac{3{,}25 \cdot 1{,}049}{\sqrt{10}} = 1{,}078.$$

Если $\gamma = 0{,}999$ и $n = 10$, то $t_\gamma = 4{,}78$. Точность оценки при этом будет равна:

$$\varepsilon = \frac{t_{\gamma s} s}{\sqrt{n}} = \frac{4{,}78 \cdot 1{,}049}{\sqrt{10}} = 3{,}16 .$$

При увеличении надежности оценки точность оценки заметно снижается.

4. Чтобы найти доверительный интервал, покрывающий неизвестное среднее квадратическое отклонение с заданной доверительной вероятностью $\gamma = 0{,}95$, по таблице Приложения 2 при $n = 10$ найдем $q = 0{,}65$. Так как $q < 1$, то воспользуемся формулой:

$$s(1 - q) < \sigma < s(1 + q).$$

$$1{,}049(1 - 0{,}65) < \sigma < 1{,}049(1 + 0{,}65).$$

Получили доверительный интервал для σ нормального распределения:

$$0{,}367 < \sigma < 1{,}731.$$

5. Минимальный объем выборки найдем по формуле

$$n = \frac{t^2 \sigma^2}{\varepsilon^2} .$$

Значение t найдем из соотношения $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2} = \frac{0{,}95}{2} = 0{,}475$. По таблице значений функции $\Phi(t)$ получим: t 1,96. Тогда

$$n = \frac{t^2 \sigma^2}{\varepsilon^2} = \frac{(1{,}96)^2 \cdot \sigma^2}{\left(\frac{1}{2}\sigma\right)^2} = 4 \cdot (1{,}96)^2 \approx 15 .$$

Т.о., минимальный объем выборки, позволяющий с доверительной вероятностью $\gamma = 0{,}95$ утверждать, что принимая среднее арифметическое за математическое ожидание случайной величины X допускаем погрешность $\varepsilon = \frac{1}{2}\sigma$, равна 15.

Задания к практическому занятию

Приводятся результаты измерения некоторой величины, которые будем рассматривать как n реализаций СВ X, , в предположении, что X имеет нормальное распределение:

1. Найти точечные несмещенные оценки математического ожидания a и среднего квадратического отклонения σ.
2. Найти доверительный интервал, покрывающий математическое ожидание с заданной доверительной вероятностью $\gamma = 0{,}95$.
3. Найти погрешность, с которой среднее арифметическое оценивает математическое ожидание a СВ X, если доверительная вероятность $\gamma = 0{,}99$, $\gamma = 0{,}999$.
4. Найти доверительный интервал, покрывающий неизвестное среднее квадратическое отклонение с заданной доверительной вероятностью $\gamma = 0{,}95$.
5. Найти минимальный объем выборки, чтобы с доверительной вероятностью $\gamma = 0{,}95$ можно было утверждать, что принимая среднее арифмети-

ческое за математическое ожидание СВ *X*, допускаем погрешность $\varepsilon = \frac{1}{3}\sigma$.

Вариант I

31,85	31,36	30,32	30,90	31,70	32,40
31,60	31,12	30,98	31,02	31,05	31,00

Вариант II

20,58	22,80	25,40	26,08	23,25	21,42
25,10	23,10	24,09	24,02	26,12	22,84

Вариант III

4,8	6,2	6,0	5,9	4,9	6,0	5,6	6,1
5,9	5,8	5,7	5,1	5,5	6,2	5,4	

Вариант IV

43,4	43,6	44,3	44,5	44,6	44,5
44,7	44,6	44,8	45,1	45,2	45,3

Вариант V

26,2	27,5	26,0	32,2	35,0	30,2	29,7
26,8	30,0	30,8	32,0	28,8	35,0	30,8

Вариант VI

50,52	52,24	51,82	50,46	51,88	52,01
53,00	51,12	51,08	51,92	52,08	51,78

Контрольные вопросы

1. Дайте понятие оценки параметра.
2. Какие требования предъявляются к оценкам.
3. Какие оценки называются точечными.
4. Запишите формулы для нахождения точечных оценок.
5. Для чего вводят интервальные оценки.
6. Дайте определение доверительного интервала, надежности, точности оценок.
7. Приведите примеры несмещенной и смещенной оценок.
8. Какое распределение называется нормальным.
9. Запишите формулы для нахождения доверительного интервала для оценки математического ожидания нормального распределения при известном и неизвестном σ.
10. Каков алгоритм нахождения доверительго интервала для оценки математического ожидания нормального распределения при известном и неизвестном σ.
11. Запишите формулу для нахождения доверительного интервала для оценки среднего квадратического отклонения нормального распределения.
12. Каков алгоритм нахождения доверительного интервала для оценки среднего квадратического отклонения нормального распределения.

Практическое занятие №17

Тема: Проверка статьистических гипотез о законах распределения
(семинарское занятие)

Вопросы семинарского занятия

1. Статистическая гипотеза.
2. Статистический критерий проверки нулевой гипотезы.
3. Наблюдаемое значение критерия.
4. Критическая область.
5. Отыскание критических областей.
6. Проверка гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности.
7. Критерий согласия Пирсона.
8. Вычисление теоретических частот в зависимости от различных исходных данных.

Практическое занятие №18

Тема: Проверка статьистических гипотез о законах распределения

Задания к практическому занятию

Используя критерий Пирсона, при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности с эмпирическим распределением выборки

Вариант1

1)

x_i	8	11	14	17	20	23	26	29	32
n_i	6	14	17	22	25	20	18	10	8

2)

Границы интервалов	-10; -6	-6; -2	-2; -2	2; 6	6; 10	10; 14
Частота	6	13	19	12	6	4

Вариант2

1)

x_i	0,3	0,5	0,7	0,9	1,1	1,3	1,5	1,7	1,9
n_i	6	9	10	12	13	10	8	7	5

2)

Границы интервалов	-8; -4	-4; 0	0; 4	4; 8	8; 12	12; 16
Частота	6	11	14	18	10	5

Вариант3

1)

x_i	3	5	7	9	11	13	15	17	19
n_i	6	10	12	13	15	14	10	6	4

2)

Границы интервалов	-8; -2	-2; 4	4; 10	10; 16	16; 22	22;28
Частота	5	7	12	18	10	8

Вариант4

1)

x_i	5	8	11	14	17	20	23	26	29
n_i	5	9	12	13	14	12	10	6	4

2)

Границы интервалов	-3; -1	-1; 1	1; 3	3; 5	5; 7	7; 9
Частота	10	12	13	11	8	6

Вариант5

1)

x_i	2	4	6	8	10	12	14	16	18
n_i	3	5	10	12	15	13	10	7	5

2)

Границы интервалов	-5; -1	-1; 3	3; 7	7; 11	11; 15	15; 19
Частота	6	8	12	15	11	8

Вариант6

1)

x_i	2	5	8	11	14	17	20	23	26
n_i	10	11	13	15	16	14	12	11	8

2)

Границы интервалов	-10; -2	-2; 6	6; 14	14; 22	22; 30	30; 38
Частота	6	11	18	20	15	10

Контрольные вопросы по теме

1. Что такое статистическая гипотеза?
2. Какая гипотеза называется нулевой, какая – конкурирующей?
3. Какие виды ошибок могут возникнуть при проверке нулевой гипотезы?

4. Что означает уровень значимости α?
5. Что такое статистический критерий?
6. Что такое критическая область? Каковы виды критических областей?
7. Что такое критерий согласия?
8. В чем заключается критерий согласия Пирсона?
9. Сформулируйте правило проверки нулевой гипотезы.
10. Каков алгоритм отыскания теоретических частот в предположении нормального распределения генеральной совокупности в зависимости от различных исходных данных (вариационный ряд, интервальный ряд)?

Методические рекомендации

Пример. В коробке находится 10 шаров. 3 из них красные, 2 – зеленые, остальные белые. Найти вероятность того, что вынутый наугад шар будет красным, зеленым или белым.

Появление красного, зеленого и белого шаров составляют полную группу событий. Обозначим появление красного шара – событие А, появление зеленого – событие В, появление белого – событие С.

Тогда в соответствием с записанными выше формулами получаем:

$$P(A) = \frac{3}{10}; \quad P(B) = \frac{2}{10}; \quad P(C) = \frac{5}{10};$$

Отметим, что вероятность наступления одного из двух попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

Пример. Из полной колоды карт (52 шт.) одновременно вынимают четыре карты. Найти вероятность того, что среди этих четырех карт будет хотя бы одна бубновая или одна червонная карта.

Обозначим появление хотя бы одной бубновой карты – событие А, появление хотя бы одной червонной карты – событие В. Таким образом нам надо определить вероятность события С = А + В.

Кроме того, события А и В – совместны, т.е. появление одного из них не исключает появления другого.

Всего в колоде 13 червонных и 13 бубновых карт.

При вытаскивании первой карты вероятность того, что не появится ни червонной ни бубновой карты равна $\frac{26}{52}$, при вытаскивании второй карты - $\frac{25}{51}$, третьей - $\frac{24}{50}$, четвертой - $\frac{23}{49}$.

Тогда вероятность того, что среди вынутых карт не будет ни бубновых, ни червонных равна $P(\overline{C}) = \frac{26}{52}\cdot\frac{25}{51}\cdot\frac{24}{50}\cdot\frac{23}{49}$.

Тогда $P(C) = 1 - P(\overline{C}) \approx 0,945$

Пример. Чему равна вероятность того, что при бросании трех игральных костей 6 очков появится хотя бы на одной из костей?

Вероятность выпадения 6 очков при одном броске кости равна $\frac{1}{6}$. Вероятность того, что не выпадет 6 очков - $\frac{5}{6}$. Вероятность того, что при броске трех костей не выпадет ни разу 6 очков равна $p = \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$.

Тогда вероятность того, что хотя бы один раз выпадет 6 очков равна $1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$.

Пример. В барабане револьвера находятся 4 патрона из шести в произвольном порядке. Барабан раскручивают, после чего нажимают на спусковой крючок два раза. Найти вероятности хотя бы одного выстрела, двух выстрелов, двух осечек.

Вероятность выстрела при первом нажатии на курок (событие А) равна $P(A) = \frac{4}{6}$, вероятность осечки - $P(\overline{A}) = \frac{2}{3}$. Вероятность выстрела при втором нажатии на курок зависит от результата первого нажатия.

Так если в первом случае произошел выстрел, то в барабане осталось только 3 патрона, причем они распределены по 5 гнездам, т.к. при втором нажатии на курок напротив ствола не может оказаться гнездо, в котором был патрон при первом нажатии на курок.

Условная вероятность выстрела при второй попытке - $P(B/A) = \frac{3}{5}$, если в первый раз был выстрел, $P(B/\overline{A}) = \frac{4}{5}$ - если в первый раз произошла осечка.

Условная вероятность осечки во второй раз - $P(\overline{B}/A) = \frac{2}{5}$, если в первый раз произошел выстрел, $P(\overline{B}/\overline{A}) = \frac{1}{5}$ - если в первый раз была осечка.

Рассмотрим вероятности того, что во втором случае произойдет выстрел (событие В) или произойдет осечка (событие $\overline{B}$) при условии, что в первом случае произошел выстрел (событие А) или осечка (событие $\overline{A}$).

$P(B) = P(A)P(B/A) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{15} = 0{,}4$ - два выстрела подряд

$P(B) = P(\overline{A})P(B/\overline{A}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{15} \approx 0{,}267$ - первая осечка, второй выстрел

$P(\overline{B}) = P(A)P(\overline{B}/A) = \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{15} \approx 0{,}267$ - первый выстрел, вторая осечка

$P(\overline{B}) = P(\overline{A})P(\overline{B}/\overline{A}) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{15} \approx 0{,}067$ - две осечки подряд

Эти четыре случая образуют полную группу событий (сумма их вероятностей равна единице)

Анализируя полученные результаты, видим, что вероятность хотя бы одного выстрела равна сумме $P_1 = \frac{6}{15} + \frac{4}{15} + \frac{4}{15} = \frac{14}{15} \approx 0{,}933$

Теперь рассмотрим другой случай. Предположим, что после первого нажатия на курок барабан раскрутили и опять нажали на курок.

Вероятности первого выстрела и первой осечки не изменились - $P(A) = \frac{4}{6}$, $P(\overline{A}) = \frac{2}{6}$. Условные вероятности второго выстрела и осечки вычисляются из условия, что напротив ствола может оказаться то же гнездо, что и в первый раз.

Условная вероятность выстрела при второй попытке - $P(B/A) = \frac{3}{6}$, если в первый раз был выстрел, $P(B/\overline{A}) = \frac{4}{6}$ - если в первый раз произошла осечка.

Условная вероятность осечки во второй раз - $P(\overline{B}/A) = \frac{3}{6}$, если в первый раз произошел выстрел, $P(\overline{B}/\overline{A}) = \frac{2}{6}$ - если была осечка.

Тогда:

$P(B) = P(A)P(B/A) = \frac{4}{6}\cdot\frac{3}{6} = \frac{3}{9} \approx 0{,}333$ - два выстрела подряд

$P(B) = P(\overline{A})P(B/\overline{A}) = \frac{2}{6}\cdot\frac{4}{6} = \frac{2}{9} \approx 0{,}222$ - первая осечка, второй выстрел

$P(\overline{B}) = P(A)P(\overline{B}/A) = \frac{4}{6}\cdot\frac{3}{6} = \frac{3}{9} \approx 0{,}333$ - первый выстрел, вторая осечка

$P(\overline{B}) = P(\overline{A})P(\overline{B}/\overline{A}) = \frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6} = \frac{1}{9} \approx 0{,}111$ - две осечки подряд

В этом случае вероятность того, что произойдет хотя бы один выстрел, равна

$P_2 = \frac{3}{9} + \frac{2}{9} + \frac{3}{9} = \frac{8}{9} \approx 0{,}889$

<u>Пример.</u> Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,7, а для второго – 0,8. Найти вероятность того, что при одном залпе в мишень попадает только один из стрелков.

Обозначим попадание в цель первым стрелком – событие А, вторым – событие В, промах первого стрелка – событие $\overline{A}$, промах второго – событие $\overline{B}$.

$$P(A)=0{,}7;\quad P(\overline{A})=0{,}3;\quad P(B)=0{,}8;\quad P(\overline{B})=0{,}2.$$

Вероятность того, что первый стрелок попадет в мишень, а второй – нет равна

$$P(A)P(\overline{B})=0{,}7\cdot 0{,}2=0{,}14$$

Вероятность того, что второй стрелок попадет в цель, а первый – нет равна

$$P(\overline{A})P(B)=0{,}3\cdot 0{,}8=0{,}24$$

Тогда вероятность попадания в цель только одним стрелком равна

$$P=0{,}14+0{,}24=0{,}38$$

Тот же результат можно получить другим способом – находим вероятности того, что оба стрелка попали в цель и оба промахнулись. Эти вероятности соответственно равны:

$$P(A)P(B)=0{,}7\cdot 0{,}8=0{,}56;\quad P(\overline{A})P(\overline{B})=0{,}3\cdot 0{,}2=0{,}06.$$

Тогда вероятность того, что в цель попадет только один стрелок равна:

$$P=1-0{,}56-0{,}06=0{,}38.$$

Пример. Вероятность того, что взятая наугад деталь из некоторой партии деталей, будет бракованной равна 0,2. Найти вероятность того, что из трех взятых деталей 2 окажется не бракованными.

Обозначим бракованную деталь – событие А, не бракованную – событие $\overline{A}$.

$$P(A)=0{,}2;\quad P(\overline{A})=0{,}8;$$

Если среди трех деталей оказывается только одна бракованная, то это возможно в одном из трех случаев: бракованная деталь будет первой, второй или третьей.

$$P=P(A)P(\overline{A})P(\overline{A})+P(\overline{A})P(A)P(\overline{A})+P(\overline{A})P(\overline{A})P(A)$$

$$P=3\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8\cdot 0{,}8=0{,}384$$

Пример. Вероятности того, что нужная деталь находится в первом, втором, третьем или четвертом ящике, соответственно равны 0,6, 0,7, 0,8, 0,9. Найти вероятности того, что эта деталь находится: а) не более, чем в трех ящиках; б) не менее, чем в двух ящиках.

а) Вероятность того, что данная деталь находится во всех четырех ящиках, равна

$$P=P_1P_2P_3P_4=0{,}6\cdot 0{,}7\cdot 0{,}8\cdot 0{,}9=0{,}3024.$$

Вероятность того, что нужная деталь находиться не более, чем в трех ящиках равна вероятности того, что она не находится во всех четырех ящиках.

$$P(A)=1-P=1-0{,}3024=0{,}6976.$$

б) Вероятность того, что нужная деталь находится не менее, чем в двух ящиках, складывается из вероятностей того, что деталь находиться только в двух ящиках, только в трех ящиках, только в четырех ящиках. Конечно, эти вероятности можно посчитать, а потом сложить, однако, проще поступить иначе. Та же вероятность равна вероятности того, что деталь не находится только в одном ящике и имеется вообще.

Вероятность того, что деталь находится только в одном ящике, равна

$$P = P_1 q_2 q_3 q_4 + q_1 P_2 q_3 q_4 + q_1 q_2 P_3 q_4 + q_1 q_2 q_3 P_4$$

$$P = 0{,}6 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1 + 0{,}4 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1 + 0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}1 + 0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}9 =$$
$$= 0{,}0036 + 0{,}0056 + 0{,}0096 + 0{,}0216 = 0{,}0404$$
$$Q = 1 - 0{,}0404 = 0{,}9596$$

Вероятность того, что нужной деталь нет ни в одном ящике, равна:

$$P_0 = q_1 q_2 q_3 q_4 = 0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 0{,}0024$$
$$Q_0 = 1 - 0{,}0024 = 0{,}9976$$

Искомая вероятность равна $P(B) = Q \cdot Q_0 = 0{,}9596 \cdot 0{,}9976 = 0{,}9573.$

Пример. Один из трех стрелков производит два выстрела. Вероятность попадания в цель при одном выстреле для первого стрелка равна 0,4, для второго – 0,6, для третьего – 0,8. Найти вероятность того, что в цель попадут два раза.

Вероятность того, что выстрелы производит первый, второй или третий стрелок равна $\frac{1}{3}$.

Вероятности того, что один из стрелков, производящих выстрелы, два раза попадает в цель, равны:

- для первого стрелка: $p_1^2 = 0{,}4^2 = 0{,}16;$
- для второго стрелка: $p_2^2 = 0{,}6^2 = 0{,}36;$
- для третьего стрелка: $p_3^2 = 0{,}8^2 = 0{,}64;$

Искомая вероятность равна:

$$p = \frac{1}{3} p_1^2 + \frac{1}{3} p_2^2 + \frac{1}{3} p_3^3 = \frac{1}{3}(0{,}16 + 0{,}36 + 0{,}64) = \frac{29}{75}$$

Пример. По цели производится 5 выстрелов. Вероятность попадания для каждого выстрела равна 0,4. Найти вероятность того, что в цель попали не менее трех раз.

Вероятность не менее трех попаданий складывается из вероятности пяти попаданий, четырех попаданий и трех попаданий.

Т.к. выстрелы независимы, то можно применить формулу Бернулли вероятности того, что в m испытаниях событие в вероятностью p наступает ровно n раз.

$$P_{m,n} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m (1-p)^{n-m}$$

В случае пяти попаданий из пяти возможных:

$$P_{5,5} = p^5 = 0{,}4^5 = 0{,}01024$$

Четыре попадания из пяти выстрелов:

$$P_{4,5} = \frac{5!}{4!\cdot 1!} p^4 (1-p) = 0{,}0768$$

Три попадания из пяти:

$$P_{3,5} = \frac{5!}{3!\cdot 2!} p^3 (1-p)^2 = 0{,}2304$$

Окончательно, получаем вероятность не менее трех попаданий из пяти выстрелов:

$$P = 0{,}01204 + 0{,}0768 + 0{,}2304 = 0{,}31744$$

Пример. Вероятность хотя бы одного попадания в мишень стрелком при трех выстрелах равна 0,875. Найти вероятность попадания в мишень при одном выстреле.

Если обозначить p – вероятность попадания стрелком в мишень при одном выстреле, то вероятность промаха при одном выстреле, очевидно, равна $(1-p)$.

Вероятность трех промахов из трех выстрелов равна $(1-p)^3$. Эта вероятность равна 1 – 0,875 = 0,125, т.е. в цель не попадают ни одного раза.

Получаем: $(1-p)^3 = 0{,}125;\qquad 1-p = 0{,}5;\qquad p = 0{,}5.$

Пример. В первой коробке содержится 10 шаров, из них 8 белых; во второй коробке 20 шаров, из них 4 белых. Из каждой коробки наугад извлекли по одному шару, а затем из этих двух шаров наугад берут один шар. Найти вероятность того, что этот шар белый.

Вероятность того, что взятый из первой коробки шар белый - $P_1(Б) = 0{,}8$, что не белый - $P_1(НБ) = 0{,}2$.

Вероятность того, что взятый из второй коробки шар белый - $P_2(Б) = 0{,}2$, что не белый - $P_2(НБ) = 0{,}8$.

Вероятность того, что повторно выбран шар, извлеченный из первой коробки и вероятность того, что повторно выбран шар, извлеченный из второй коробки, равны 0,5.

Вероятность того, что повторно выбран шар, извлеченный из первой коробки, и он белый - $p_1 = 0,5 \cdot P_1(Б) = 0,5 \cdot 0,8 = 0,4$.

Вероятность того, что повторно выбран шар, извлеченный из второй коробки, и он белый - $p_2 = 0,5 \cdot P_2(Б) = 0,5 \cdot 0,2 = 0,1$.

Вероятность того, что повторно будет выбран белый шар, равна

$$P = p_1 + p_2 = 0,4 + 0,1 = 0,5.$$

Пример. Имеется пять винтовок, три из которых снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит цель при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95, для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,7. Найти вероятность того, что цель будет поражена, если стрелок произведет один выстрел из наугад выбранной винтовки.

Вероятность того, что выбрана винтовка с оптическим прицелом, обозначим $P_0 = \frac{3}{5}$, а вероятность того, что выбрана винтовка без оптического прицела, обозначим $P_{БО} = \frac{2}{5}$.

Вероятность того, что выбрали винтовку с оптическим прицелом, и при этом цель была поражена $P_1 = P_0 \cdot P(ПЦ/О)$, где *P(ПЦ/О)* – вероятность поражения цели из винтовки с оптическим прицелом.

Аналогично, вероятность того, что выбрали винтовку без оптического прицела, и при этом цель была поражена $P_1 = P_{БО} \cdot P(ПЦ/БО)$, где *P(ПЦ/БО)* – вероятность поражения цели из винтовки без оптического прицела.

Окончательная вероятность поражения цели равна сумме вероятностей P_1 и P_2, т.к. для поражения цели достаточно, чтобы произошло одно из этих несовместных событий.

$$P = P_1 + P_2 = 0,95 \cdot 0,6 + 0,7 \cdot 0,4 = 0,57 + 0,28 = 0,85$$

Пример. Трое охотников одновременно выстрелили по медведю, который был убит одной пулей. Определить вероятность того, что медведь был убит первым стрелком, если вероятности попадания для этих стрелков равны соответственно 0,3, 0,4, 0,5.

В этой задаче требуется определить вероятность гипотезы уже после того, как событие уже совершилось. Для определения искомой вероятности надо воспользоваться формулой Бейеса. В нашем случае она имеет вид:

$$P(H_1/A)=\frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)+P(H_3)P(A/H_3)}$$

В этой формуле H_1, H_2, H_3 – гипотезы, что медведя убьет первый, второй и третий стрелок соответственно. До произведения выстрелов эти гипотезы равновероятны и их вероятность равна $\frac{1}{3}$.

$P(H_1/A)$ – вероятность того, что медведя убил первый стрелок при условии, что выстрелы уже произведены (событие А).

Вероятности того, что медведя убьет первый, второй или третий стрелок, вычисленные до выстрелов, равны соответственно:

$$P(A/H_1)=p_1q_2q_3=0{,}3\cdot0{,}6\cdot0{,}5=0{,}09$$
$$P(A/H_2)=q_1p_2q_3=0{,}7\cdot0{,}4\cdot0{,}5=0{,}14$$
$$P(A/H_3)=q_1q_2p_3=0{,}7\cdot0{,}6\cdot0{,}5=0{,}21$$

Здесь $q_1=0{,}7$; $q_2=0{,}6$; $q_3=0{,}5$ – вероятности промаха для каждого из стрелков, рассчитаны как $q=1-p$, где p – вероятности попадания для каждого из стрелков.

Подставим эти значения в формулу Бейеса:

$$P(H_1/A)=\frac{0{,}09}{0{,}44}=\frac{9}{44}.$$

<u>Пример.</u> Последовательно послано четыре радиосигнала. Вероятности приема каждого из них не зависят от того, приняты ли остальные сигналы, или нет. Вероятности приема сигналов равны соответственно 0,2, 0,3, 0,4, 0,5. Определить вероятность приема трех радиосигналов.

Событие приема трех сигналов из четырех возможно в четырех случаях:

$$P_A=p_1p_2p_3q_4=0{,}2\cdot0{,}3\cdot0{,}4\cdot0{,}5=0{,}012$$
$$P_B=p_1p_2q_3p_4=0{,}2\cdot0{,}3\cdot0{,}6\cdot0{,}5=0{,}018$$
$$P_C=p_1q_2p_3p_4=0{,}2\cdot0{,}7\cdot0{,}4\cdot0{,}5=0{,}028$$
$$P_D=q_1p_2p_3p_4=0{,}8\cdot0{,}3\cdot0{,}4\cdot0{,}5=0{,}048$$

Для приема трех сигналов необходимо совершение одного из событий А, В, С или D. Таким образом, находим искомую вероятность:

$$P=0{,}012+0{,}018+0{,}028+0{,}048=0{,}106.$$

<u>Пример.</u> Двадцать экзаменационных билетов содержат по два вопроса, которые не повторяются. Экзаменующийся знает ответы только на 35 вопросов. Определить вероятность того, что экзамен будет сдан, если для этого достаточно ответить на два вопроса одного билета или на один вопрос одного билета и на указанный дополнительный вопрос из другого билета.

В общей сложности имеется 40 вопросов (по 2 в каждом из 20 билетов). Вероятность того, что выпадает вопрос, на который ответ известен, очевидно, равна $\frac{35}{40}$.

Для того, чтобы сдать экзамен, требуется совершение одного из трех событий:

1) Событие A – ответили на первый вопрос (вероятность $\frac{35}{40}$) и ответили на второй вопрос (вероятность $\frac{34}{39}$). Т.к. после успешного ответа на первый вопрос остается еще 39 вопросов, на 34 из которых ответы известны.

$$P(A) = \frac{35}{40} \cdot \frac{34}{39} = 0{,}7628$$

2) Событие B – на первый вопрос ответили (вероятность $\frac{35}{40}$), на второй – нет (вероятность $\frac{5}{39}$), на третий – ответили (вероятность $\frac{34}{38}$).

$$P(B) = \frac{35}{40} \cdot \frac{5}{39} \cdot \frac{34}{38} = 0{,}1004$$

3) Событие C – на первый вопрос не ответили (вероятность $\frac{5}{40}$), на второй – ответили (вероятность $\frac{35}{39}$), на третий – ответили (вероятность $\frac{34}{38}$).

$$P(C) = \frac{5}{40} \cdot \frac{35}{39} \cdot \frac{34}{38} = 0{,}1004$$

Вероятность того, что при заданных условиях экзамен будет сдан равна:

$$P = P(A) + P(B) + P(C) = 0{,}9636$$

<u>Пример.</u> Имеются две партии однородных деталей. Первая партия состоит из 12 деталей, 3 из которых - бракованные. Вторая партия состоит из 15 де-

талей, 4 из которых – бракованные. Из первой и второй партий извлекают по две детали. Какова вероятность того, что среди них нет бракованных деталей.

Вероятность оказаться не бракованной для первой детали, извлеченной из первой партии, равна $p_1 = \frac{9}{12}$, для второй детали, извлеченной из первой партии при условии, что первая деталь была не бракованной - $p_2 = \frac{8}{11}$.

Вероятность оказаться не бракованной для первой детали, извлеченной из второй партии, равна $p_3 = \frac{11}{15}$, для второй детали, извлеченной из второй партии при условии, что первая деталь была не бракованной - $p_4 = \frac{10}{14}$.

Вероятность того, что среди четырех извлеченных деталей нет бракованных, равна:

$$P = \frac{9 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 10}{12 \cdot 11 \cdot 15 \cdot 14} = 0{,}2857$$

Рассмотрим тот же пример, но несколько с другим условием.

Пример. Имеются две партии однородных деталей. Первая партия состоит из 12 деталей, 3 из которых - бракованные. Вторая партия состоит из 15 деталей, 4 из которых – бракованные. Из первой партии извлекаются наугад 5 деталей, а из второй – 7 деталей. Эти детали образуют новую партию. Какова вероятность достать из них бракованную деталь?

Для того, чтобы выбранная наугад деталь была бы бракованной, необходимо выполнение одного из двух несовместных условий:

1) Выбранная деталь была из первой партии (вероятность - $\frac{5}{12}$) и при этом она – бракованная (вероятность - $\frac{3}{12}$). Окончательно:

$$p_1 = \frac{5}{12} \cdot \frac{3}{12} = 0{,}1041;$$

2) Выбранная деталь была из второй партии (вероятность - $\frac{7}{12}$) и при этом она – бракованная (вероятность - $\frac{4}{15}$). Окончательно:

$$p_2 = \frac{7}{12} \cdot \frac{4}{15} = 0{,}1556;$$

Окончательно, получаем: $p = p_1 + p_2 = 0{,}2597$.

Пример. В урне 3 белых и 5 черных шаров. Из урны вынимают наугад два шара. Найти вероятность того, что эти шары не одного цвета.

Событие, состоящее в том, что выбранные шары разного цвета произойдет в одном из двух случаев:

1) Первый шар белый (вероятность - $\frac{3}{8}$), а второй – черный (вероятность - $\frac{5}{7}$).

2) Первый шар черный (вероятность - $\frac{5}{8}$), а второй – белый (вероятность - $\frac{3}{7}$).

Окончательно получаем: $p = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} + \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{15}{28}$.

Контрольная работа

Вариант I

1. Имеется материал семи различных цветов. Сколькими способами можно составить трехцветный полосатый флаг (3 горизонтальные полосы)?
2. У врача есть три вида одного лекарства, 5 видов - другого и 7 видов – третьего. В течение девяти дней он каждый день предлагает больному по одному лекарству. Сколькими способами он может выделить больному лекарства?
3. В ящике находятся 20 лампочек, среди которых 4 перегоревших. Найти вероятность того, что 10 лампочек, взятых наудачу из ящика, будут гореть.
4. На АТС могут поступать вызовы трех типов. Вероятности поступления вызовов первого, второго и третьего типа соответственно равны 0,2; 0,3; 0,5. Поступило три вызова. Какова вероятность того, что: a) все они разных типов; b) среди них нет вызова второго типа?
5. На елочный базар поступают елки с трех лесхозов, причем первый лесхоз поставил 50% елок, второй – 30%, третий 20%. Среди елок первого лесхоза 10 % голубых, второго – 20%, третьего 30%. Куплена одна елка. Она оказалась голубой. Какова вероятность, что она поставлена вторым лесхозом?
6. Вероятность того, что изделие не выдержит испытания, равна 0,004. Какова вероятность того, что из 750 проверяемых изделий более трех изделий не выдержат испытания?

Вариант II

1. 12 студентов случайным образом рассаживаются на 12 первых местах одного ряда партера. Какова вероятность, что студенты Петров и Васечкин будут сидеть рядом?
2. Батарея, состоящая из 10 орудий, ведет огонь по 15 кораблям неприятеля. Найти вероятность того, что все орудия стреляют: a) по одной цели; b) по разным целям (выбор цели случаен и не зависит от других)?
3. В ящике находятся 20 лампочек, среди которых 4 перегоревших. Найти вероятность того, что среди десяти лампочек, взятых наудачу из ящика, будут гореть шесть.
4. В магазин трикотажных изделий поступили три вида трикотажных изделий. Вероятность того, что будет куплено изделие первого вида, равна 0,8; второго – 0,9; третьего – 0,85. Найти вероятность того, что будет куплено изделие только одного вида.
5. Турист, заблудившись в лесу, вышел на полянку, от которой, в разные стороны, ведут пять дорог. Если турист пойдет по первой дороге, то вероятность выхода туриста из леса в течение часа составляет около 0,6; если по второй – 0,3; если по третьей – 0,2; если по четвертой – 0,1; если по пятой – 0,1. Какова вероятность того, что турист пошел по первой дороге, если через час он вышел из леса?
6. Вероятность того, что изделие не пройдет контроля, равна 0,125. Какова вероятность того, что среди двенадцати изделий не будет ни одного забракованного контролером?

Вариант III

1. Сколько разных слов можно образовать при перестановке букв слова «математика»?
2. Сколькими способами можно расположить на шахматной доске 8 ладей так, чтобы они не могли взять друг друга?
3. Из стада наудачу отобрано 10 коров, среди них – 6 холмогорской породы, 4 – симментальской. На выставку были отправлены 2 коровы. Найти вероятность того, что они холмогорской породы.
4. В магазин трикотажных изделий поступили три вида трикотажных изделий. Вероятность того, что будет куплено изделие первого вида, равна 0,8; второго – 0,9; третьего – 0,85. Найти вероятность того, что будет куплено изделие только двух видов.
5. Турист, заблудившись в лесу, вышел на полянку, от которой, в разные стороны, ведут пять дорог. Если турист пойдет по первой дороге, то вероятность выхода туриста из леса в течение часа составляет около 0,6; если по второй – 0,3; если по третьей – 0,2; если по четвертой – 0,1; если по пятой – 0,1. Какова вероятность того, что турист выйдет из леса?
6. Подводная лодка атакует крейсер, выпуская по нему одну за другой 4 торпеды. Вероятность попадания каждой торпедой примерно равна ¾. Любая из тор-

пед с одинаковой вероятностью может пробить один из 10 отсеков крейсера, которые в результате попадания наполняются водой. При заполнении хотя бы двух отсеков крейсер тонет. Вычислить вероятность гибели крейсера.

Вариант IV

1. 9 туристов наудачу рассаживаются по 12 вагонам электрички. Найти вероятность того, что все они окажутся: a) в одном вагоне; b) во втором вагоне; c) в разных вагонах.
2. В автопарке 20 экскурсионных автобусов двух марок: 12 и 8 соответственно. Вероятность выезда на экскурсию автобусов каждой марки одна и та же. Какова вероятность того, что после выезда на экскурсию 16 автобусов, в автопарке остались автобусы: a) первой марки; b) одной марки; c) разных марок.
3. С вероятностью 0,4 посланное сообщение принимается при одной передаче. Сколько надо сделать передач, чтобы с вероятностью не менее 0,9 она была принята хотя бы один раз?
4. В одной коробке находится 4 красных, 5 зеленых и 3 черных карандаша, а в другой – 3 красных и 2 черных. Из первой коробки взяты три карандаша, а из второй – два. Какова вероятность того, что все вытащенные карандаши одного цвета?
5. Из 1000 ламп 590 принадлежит 1-й партии, 200 – 2-й, остальные – 3-й партии. В 1-й партии 6%, во 2-й – 5%, в 3-й – 4% бракованных ламп. Наудачу выбирается одна лампа. Какова вероятность того, что она бракованная?
6. Проведено 8 независимых испытаний, каждое из которых заключается в одновременном подбрасывании двух монет. Найти вероятность того, что: a) в трех испытаниях из восьми появится по 2 герба; b) не менее двух раз выпадет 2 герба.

Вариант V

1. В пятизначном телефонном номере стерлись три последние цифры. Найти вероятность того, что стерлись: a) одинаковые цифры; b) разные цифры.
2. На устройство поступают 2 сигнала, причем поступление каждого сигнала, в течение часа, равновозможное. Устройство срабатывает, если разность между моментами поступления сигналов меньше 10 минут. Найти вероятность того, что устройство сработает.
3. В урне находится 40 шаров. Вероятность того, что 2 извлеченных шара окажутся белыми, равна 7/60. Сколько в урне белых шаров?
4. Вероятность потери письма в почтовом отделении равна 0,03, а телеграммы – 0,01. Отправлено два письма и одна телеграмма. Какова вероятность того, что дойдет: a) только телеграмма; b) хотя бы одно из отправлений?
5. В пункте проката имеется 8 новых и 10 подержанных (т. е. хотя бы раз использованных) автомобилей. 3 машины взяли наудачу и спустя некоторое время вернули. После этого вновь наудачу взяли напрокат два автомобиля. Какова вероятность того, что оба автомобиля новые?

6. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0,8. Найти вероятность того. Что при 5 выстрелах цель будет поражена: a) 2 раза; b) не менее 2 раз; c) не будет поражена ни разу.

Вариант VI

1. Два приятеля Васечкин и Сидоров решили, что за билетами в кино пойдет тот, у кого выпадет меньшее число очков при бросании игральной кости. Какова вероятность того, что за билетами пойдет: a) Сидоров; b) проигравший; c) выигравший?
2. В ящике 50 годных и 16 дефектных деталей. Сборщик наудачу достает 8 деталей. Найти вероятность того, что среди них: a) нет дефектных; b) 3 дефектных.
3. Вероятность того, что в результате 5 независимых опытов событие *A* (предполагается, что она одна и та же во всех опытах) произойдет хотя бы один раз, равна 0,99757. Определить вероятность появления события при одном опыте.
4. В мастерской три станка. Они требуют наладки в течение смены с вероятностями 0,05; 0,1; 0,3 соответственно. Какова вероятность того. Что в течение смены потребуется наладить: a) все станки; b) только один станок.
5. В первой урне 3 белых и 7 черных шаров, во второй 5 белых и 2 черных. Из первой урны переложили во вторую три шара, затем из второй урны извлечен один шар. Какова вероятность того, что он белый?
6. По каналу связи передаются 7 сообщений, каждое из которых, независимо от других, может быть искажено с вероятностью 0,15. Найти вероятность того, что будет правильно принято не менее двух сообщений.

Вариант VII

1. В ящике лежат 9 кубиков с номерами от 1 до 9. Последовательно извлекаются три кубика. Найти вероятность того, что появятся кубики: a) с номерами 2, 5, 9; b) с номерами 5, 2, 9; c) с номерами 4, 5, 4.
2. 52 игральные карты раздаются 4 игрокам. Найти вероятность того, что: a) будут у одного игрока; b) каждый игрок получил один туз.
3. Три стрелка делают по одному выстрелу в цель. Вероятности попаданий в цель соответственно равны 0,6; 0,85; 0,7. Какова вероятность попадания в цель: a) только второго стрелка; b) хотя бы одного стрелка?
4. В мешке смешаны нити, среди которых 30% красных, 60% синих, а остальные белые. Какова вероятность того, что три вынутые наудачу нити будут одного цвета?
5. На склад с оружием совершают налет четыре самолета. Вероятность поражения самолета системой ПВО равна 0,8. При прорыве k самолетов атакуемый объект будет уничтожен с вероятностью p_k. Найти вероятность уничтожения склада.
6. Найти вероятность того, что в серии из 9 подбрасываний игральной кости 5 очков выпадет менее трех раз.

Вариант VIII

1. В круг вписан квадрат. Найти вероятность того, что случайная точка, брошенная в круг, не попадет в квадрат.
2. В цветочном ларьке продаются 8 азалий и 5 кактусов. Какова вероятность того, что среди проданных растений: a) 2 азалии; b) все кактусы?
3. В ящике 6 белых и 30 черных шаров. Какова вероятность того, что из двух вынутых шаров один белый, а другой черный?
4. Вероятность дозвониться с первой попытки в справочное бюро аэропорта равна 0,4. Какова вероятность того, что: a) удастся дозвониться при втором звонке; b) придется звонить не более трех раз?
5. Батарея из трех орудий произвела залп, причем два снаряда попали в цель. Найти вероятность того, что третье орудие попала, если вероятности попадания в цель 1-м, 2-м, 3-м орудиями соответственно равны 0,5; 0,3; 0,4.
6. Сообщение содержит 500 символов. Вероятность искажения символа при передаче постоянна и равна p. Если хотя бы один символ искажен, то сообщение будет принято неверно. При каких значениях p вероятность того, что сообщение будет успешно передано, окажется равной 0,95?

Вариант IX

1. В читальном зале АмГУ имеется 6 учебников по теории вероятностей, из которых 3 в мягком переплете. Библиотекарь взял два учебника. Найти вероятность того, что оба учебника окажутся в мягком переплете.
2. В группе 17 юношей и 8 девушек. Какова вероятность того, что студент, фамилия которого первая в списке, окажется девушкой?
3. На военных учениях летчик получил задание «уничтожить» 3 рядом расположенных склада боеприпасов противника. На борту самолета одна бомба. Вероятность попадания в первый склад примерно равна 0,01, во второй – 0,008, в третий – 0,025. Любое попадание в результате детонации вызывает взрыв всех складов. Какова вероятность того, что склады противника будут уничтожены?
4. Для некоторой местности в июле шесть пасмурных дней. Найти вероятность того, что первого и второго июля будет ясная погода.
5. Из заготовленной для посева пшеницы зерно первого сорта составляет 40%, второго сорта – 50%, третьего сорта – 10%. Вероятность того, что взойдет зерно первого сорта, равна 0,8; второго - 0,5; третьего – 0,3. Найти вероятность того, что взойдет наугад взятое зерно.
6. Семена пшеницы содержат 0,2% сорняков. Найти вероятность того, что в 1000 семян будет 6 семян сорняков.

Вариант X

1. Из пяти букв разрезной азбуки составлено слово «книга». Неграмотный мальчик перемешал буквы, а потом наугад их собрал. Какова вероятность того, что он опять составил слово «книга»?

2. На первом этаже девятиэтажного дома в лифт зашли 3 человека. Вероятность выхода каждого из лифта на любом этаже одинакова. Найдите вероятность того, что: a) все вышли из лифта на четвертом этаже; b) все вышли из лифта на одном и том же этаже; c) все выходили из лифта на разных этажах.
3. В ящике лежат 20 электрических лампочек, из которых 3 нестандартные. Найти вероятность того, что взятые одна за другой две лампочки окажутся стандартными.
4. Из заготовленной для посева пшеницы зерно первого сорта составляет 40%, второго сорта – 50%, третьего сорта – 10%. Вероятность того, что взойдет зерно первого сорта, равна 0,8; второго - 0,5; третьего – 0,3. Зерно взошло. Найти вероятность того, что это было зерно первого сорта.
5. Всхожесть семян пшеницы составляет 90%. Определить наиболее вероятное число всходов из 200 посеянных семян.
6. Вероятность того, что наугад взятое изделие окажется пригодным без доводки, равна 0,97. Контролер проверяет 400 изделий. Если среди них окажется 16 или более нуждающихся в доводке, вся пария возвращается на доработку. Найти вероятность того, что партия изделий будет принята.

Вариант XI

1. 15 шаров произвольно раскладываются по 5 ящикам. Чему равна вероятность того, что в первом ящике окажется 1 шар, во втором – 2, в третьем – 3, в четвертом – 4 и в пятом – 5 шаров?
2. 5 зенитных пулеметов ведут огонь по 4 самолетам противника. Каждый пулемет выбирает объект обстрела наугад. Какова вероятность того, что все 5 пулеметов ведут огонь по одному и тому же самолету?
3. Две подруги условились встретиться в Москве у памятника А. С. Пушкину между 12 и 13 часами. Пришедшая первой ждет вторую в течение α минут (α<60), после чего уходит. Чему равна вероятность встречи?
4. Бросают три монеты. Чему равна вероятность появления хотя бы одного орла?
5. Из заготовленной для посева пшеницы зерно первого сорта составляет 40%, второго сорта – 50%, третьего сорта – 10%. Вероятность того, что взойдет зерно первого сорта, равна 0,8; второго - 0,5; третьего – 0,3. Найти вероятность того, что взойдет зерно второго сорта.
6. Игральная кость бросается 16 раз. Найти наивероятнейшее число k_0 появлений числа очков, кратного трем. Найти вероятность $P_{16}(k_0)$?

Вариант XII

1. На 5 карточках написано по одной цифре из набора 1, 2, 3, 4 и 5. Наугад выбираются одна за другой две карточки. Какова вероятность того, что число на второй карточке больше, чем на первой?

2. Замок содержит на общей оси 4 диска, каждый из которых разделен на 6 секторов, отмеченных цифрами. Замок может быть открыт только в том случае, если все диски занимают определенные положения относительно корпуса замка, их цифры образуют определенное число, составляющее «секрет» замка. Какова вероятность открыть замок, установив произвольную комбинацию цифр?
3. На тепловой электростанции 15 сменных инженеров, из которых 3 женщины. В смену занято 3 человека. Найти вероятность того, что в случайно выбранную смену мужчин окажется не менее 2.
4. На участке две бригады. Вероятность выполнения плана первой бригадой равна 0,8, а вероятность выполнения плана второй – 0,9. Найти вероятность того, что: a) участок выполнит план; b) план выполнит только одна бригада участка; c) хотя бы одна бригада участка выполнит план.
5. Вероятность выживания бактерий после радиоактивного облучения равна 0,004. Найти вероятность того, что после облучения из 500 бактерий останется не менее 3 бактерий.
6. На тракторном заводе рабочий за смену изготавливает 400 деталей. вероятность того, что деталь окажется первого сорта равна 0,8. какова вероятность, что деталей первого сорта будет 330 штук.

Вариант XIII

1. В одном ящике 6 белых и 4 черных шара, в другом – 7 белых и 3 черных. Из каждого ящика наугад вынимается по одному шару. Чему равна вероятность того, что оба шара окажутся белыми?
2. Пятитомное собрание сочинений расположено на полке в случайном порядке. Чему равна вероятность того, что тома стоят в должном порядке справа налево.
3. 12 предметов произвольно расставляют по трем комнатам. Какова вероятность того, что в первой комнате окажется 2 предмета, во второй – 3, а в третьей – 7?
4. Вероятность успешного выполнения упражнения для каждого из двух спортсменов равна 0,5. Спортсмены выполняют упражнение по очереди, причем каждый делает по две попытки. Выполнивший упражнение первым, получает приз. Найти вероятность получения приза спортсменами.
5. Всхожесть семян данного растения составляет 90%. Найти вероятность того, что из четырех посеянных семян взойдут: a) три; b) не менее трех.
6. Книга издана тиражом в 50000 экземпляров. Вероятность того, что в книге имеется дефект брошюровки, равна 0,0001. Найти вероятность того, что тираж содержит 5 неправильно сброшюрованных книг.

Вариант XIV

1. В одном ящике 6 белых и 4 черных шара, в другом – 7 белых и 3 черных. Из каждого ящика наугад вынимается по одному шару. Чему равна вероятность того, что вынутые шары разных цветов?

2. Из чисел 1, 2, 3, 4, 5 наудачу выбираются два числа. Какова вероятность того, что второе число больше первого, если выбор осуществляется с возвращением?
3. Стержень длины 24 ломают на три части, выбирая случайным образом места разлома. Найти вероятность того, что из полученных отрезков можно составить треугольник.
4. Иванов может добраться до работы или автобусом, который ходит через каждые 20 минут, или трамваем, который ходит через каждые 10 минут. Найти вероятность того, что Иванов, подошедший к остановке, уедет в течение ближайших 5 минут?
5. Устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо один от другого. Вероятность отказа любого элемента в течение часа равна 0,002. Найти вероятность того, что за час откажут 4 элемента.
6. В хлопке число длинных волокон составляет 8-%. Какова вероятность того, что среди взятых наудачу 5 волокон длинных окажется: а) три; b) не более двух.

Вариант XV

1. Четырем игрокам раздается поровну колода из 32 карт. Определите вероятность того, что каждый игрок получил карты только одной масти.
2. На паркет, составленный из правильных треугольников со стороной a, случайно падает монета радиуса r. Найти вероятность того, что монета целиком окажется внутри одного из треугольников.
3. В водоеме обитают особи рыб двух близких видов, причем особи первого вида составляют 70% всей популяции, особи второго вида – 30%. На каждые 100 особей первого вида приходится в среднем 65 самцов, а на 100 особей второго вида - 55 самцов. Какова вероятность того, что первая особь, выловленная из этого водоема, окажется самцом?
4. Покупатель ищет необходимую ему книгу, обходя три книжных магазина. Вероятность наличия ее в каждом магазине равна 0,2. что вероятнее – найдет он искомую вещь или нет?
5. Принимая вероятности рождения мальчика и девочки одинаковыми, найти вероятность того, среди 6 новорожденных: а) 4 мальчика; b) не более двух девочек.
6. Вероятность появления бракованной детали равна 0,008. Найти вероятность того, что из 500 случайно отобранных деталей окажется 3 бракованных.

Вариант XVI

1. Какова вероятность того, что при случайном распределении 6 шариков по 6 гнездам одно гнездо окажется пустым?
2. Из букв А, А, И, Л, М, Н разрезной азбуки выбирают наудачу по одной и ставят в ряд. Найти вероятность того, что получится слово: а) МИНА; b) НАЛИМ; с) МАЛИНА?

3. Наудачу выбирают два числа из промежутка [0,1]. Какова вероятность того, что их сумма заключена между ¼ и 1?
4. Три охотника стреляют по кабану. Вероятность попадания в цель первым стрелком равна 0,6, вторым – 0,7, третьим – 0,8. Найти вероятность того, что при одном выстреле попадут в цель: a) все три стрелка; b) попадет хотя бы один из них.
5. В некотором водоеме карпы составляют 80%. Найти вероятность того, что из 5 выловленных в этом водоеме рыб окажется: a) 4 карпа; b) не менее 4 карпов.
6. Семена содержат 0,1% сорняков. Какова вероятность при случайном отборе 2000 семян обнаружить 5 семян сорняков?

Вариант XVII

1. На стоянке автомобилей можно поместить 12 машин в один ряд. Однажды оказались свободны 4 места подряд. Является ли это событием исключительным или столь же часто бывают свободны 4 не соседних места?
2. Какова вероятность того, что произведение двух наугад взятых правильных положительных дробей будет не больше ¾?
3. Стрелок производит выстрел по мишени до первого попадания. Вероятность попадания при одном выстреле равна 0,5. Какова вероятность того, что по мишени будет произведено: a) 5 выстрелов; b) не более 5 выстрелов?
4. В магазин «Электромир» поступили магнитофоны с трех заводов. Вероятность того, что магнитофон изготовлен на первом заводе, равна 0,3, на втором – 0,2, на третьем – 0,5. Вероятность того, что магнитофон окажется бракованным, для первого завода равна 0,2, для второго – 0,1, для третьего – 0,3. Найти вероятность того, что наугад взятый магнитофон окажется не бракованным.
5. Прибор состоит из 4 узлов. Вероятность безотказной работы в течение смены для каждого узла равна 0,8. Узлы выходят из строя независимо один от другого. Найти вероятность того, что за смену откажут: a) два узла; b) не менее двух узлов.
6. Вероятность появления события A в каждом из 150 независимых испытаний равна 0,6. Найти вероятность того, что в этих испытаниях событие A появится: a) не менее 78 и не более 96 раз; b) более 78 раз; c) не более 77 раз.

Вариант XVIII

1. В ящике 90 стандартных и 10 нестандартных деталей. Какова вероятность того, что среди 10 взятых наугад деталей бракованных не окажется?
2. Четверть билетов лотереи – выигрышные. Сколько билетов надо приобрести, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,9, быть уверенным, что выиграет хотя бы один билет?
3. На плоскости нарисованы две концентрические окружности, радиусы которых соответственно 5 и 10 метров. Какова вероятность того, что точка брошенная наугад в большой круг, попадет в кольцо, образованное этими окружностями?

4. Всхожесть семян сои составляет 90%. Определить наиболее вероятное число всходов из 200 посеянных семян.
5. В магазин «Электромир» поступили магнитофоны с трех заводов. Вероятность того, что магнитофон изготовлен на первом заводе, равна 0,3, на втором – 0,2, на третьем – 0,5. Вероятность того, что магнитофон окажется бракованным, для первого завода равна 0,2, для второго – 0,1, для третьего – 0,3. Найти вероятность того, что магнитофон, изготовленный третьим заводом, окажется не бракованным.
6. Семена гречихи содержат 0,2% сорняков. Какова вероятность того, что в 1000 семян будет 6 семян сорняков?

Вариант XIX

1. В одной семье 4 сестры по очереди моют посуду. Из каждых 4 разбитых тарелок 3 разбито младшей, и потому ее называют неуклюжей. Справедливо ли это?
2. В группе студентов, состоящей из 20 человек, 12 юношей и 8 девушек. Для дежурства случайным образом отобрано двое студентов. Какова вероятность того, что среди них будет один юноша и одна девушка?
3. Расстояние от дома до института студент Иванов проходит за 20 минут, а автобус – за 2 минуты. Интервал движения автобусов 30 минут. Студент в случайный момент времени отправляется из дома в институт. Какова вероятность того, что его в пути догонит автобус?
4. Исследователь разыскивает нужные ему сведения в трех справочниках. Вероятности того, что эти сведения находятся в первом, во втором и в третьем справочнике равны соответственно 0,7; 0,6; 0,9. Найти вероятность того, что требуемые сведения содержатся хотя бы в одном справочнике.
5. При взрыве снаряда образуются осколки трех весовых категорий: крупные, средние и мелкие, причем число крупных, средних и мелких осколков составляет соответственно 0,1; 0,3; 0,6 общего числа осколков. При попадании в броню крупный осколок пробивает ее с вероятностью около 0,9, средний – с вероятностью, близкой к 0,2, и мелкий с вероятностью, близкой к 0,05. В броню попал один осколок и пробил ее. Найдите вероятности того, что эта пробоина причинена: крупным, средним и мелким осколком.
6. В телевизоре 12 ламп. Для любой из ламп вероятность, что она останется исправной в течение года, равна 0,9. Какова вероятность того, что: a) в течение года хотя бы одна лампа выйдет из строя; b) в течение года выйдет из строя ровно одна лампа; c) в течение года выйдут из строя 2 лампы?

Вариант XX

1. Найти вероятность того, что 20 студентов одной группы родились: a) в разные дни года (в году 365 дней); b) в один день года; c) 23 февраля.
2. Сколько раз нужно бросить игральную кость, чтобы с вероятностью не меньше 0,9 хотя бы один раз выпало 5 очков?

3. Среди 15 компьютеров, имеющихся в вычислительной лаборатории, лишь 6 новых, а остальные – бывшие в употреблении. Лаборант наугад включает три компьютера. Какова вероятность, что все они окажутся новыми?
4. Какой толщины должна быть монета радиуса 10 миллиметров. Чтобы вероятность попадания на ребро была равна 1/3?
5. Подводная лодка атакует крейсер, выпуская по нему одну за другой 4 торпеды. Вероятность попадания каждой торпедой примерно равна ¾. Любая из торпед с одинаковой вероятностью может пробить один из 10 отсеков крейсера, которые в результате попадания наполняются водой. При заполнении хотя бы двух отсеков крейсер тонет. Вычислить вероятность гибели крейсера.
6. Группе студентов для прохождения производственной практики выделено 30 мест: 15 – в Благовещенске, 8 – в Свободном, 7 – в Белогорске. Какова вероятность того, что студент и студентка, которые в скором времени собираются справить свадьбу, будут посланы для прохождения практики в один и тот же город, если декан ничего не знает об их семейных делах?

Вариант XXI

1. Найти вероятность того, что 20 студентов одной группы родились: a) в разные месяцы года; b) в октябре; c) в разные дни октября.
2. Быстро вращающийся диск разделен на четное число равных секторов, попеременно окрашенных в белый и черный цвет. По диску произведен выстрел. Найти вероятность того, что пуля попадет в один из белых секторов. Предполагается, что вероятность попадания пули в плоскую фигуру пропорциональна площади этой фигуры.
3. На 9 одинаковых карточках написаны буквы Е, Е, Р, Р, С, С, Я, Г, И. Эти карточки выкладывают наудачу в ряд. Какова вероятность того, что при этом получится слово РЕГРЕССИЯ?
4. В одном из ящиков 10 белых и 6 черных шариков, во втором – 7 белых и 9 черных. Произвольно выбирают ящик и из него наугад вынимают шарик. Он белый. Чему равна вероятность того, что и второй шарик, наугад вынутый из этого ящика, окажется белым?
5. При проведении некоторого испытания вероятность появления ожидаемого результата 0,01. сколько раз его нужно провести, чтобы с вероятностью 0,5 можно было ожидать хотя бы одного появления этого результата?
6. По данным телевизионного ателье, в течение гарантийного срока выходит из строя в среднем 12% кинескопов. Какова вероятность того, что из 46 наугад выбранных кинескопов 36 проработают гарантийный срок?

Вариант XXII

1. Какова вероятность того, что произвольно взятое двузначное число делится на 3?
2. Два железнодорожных состава должны подойти к одной и той же платформе. Моменты времени прихода обоих составов независимы и равновозможны в течение данных суток. Найти вероятность того, что одному из железнодорож-

ных составов придется ожидать освобождения платформы, если время стоянки первого состава – 0, 3 часа, а второго – 0,5 часа.

3. В корзине 7 красных и 9 синих шара. Наугад вынимают один шар, рассматривают его на свету и кладут его обратно в корзину. Опять наугад вынимают один шар. Какова вероятность того, что оба шара красные?

4. У рыбака есть три излюбленных места рыбалки. Эти места он посещает с одинаковой вероятностью. Вероятность того, что рыба клюнет в первом месте, равна 1/3, во втором – ½, в третьем – ¼. Известно, что рыбак забросил удочку 3 раза, а вытащил только одну рыбу. Какова вероятность того, что он рыбачил в первом из излюбленных мест?

5. В городе 1900 жителей. Какова вероятность того, что в году есть 4 дня, когда ни один житель города не отмечает свой день рождения?

6. В НИИ земледелия проверяется всхожесть кукурузы. Сколько семян необходимо посеять с вероятностью всхожести 0,99, чтобы частота всхожести отличалась бы от 0,95 меньше чем на 0,01?

Вариант XXIII

1. Какова вероятность того, что произвольно взятое трехзначное число делится на 9?

2. Из 4 видов открыток наудачу выбираются 3 открытки. Найти вероятность того, что все отобранные открытки будут разными.

3. Вероятность того, что смерть человека произойдет на 25-м году жизни примерно 0,006. Застраховано 1000 двадцатичетырехлетних. Годовой взнос 1500 рублей с каждого. В случае смерти застрахованного его родственникам выплачивается 120000 рублей. Какова вероятность того, что в конце года выплата по страховкам превысит сумму страховых взносов?

4. 80% изделий, поступающих в магазин со склада, высшего сорта. Сколько изделий придется взять со склада для контрольной проверки, чтобы с вероятностью 0,99 можно было бы утверждать: в магазине изделий высшего сорта от 75% до 80%?

5. Некачественные сверла составляют 2% всей продукции фабрики. Изготовленные сверла упаковывают в ящики по 100 штук. Какова вероятность того, что: a) в ящике не окажется некачественных сверл; b) в ящике окажется не больше 3 некачественных сверл? Сколько сверл необходимо упаковать в ящик, чтобы с вероятностью не меньше 0.9 в ящике было 100 доброкачественных сверл?

6. Путешественник может купить билет в одной из трех касс железнодорожного вокзала. Вероятность того, что он направится к первой кассе, равна ½, ко второй – 1/3, к третьей – 1/6. Вероятности того, что билетов уже нет в кассах, примерно такие: в первой кассе – 1/5, во второй – 1/6, в третьей – 1/8. Путешественник обратился в одну из касс и получил билет. Определите вероятность того, что он направился к первой кассе.

Вариант XXIV

1. Какова вероятность того, что произвольно взятое четырехзначное число делится на 9?
2. Из 7 видов открыток наудачу выбираются 5 открытки. Найти вероятность того, что все отобранные открытки будут разными.
3. Путешественник может купить билет в одной из трех касс железнодорожного вокзала. Вероятность того, что он направится к первой кассе, равна ½, ко второй – 1/3, к третьей – 1/6. Вероятности того, что билетов уже нет в кассах, примерно такие: в первой кассе – 1/5, во второй – 1/6, в третьей – 1/8. Определите вероятность того, что путешественник купил билет.
4. Случайно встреченное лицо с вероятностью 0,2 может оказаться брюнетом, с вероятностью 0,3 – шатеном, с вероятностью 0,4 – блондином и с вероятностью 0,1 – рыжим. Какова вероятность того, что среди шести случайно встреченных лиц: a) не меньше 4 блондинов; b) хотя бы один рыжий; c) 3 блондина и 3 шатена?
5. Частные конторы страхования жизни заинтересованы в получении прибыли за счет своих клиентов. В одной такой конторе застраховано 10000 клиентов одного возраста и одной социальной группы. Вероятность смерти клиента в течение года примерно 0,006. Каждый клиент 1 января вносит 12 долларов. Если в течение года он умрет, то контора обязана выплатить его родственникам 1000 долларов. Чему равна вероятность того, что: a) контора разорится; b) контора получит не менее 40000 долларов прибыли?
6. Игральную кость бросают 12000 раз. Какова вероятность того, что шестерка появится не менее 1900 и не более 2100 раз?

Приложение I

Таблица значений функции $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Приложение II

Таблица значений функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

x	Ф(x)	x	Ф(x)	x	Ф(x)	x	Ф(x)
0,00	0,0000	0,65	0,2422	1,30	0,4032	1,95	0,4744
0,01	0,0040	0,66	0,2454	1,31	0,4049	1,96	0,4750
0,02	0,0080	0,67	0,2486	1,32	0,4066	1,97	0,4756
0,03	0,0120	0,68	0,2517	1,33	0,4082	1,98	0,4761
0,04	0,0160	0,69	0,2549	1,34	0,4099	1,99	0,4767
0,05	0,0199	0,70	0,2580	1,35	0,4115	2,00	0,4772
0,06	0,0239	0,71	0,2611	1,36	0,4131	2,02	0,4783
0,07	0,0279	0,72	0,2642	1,37	0,4147	2,04	0,4793
0,08	0,0319	0,73	0,2673	1,38	0,4162	2,06	0,4803
0,09	0,0359	0,74	0,2703	1,39	0,4177	2,08	0,4812
0,10	0,0398	0,75	0,2734	1,40	0,4192	2,10	0,4821
0,11	0,0438	0,76	0,2764	1,41	0,4207	2,12	0,4830
0,12	0,0478	0,77	0,2794	1,42	0,4222	2,14	0,4838
0,13	0,0517	0,78	0,2823	1,43	0,4236	2,16	0,4846
0,14	0,0557	0,79	0,2852	1,44	0,4251	2,18	0,4854
0,15	0,0596	0,80	0,2881	1,45	0,4265	2,20	0,4861
0,16	0,0636	0,81	0,2910	1,46	0,4279	2,22	0,4868
0,17	0,0675	0,82	0,2939	1,47	0,4292	2,24	0,4875
0,18	0,0714	0,83	0,2967	1,48	0,4306	2,26	0,4881
0,19	0,0753	0,84	0,2995	1,49	0,4319	2,28	0,4887
0,20	0,0793	0,85	0,3023	1,50	0,4332	2,30	0,4893
0,21	0,0832	0,86	0,3051	1,51	0,4345	2,32	0,4898
0,22	0,0871	0,87	0,3078	1,52	0,4357	2,34	0,4904
0,23	0,0910	0,88	0,3106	1,53	0,4370	2,36	0,4909
0,24	0,0948	0,89	0,3133	1,54	0,4382	2,38	0,4913
0,25	0,0987	0,90	0,3159	1,55	0,4394	2,40	0,4918
0,26	0,1026	0,91	0,3186	1,56	0,4406	2,42	0,4922
0,27	0,1064	0,92	0,3212	1,57	0,4418	2,44	0,4927
0,28	0,1103	0,93	0,3238	1,58	0,4429	2,46	0,4931
0,29	0,1141	0,94	0,3264	1,59	0,4441	2,48	0,4934
0,30	0,1179	0,95	0,3289	1,60	0,4452	2,50	0,4938
0,31	0,1217	0,96	0,3315	1,61	0,4463	2,52	0,4941
0,32	0,1255	0,97	0,3340	1,62	0,4474	2,54	0,4945
0,33	0,1293	0,98	0,3365	1,63	0,4484	2,56	0,4948
0,34	0,1331	0,99	0,3389	1,64	0,4495	2,58	0,4951
0,35	0,1368	1,00	0,3413	1,65	0,4505	2,60	0,4953
0,36	0,1406	1,01	0,3438	1,66	0.4515	2,62	0,4956
0,37	0,1443	1,02	0,3461	1,67	0,4525	2,64	0,4959
0,38	0,1480	1,03	0,3485	1,68	0,4535	2,66	0,4961
0,39	0,1517	1,04	0,3508	1,69	0,4545	2,68	0,4963
0,40	0,1554	1,05	0,3531	1,70	0,4554	2,70	0,4965
0,41	0,1591	1,06	0,3554	1,71	0,4564	2,72	0,4967

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
0,42	0,1628	1,07	0,3577	1,72	0,4573	2,74	0,4969
0,43	0,1664	1,08	0,3599	1,73	0,4582	2,76	0,4971
0,44	0,1700	1,09	0,3621	1,74	0,4591	2,78	0,4973
0,45	0,1736	1,10	0,3643	1,75	0,4599	2,80	0,4974
0,46	0,1772	1,11	0,3665	1,76	0,4608	2,82	0,4976
0,47	0,1808	1,12	0,3686	1,77	0,4616	2,84	0,4977
0,48	0,1844	1,13	0,3708	1,78	0,4625	2,86	0,4979
0,49	0,1879	1,14	0,3729	1,79	0,4633	2,88	0,4980
0,50	0,1915	1,15	0,3749	1,80	0,4641	2,90	0,4981
0,51	0,1950	1,16	0,3770	1,81	0,4649	2,92	0,4982
0,52	0,1985	1,17	0,3790	1,82	0,4656	2,94	0,4984
0,53	0,2019	1,18	0,3810	1,83	0,4664	2,96	0,4985
0,54	0,2054	1,19	0,3830	1,84	0,4671	2,98	0,4986
0,55	0,2088	1,20	0,3849	1,85	0,4678	3,00	0,49865
0,56	0,2123	1,21	0,3869	1,86	0,4686	3,20	0,49931
0,57	0,2157	1,22	0,3883	1,87	0,4693	3,40	0,49966
0,58	0,2190	1,23	0,3907	1,88	0,4699	3,60	0,499841
0,59	0,2224	1,24	0,3925	1,89	0,4706	3,80	0,499928
0,60	0,2257	1,25	0,3944	1,90	0,4713	4,00	0,499968
0,61	0,2291	1,26	0,3962	1,91	0,4719	4,50	0,499997
0,62	0,2324	1,27	0,3980	1,92	0,4726	5,00	0,499997
0,63	0,2357	1,28	0,3997	1,93	0,4732		
0,64	0,2389	1,29	0,4015	1,94	0,4738		

ТЕСТ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

“Теория вероятностей и математическая статистика”

для специальностей 071900 и 220200

Вариант I

1. Из $\boldsymbol{n}$ вопросов по теории вероятностей, вошедших в билеты, студент знает $\boldsymbol{m}$. Какова вероятность того, что взятый наудачу билет, содержащий два вопроса, будет состоять из подготовленных им вопросов. Если $\boldsymbol{n}$ = 30, $\boldsymbol{m}$ = 26.
   1) – 0.558; **2**) – 0.571; **3**) – 0.585; **4**) – 0.637; **5**) – 0.719;
   6) – 0.747; **7**) – 0.754; **8**) – 0.808; **9**) – 0.825; **10**) – 0.869.

2. Среди $\boldsymbol{n}$ лотерейных билетов $\boldsymbol{k}$ выигрышных. Наудачу взяли $\boldsymbol{m}$ билетов. Определить вероятность того, что среди них $\boldsymbol{l}$ выигрышных. Если $\boldsymbol{n}$ = 10, $\boldsymbol{l}$ = 2, $\boldsymbol{m}$ = 4, $\boldsymbol{k}$ = 6.
   1) – 0.571; **2**) – 0.509; **3**) – 0.500; **4**) – 0.476; **5**) – 0.455;
   6) – 0.429; **7**) – 0.424; **8**) – 0.417; **9**) – 0.357; **10**) – 0.182.

3. В двух производственных партиях изготовлено, соответственно, $\boldsymbol{k_1}$ и $\boldsymbol{k_2}$ % доброкачественных изделий. Наудачу выбирают по одному изделию из каждой партии. Какова вероятность обнаружить среди них: хотя бы одно бракованное изделие, два бракованных, одно бракованное. Если $\boldsymbol{k_1}$ = 71, $\boldsymbol{k_2}$ = 47.
   1) - 0.270, 0.090, 0.640; **2**) - 0.275, 0.095, 0.630; **3**) - 0.281, 0.101, 0.618;
   4) - 0.300, 0.120, 0.580; **5**) - 0.300, 0.130, 0.570; **6**) - 0.304, 0.134, 0.562;
   7) - 0.326, 0.146, 0.528; **8**) - 0.331, 0.151, 0.158; **9**) - 0.334, 0.154, 0.513;
   10) - 0.329, 0.149, 0.522.

4. Было произведено три партии электрических ламп, две из которых содержат по $\boldsymbol{n_1}$ и $\boldsymbol{n_2}$ штук, а сумма всех изделий составляет 1000 единиц. В первой партии содержится 6% бракованных ламп, во второй – 5%, в третьей – 4%. Из всего количества ламп наудачу выбирают одну. Определить вероятность того, что выбранное изделие является бракованным. Если $\boldsymbol{n_1}$ = 100, $\boldsymbol{n_2}$ = 250.
   1) – 0.044; **2**) – 0.045; **3**) – 0.046; **4**) – 0.048; **5**) – 0.049;
   6) – 0.050; **7**) – 0.051; **8**) – 0.053; **9**) – 0.054; **10**) – 0.055.

5. В магазин поступают однотипные изделия с трех заводов, причем каждый завод поставляет $\boldsymbol{n_i}$ % изделий. Среди изделий каждого завода $\boldsymbol{m_i}$ % первосортных. Было куплено одно изделие, оказавшееся первосортным. Определить вероятность того, что это изделие было выпущено $\boldsymbol{j}$-м заводом. Если $\boldsymbol{n_1}$ = 70, $\boldsymbol{n_2}$ = 80, $\boldsymbol{n_3}$ = 90, $\boldsymbol{m_1}$ = 50, $\boldsymbol{m_2}$ = 20, $\boldsymbol{m_3}$ = 30, $\boldsymbol{j}$ = 1.
   1) – 0.553; **2**) – 0.455; **3**) – 0.419; **4**) – 0.386; **5**) – 0.325;
   6) – 0.312; **7**) – 0.289; **8**) – 0.236; **9**) – 0.233; **10**) – 0.211.

6. Вероятность изготовления детали высшего сорта на некотором станке равна $\boldsymbol{P}$. Для проведения контроля, наудачу отбирают $\boldsymbol{n}$ из произведенных на нем

изделий. Определить вероятность того, что среди них будет ровно m штук высшего сорта. Если $P = 0.40$, $n = 10$, $m = 5$.

1) – 0.046; **2**) – 0.075; **3**) – 0.092; **4**) – 0.128; **5**) – 0.146;
6) – 0.187; **7**) – 0.201; **8**) – 0.251; **9**) – 0.284; **10**) – 0.367.

ТЕСТ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

“Теория вероятностей и математическая статистика”
для специальностей 071900 и 220200

Вариант II

1. Из n вопросов по теории вероятностей, вошедших в билеты, студент знает m. Какова вероятность того, что взятый наудачу билет, содержащий два вопроса, будет состоять из подготовленных им вопросов. Если $n = 30$, $m = 28$.

   1) – 0.558; **2**) – 0.571; **3**) – 0.585; **4**) – 0.637; **5**) – 0.719;
   6) – 0.747; **7**) – 0.754; **8**) – 0.808; **9**) – 0.825; **10**) – 0.869.

2. Среди n лотерейных билетов k выигрышных. Наудачу взяли m билетов. Определить вероятность того, что среди них l выигрышных. Если $n = 10$, $l = 2$, $m = 3$, $k = 6$.

   1) – 0.571; **2**) – 0.509; **3**) – 0.500; **4**) – 0.476; **5**) – 0.455;
   6) – 0.429; **7**) – 0.424; **8**) – 0.417; **9**) – 0.357; **10**) – 0.182.

3. В двух производственных партиях изготовлено, соответственно, k_1 и k_2 % доброкачественных изделий. Наудачу выбирают по одному изделию из каждой партии. Какова вероятность обнаружить среди них: хотя бы одно бракованное изделие, два бракованных, одно бракованное. Если $k_1 = 78$, $k_2 = 39$.

   1) - 0.270, 0.090, 0.640; **2**) - 0.275, 0.095, 0.630; **3**) - 0.281, 0.101, 0.618;
   4) - 0.300, 0.120, 0.580; **5**) - 0.300, 0.130, 0.570; **6**) - 0.304, 0.134, 0.562;
   7) - 0.326, 0.146, 0.528; **8**) - 0.331, 0.151, 0.158; **9**) - 0.334, 0.154, 0.513;
   10) - 0.329, 0.149, 0.522.

4. Было произведено три партии электрических ламп, две из которых содержат по n_1 и n_2 штук, а сумма всех изделий составляет 1000 единиц. В первой партии содержится 6% бракованных ламп, во второй – 5%, в третьей – 4%. Из всего количества ламп наудачу выбирают одну. Определить вероятность того, что выбранное изделие является бракованным. Если $n_1 = 430$, $n_2 = 180$.

   1) – 0.044; **2**) – 0.045; **3**) – 0.046; **4**) – 0.048; **5**) – 0.049;
   6) – 0.050; **7**) – 0.051; **8**) – 0.053; **9**) – 0.054; **10**) – 0.055.

5. В магазин поступают однотипные изделия с трех заводов, причем каждый завод поставляет n_i % изделий. Среди изделий каждого завода m_i % первосортных. Было куплено одно изделие, оказавшееся первосортным. Определить вероятность того, что это изделие было выпущено j-м заводом. Если $n_1 = 70$, $n_2 = 80$, $n_3 = 90$, $m_1 = 50$, $m_2 = 20$, $m_3 = 30$, $j = 2$.

   1) – 0.553; **2**) – 0.455; **3**) – 0.419; **4**) – 0.386; **5**) – 0.325;
   6) – 0.312; **7**) – 0.289; **8**) – 0.236; **9**) – 0.233; **10**) – 0.211.

6. Вероятность изготовления детали высшего сорта на некотором станке равна $\boldsymbol{P}$. Для проведения контроля, наудачу отбирают $\boldsymbol{n}$ из произведенных на нем изделий. Определить вероятность того, что среди них будет ровно $\boldsymbol{m}$ штук высшего сорта. Если $\boldsymbol{P} = 0.40$, $\boldsymbol{n} = 10$, $\boldsymbol{m} = 4$.
   1) – 0.046; **2**) – 0.075; **3**) – 0.092; **4**) – 0.128; **5**) – 0.146;
   6) – 0.187; **7**) – 0.201; **8**) – 0.251; **9**) – 0.284; **10**) – 0.367.

ТЕСТ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

“Теория вероятностей и математическая статистика”
для специальностей 071900 и 220200

Вариант III

1. Из $\boldsymbol{n}$ вопросов по теории вероятностей, вошедших в билеты, студент знает $\boldsymbol{m}$. Какова вероятность того, что взятый наудачу билет, содержащий два вопроса, будет состоять из подготовленных им вопросов. Если $\boldsymbol{n} = 40$, $\boldsymbol{m} = 30$.
   1) – 0.558; **2**) – 0.571; **3**) – 0.585; **4**) – 0.637; **5**) – 0.719;
   6) – 0.747; **7**) – 0.754; **8**) – 0.808; **9**) – 0.825; **10**) – 0.869.

2. Среди $\boldsymbol{n}$ лотерейных билетов $\boldsymbol{k}$ выигрышных. Наудачу взяли $\boldsymbol{m}$ билетов. Определить вероятность того, что среди них $\boldsymbol{l}$ выигрышных. Если $\boldsymbol{n} = 10$, $\boldsymbol{l} = 3$, $\boldsymbol{m} = 5$, $\boldsymbol{k} = 7$.
   1) – 0.571; **2**) – 0.509; **3**) – 0.500; **4**) – 0.476; **5**) – 0.455;
   6) – 0.429; **7**) – 0.424; **8**) – 0.417; **9**) – 0.357; **10**) – 0.182.

3. В двух производственных партиях изготовлено, соответственно, $\boldsymbol{k_1}$ и $\boldsymbol{k_2}$ % доброкачественных изделий. Наудачу выбирают по одному изделию из каждой партии. Какова вероятность обнаружить среди них: хотя бы одно бракованное изделие, два бракованных, одно бракованное. Если $\boldsymbol{k_1} = 87$, $\boldsymbol{k_2} = 31$.
   1) - 0.270, 0.090, 0.640; **2**) - 0.275, 0.095, 0.630; **3**) - 0.281, 0.101, 0.618;
   4) - 0.300, 0.120, 0.580; **5**) - 0.300, 0.130, 0.570; **6**) - 0.304, 0.134, 0.562;
   7) - 0.326, 0.146, 0.528; **8**) - 0.331, 0.151, 0.158; **9**) - 0.334, 0.154, 0.513;
   10) - 0.329, 0.149, 0.522.

4. Было произведено три партии электрических ламп, две из которых содержат по $\boldsymbol{n_1}$ и $\boldsymbol{n_2}$ штук, а сумма всех изделий составляет 1000 единиц. В первой партии содержится 6% бракованных ламп, во второй – 5%, в третьей – 4%. Из всего количества ламп наудачу выбирают одну. Определить вероятность того, что выбранное изделие является бракованным. Если $\boldsymbol{n_1} = 170$, $\boldsymbol{n_2} = 540$.
   1) – 0.044; **2**) – 0.045; **3**) – 0.046; **4**) – 0.048; **5**) – 0.049;
   6) – 0.050; **7**) – 0.051; **8**) – 0.053; **9**) – 0.054; **10**) – 0.055.

5. В магазин поступают однотипные изделия с трех заводов, причем каждый завод поставляет $\boldsymbol{n_i}$ % изделий. Среди изделий каждого завода $\boldsymbol{m_i}$ % первосортных. Было куплено одно изделие, оказавшееся первосортным. Опреде-

лить вероятность того, что это изделие было выпущено j-м заводом. Если n_1 = 70, n_2 = 80, n_3 = 90, m_1 = 50, m_2 = 20, m_3 = 30, j = 3.

1) – 0.553; **2**) – 0.455; **3**) – 0.419; **4**) – 0.386; **5**) – 0.325;
6) – 0.312; **7**) – 0.289; **8**) – 0.236; **9**) – 0.233; **10**) – 0.211.

6. Вероятность изготовления детали высшего сорта на некотором станке равна P. Для проведения контроля, наудачу отбирают n из произведенных на нем изделий. Определить вероятность того, что среди них будет ровно m штук высшего сорта. Если P = 0.50, n = 15, m = 10.

1) – 0.046; **2**) – 0.075; **3**) – 0.092; **4**) – 0.128; **5**) – 0.146;
6) – 0.187; **7**) – 0.201; **8**) – 0.251; **9**) – 0.284; **10**) – 0.367.

ТЕСТ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

“Теория вероятностей и математическая статистика”
для специальностей 071900 и 220200

Вариант IV

1. Из n вопросов по теории вероятностей, вошедших в билеты, студент знает m. Какова вероятность того, что взятый наудачу билет, содержащий два вопроса, будет состоять из подготовленных им вопросов. Если n = 40, m = 34.

1) – 0.558; **2**) – 0.571; **3**) – 0.585; **4**) – 0.637; **5**) – 0.719;
6) – 0.747; **7**) – 0.754; **8**) – 0.808; **9**) – 0.825; **10**) – 0.869.

2. Среди n лотерейных билетов k выигрышных. Наудачу взяли m билетов. Определить вероятность того, что среди них l выигрышных. Если n = 10, l = 3, m = 5, k = 6.

1) – 0.571; **2**) – 0.509; **3**) – 0.500; **4**) – 0.476; **5**) – 0.455;
6) – 0.429; **7**) – 0.424; **8**) – 0.417; **9**) – 0.357; **10**) – 0.182.

3. В двух производственных партиях изготовлено, соответственно, k_1 и k_2 % доброкачественных изделий. Наудачу выбирают по одному изделию из каждой партии. Какова вероятность обнаружить среди них: хотя бы одно бракованное изделие, два бракованных, одно бракованное. Если k_1 = 72, k_2 = 46.

1) - 0.270, 0.090, 0.640; **2**) - 0.275, 0.095, 0.630; **3**) - 0.281, 0.101, 0.618;
4) - 0.300, 0.120, 0.580; **5**) - 0.300, 0.130, 0.570; **6**) - 0.304, 0.134, 0.562;
7) - 0.326, 0.146, 0.528; **8**) - 0.331, 0.151, 0.158; **9**) - 0.334, 0.154, 0.513;
10) - 0.329, 0.149, 0.522.

4. Было произведено три партии электрических ламп, две из которых содержат по n_1 и n_2 штук, а сумма всех изделий составляет 1000 единиц. В первой партии содержится 6% бракованных ламп, во второй – 5%, в третьей – 4%. Из всего количества ламп наудачу выбирают одну. Определить вероятность того, что выбранное изделие является бракованным. Если n_1 = 520, n_2 = 390.

1) – 0.044; **2**) – 0.045; **3**) – 0.046; **4**) – 0.048; **5**) – 0.049;
6) – 0.050; **7**) – 0.051; **8**) – 0.053; **9**) – 0.054; **10**) – 0.055.

5. В магазин поступают однотипные изделия с трех заводов, причем каждый завод поставляет n_i % изделий. Среди изделий каждого завода m_i % первосортных. Было куплено одно изделие, оказавшееся первосортным. Определить вероятность того, что это изделие было выпущено j-м заводом. Если n_1 = 70, n_2 = 80, n_3 = 90, m_1 = 60, m_2 = 20, m_3 = 20, j = 1.
   1) – 0.553; **2**) – 0.455; **3**) – 0.419; **4**) – 0.386; **5**) – 0.325;
   6) – 0.312; **7**) – 0.289; **8**) – 0.236; **9**) – 0.233; **10**) – 0.211.

6. Вероятность изготовления детали высшего сорта на некотором станке равна P. Для проведения контроля, наудачу отбирают n из произведенных на нем изделий. Определить вероятность того, что среди них будет ровно m штук высшего сорта. Если P = 0.60, n = 20, m = 15.
   1) – 0.046; **2**) – 0.075; **3**) – 0.092; **4**) – 0.128; **5**) – 0.146;
   6) – 0.187; **7**) – 0.201; **8**) – 0.251; **9**) – 0.284; **10**) – 0.367.

ТЕСТ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

“Теория вероятностей и математическая статистика”
для специальностей 071900 и 220200

Вариант V

1. Из n вопросов по теории вероятностей, вошедших в билеты, студент знает m. Какова вероятность того, что взятый наудачу билет, содержащий два вопроса, будет состоять из подготовленных им вопросов. Если n = 66, m = 50.
   1) – 0.558; **2**) – 0.571; **3**) – 0.585; **4**) – 0.637; **5**) – 0.719;
   6) – 0.747; **7**) – 0.754; **8**) – 0.808; **9**) – 0.825; **10**) – 0.869.

2. Среди n лотерейных билетов k выигрышных. Наудачу взяли m билетов. Определить вероятность того, что среди них l выигрышных. Если n = 11, l = 2, m = 5, k = 7.
   1) – 0.571; **2**) – 0.509; **3**) – 0.500; **4**) – 0.476; **5**) – 0.455;
   6) – 0.429; **7**) – 0.424; **8**) – 0.417; **9**) – 0.357; **10**) – 0.182.

3. В двух производственных партиях изготовлено, соответственно, k_1 и k_2 % доброкачественных изделий. Наудачу выбирают по одному изделию из каждой партии. Какова вероятность обнаружить среди них: хотя бы одно бракованное изделие, два бракованных, одно бракованное. Если k_1 = 79, k_2 = 38.
   1) - 0.270, 0.090, 0.640; **2**) - 0.275, 0.095, 0.630; **3**) - 0.281, 0.101, 0.618;
   4) - 0.300, 0.120, 0.580; **5**) - 0.300, 0.130, 0.570; **6**) - 0.304, 0.134, 0.562;
   7) - 0.326, 0.146, 0.528; **8**) - 0.331, 0.151, 0.158; **9**) - 0.334, 0.154, 0.513;
   10) - 0.329, 0.149, 0.522.

4. Было произведено три партии электрических ламп, две из которых содержат по n_1 и n_2 штук, а сумма всех изделий составляет 1000 единиц. В первой партии содержится 6% бракованных ламп, во второй – 5%, в третьей – 4%. Из всего количества ламп наудачу выбирают одну. Определить вероятность того, что выбранное изделие является бракованным. Если n_1 = 360, n_2 = 600.

1) – 0.044; **2**) – 0.045; **3**) – 0.046; **4**) – 0.048; **5**) – 0.049;
6) – 0.050; **7**) – 0.051; **8**) – 0.053; **9**) – 0.054; **10**) – 0.055.

5. В магазин поступают однотипные изделия с трех заводов, причем каждый завод поставляет $\boldsymbol{n_i}$ % изделий. Среди изделий каждого завода $\boldsymbol{m_i}$ % первосортных. Было куплено одно изделие, оказавшееся первосортным. Определить вероятность того, что это изделие было выпущено $\boldsymbol{j}$-м заводом. Если $\boldsymbol{n_1} = 70$, $\boldsymbol{n_2} = 80$, $\boldsymbol{n_3} = 90$, $\boldsymbol{m_1} = 60$, $\boldsymbol{m_2} = 20$, $\boldsymbol{m_3} = 20$, $\boldsymbol{j} = 2$.
   1) – 0.553; **2**) – 0.455; **3**) – 0.419; **4**) – 0.386; **5**) – 0.325;
   6) – 0.312; **7**) – 0.289; **8**) – 0.236; **9**) – 0.233; **10**) – 0.211.

6. Вероятность изготовления детали высшего сорта на некотором станке равна $\boldsymbol{P}$. Для проведения контроля, наудачу отбирают $\boldsymbol{n}$ из произведенных на нем изделий. Определить вероятность того, что среди них будет ровно $\boldsymbol{m}$ штук высшего сорта. Если $\boldsymbol{P} = 0.70$, $\boldsymbol{n} = 16$, $\boldsymbol{m} = 13$.
   1) – 0.046; **2**) – 0.075; **3**) – 0.092; **4**) – 0.128; **5**) – 0.146;
   6) – 0.187; **7**) – 0.201; **8**) – 0.251; **9**) – 0.284; **10**) – 0.367.

ТЕСТ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

“Теория вероятностей и математическая статистика”
для специальностей 071900 и 220200

Вариант VI

1. Из $\boldsymbol{n}$ вопросов по теории вероятностей, вошедших в билеты, студент знает $\boldsymbol{m}$. Какова вероятность того, что взятый наудачу билет, содержащий два вопроса, будет состоять из подготовленных им вопросов. Если $\boldsymbol{n} = 60$, $\boldsymbol{m} = 48$.
   1) – 0.558; **2**) – 0.571; **3**) – 0.585; **4**) – 0.637; **5**) – 0.719;
   6) – 0.747; **7**) – 0.754; **8**) – 0.808; **9**) – 0.825; **10**) – 0.869.

2. Среди $\boldsymbol{n}$ лотерейных билетов $\boldsymbol{k}$ выигрышных. Наудачу взяли $\boldsymbol{m}$ билетов. Определить вероятность того, что среди них $\boldsymbol{l}$ выигрышных. Если $\boldsymbol{n} = 11$, $\boldsymbol{l} = 3$, $\boldsymbol{m} = 4$, $\boldsymbol{k} = 8$.
   1) – 0.571; **2**) – 0.509; **3**) – 0.500; **4**) – 0.476; **5**) – 0.455;
   6) – 0.429; **7**) – 0.424; **8**) – 0.417; **9**) – 0.357; **10**) – 0.182.

3. В двух производственных партиях изготовлено, соответственно, $\boldsymbol{k_1}$ и $\boldsymbol{k_2}$ % доброкачественных изделий. Наудачу выбирают по одному изделию из каждой партии. Какова вероятность обнаружить среди них: хотя бы одно бракованное изделие, два бракованных, одно бракованное. Если $\boldsymbol{k_1} = 86$, $\boldsymbol{k_2} = 32$.
   1) - 0.270, 0.090, 0.640; **2**) - 0.275, 0.095, 0.630; **3**) - 0.281, 0.101, 0.618;
   4) - 0.300, 0.120, 0.580; **5**) - 0.300, 0.130, 0.570; **6**) - 0.304, 0.134, 0.562;
   7) - 0.326, 0.146, 0.528; **8**) - 0.331, 0.151, 0.158; **9**) - 0.334, 0.154, 0.513;
   10) - 0.329, 0.149, 0.522.

4. Было произведено три партии электрических ламп, две из которых содержат по $\boldsymbol{n_1}$ и $\boldsymbol{n_2}$ штук, а сумма всех изделий составляет 1000 единиц. В первой

партии содержится 6% бракованных ламп, во второй – 5%, в третьей – 4%. Из всего количества ламп наудачу выбирают одну. Определить вероятность того, что выбранное изделие является бракованным. Если n_1 = 700, n_2 = 90.

1) – 0.044; **2**) – 0.045; **3**) – 0.046; **4**) – 0.048; **5**) – 0.049;
6) – 0.050; **7**) – 0.051; **8**) – 0.053; **9**) – 0.054; **10**) – 0.055.

5. В магазин поступают однотипные изделия с трех заводов, причем каждый завод поставляет n_i % изделий. Среди изделий каждого завода m_i % первосортных. Было куплено одно изделие, оказавшееся первосортным. Определить вероятность того, что это изделие было выпущено j-м заводом. Если n_1 = 70, n_2 = 80, n_3 = 90, m_1 = 60, m_2 = 20, m_3 = 20, j = 3.

1) – 0.553; **2**) – 0.455; **3**) – 0.419; **4**) – 0.386; **5**) – 0.325;
6) – 0.312; **7**) – 0.289; **8**) – 0.236; **9**) – 0.233; **10**) – 0.211.

6. Вероятность изготовления детали высшего сорта на некотором станке равна P. Для проведения контроля, наудачу отбирают n из произведенных на нем изделий. Определить вероятность того, что среди них будет ровно m штук высшего сорта. Если P = 0.64, n = 9, m = 4.

1) – 0.046; **2**) – 0.075; **3**) – 0.092; **4**) – 0.128; **5**) – 0.146;
6) – 0.187; **7**) – 0.201; **8**) – 0.251; **9**) – 0.284; **10**) – 0.367.

ТЕСТ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

“Теория вероятностей и математическая статистика”
для специальностей 071900 и 220200

Вариант VII

1. Из n вопросов по теории вероятностей, вошедших в билеты, студент знает m. Какова вероятность того, что взятый наудачу билет, содержащий два вопроса, будет состоять из подготовленных им вопросов. Если n = 60, m = 54.

1) – 0.558; **2**) – 0.571; **3**) – 0.585; **4**) – 0.637; **5**) – 0.719;
6) – 0.747; **7**) – 0.754; **8**) – 0.808; **9**) – 0.825; **10**) – 0.869.

2. Среди n лотерейных билетов k выигрышных. Наудачу взяли m билетов. Определить вероятность того, что среди них l выигрышных. Если n = 11, l = 3, m = 5, k = 7.

1) – 0.571; **2**) – 0.509; **3**) – 0.500; **4**) – 0.476; **5**) – 0.455;
6) – 0.429; **7**) – 0.424; **8**) – 0.417; **9**) – 0.357; **10**) – 0.182.

3. В двух производственных партиях изготовлено, соответственно, k_1 и k_2 % доброкачественных изделий. Наудачу выбирают по одному изделию из каждой партии. Какова вероятность обнаружить среди них: хотя бы одно бракованное изделие, два бракованных, одно бракованное. Если k_1 = 73, k_2 = 45.

1) - 0.270, 0.090, 0.640; **2**) - 0.275, 0.095, 0.630; **3**) - 0.281, 0.101, 0.618;
4) - 0.300, 0.120, 0.580; **5**) - 0.300, 0.130, 0.570; **6**) - 0.304, 0.134, 0.562;
7) - 0.326, 0.146, 0.528; **8**) - 0.331, 0.151, 0.158; **9**) - 0.334, 0.154, 0.513;
10) - 0.329, 0.149, 0.522.

4. Было произведено три партии электрических ламп, две из которых содержат по n_1 и n_2 штук, а сумма всех изделий составляет 1000 единиц. В первой партии содержится 6% бракованных ламп, во второй – 5%, в третьей – 4%. Из всего количества ламп наудачу выбирают одну. Определить вероятность того, что выбранное изделие является бракованным. Если $n_1 = 240$, $n_2 = 610$.
   1) – 0.044; **2**) – 0.045; **3**) – 0.046; **4**) – 0.048; **5**) – 0.049;
   6) – 0.050; **7**) – 0.051; **8**) – 0.053; **9**) – 0.054; **10**) – 0.055.

5. В магазин поступают однотипные изделия с трех заводов, причем каждый завод поставляет n_i % изделий. Среди изделий каждого завода m_i % первосортных. Было куплено одно изделие, оказавшееся первосортным. Определить вероятность того, что это изделие было выпущено j-м заводом. Если $n_1 = 80$, $n_2 = 80$, $n_3 = 90$, $m_1 = 40$, $m_2 = 30$, $m_3 = 30$, $j = 1$.
   1) – 0.553; **2**) – 0.455; **3**) – 0.419; **4**) – 0.386; **5**) – 0.325;
   6) – 0.312; **7**) – 0.289; **8**) – 0.236; **9**) – 0.233; **10**) – 0.211.

6. Вероятность изготовления детали высшего сорта на некотором станке равна P. Для проведения контроля, наудачу отбирают n из произведенных на нем изделий. Определить вероятность того, что среди них будет ровно m штук высшего сорта. Если $P = 0.38$, $n = 7$, $m = 3$.
   1) – 0.046; **2**) – 0.075; **3**) – 0.092; **4**) – 0.128; **5**) – 0.146;
   6) – 0.187; **7**) – 0.201; **8**) – 0.251; **9**) – 0.284; **10**) – 0.367.

ТЕСТ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

“Теория вероятностей и математическая статистика”
для специальностей 071900 и 220200

Вариант VIII

1. Из n вопросов по теории вероятностей, вошедших в билеты, студент знает m. Какова вероятность того, что взятый наудачу билет, содержащий два вопроса, будет состоять из подготовленных им вопросов. Если $n = 60$, $m = 46$.
   1) – 0.558; **2**) – 0.571; **3**) – 0.585; **4**) – 0.637; **5**) – 0.719;
   6) – 0.747; **7**) – 0.754; **8**) – 0.808; **9**) – 0.825; **10**) – 0.869.

2. Среди n лотерейных билетов k выигрышных. Наудачу взяли m билетов. Определить вероятность того, что среди них l выигрышных. Если $n = 12$, $l = 3$, $m = 8$, $k = 5$.
   1) – 0.571; **2**) – 0.509; **3**) – 0.500; **4**) – 0.476; **5**) – 0.455;
   6) – 0.429; **7**) – 0.424; **8**) – 0.417; **9**) – 0.357; **10**) – 0.182.

3. В двух производственных партиях изготовлено, соответственно, k_1 и k_2 % доброкачественных изделий. Наудачу выбирают по одному изделию из каждой партии. Какова вероятность обнаружить среди них: хотя бы одно бракованное изделие, два бракованных, одно бракованное. Если $k_1 = 81$, $k_2 = 37$.
   1) - 0.270, 0.090, 0.640; **2**) - 0.275, 0.095, 0.630; **3**) - 0.281, 0.101, 0.618;

4) - 0.300, 0.120, 0.580; **5**) - 0.300, 0.130, 0.570; **6**) - 0.304, 0.134, 0.562;
7) - 0.326, 0.146, 0.528; **8**) - 0.331, 0.151, 0.158; **9**) - 0.334, 0.154, 0.513;
10) - 0.329, 0.149, 0.522.

4. Было произведено три партии электрических ламп, две из которых содержат по $\boldsymbol{n_1}$ и $\boldsymbol{n_2}$ штук, а сумма всех изделий составляет 1000 единиц. В первой партии содержится 6% бракованных ламп, во второй – 5%, в третьей – 4%. Из всего количества ламп наудачу выбирают одну. Определить вероятность того, что выбранное изделие является бракованным. Если $\boldsymbol{n_1} = 90$, $\boldsymbol{n_2} = 450$.
   1) – 0.044; **2**) – 0.045; **3**) – 0.046; **4**) – 0.048; **5**) – 0.049;
   6) – 0.050; **7**) – 0.051; **8**) – 0.053; **9**) – 0.054; **10**) – 0.055.

5. В магазин поступают однотипные изделия с трех заводов, причем каждый завод поставляет $\boldsymbol{n_i}$ % изделий. Среди изделий каждого завода $\boldsymbol{m_i}$ % первосортных. Было куплено одно изделие, оказавшееся первосортным. Определить вероятность того, что это изделие было выпущено $\boldsymbol{j}$-м заводом. Если $\boldsymbol{n_1} = 80$, $\boldsymbol{n_2} = 80$, $\boldsymbol{n_3} = 90$, $\boldsymbol{m_1} = 40$, $\boldsymbol{m_2} = 30$, $\boldsymbol{m_3} = 30$, $\boldsymbol{j} = 2$.
   1) – 0.553; **2**) – 0.455; **3**) – 0.419; **4**) – 0.386; **5**) – 0.325;
   6) – 0.312; **7**) – 0.289; **8**) – 0.236; **9**) – 0.233; **10**) – 0.211.

6. Вероятность изготовления детали высшего сорта на некотором станке равна $\boldsymbol{P}$. Для проведения контроля, наудачу отбирают $\boldsymbol{n}$ из произведенных на нем изделий. Определить вероятность того, что среди них будет ровно $\boldsymbol{m}$ штук высшего сорта. Если $\boldsymbol{P} = 0.80$, $\boldsymbol{n} = 8$, $\boldsymbol{m} = 4$.
   1) – 0.046; **2**) – 0.075; **3**) – 0.092; **4**) – 0.128; **5**) – 0.146;
   6) – 0.187; **7**) – 0.201; **8**) – 0.251; **9**) – 0.284; **10**) – 0.367.

ТЕСТ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

“Теория вероятностей и математическая статистика”
для специальностей 071900 и 220200

Вариант IX

1. Из $\boldsymbol{n}$ вопросов по теории вероятностей, вошедших в билеты, студент знает $\boldsymbol{m}$. Какова вероятность того, что взятый наудачу билет, содержащий два вопроса, будет состоять из подготовленных им вопросов. Если $\boldsymbol{n} = 46$, $\boldsymbol{m} = 40$.
   1) – 0.558; **2**) – 0.571; **3**) – 0.585; **4**) – 0.637; **5**) – 0.719;
   6) – 0.747; **7**) – 0.754; **8**) – 0.808; **9**) – 0.825; **10**) – 0.869.

2. Среди $\boldsymbol{n}$ лотерейных билетов $\boldsymbol{k}$ выигрышных. Наудачу взяли $\boldsymbol{m}$ билетов. Определить вероятность того, что среди них $\boldsymbol{l}$ выигрышных. Если $\boldsymbol{n} = 9$, $\boldsymbol{l} = 2$, $\boldsymbol{m} = 4$, $\boldsymbol{k} = 6$.
   1) – 0.571; **2**) – 0.509; **3**) – 0.500; **4**) – 0.476; **5**) – 0.455;
   6) – 0.429; **7**) – 0.424; **8**) – 0.417; **9**) – 0.357; **10**) – 0.182.

3. В двух производственных партиях изготовлено, соответственно, $\boldsymbol{k_1}$ и $\boldsymbol{k_2}$ % доброкачественных изделий. Наудачу выбирают по одному изделию из каж-

дой партии. Какова вероятность обнаружить среди них: хотя бы одно бракованное изделие, два бракованных, одно бракованное. Если $\boldsymbol{k_1}$ = 85, $\boldsymbol{k_2}$ = 33.

1) - 0.270, 0.090, 0.640; **2**) - 0.275, 0.095, 0.630; **3**) - 0.281, 0.101, 0.618; **4**) - 0.300, 0.120, 0.580; **5**) - 0.300, 0.130, 0.570; **6**) - 0.304, 0.134, 0.562; **7**) - 0.326, 0.146, 0.528; **8**) - 0.331, 0.151, 0.158; **9**) - 0.334, 0.154, 0.513; **10**) - 0.329, 0.149, 0.522.

4. Было произведено три партии электрических ламп, две из которых содержат по $\boldsymbol{n_1}$ и $\boldsymbol{n_2}$ штук, а сумма всех изделий составляет 1000 единиц. В первой партии содержится 6% бракованных ламп, во второй – 5%, в третьей – 4%. Из всего количества ламп наудачу выбирают одну. Определить вероятность того, что выбранное изделие является бракованным. Если $\boldsymbol{n_1}$ = 100, $\boldsymbol{n_2}$ = 230.

   1) – 0.044; **2**) – 0.045; **3**) – 0.046; **4**) – 0.048; **5**) – 0.049; **6**) – 0.050; **7**) – 0.051; **8**) – 0.053; **9**) – 0.054; **10**) – 0.055.

5. В магазин поступают однотипные изделия с трех заводов, причем каждый завод поставляет $\boldsymbol{n_i}$ % изделий. Среди изделий каждого завода $\boldsymbol{m_i}$ % первосортных. Было куплено одно изделие, оказавшееся первосортным. Определить вероятность того, что это изделие было выпущено $\boldsymbol{j}$-м заводом. Если $\boldsymbol{n_1}$ = 80, $\boldsymbol{n_2}$ = 80, $\boldsymbol{n_3}$ = 90, $\boldsymbol{m_1}$ = 40, $\boldsymbol{m_2}$ = 30, $\boldsymbol{m_3}$ = 30, $\boldsymbol{j}$ = 3.

   1) – 0.553; **2**) – 0.455; **3**) – 0.419; **4**) – 0.386; **5**) – 0.325; **6**) – 0.312; **7**) – 0.289; **8**) – 0.236; **9**) – 0.233; **10**) – 0.211.

6. Вероятность изготовления детали высшего сорта на некотором станке равна $\boldsymbol{P}$. Для проведения контроля, наудачу отбирают $\boldsymbol{n}$ из произведенных на нем изделий. Определить вероятность того, что среди них будет ровно $\boldsymbol{m}$ штук высшего сорта. Если $\boldsymbol{P}$ = 0.60, $\boldsymbol{n}$ = 6, $\boldsymbol{m}$ = 5.

   1) – 0.046; **2**) – 0.075; **3**) – 0.092; **4**) – 0.128; **5**) – 0.146; **6**) – 0.187; **7**) – 0.201; **8**) – 0.251; **9**) – 0.284; **10**) – 0.367.

ТЕСТ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

“Теория вероятностей и математическая статистика”
для специальностей 071900 и 220200

Вариант X

1. Из $\boldsymbol{n}$ вопросов по теории вероятностей, вошедших в билеты, студент знает $\boldsymbol{m}$. Какова вероятность того, что взятый наудачу билет, содержащий два вопроса, будет состоять из подготовленных им вопросов. Если $\boldsymbol{n}$ = 44, $\boldsymbol{m}$ = 40.

   1) – 0.558; **2**) – 0.571; **3**) – 0.585; **4**) – 0.637; **5**) – 0.719; **6**) – 0.747; **7**) – 0.754; **8**) – 0.808; **9**) – 0.825; **10**) – 0.869.

2. Среди $\boldsymbol{n}$ лотерейных билетов $\boldsymbol{k}$ выигрышных. Наудачу взяли $\boldsymbol{m}$ билетов. Определить вероятность того, что среди них $\boldsymbol{l}$ выигрышных. Если $\boldsymbol{n}$ = 7, $\boldsymbol{l}$ = 3, $\boldsymbol{m}$ = 4, $\boldsymbol{k}$ = 5.

   1) – 0.571; **2**) – 0.509; **3**) – 0.500; **4**) – 0.476; **5**) – 0.455; **6**) – 0.429; **7**) – 0.424; **8**) – 0.417; **9**) – 0.357; **10**) – 0.182.

3. В двух производственных партиях изготовлено, соответственно, k_1 и k_2 % доброкачественных изделий. Наудачу выбирают по одному изделию из каждой партии. Какова вероятность обнаружить среди них: хотя бы одно бракованное изделие, два бракованных, одно бракованное. Если $k_1 = 74$, $k_2 = 44$.
   1) - 0.270, 0.090, 0.640; **2**) - 0.275, 0.095, 0.630; **3**) - 0.281, 0.101, 0.618;
   4) - 0.300, 0.120, 0.580; **5**) - 0.300, 0.130, 0.570; **6**) - 0.304, 0.134, 0.562;
   7) - 0.326, 0.146, 0.528; **8**) - 0.331, 0.151, 0.158; **9**) - 0.334, 0.154, 0.513;
   10) - 0.329, 0.149, 0.522.

4. Было произведено три партии электрических ламп, две из которых содержат по n_1 и n_2 штук, а сумма всех изделий составляет 1000 единиц. В первой партии содержится 6% бракованных ламп, во второй – 5%, в третьей – 4%. Из всего количества ламп наудачу выбирают одну. Определить вероятность того, что выбранное изделие является бракованным. Если $n_1 = 200$, $n_2 = 430$.
   1) – 0.044; **2**) – 0.045; **3**) – 0.046; **4**) – 0.048; **5**) – 0.049;
   6) – 0.050; **7**) – 0.051; **8**) – 0.053; **9**) – 0.054; **10**) – 0.055.

5. В магазин поступают однотипные изделия с трех заводов, причем каждый завод поставляет n_i % изделий. Среди изделий каждого завода m_i % первосортных. Было куплено одно изделие, оказавшееся первосортным. Определить вероятность того, что это изделие было выпущено j-м заводом. Если $n_1 = 90$, $n_2 = 90$, $n_3 = 80$, $m_1 = 40$, $m_2 = 20$, $m_3 = 40$, $j = 1$.
   1) – 0.553; **2**) – 0.455; **3**) – 0.419; **4**) – 0.386; **5**) – 0.325;
   6) – 0.312; **7**) – 0.289; **8**) – 0.236; **9**) – 0.233; **10**) – 0.211.

6. Вероятность изготовления детали высшего сорта на некотором станке равна P. Для проведения контроля, наудачу отбирают n из произведенных на нем изделий. Определить вероятность того, что среди них будет ровно m штук высшего сорта. Если $P = 0.80$, $n = 7$, $m = 6$.
   1) – 0.046; **2**) – 0.075; **3**) – 0.092; **4**) – 0.128; **5**) – 0.146;
   6) – 0.187; **7**) – 0.201; **8**) – 0.251; **9**) – 0.284; **10**) – 0.367.

Содержание

Виктория Владимировна ЕРЕМИНА
доцент кафедры Информационных и управляющих систем АмГУ,
кандидат физико-математических наук, доцент

Теория вероятностей, математическая статистика и случайные процессы
230102 «Автоматизированные системы обработки информации и управления»
и 230201 «Информационные системы и технологии»:
учебно-методический комплекс дисциплины.

Издательство АмГУ.