

Министерство образования и науки Российской Федерации
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО
ДВИЖЕНИЯ

Методические указания

Благовещенск
2017

УДК 53
ББК 22.213я73
К55

*Рекомендовано
учебно-методическим советом университета*

Рецензент:

Милинский А.Ю., доцент БГПУ, канд. физ.-мат. наук

К55 Копылова И.Б. (составитель)

Динамика вращательного движения: методические указания / сост. И.Б. Копылова. – Благовещенск: Из-во АмГУ, 2017.

Методические указания содержат описание опытного определения моментов инерции тел при изучении закона динамики вращательного движения и методом колебаний. Проверяется экспериментально теорема Штейнера. Эксперимент проводится с использованием типового комплекта ЛКМ-2.

Для специальности 03.03.02 –«физика». Для студентов физических отделений высших учебных заведений, выполняющих лабораторный практикум по физике.

ББК 22.213я73

В авторской редакции

© Копылова И.Б., 2017

© Амурский государственный университет, 2017

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ПРОВЕРКА ОСНОВНОГО ЗАКОНА ДИНАМИКИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ.

Оборудование: лабораторный комплекс ЛКМ - 2, стержень с отверстиями, полушар, два диска для сборки маятника Обербека, два эталонных цилиндра, штангенциркуль.

Цель:

1. Изучение закона динамики вращательного движения.
2. Определение момента инерции стола.
3. Измерение моментов инерции произвольных тел.
4. Проверка теоремы Штейнера.



Описание установки

Общий вид установки ЛКМ-2 приведен на рисунке 1.

На платформе-основании смонтированы поворотный стол и стойка комбинированная. Поворотный стол имеет отверстия для фиксации изучаемых объектов, трехступенчатый шкив со штифтами для закрепления нитей. Платформа стола закреплена на стойке, которая вращается на подшипниках вокруг вертикальной оси, закрепленной в основании со шкалой. Указатель перемещается вдоль шкалы, по которой отсчитывается угловая координата стола с разрешением 1° . При прохождении прорези через зазор фотодатчика срабатывает таймер измерительной системы ИСМ. Снизу к стойке прикреплен диск с диаметрально противоположными радиальной прорезью и риской-указателем. Рядом со столом установлен механический тормоз с защелкой. Для отпускания тормоза сдвинуть защелку на себя.

Стойка комбинированная предназначена для монтажа оборудования для проведения экспериментов, имеет круговую шкалу и шкив для переборки нити. В любом месте колонны можно установить шкив-ролик, к которому можно прикрепить пружины или перекинуть нить.

Измерительная система ИСМ-1К выполнена в виде электронного блока в пластмассовом корпусе. Органы управления и индикации вынесены на переднюю панель рисунок 2. Измерение времени выполняется электронным секундомером. Разрешение таймера выбирается тумблером 2 и может быть равным 0,1мс, 1 мс или 10 мс. Запуск счета времени и запись показаний производится при выходе щели диска из зазора фотодатчика. «ЦИКЛ/ОДНОКРАТНО»- тумблер выбора числа измерений «цикл»- система реагирует на все поступающие сигналы запуска и остановки секундомера, «однокр.»-система производит однократное измерение.

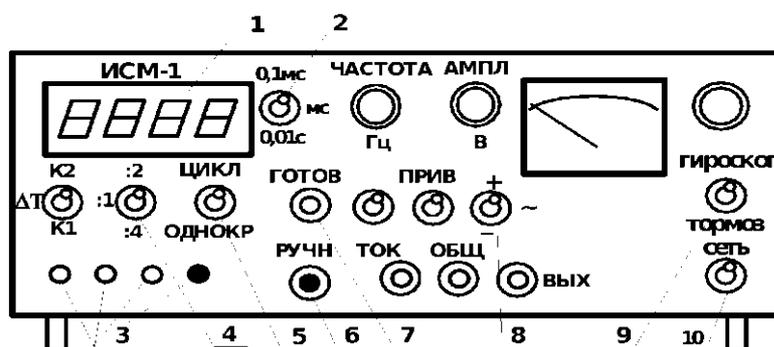


Рисунок 2.

При нажатии кнопки «ГОТОВ» схема измерений приводится в состояние готовности к измерениям и вырабатывается сигнал «Уст.0», который обнуляет счетчик и индикатор. Отсчет времени начнется при поступлении первого сигнала ПУСК.

Подключение модулей комплекса производится через разъемы на задней панели измерительного блока.

Краткая теория

Пусть к материальной точке массы m приложена сила \vec{F} ; ее составляющие в плоскости обозначены как \vec{F}_τ (рисунок 3).

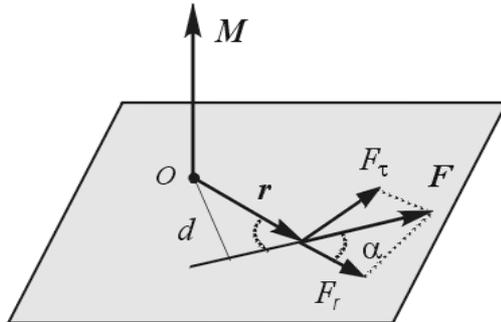


Рисунок 3.

Моментом силы \vec{F} относительно неподвижного начала O называют вектор, определяемый векторным произведением радиуса-вектора на силу:

$$\vec{M} = [\vec{r}; \vec{F}] \quad (1)$$

Модуль момента силы определяется соотношением:

$$M = r \cdot F \cdot \sin \alpha; \quad M = F \cdot d \quad (2)$$

где \vec{r} - это вектор, проведенный от точки O к материальной точке. (рисунок 3), ;

$d = r \cdot \sin \alpha$ - **плечо силы** - кратчайшее расстояние от линии действия силы до точки O ; вектор момента силы направлен согласно правилу векторного произведения (правилу «буравчика»).

Рассмотрим вращение тела произвольной формы вокруг оси Z . Положение любой точки в теле определяется радиусом-вектором \vec{r} , момент силы относительно точки O , лежащей на оси Z – это вектор.

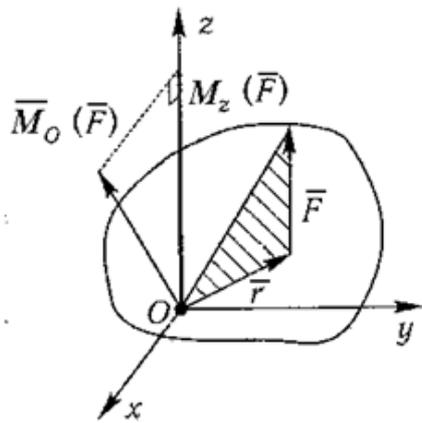


Рисунок 4

Вращательным действием обладает составляющая момента импульса, направленная вдоль оси Z, поэтому Момент силы относительно оси – это псевдовектор или аксиальный вектор.

$$\vec{M}_z = [\vec{r}_z; \vec{F}]_{(3)}$$

Материальная точка, движущаяся на некотором расстоянии от точки O

обладает импульсом (рисунок 5).

Моментом импульса относительно неподвижного начала O называется вектор, определяемый векторным произведением радиуса-вектора на импульс:

$$\vec{L} = [\vec{r}; m\vec{v}]. \quad (4)$$

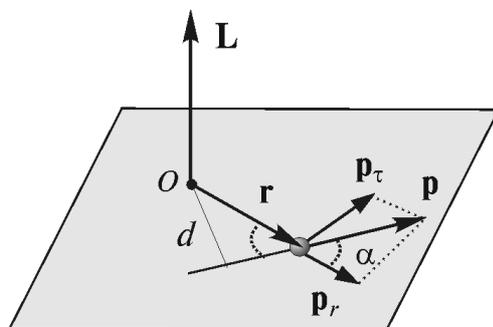


Рисунок 5.

Для модуля момента импульса справедливо выражение:

$$L = r \cdot m \cdot v \cdot \sin \alpha = m \cdot v \cdot d,$$

где α - угол между векторами \vec{r} и \vec{v} ,

d - кратчайшее расстояние от линии действия импульса до точки O ,

\vec{r} - радиус-вектор, проведенный от точки O до движущейся точки.

Если тело вращается вокруг оси (рисунок 6), то аналогично понятию момента силы можно ввести понятие момента импульса относительно оси.

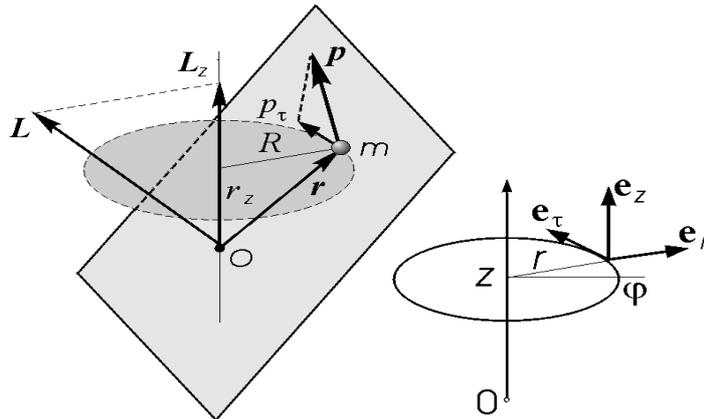


Рисунок 6.

Моментом импульса тела относительно оси называется составляющая момента импульса по этой оси:

$$\vec{L}_z = [\vec{r}_z; m \vec{v}] \quad (5)$$

Уравнение моментов.

Продифференцируем соотношение для момента импульса относительно неподвижного начала (4). Получим выражение:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left[\frac{d\vec{r}}{dt}; \vec{p} \right] + \left[\vec{r}; \frac{d\vec{p}}{dt} \right] \quad (6)$$

Производная от радиуса-вектора по времени - это есть скорость. Вектор скорости и вектор импульса сонаправлены, поэтому первое слагаемое равно нулю. Производная от импульса по времени, согласно второму закону Ньютона, это сила. Таким образом, имеем:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = [\vec{r}; \vec{F}] \quad (7)$$

Т.е. в правой части уравнения стоит выражение для момента силы:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \quad (8)$$

Выражение (8) называется уравнением моментов: производная по времени от момента импульса относительно неподвижного начала равна моменту силы относительно того же начала.

Понятие момента инерции.

Если тело вращается вокруг оси Z с угловой скоростью ω , то каждая i -я точка массой m_i имеет момент импульса:

$$L_i = m_i \cdot v_i \cdot r_i = \omega \cdot m_i \cdot r_i^2; \text{ с учетом, что } v = \omega \cdot r \quad (9)$$

Определим момент импульса вращающегося тела, для этого найдем сумму моментов импульсов всех точек тела:

$$L = \omega \cdot \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \quad (10)$$

Выражение

$$I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \quad (11)$$

Называется моментом инерции тела.

Момент инерции тела зависит не только от массы, но и от ее распределения относительно оси вращения.

Момент инерции тела является мерой инертности тела при его вращательном движении. Он зависит не только от массы m , но и от ее распределения относительно оси вращения.

Если тело однородное, то массу можно определить через плотность ρ и выражение для момента инерции тела примет вид:

$$I = \int_V \rho \cdot r^2 dV \quad (12)$$

где ρ – плотность вещества.

Момент инерции, как следует из определения, величина аддитивная. Это значит, что если вращающаяся система состоит из нескольких тел, то момент инерции системы определяется суммой моментов инерции всех тел относительно того же начала или относительно той же оси.

Момент импульса для тела, вращающегося вокруг оси Z:

$$\vec{L}_Z = I_Z \cdot \vec{\omega} \quad (13)$$

Закон динамики вращательного движения.

Если на систему материальных точек действуют и внутренние и внешние силы, то вращающий момент могут создавать и внутренние и внешние силы. Сумма моментов внутренних сил равна нулю, поэтому вращательный момент создают только внешние силы. Твердое тело – это система материальных точек для которой уравнение моментов можно записать в следующем виде:

$$\frac{d\vec{L}_Z}{dt} = \vec{M}_Z \quad (14)$$

Это выражение и есть основной закон динамики вращательного движения: *скорость изменения момента импульса равна моменту внешних сил, действующих на тело.*

Подставим в полученное выражение формулу (12) и произведем операцию дифференцирования, тогда получим другую формулировку этого закона: *угловое ускорение материальной точки прямо пропорционально моменту силы и обратно пропорционально моменту инерции.*

$$\dot{\epsilon} = \frac{\vec{M}}{I} \quad (15)$$

Теорема Штейнера.

Расчет моментов инерции для тел правильной формы относительно осей, проходящих через центр масс тела (для симметричных тел это и центр симметрии) можно проводить по соотношению (12). В качестве примера рассчитаем момент инерции стержня длиной l (рисунок 7).

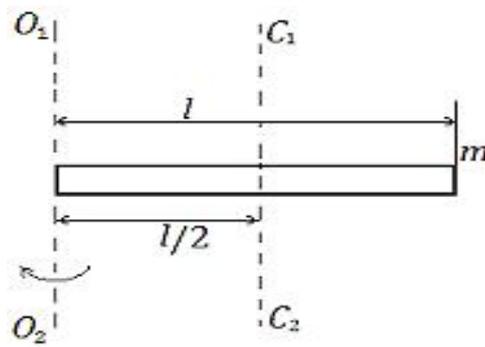


Рисунок 7.

Запишем соотношение (12) в виде:

$$I = \int_V r^2 dm ; \text{ для стержня } dm = \frac{m}{l} dr ;$$

В результате интегрирования получим:

$$I = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{m}{l} r^2 dr = \frac{ml^2}{12} \quad (16)$$

Для расчета момента инерции тела относительно произвольной оси вращения можно воспользоваться формулой **теоремы Штейнера**

$$I = I_C + md^2 \quad (17)$$

где I_C - моменты инерции тела массы m относительно оси, проходящий через центр масс тела (I_C) и параллельной ей произвольной оси (I), отстоящей на расстоянии d соответственно. В результате расчета получим выражение:

$$I = \frac{ml^2}{12} + \frac{ml^2}{4} = \frac{ml^2}{3} \quad (18)$$

В таблице приведены примеры моментов инерции различных тел.

Тело	Положение оси вращения	Момент инерции
Полый тонкостенный цилиндр радиуса R	Ось симметрии	mR^2
Сплошной цилиндр или диск радиуса R	То же	$\frac{1}{2}mR^2$
Прямой тонкий стержень длиной l	Ось перпендикулярна стержню и проходит через его середину	$\frac{1}{12}ml^2$
Прямой тонкий стержень длиной l	Ось перпендикулярна стержню и проходит через его конец	$\frac{1}{3}ml^2$
Шар радиусом R	Ось проходит через центр шара	$\frac{2}{5}mR^2$

Выполнение эксперимента

Задание 1: проверка закона динамики вращательного движения

Методика эксперимента

Для проверки закона динамики вращательного движения на стойке необходимо собрать маятник Обербека. На оси блока закрепить стержень с отверстиями, относительно оси, проходящей через центр масс. На стержне с двух сторон закрепить диски. На блоке закрепить нить с грузами (рисунок 8).

Вращающий момент создается силой натяжения нити, тогда закон динамики можно записать в виде:

$$I\varepsilon = M = RT, \quad (19)$$

где M - вращающий момент, создается силой натяжения нити T , которая имеет плечо R - радиус шкива.

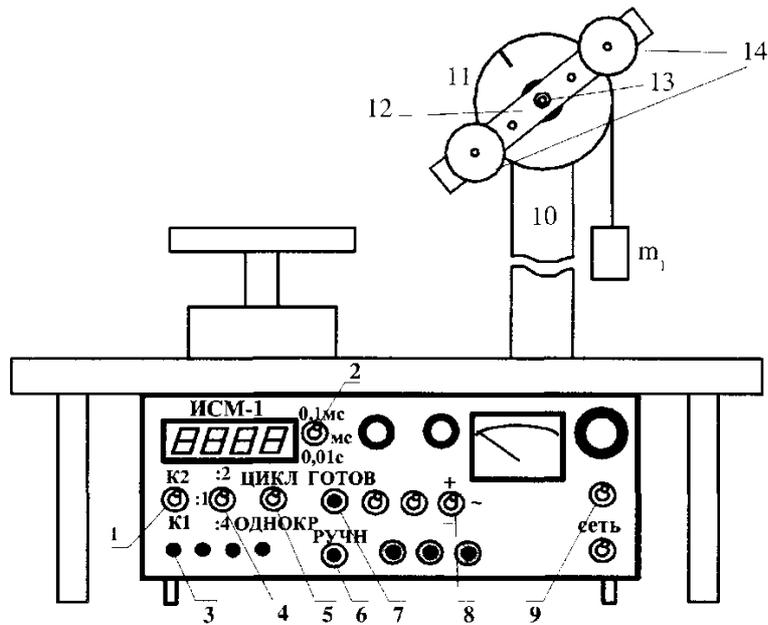


Рисунок 8

Груз движется равноускоренно, за время t опускается на высоту h то его линейное ускорение можно определить по формуле:

$$a = 2h/t^2. \quad (20)$$

Учитывая, что ускорение груза равно тангенциальному ускорению точек обода шкива и $a = \varepsilon R$, получим:

$$\varepsilon = 2h/Rt^2. \quad (21)$$

По второму закону Ньютона можно определить ускорение груза

$$m_1 \vec{a} = m_1 \vec{g} + \vec{T}. \quad (22)$$

Спроектировав векторное уравнение (22) на ось X , получим

$$m_1 a = m_1 g - T.$$

Отсюда найдем силу натяжения нити T и момент этой силы M .

$$T = m_1(g - 2h/t^2), \quad (23)$$

$$M = m_1 R(g - 2h/t^2). \quad (24)$$

Если учесть, что диаметр шкива $D = 2R$ получим формулы:

$$\varepsilon = 4h/(Dt^2), \quad (25)$$

$$M = m_1 D/2 \cdot (g - 2h/t^2). \quad (26)$$

Высоту падения груза можно определить исходя из периода вращения блока с помощью измерительного устройства:

$$h = 2\pi RN \quad (27)$$

где R –радиус шкива; N - число оборотов шкива блока.

Время падения t зависит от числа оборотов шкива и определяется пересчетным устройством ИСМ. Подставим соотношение (27) в (25) и (26), получим рабочие формулы:

$$\varepsilon = \frac{4\pi N}{t^2}; \quad M = \frac{m_1 D}{2\left(g - \frac{2\pi DN}{t^2}\right)} \quad (28)$$

Выполнение эксперимента

1. Заготовить таблицу измерений.

Таблица 1.

$N_0, n/n$	$D, м$	$t, с$	$h, м$	$m_1, кг$	$M, Н·м$	$\varepsilon, с^{-1}$

2. Измерить штангенциркулем диаметры шкива D блока.
3. Закрепить нить на шкиве, поставить шкив на тормоз, чтобы предотвратить вращение шкива. Перекинуть нить через блок. На конце нити закрепить груз.
4. Включить измерительную систему в сеть. Установить переключатель в положение К2. Переключателем «Цикл» выбрать число оборотов (по указанию преподавателя).
5. Для измерения времени N оборотов совместить прорезь шкива с положением «0» (загорится переключатель (3) на лицевой панели ИСМ-1К). Нажать и отпустить кнопку «Гот.». Результат измерения времени падения появится на цифровом табло.
6. Изменить массу падающего груза и повторить опыт 5-10 раз.

7. Изменить положение грузов на стержне и повторить эксперимент 5-10 раз.

Рассчитать момент силы и угловое ускорение по соотношениям (28). Занести результаты в таблицу.

8. Построить графики зависимости углового ускорения от момента действующей силы для двух положений грузов на стержне.

9. Рассчитать, используя графики, момент инерции маятника для двух положений грузов на стержне.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ.

Задание 2: определение момента инерции поворотного столика

На штифте большого шкива поворотного стола закрепить нить, радиальную прорезь диска на оси стола поместить напротив нуля круговой шкалы. Перекинуть нить через блок-ролик и блок стойки. Закрепить груз массой 100 грамм на нити.

Нить будем считать невесомой и нерастяжимой, инертными свойствами шкива комбинированной стойки можно пренебречь в силу очень малой его массы. Таким образом, сила натяжения нити не изменяется вдоль всей нити и будет равна силе тяжести груза закрепленного на нити.

Момент силы будет равен:

$$M = mgR.$$

где R – радиус шкива стола.

Угловое ускорение груза можно определить по соотношению (28).

Момент инерции поворотного стола рассчитываем по формуле:

$$I = \frac{mgRt^2}{4\pi} \quad (29)$$

Измерение времени поворота стола провести согласно пунктам 4,5 задания 1. Записать значение момента инерции стола в отчет.

Таблица 2.

$m, \text{ кг}$	$R, \text{ м}$	$t, \text{ с}$	$I, \text{ кг}\cdot\text{м}^2$

Задание 3: определение момента инерции полушара

Методика эксперимента

Момент инерции шара относительно оси, проходящей через центр масс можно рассчитать по соотношению:

где m -масса полушара, $R_{\text{пш}}$ - радиус полушара.

Для однородного, т.е. полушара с постоянной плотностью, справедливо выражение:

(30)

Если на поворотный стол поместить полушар, момент инерции полученной системы, будет складываться из момента инерции стола и момента инерции полушара.

(31)

Для определения момента инерции системы воспользуемся методикой задания 2. Момент инерции полушара определим из выражения:

(32)

Выполнение эксперимента

1. Поместить на поворотный столик полушар таким образом, чтобы ось полушара совпала с осью стола.

2. Заготовить таблицу

Таблица 3

$N\acute{o},$ n/n	$m, \text{ кг}$	$t, \text{ с}$	$I_{\text{пш}}, \text{ кг}\cdot\text{м}^2$	$\square I \square$	ΔI_i	ΔI_i^2	ΔI	δ_I

3. Изменяя массу грузов провести 5-10 опытов по методике задания 2.

4. Определить момент инерции полушара по соотношению(32). Занести результаты в таблицу. Рассчитать момент инерции полушара по формуле (30).

5. Рассчитать погрешность определения момента инерции полушара, считая, что истинное значение равно расчетному. Записать результат в стандартном виде: $I_{\text{нн}} = I \pm \Delta I$. Определить относительную погрешность δ_I .

6. Сравнить результаты расчета с результатами эксперимента. Сделать вывод.

ПРОВЕРКА ТЕОРЕМЫ ШТЕЙНЕРА

Задание 4: проверка теоремы Штейнера

Методика эксперимента

Для проверки теоремы Штейнера необходимо собрать установку с использованием пружин, как показано на рисунке 1. При отпускании тормоза поворотный столик начинает совершать крутильные колебания вокруг вертикальной оси. Сила натяжения нити, закрепленной на большом шкиве зависит от силы упругости, возникающей в пружинах:

$$F = 2kx \quad (33)$$

Сила натяжения нити создает вращающий момент

$$M = 2kxR, \quad (34)$$

где R – радиус шкива,

k -коэффициент жесткости пружины $k=21,8$ Н/м.,

Если учесть, что при малом повороте стола смещение пружины пропорционально углу поворота $x=R\varphi$, то данное соотношение можно переписать следующим образом:

$$M = 2kR^2\varphi \quad (35)$$

Уравнение колебаний (вращательного движения) стола в этом случае имеет вид:

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -2kR^2\varphi \quad \text{или} \quad I \frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2kR^2\varphi = 0 \quad (36)$$

Коэффициент пропорциональности $\omega^2 = \frac{2kR^2}{I}$ определяет циклическую частоту колебаний стола.

Период колебаний

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{2kR^2}} \quad (37)$$

Из этого соотношения получим формулу для расчета момента инерции колеблющейся системы:

$$I = \frac{2kR^2T^2}{4\pi^2} \quad (38)$$

Период колебаний стола измеряется с помощью измерительной системы ИСМ.

Если на стол поместить любые произвольные тела (в нашем случае цилиндры), то можно проверить теорему Штейнера, изменяя их положение относительно оси вращения. Момент инерции стола с грузами можно определить как сумму моментов инерции стола и грузов. Момент инерции грузов можно зависит от их положения относительно оси вращения:

$$I = I_0 + mr^2 \quad (39)$$

где m - масса цилиндра, R_0 - радиус цилиндра, r –расстояние от оси стола до оси цилиндра.

Выполнение эксперимента

1. Заготовить таблицу измерений

Таблица 4

<i>№</i>	<i>T, с</i>	<i>T², с²</i>	<i>r, м</i>			
				<i>I_{гр.}, кг·м²</i>	<i>I, кг·м²</i>	<i>I_{расч.}, кг·м²</i>

2. Рассчитать момент инерции тела заданной формы, измерив их массу и размеры с помощью технических весов и штангенциркуля соответственно. Момент инерции стола был определен в предыдущем задании.

3. Перекинуть нить через большой шкив стола. Концы нити соединить с пружинами. Пружины присоединить к штырям на оси шкива-ролика стойки. В свободном состоянии обе пружины должны быть натянуты равномерно без провисания.

4. На измерительной системе установить режим «ОДНОКРАТНО» тумблером «1/2» в положение «2», тумблер таймера установить в среднее положение.

5. Провернуть платформу стола на 30° , установив риску диска-указателя в соответствующее положение. Зафиксировать положение стола тормозом.

6. Нажать кнопку «ГОТОВ», затем отпустить тормоз стола. Записать показания секундомера в таблицу. Экспериментальное значение момента инерции определить по формуле (39). Измерения повторить 5-10 раз.

7. Рассчитать момент инерции системы $I_{\text{теор}}$ по формуле (30).

8. Сравнить результаты расчета с результатами эксперимента. Сделать вывод.

Контрольные вопросы.

1. Дайте определение углового ускорения тела. Укажите направление вектора углового ускорения на схеме.

2. Дайте определение момента силы относительно неподвижного начала и относительно оси для вращающегося тела. Укажите на схеме направление вектора вращающего момента.

3. Дайте определение момента импульса материальной точки и вращающегося твердого тела. Укажите направление вектора на схеме.

4. Запишите уравнение моментов.

5. Сформулируйте основной закон динамики вращательного движения.

6. Что называется моментом инерции? Запишите формулы для момента инерции материальной точки, произвольного тела. Какова роль момента инерции во вращательном движении?

7. Получите формулу для момента инерции стержня относительно оси, проходящей через центр масс.

8. Сформулируйте теорему Штейнера. Как проверяется эта теорема в данной лабораторной работе?

9. Получите формулу для момента инерции стержня относительно любой оси, параллельной оси, проходящей через центр масс.

10. Какие методики используются для определения момента инерции в данном пособии?

Литература

1. Сивухин, Дмитрий Васильевич. Общий курс физики [Текст] : учеб. пособие : в 5 т. : рек. Мин. обр. РФ / Д. М. Сивухин. - 5-е изд., стер. - М. : Физматлит, 2006. Т. 1 : Механика. - 2006. - 560 с.
2. Стрелков, С.П. Механика [Электронный ресурс] : учебное пособие. — Электрон. дан. — СПб. : Лань, 2005. — 560 с. — Режим доступа: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=589 — Загл. с экрана.
3. Иродов И. Е. Задачи по общей физике: учеб. пособие: рек. УМО/ И. Е. Иродов СПб.: Лань, 2006, 2007. - 416 с.
4. Физический практикум. Механика: учеб.-метод. пособие: рекДВ РУМ/ АмГУ, ИФФ; сост. А.А. Согр [и др.].— Благовещенск: Изд-во Амур.гос. ун-та, 2007.- 134 с.
5. Хайкин С. Э. Физические основы механики: учебн. пособие. / С. Э. Хайкин. – 2-е изд., испр. и доп.. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1971. - 752 с.
6. Фейнман Р. Фейнмановские лекции по физике: пер. с англ./ Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс ; под ред. Я.А. Смородинского. 3-е изд..- М.: Мир, 1976. - 496 с.
7. Сборник качественных вопросов и задач по общей физике: учеб. пособие Е. И. Бабаджан [и др.]. М.: Наука. 1990. - 398 с.
8. Матвеев А. Н. Механика и теория относительности: учеб./ А. Н. Матвеев. - 4-е изд., стер., -М.: Лань, 2009. - 325с.

СОДЕРЖАНИЕ

Экспериментальная проверка основного закона динамики вращательного движения.....	3
Краткая теория	5
Выполнение эксперимента	11
Проверка теоремы Штейнера	16
Литература	20

Копылова Ирина Борисовна,

доцент кафедры физики АмГУ, канд. физ.-мат. наук

Динамика вращательного движения. Методические указания

Заказ 423.