Министерство образования и науки Российской Федерации

Амурский государственный университет

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ КУРСА ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

Учебное пособие

Благовещенск

Издательство АмГУ

2016

ББК 22.311я73
М-34

Рекомендовано
учебно-методическим советом университета

Рецензенты:

С.В. Барышников, профессор Благовещенского государственного педагогического университета, д-р физ.-мат. наук, профессор.
А.Г. Масловская, профессор кафедры «Математический анализ и моделирование» АмГУ, д-р физ.-мат. наук, доцент.

М-34 Математические основы курса общей физики: учебное пособие /сост. О.В. Зотова, И.А. Голубева. – Изд. 2-е, перераб. – Благовещенск: Изд-во АмГУ, 2016.

Учебное пособие предназначено для освоения дисциплины «Адаптивный курс физики» и содержит основные сведения о математическом аппарате физики и методах оценки достоверности результатов эксперимента. В пособии имеются вопросы и задания для самостоятельной работы студентов по всем изучаемым темам.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлениям подготовки: 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», 13.03.02 «Электроэнергетика и электротехника», 13.03.01 «Теплоэнергетика и теплотехника», 15.03.04 «Автоматизация технологических процессов и производств», 20.03.01 «Техносферная безопасность», а также других инженерных специальностей и направлений подготовки.

ББК 22.311я73

©Амурский государственный университет, 2016

© Зотова О.В., Голубева И.А., 2016

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие предназначено для освоения дисциплины «Адаптивный курс физики» и содержит основные сведения о математическом аппарате физики.

Актуальность введения данной дисциплины в учебные планы первого курса для студентов различных инженерных направлений подготовки и специальностей связана со снижением уровня их начальной (довузовской) математической подготовки. Содержание математического обучения играет важную роль в процессе адаптации студентов первого курса к вузовской образовательной системе. В любом предмете научное описание считается совершенным, когда в нем удается использовать язык и методы математики. Это оказывает положительное влияние на характер познавательной деятельности студентов и, главное, – на ее результаты. Все это опосредованно формирует качество будущей профессиональной деятельности студента. Недостаточная довузовская математическая подготовка вызывает определенные трудности у студентов первого курса при изучении курса физики, что неизбежно приводит к сложностям усвоения последующих специальных технических дисциплин.

Цель данного учебного пособия – помочь первокурсникам в освоении курса общей физики через понимание основ математического аппарата, применяемого для записи физических законов. В частности, это относится к таким разделам математической науки как векторная алгебра и дифференциально-интегральное исчисление, на которых базируется математический аппарат как общей, так и теоретической физики. Классическая механика Ньютона, как основа всех изучаемых физических дисциплин, по существу является векторной, и поэтому базовые знания векторной алгебры необходимы при изучении практически всего курса физики. В основе классической электродинамики – науки об электромагнитных процессах и явлениях – лежат уравнения Максвелла для электромагнитного поля, которые записываются в интегральной и дифференциальной форме. Понимание смысла этих уравнений невозможно без владения основами интегрально-дифференциального исчисления.

Одним из возможных вариантов улучшения усвоения физики студентами первого курса (особенно, если курс физики начинается с первого семестра) является введение в учебный план дисциплины «Адаптивный курс физики», предваряющей изучение основного курса физики. В рамках этой дисциплины появляется возможность подготовить студентов к восприятию учебного материала по основному курсу, повторив некоторые разделы школьного курса алгебры и геометрии, акцентировать их внимание на понятийном и математическом аппарате физики для дальнейшего освоения теории, решения практических задач и выполнения лабораторного практикума.

В данном учебном пособии рассмотрены элементы векторной алгебры, дифференциально-интегрального исчисления и их физические приложения, приведены методы статистической обработки экспериментальных данных и оценки их достоверности. Пособие содержит вопросы для самопроверки студентов по всем изучаемым темам и задания для самостоятельной работы. В приложениях приведены некоторые справочные сведения по элементарной математике, алгебре, геометрии, тригонометрии, системе единиц измерения, что может быть использовано студентами не только при решении физических задач, но и как справочный материал при изучении других естественно-научных и профессиональных дисциплин.

ВВЕДЕНИЕ

Слово «физика» в переводе с греческого означает «природа». Физика зародилась в древности и изначально являлась единственной наукой о природе. Она включала в себя все известное о явлениях, происходящих в окружающем мире, но по мере накопления фактов, усовершенствования методов наблюдения и исследования различных явлений природы эта наука стала столь обширной, что отдельные ее области превратились в самостоятельные науки. Так возникли, например, астрономия – наука о движении и строении небесных тел, биология – наука, изучающая все живое, геология – наука о строении Земли, химия – наука о составе и строении веществ, и их взаимных превращениях.

Что тогда остается на долю физики? Согласно определению из «Физического энциклопедического словаря»: «***Физика – наука, изучающая простейшие и вместе с тем наиболее общие закономерности явлений природы, свойства и строение материи, и законы ее движения***». Физика рассматривает природу как объективную реальность, которая существует независимо от нашего сознания. ***Материя*** есть философская категория для обозначения объективной реальности, которая дана нам в ощущении и существует независимо от нас. На сегодняшний день известны две формы материи: ***вещество*** и ***поле***. Из вещества состоят все тела в природе. Поле – это особая форма материи, посредством которой осуществляются любые взаимодействия между телами в природе.

Вещество и поле образуют физическое пространство, в котором протекают все физические явления в течение того или иного конечного времени. Многие свойства пространства и времени современной науке уже известны, в частности, известно, что материя, пространство и время взаимосвязаны и взаимообусловлены – стоит измениться одному, как обязательно изменится другое.

Простейшие виды движения – такие как механическое, волновое, атомно-молекулярное и т.д., одновременно являясь фундаментальными, входят в состав сколь угодно сложных видов движения. Физика является основой современного естествознания, в этом ее важность.

Одна из главных задач современной физики – изучение свойств вещества, входящих в состав как неживых, так и живых тел, изучение процессов в этих телах, т.е. изменений различных свойств, происходящих в результате тех или иных воздействий на рассматриваемое тело. Поэтому современные отрасли промышленности, энергетика, медицина, геология и даже сельское хозяйство немыслимы в отрыве от физики.

Еще одна из основных задач физики состоит в изучении структуры различных веществ, объяснений на этой основе уже известных свойств и прогнозирование новых, еще не известных. Кроме того, физика изучает строение самих атомов и молекул, а также строение отдельных частей атомов и молекул, атомные ядра и элементарные частицы.

Физика является опытной наукой, так как все установленные законы, все физические теории в своей основе вытекают из наблюдений и экспериментов, результаты которых обобщены и сформулированы в виде законов.

Как правило, все явления взаимосвязаны между собой, поэтому проводить изучение всей совокупности явлений – достаточно сложная задача. В связи с этим возникает необходимость в упрощении описания того или иного процесса за счет учета лишь основных факторов, определяющих рассматриваемое явление. Чтобы достичь определенной цели, в физике применяется прием разделения существенных и несущественных характеристик и связей в условиях поставленной задачи.

Упрощенное рассмотрение явлений позволяет установить сравнительно простые количественные связи между различными величинами, характеризующими явление или целую группу явлений. Эти связи и называют ***физическими законами***.

Критерием верности теории или гипотезы является опыт: если выводы теории не согласуются с опытом, противоречат ему, то теория неверна; согласование опытных данных с выводами теории служит ее подтверждением. Имеется также возможность пересмотра теории или ее замены на новую при появлении экспериментальных данных, которые не укладываются в рамки существующей.

При любых исследованиях, наблюдениях, экспериментах приходится делать те или иные ***измерения***. Очевидно, что любое измерение не может быть абсолютно точным. Точность измерений определяется многими факторами: видом и качеством приборов, умением экспериментатора, характеристиками измеряемого объекта и т.д. Все искажения при измерениях, так называемые погрешности, необходимо учитывать при исследованиях и вычислениях.

Математика, наряду с экспериментом, является важнейшим инструментом физического исследования. Физика имеет дело с количественными соотношениями, и языком физики является язык математических уравнений, поэтому физика – точная наука. Математические формулы физики связывают в уравнения ***физические величины***, с помощью которых выражают те или иные свойства изучаемых тел, веществ или полей. Эти величины могут иметь различный математический характер.

Определением физической величины называется соотношение, в котором подчеркивается основная ее особенность и дается способ определить ее численное значение. Существует две основные категории физических величин, которые используются в курсе физики, – ***скалярные*** и ***векторные***. Математические операции над ними производятся по различным правилам, которые более подробно будут рассмотрены в последующих разделах данного методического пособия.

Связь математики и физики и их влияние взаимны. Развитие математики позволяет решать все более сложные физические задачи, формулировать новые, более сложные физические закономерности. Эти возможности особенно расширились в последние годы и даже переросли в отдельный раздел физики – моделирование физических процессов и объектов.

Для успешной работы в любом из наукоемких технических направлений современному инженеру необходимо овладеть основами физики – изучить наиболее важные физические законы и их следствия, научиться выделять главное в сложных явлениях, освоить основные экспериментальные и математические методы физического исследования. Так, на энергетическом факультете физика является системообразующей дисциплиной предметных знаний. Она служит научной основой для всей современной электротехники и новых технологий в энергетике. Деятельность специалиста в области техносферной безопасности также невозможна без понимания физических процессов, заложенных в основу работы сложных технических устройств. Без знания курса общей физики невозможно овладеть профессиональными дисциплинами, а, следовательно, подготовить качественного специалиста, конкурентоспособного на рынке труда.

Данное учебное пособие поможет студентам первого курса свободно оперировать математическими понятиями при изучении физических законов, решении поставленных теоретических и прикладных профессиональных задач.

1. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

1.1. Понятие о скалярных и векторных величинах

При изучении реального мира приходится сталкиваться с такими свойствами исследуемых объектов, которые характеризуются числовой мерой (масса тела, объем тела, электрический заряд и т.д.). Такими характеристиками являются ***скалярные величины***, которые обозначаются либо буквами обычного шрифта, либо цифрами (*a, b, t, I, 5, -7,…*). Скалярные величины могут быть как положительными, так и отрицательными. Математические операции над ними выполняются по правилам арифметики и элементарной алгебры.

В то же время некоторые объекты изучения могут обладать такими свойствами, которые требуют не только знания числовой меры, но и направления в пространстве. Эти свойства характеризуются величинами, которые называются ***векторными***.

Таким образом, ***скалярной величиной*** (или ***скаляром***) называется физическая величина, характеризуемая численным значением и не обладающая направлением, например: S – путь, t – температура (по шкале Цельсия), ρ – плотность, R – сопротивление, A – работа, I – сила тока. ***Векторной величиной*** называется физическая величина, характеризующаяся, помимо числового значения, еще и направлением, например: $\vec{V}$ – скорость, $\vec{a}$ – ускорение, $\vec{F}$ – сила, $\vec{E}$ – напряженность электрического поля. В учебной и научной литературе векторные величины в отличие от скалярных принято обозначать буквами жирного шрифта (***a, p, F, v, E*** и т.д.) или буквой обычного шрифта (нежирного), но со стрелкой над ней ($\vec{a},\ \vec{p}, \overrightarrow{F},\ \vec{v},\ \vec{E}$ и т.д.). Операции над векторными величинами выполняются по правилам векторной алгебры, поэтому при решении физических задач необходимо знать свойства векторов и уметь производить действия с векторами.

1.2. Свойства векторов

Вектор изображается в виде направленного отрезка (рис. 1.1), направление которого указывается стрелкой, а длина называется ***модулем*** вектора, или

Рис. 1.1.

его ***абсолютной величиной***. Обозначают векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, или $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{NM}$, или $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{AB}$.

Модуль вектора $\vec{a}$ обозначается $|\vec{a}|$ или чаще a. Таким образом, встречая в тексте обозначение векторной величины без знака вектора (например, сила *F*), понимаем, что в данном случае рассматривается только ее модуль, т.е. численное значение. Модули любых векторов являются скалярами.

Отрезки, начало и конец которых совпадают, определяют вектор, который называется ***нулевым вектором*** и обозначается $\vec{0}$. Абсолютная величина нулевого вектора считается равной нулю. Понятие направления для нулевого вектора не определено.

Векторы называются ***коллинеарными,*** если они лежат на одной прямой или параллельны между собой.

Векторы называются ***компланарными***, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Два вектора называются ***равными,*** если они имеют одинаковый модуль и являются сонаправленными (рис. 1.2).

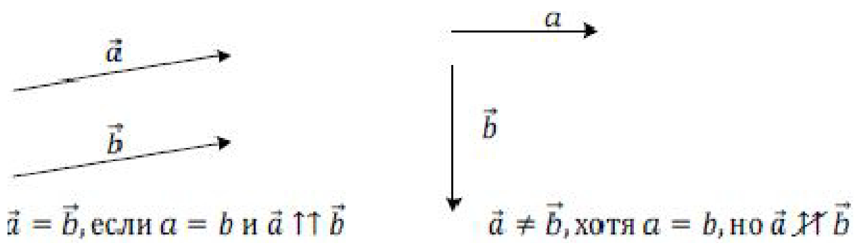


Рис. 1.2.

Два вектора называются ***противоположными***, если они равны по модулю и противоположно направлены (рис. 1.3).

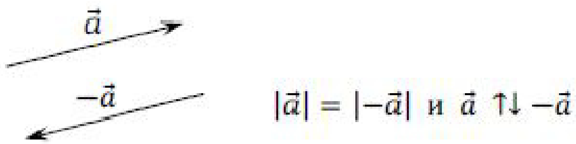


Рис. 1.3.

Всякие векторы (в любом количестве) можно привести к ***общему началу***, т.е. построить векторы из одной точки (т. О), перенося их в пространстве параллельно самим себе (рис. 1.4).

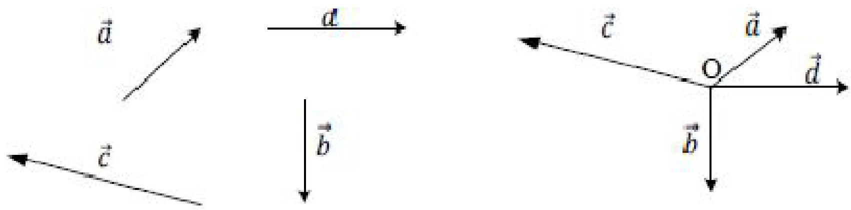


Рис. 1.4.

В физике данный прием используется при решении задач с применением второго закона Ньютона:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F_i} = m\vec{a}$$

В сумму сил могут входить силы, приложенные к одному телу, но имеющие разные точки приложения, и для нахождения их суммы векторы сил удобнее построить из одной точки (рис. 1.5).

Рис. 1.5.

Вопросы и задания для самопроверки к 1.1 и 1.2

1. Чем отличаются скалярные и векторные физические величины? Как они обозначаются?

2. Какие из указанных физических величин являются векторными, а какие скалярными – масса, импульс, энергия, скорость, перемещение, сила, ускорение, площадь, объем, время, температура, давление, работа, заряд, напряженность электрического поля, сила тока, напряжение, сопротивление?

3. Что называется вектором? Что такое нулевой вектор?

4. Что понимается под модулем вектора? Как обозначается модуль векторной величины?

5. Какие векторы называются равными, какие противоположными?

6. Точки A, B, C и D – вершины параллелограмма, O – точка пересечения его диагоналей, M – середина стороны AB. Изобразите рисунок и укажите пары точек, определяющие: а) равные векторы; б) коллинеарные векторы; в) векторы одинаково направленные с $\overrightarrow{AD}$; г) противоположные векторы; д) векторы, направленные противоположно $\overrightarrow{AD}$.

7. Как привести векторы к общему началу? В каких физических задачах применяется такое действие?

1.3. Сложение и вычитание векторов

Суммой двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется третий вектор $\vec{c}$, полученный в результате построения, с применением ***правила треугольника*** или ***правила параллелограмма***.

Правило треугольника: из произвольного начала (т. O) строится вектор $\vec{a}$, конец которого совмещается с началом вектора $\vec{b}$. Вектор, проведенный из начала вектора $\vec{a}$ в конец вектора $\vec{b}$, есть вектор $\vec{c}$, являющийся их суммой (рис. 1.6). Модуль вектора $\vec{c}$ можно найти, применяя ***теорему косинусов***:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\propto \tag{1.1}$$

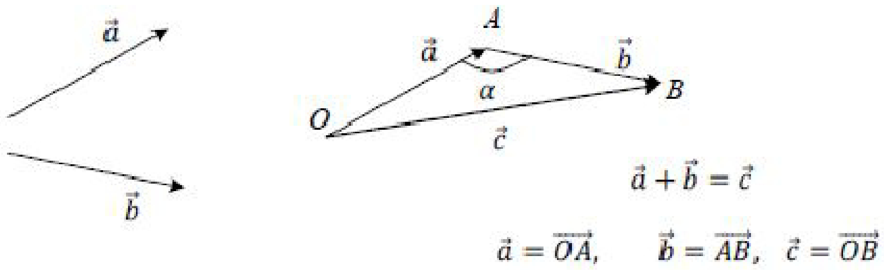


Рис.1.6.

Правило параллелограмма: суммарный вектор $\vec{c}$ является диагональю параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис.1.7).

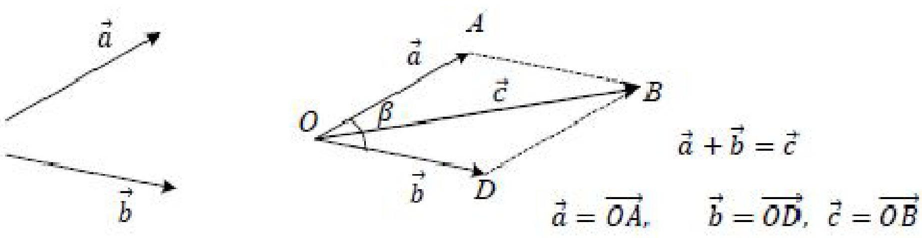


Рис. 1.7.

Модуль вектора $\vec{c}$ также можно найти, применяя теорему косинусов, преобразованную к виду:

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\propto \qquad (1.2)$$

Выражение (1.2) получается из теоремы косинусов (1.1), если угол α (рис. 1.6) выразить через угол между векторами β: α=180-β, следовательно, cosα= cos(180-β)= -cos β.

В случае коллинеарности векторов построение проводится вдоль прямой (рис. 1.8) по правилу треугольника (правило параллелограмма для коллинеарных векторов неприменимо).

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$

$\vec{a} = \overline{OA}$ $\vec{b} = \overline{AB}$ $\vec{c} = \overline{OB}$

Рис. 1.8.

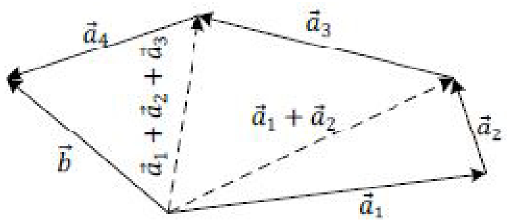
Сложение векторов обладает свойством переместительности:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}. \qquad (1.3)$$

Сложение векторов обладает свойством сочетательности:

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = (\vec{a} + \vec{c}) + \vec{b} \qquad (1.4)$$

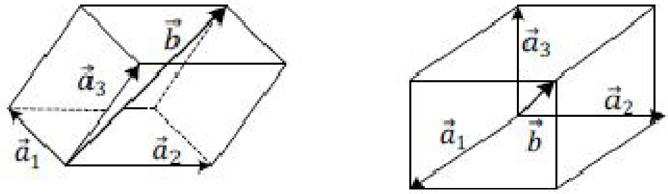
На свойстве сочетательности основано сложение нескольких векторов с помощью ***правила многоугольника*** (***правило цепи***): при сложении нескольких векторов, лежащих в одной плоскости, сумму можно найти последовательным сложением двух векторов. Например, при сложении векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$, $\vec{a}_4$ сначала с вектором $\vec{a}_1$ суммируется вектор $\vec{a}_2$, к получившемуся вектору прибавляется вектор $\vec{a}_3$ и т.д. Результатом является вектор $\vec{b}$, проведенный из начала вектора $\vec{a}_1$ в конец вектора $\vec{a}_4$ (рис. 1.9).



$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4 = \vec{b}$

Рис. 1.9.

В частном случае сложение векторов, не лежащих в одной плоскости, проводится согласно ***правилу параллелепипеда***: суммой трех векторов является вектор, по длине и направлению совпадающий с диагональю параллелепипеда, сторонами которого являются складываемые векторы, приведенные к общему началу (рис. 1.10).



$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 = \vec{b}$

Рис. 1.10.

Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, который после приведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ к общему началу можно провести из конца вектора $\vec{b}$ в конец вектора $\vec{a}$ (рис. 1.11).

Модуль вектора $\vec{c}$, являющегося разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, можно определить, применяя теорему косинусов (1.1): $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\propto$, где α – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис 1.11).

Можно представить разность векторов $(\vec{a} - \vec{b})$ в виде суммы вектора $\vec{a}$ и вектора $-\vec{b}$, т.е. $\vec{a} + (-\vec{b})$, и находить результат по правилу сложения векторов (рис. 1.12).

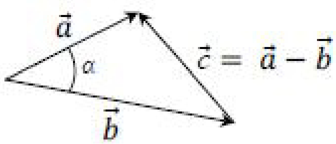


Рис. 1.11.

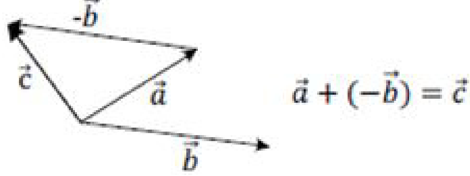


Рис. 1.12.

Помимо вычитания, действием, обратным сложению, является ***разложение вектора на составляющие***, которое заключается в замене вектора на равную ему сумму нескольких векторов. При разложении на два вектора по заданным направлениям задача решается просто – построением параллелограмма.

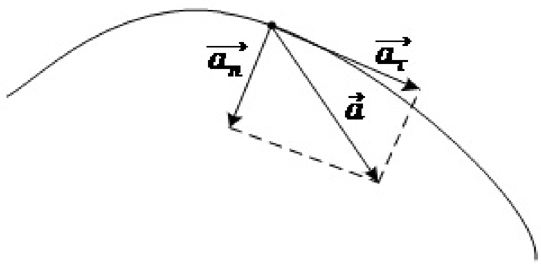


Рис. 1.13.

Например, в задачах кинематики применяется разложение вектора ускорения на нормальную и тангенциальную составляющие (рис. 1.13).

1.4. Умножение и деление вектора на число

Произведением вектора $\vec{a}$ на число A есть новый вектор, модуль которого получен в результате умножения модуля вектора $\vec{a}$ на абсолютное значение числа A, а направление совпадает с направлением вектора $\vec{a}$, если $A > 0$, или противоположно ему, если $A < 0$ (рис. 1.14).

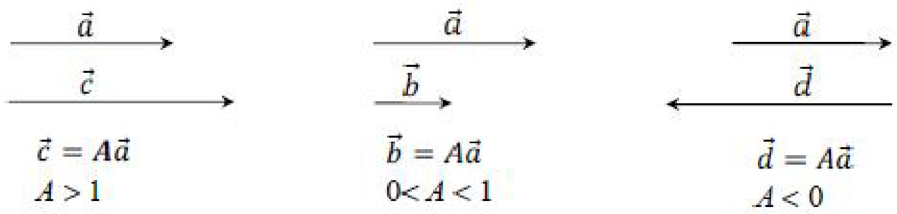


Рис. 1.14.

Разделить вектор $\vec{a}$ на число A – значит найти такой вектор $\vec{c}$, который при умножении на число A даст в произведении вектор $\vec{a}$:

$$\vec{a} = A \cdot \vec{c}\ , \quad => \quad \vec{c} = \frac{\vec{a}}{A} \tag{1.5}$$

Умножение вектора на число подчиняется тем же законам, что и умножение чисел:

1) распределительный закон по отношению к числовому множителю

$$A \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = A \cdot \vec{a} + A \cdot \vec{b}, \tag{1.6}$$

2) распределительный) закон по отношению к векторному множителю

$$(A + B) \cdot \vec{a} = A \cdot \vec{a} + B \cdot \vec{a}, \tag{1.7}$$

3) свойство сочетательности

$$A \cdot (B \cdot \vec{a}) = (A \cdot B) \cdot \vec{a}. \tag{1.8}$$

Вопросы для самопроверки к 1.3 и 1.4

1. Какие существуют правила нахождения суммы двух векторов? Сформулируйте их.

2. Как определить модуль вектора, являющегося результатом сложения двух других векторов?

3. Какие существуют правила нахождения разности двух векторов? Сформулируйте их.

4. Как определить модуль вектора, являющегося результатом разности двух векторов?

5. Как определить сумму трех (или более) векторов, лежащих в одной плоскости?

6. Как определить сумму трех векторов, не лежащих в одной плоскости?

7. В чем заключается действие разложения вектора на составляющие? Приведите примеры применения этого действия в физических задачах.

8. Что является результатом умножения вектора на положительное число? На отрицательное число?

9. Как разделить вектор на число?

Задания для самостоятельного решения

1.1. Дан параллелограмм ABCD. Точка M лежит на стороне CD. Найдите сумму векторов: 1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$; 2) $\left(-\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{DM}\right)$; 3) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$; 4) $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BM}$.

1.2. Дан параллелограмм ABCD. Точка O – точка пересечения диагоналей. Найдите вектор, равный вектору: 1) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AO}$; 2) $\overrightarrow{DO}-\overrightarrow{CB}$; 3) $\overrightarrow{CO}-\overrightarrow{OB}$; 4) $-\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{AB}$.

1.3. Отложите от точки O три таких вектора, чтобы их сумма была равна нулю.

1.4. Найдите модуль суммы векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{a}|=11$, $|\vec{b}|=23$, $|\vec{a}-\vec{b}|=30$.

1.5. Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ 140°, найдите $\vec{d}=\vec{a}+\vec{b}$, если a=2, b=5.

1.6. Найдите $\vec{k}=\vec{b}-\vec{c}$, если b=3, c=6 и угол между векторами 55°.

1.7. Даны векторы $\vec{a}$ и $C\vec{a}$. При каких значениях C эти векторы: а) равны; б) противоположно направлены; в) коллинеарны?

1.8. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол 60°. Зная, что $|\vec{a}|=3$ и $|\vec{b}|=5$, постройте векторы, являющиеся результатом действий с векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, и вычислите: 1) $|\vec{a}-2\vec{b}|$; 2) $|\vec{a}+2\vec{b}|$; 3) $|\vec{b}-0{,}3\vec{a}|$; 4) $|-\vec{a}+0{,}5\vec{b}|$.

1.9. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол 120°. Зная, что $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 4$, постройте векторы, являющиеся результатом действий с векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, и вычислите их модули: 1) $3 \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{a}\right)$; 2) $-\frac{3}{2}\vec{b}$; 3) $2\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b}$; 4) $-2\left(\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right)$;

5) $2(\vec{a} - \vec{b}) + 3\vec{b} - \vec{a}$; 6) $\frac{3}{4}(\vec{a} + 2\vec{b}) - \frac{1}{4}(\vec{a} - 2\vec{b})$.

1.10. На материальную точку действуют две силы $\vec{F_1}$ и $\vec{F_2}$, направленные под углом α друг к другу. Постройте вектор результирующей силы и найдите ее модуль, если: 1) $F_1 = 3$ Н, $F_2 = 4$ Н, $\alpha = 90°$; 2) $F_1 = 3$ Н, $F_2 = 7$ Н, $\alpha = 30°$; 3) $F_1 = 11{,}7$ Н, $F_2 = 20{,}5$ Н, $\alpha = 135°$.

1.11. Величина равнодействующей двух взаимно перпендикулярных сил равна 10 Н. Найдите модуль одной составляющей, если модуль другой равен 4 Н.

1.12. Найдите модуль равнодействующей трех взаимно перпендикулярных сил, приложенных к одной точке, если: 1) $F_1 = 2$ Н, $F_2 = 3$ Н, $F_3 = 6$ Н; 2) $F_1 = 2$ Н, $F_2 = 5$ Н, $F_3 = 4$ Н.

1.13. Груз массой m=0,6 кг подвешен на нити и оттянут горизонтально оттяжкой. Найдите модуль сил натяжения нити и оттяжки, если угол между нитью и оттяжкой α=120°.

1.14. Между двумя стенами на тросах висит фонарь массой m=2,3 кг. Левый трос образует со стеной угол α=46°, а правый – угол β=54°. Найдите натяжение обоих тросов.

1.5. Проекции векторов

Проецирование вектора можно проводить на оси, на плоскости или на направление другого вектора.

Осью называется всякая прямая, на которой выделено одно из двух ее направлений. Данное направление называется ***положительным***, противоположное направление называется ***отрицательным***.

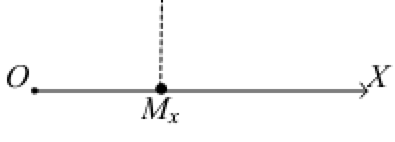


Рис. 1.15.

Проекция точки M на ось *OX* есть точка M_x, которая является основанием перпендикуляра, проведенного из точки *M* на ось *OX* (рис. 1.15).

Выражение «***проекция вектора на ось***» употребляется в двух разных смыслах: ***геометрическом и алгебраическом.***

Геометрической проекцией вектора $\vec{a}$ на ось *OX* называется вектор, начало которого есть проекция начала вектора $\vec{a}$ на ось *OX*, а конец – проекция конца вектора $\vec{a}$ на ту же ось *OX* (рис. 1.16). Геометрическая проекция вектора $\vec{a}$ на *OX* называется ***компонентой*** вектора $\vec{a}$ по оси *OX* и обозначается $\overrightarrow{a_x}$.

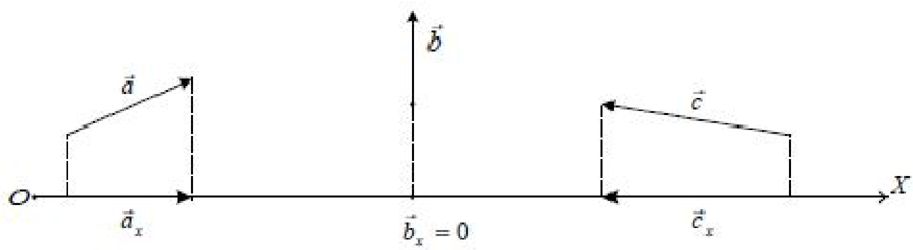


Рис. 1.16.

Алгебраической проекцией вектора $\vec{a}$ на ось *OX* (обозначается a_x) называется модуль вектора геометрической проекции вектора $\vec{a}$ на ось *OX*, взятый с положительным или отрицательным знаком, в зависимости от того совпадает направление геометрической проекции с осью или противоположно ей. Например, на рис. 1.16: $a_x = |\vec{a}_x|$, $a_x > 0$; $b_x = |\vec{b}_x| = 0$; $c_x = -|\vec{c}_x|$, $c_x < 0$.

Теорема 1 о проекциях векторов: алгебраическая проекция вектора на какую-либо ось равна произведению модуля вектора на косинус угла между положительным направлением этой оси и вектором:

$$a_x = a \cdot cos(\vec{a} \wedge \overrightarrow{OX}) \qquad (1.9)$$

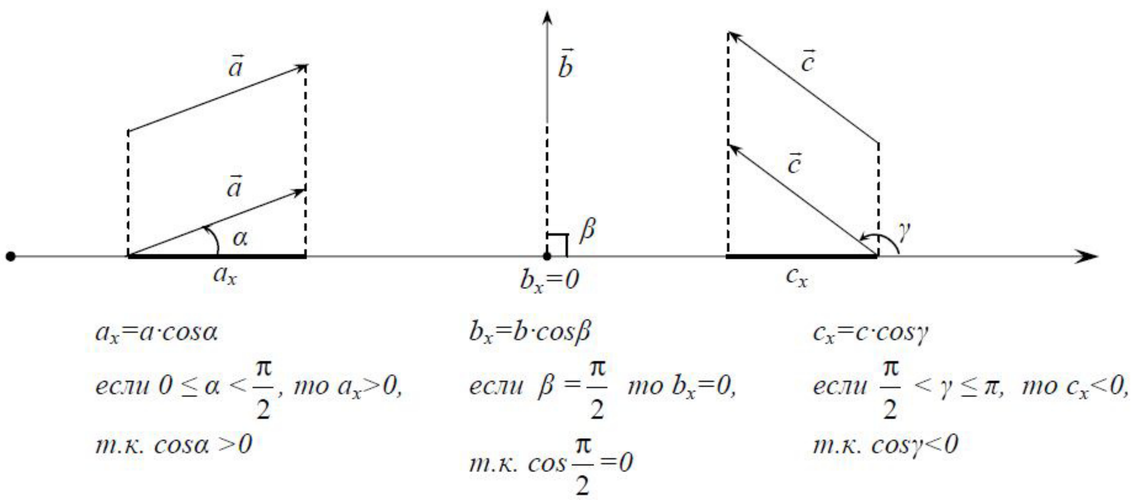


Рис. 1.17.

Теорема 2 о проекциях векторов: проекция суммы векторов на какую-либо ось равна сумме проекций на данную ось слагаемых векторов (рис. 1.18).

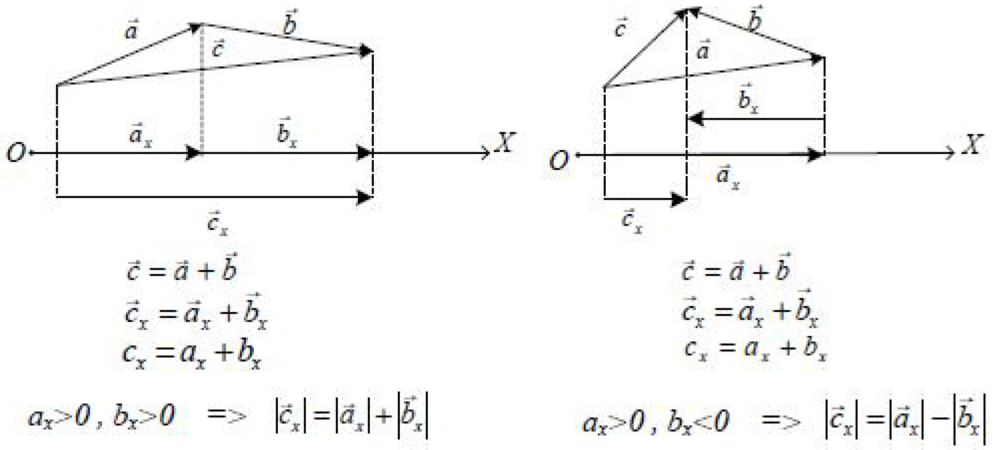


Рис. 1.18.

При проецировании вектора в пространстве необходимо определить систему координат.

Системой координат называется совокупность (набор) параметров, полностью определяющих положение материальной точки (тела) в пространстве. Системы координат бывают: *прямоугольная (декартова), сферическая, цилиндрическая* и др. В классической механике наиболее часто используется прямоугольная система координат.

Прямоугольная (декартова) система координат – совокупность трех взаимно перпендикулярных осей, проходящих через одну точку O (начало координат). Декартова система координат является ***правой (правовинтовой)***, т.е. положительные направления осей выбираются так, что при вращении правого винта от оси OX к оси OY поступательное движение острия винта указывает на направление оси OZ (рис 1.19).

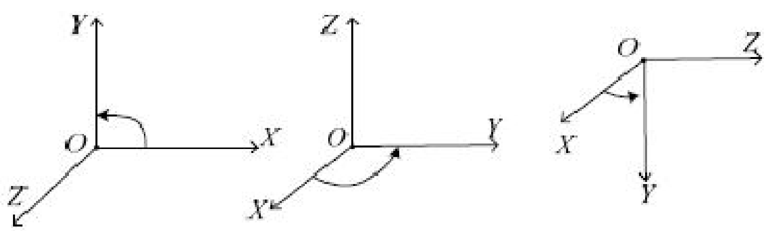


Рис. 1.19.

Для масштаба по координатным осям вводятся ***единичные векторы (орты)*** $\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}$.

Любой вектор $\vec{a}$, спроецированный на оси декартовой системы координат, равен геометрической сумме его проекций (компонент) на координатные оси (рис. 1.21):

$$\vec{a} = \vec{\imath}a_x + \vec{\jmath}a_y, \tag{1.10}$$

где $\vec{\imath}a_x = \vec{a}_x$ и $\vec{\jmath}a_y = \vec{a}_y$.

Из рис.1.21 видно, что модуль вектора равен корню квадратному из суммы квадратов его алгебраических проекций:

$$|\vec{a}| \equiv a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}. \tag{1.11}$$

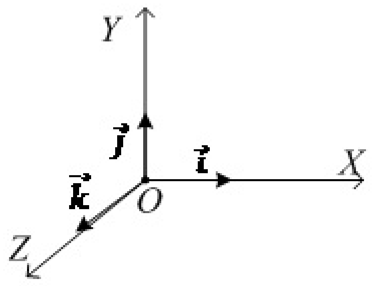


Рис. 1.20.

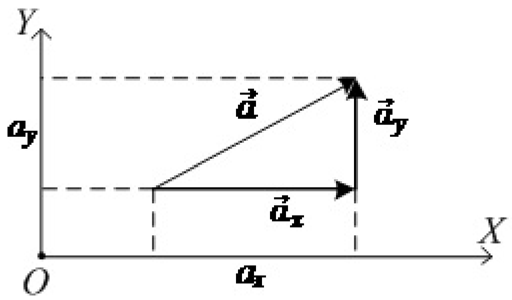


Рис. 1.21.

Для произвольного вектора, определяемого в декартовой системе координат

$$\vec{a} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k}\,, \tag{1.12}$$

модуль вектора будет равен:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \tag{1.13}$$

Физические приложения

1. В кинематике для определения положения материальной точки в пространстве используется *радиус-вектор* $\vec{r}$, проводимый из начала координат в данную точку (рис. 1.22).

Проекции конца радиус-вектора на координатные оси дают координаты фиксируемой им точки:

$$\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}, \tag{1.14}$$

$$|r| = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \tag{1.15}$$

2. При описании гармонических колебательных процессов используется метод векторных диаграмм, где физические величины, совершающие гармонические колебания, представляются в виде *вращающихся векторов* (рис. 1.23).

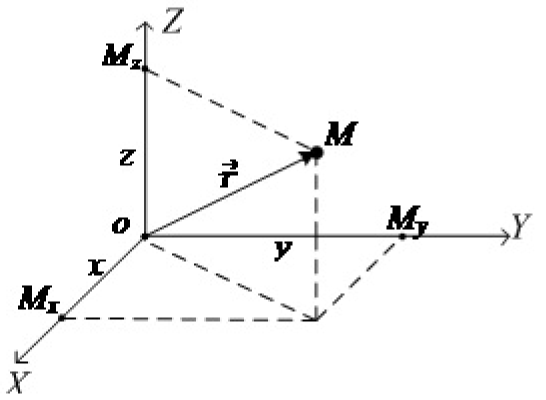


Рис. 1.22.

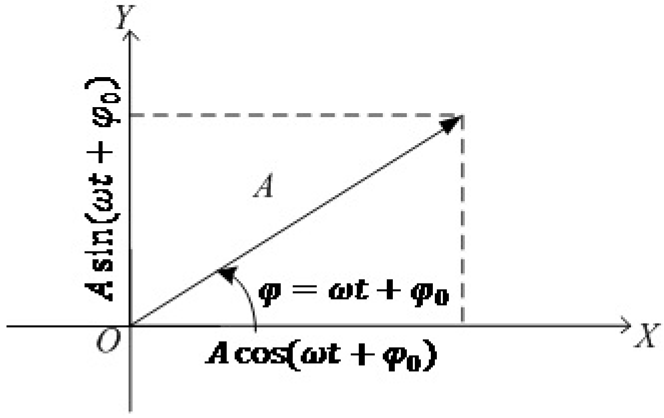


Рис. 1.23.

На такой векторной диаграмме колебанию с угловой частотой ω в момент времени t сопоставляется вектор, модуль которого равен амплитуде колебания A и образует с осью OX угол, равный фазе колебания $\varphi = \omega t + \varphi_0$ (φ_0 – начальная фаза в момент времени $t=0$). С течением времени t данный вектор равномерно вращается с угловой скоростью ω против часовой стрелки, а проекции его на координатные оси определяют значение колеблющейся величины в данный момент времени: $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$ и $y = A\sin(\omega t + \varphi_0)$.

Применяя метод векторных диаграмм, можно провести сложение колебаний одного направления и определить амплитуду и начальную фазу результирующего колебания. Такой способ графического представления колеблющихся величин широко используется в электротехнике при расчете электрических цепей переменного синусоидального тока.

Вопросы для самопроверки к 1.5

1. Что называется алгебраической проекцией вектора на ось?

2. Что называется геометрической проекцией вектора на ось?

3. Какой смысл имеют обозначения: a_x и $\vec{a}_x$?

4. Что называется системой координат? Как связаны оси в декартовой системе координат?

5. Что называется ортом? Приведите примеры ортов.

6. Что означает выражение «разложить вектор на компоненты»?

7. Как определить модуль вектора через его проекции на координатные оси?

8. Как определяется проекция суммы векторов?

9. Что такое радиус-вектор? Как представить радиус-вектор и его модуль в декартовой системе координат?

Задания для самостоятельного решения

1.15. Определите геометрические и алгебраические проекции вектора $\vec{\mathrm{k}}$ на координатные оси (рис. 1.24 (а)), если k=5, а угол между вектором $\vec{\mathrm{k}}$ и осью OX равен 130°.

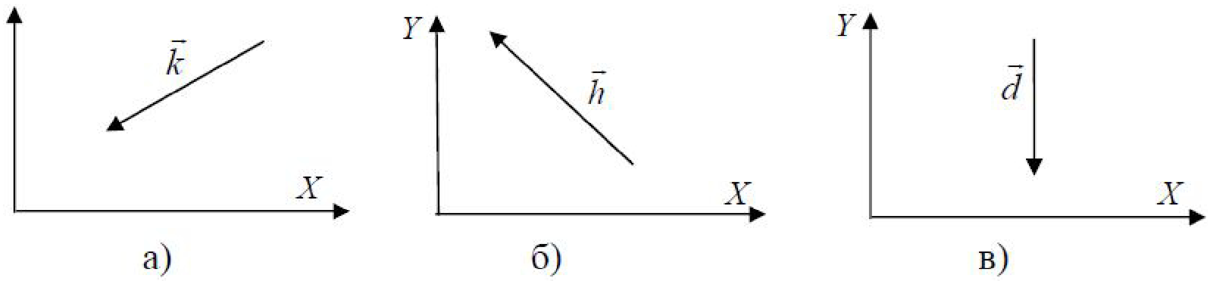


Рис. 1.24.

1.16. Определите геометрические и алгебраические проекции вектора $\vec{\mathrm{h}}$ на координатные оси (рис. 1.24 (б)), если h=7, а угол между вектором $\vec{\mathrm{h}}$ и осью OY равен 35°.

1.17. Определите геометрические и алгебраические проекции вектора $\vec{\mathrm{h}}$ на координатные оси (рис. 1.24 (в)), если d=4, а угол между вектором $\vec{\mathrm{h}}$ и осью OX равен 90°.

1.18. Определите модуль вектора $\vec{k}$ и углы между вектором и координатными осями OX и OY, если алгебраические проекции вектора $\vec{k}$ на координатные оси: а) k_x=5 и k_y=3; б) k_x=–4 и k_y=2; в) k_x=–3 и k_y=–3; г) k_x=–5 и k_y=0; д) k_x=0 и k_y=6. Сделайте чертеж для каждого случая.

1.19. Определите модуль вектора $\vec{p}$ и углы между вектором и координатными осями OX, OY и OZ, если проекции вектора $\vec{p}$ на координатные оси: а) p_x=5, p_y=3, p_z=6; б) p_x=–4, p_y=2, p_z=0; в) p_x=–4, p_y=–3 p_z=–5; г) p_x=–3, p_y=0, p_z=6; д) p_x=0, p_y=6, p_z=–6.

1.20. Определите величину и знак алгебраической проекции вектора $\vec{a}$ на координатные оси OX и OY, если $|\vec{a}| = 4$, а угол между направлением вектора и положительным направлением оси OY составляет 120° (угол между вектором и положительным направлением оси OX острый).

1.21. Определите величину и знак алгебраической проекции вектора $\vec{b}$ на координатные оси OX и OY, если $|\vec{b}| = 12$, а угол между направлением вектора и положительным направлением оси OX составляет 60° (угол между вектором и положительным направлением оси OY острый).

1.22. К материальной точке приложены силы F_1=3 Н и F_1=4 Н, векторы $\overrightarrow{F_1}$ и $\overrightarrow{F_2}$ составляют с осью OX углы 10° и 40° соответственно. Найдите равнодействующую сил и ее проекции на оси OX и OY.

1.23. К материальной точке приложены силы F_1=5 Н и F_1=8 Н, векторы $\overrightarrow{F_1}$ и $\overrightarrow{F_2}$ составляют с осью OX углы 30° и 120° соответственно. Найдите равнодействующую сил и ее проекции на оси OX и OY.

1.6. Скалярное произведение двух векторов

Скалярным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется произведение модулей этих векторов на косинус угла между ними. Результат скалярного произведения есть скалярная величина. Обозначение действия скалярного произведения может быть в виде $(\vec{a}, \vec{b})$ или $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = abcos(\vec{a} \wedge \vec{b}) \tag{1.16}$$

Скалярное произведение двух векторов можно представить как произведение модуля одного из векторов и алгебраической проекции другого вектора на направления первого (рис.1.25).

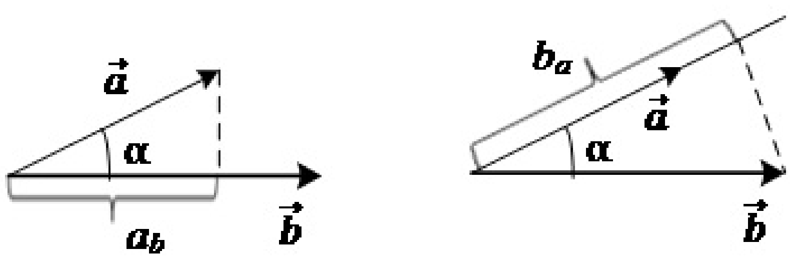


Рис. 1.25.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_b \cdot b = b_a \cdot a, \tag{1.17}$$

где $a_b = a \cdot \cos(\vec{a} \wedge \vec{b}),\ b_a = b \cdot \cos(\vec{a} \wedge \vec{b})$.

Результат скалярного произведения зависит от значения, которое принимает косинус угла между векторами:

1) если $0 \le (\vec{a} \wedge \vec{b}) < \frac{\pi}{2}$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$ (результат произведения положительный);

2) если $\frac{\pi}{2} < (\vec{a} \wedge \vec{b}) \le \pi$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$ (результат произведения отрицательный);

3) если $(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$;

4) если $\vec{a} \cdot \vec{a} = a \cdot a \cos 0 = a^2$, имеем произведение вектора самого на себя, результатом которого является квадрат его модуля.

Свойства скалярного произведения

1. Свойство переместительности: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.

2. Свойство распределительности: $(\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2}) \cdot \vec{b} = \overrightarrow{a_1} \cdot \vec{b} + \overrightarrow{a_2} \cdot \vec{b}$.

Это справедливо для любого числа слагаемых.

3. Свойство сочетательности относительно скалярного множителя: $(m\vec{a}) \cdot \vec{b} = m(\vec{a} \cdot \vec{b})$, или $(m\vec{a}) \cdot (n\vec{b}) = mn(\vec{a} \cdot \vec{b})$.

Скалярное произведение двух векторов, представленных в декартовой системе координат, можно записать в виде суммы произведений одноименных компонентов:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \tag{1.18}$$

<u>Замечание:</u> скалярное произведение нельзя применить в случае трех сомножителей, так как скалярное произведение есть скаляр; если его умножить на вектор, то в результате получится вектор:

$$(\vec{a}, \vec{b}) \cdot \vec{d} = \vec{d} \cdot ab \cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{d} \cdot B = \vec{c}, \tag{1.19}$$

где B – скаляр, результат умножения векторов $(\vec{a}, \vec{b})$; векторы $\vec{d}$ и $\vec{c}$ коллинеарные.

Одним из примеров применения скалярного произведения векторов **в физике** является скалярное произведение вектора силы $\vec{F}$ на вектор перемещения $\Delta\vec{r}$, результат которого есть скалярная физическая величина, называемая *работой силы*:

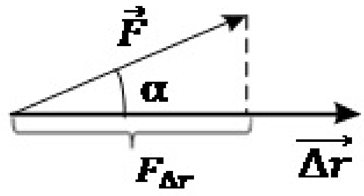


Рис. 1.26.

$$A = \left(\vec{F}, \Delta\vec{r}\right) = F\Delta r\cos\alpha = \Delta r F_{\Delta r} \quad (1.20)$$

Вопросы для самопроверки к 1.6

1. Как обозначается операция скалярного произведения векторов и что является ее результатом?

2. Какими свойствами обладает скалярное произведение векторов?

3. Какая из физических величин определяется через скалярное произведение векторов?

4. Как определить проекцию одного вектора на направление другого?

5. Как определить результат скалярного произведения двух векторов, если известны проекции этих векторов на координатные оси?

6. Можно ли выполнить операцию скалярного произведения для трех векторов?

Задания для самостоятельного решения

1.24. Найдите скалярное произведение векторов, которые образуют угол 45°, если модули векторов имеют значения: $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$.

1.25. Под каким углом должна быть направлена сила F=20 Н, чтобы совершенная работа была равна 30 Дж при перемещении на 3 м?

1.26. Рассчитайте работу силы, приложенной к телу под углом 30°, при его перемещении на 20 м. Модуль силы равен 4,2 кН.

1.27. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол 120°. Зная модули $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 5$, вычислите: 1) $(\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b})$; 2) $(2\vec{a} + \vec{b})^2$; 3) $(2\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b})$.

1.28. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол 30°. Зная модули $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 3$, вычислите: 1) $5\vec{a} \cdot (\vec{a} + 2\vec{b})$; 2) $(\vec{a} - 2\vec{b})^2$; 3) $(3\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b})$.

1.29. Единичные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол α. Найдите значение угла, если векторы $\vec{a}+2\vec{b}$ и $5\vec{a}-4\vec{b}$ перпендикулярны.

1.30. Единичные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол α. Найдите значение угла, если векторы $3\vec{a}-2\vec{b}$ и $\vec{a}-3\vec{b}$ коллинеарные.

1.31. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол α. Найдите значение угла, если векторы заданы в виде: 1) $\vec{a}=\vec{\imath}+5\vec{\jmath}+3\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{\imath}+4\vec{\jmath}$; 2) $\vec{a}=0{,}5\vec{\imath}+0{,}2\vec{\jmath}-\vec{k}$, $\vec{b}=2{,}2\vec{\imath}+2{,}5\vec{k}$; 3) $\vec{a}=-12\vec{\imath}-4\vec{\jmath}+20\vec{k}$, $\vec{b}=6\vec{\imath}+11\vec{\jmath}-5\vec{k}$.;

1.7. Векторное произведение двух векторов

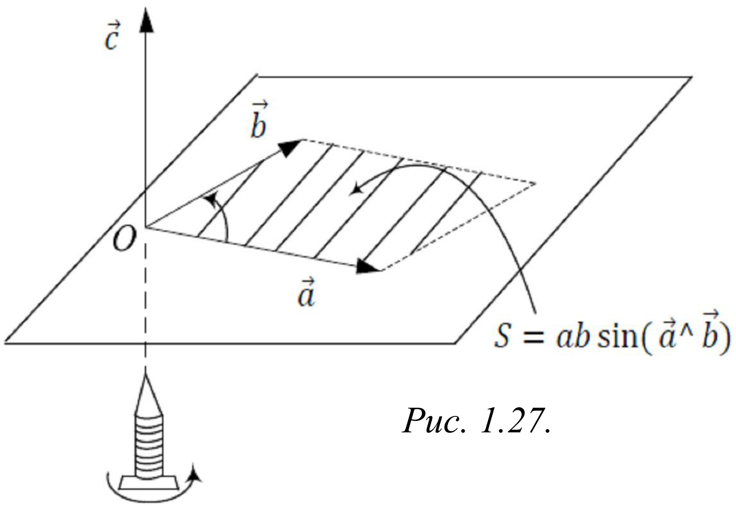


Рис. 1.27.

Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на неколлинеарный с ним вектор $\vec{b}$ называется третий вектор $\vec{c}$, модуль которого определяется произведением модулей векторов $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ на синус угла между ними и численно равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ (рис. 1.27):

$$\vec{c}=[\vec{a}\cdot\vec{b}] \tag{1.21}$$

$$c=a\cdot b\sin(\vec{a}\wedge\vec{b}) \tag{1.22}$$

Вектор $\vec{c}$ всегда перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Его направление определяется ***правилом правого винта:*** если правый винт вращать от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ по пути их наикратчайшего совмещения, то направление поступательного движения острия винта укажет направление вектора $\vec{c}$, который является результатом векторного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Символическое обозначение действия векторного произведения может быть в виде $[\vec{a}\cdot\vec{b}]$ или $\vec{a}\times\vec{b}$.

Свойства векторного произведения:

1. Векторное произведение вектора самого на себя равно нулю:

$[\vec{a} \cdot \vec{a}] = 0,$ так как $(\vec{a} \,\hat{}\, \vec{a}) = 0$ и $\sin(\vec{a} \cdot \vec{a}) = 0.$

2. Свойство распределительности: $\left[(\vec{a_1} + \vec{a_2}) \cdot \vec{b}\right] = \left[\vec{a_1} \cdot \vec{b}\right] + \left[\vec{a_2} \cdot \vec{b}\right].$

Это свойство справедливо для любого числа слагаемых.

3. Свойство сочетательности относительно скалярного множителя:

$\left[(m\vec{a}) \cdot \vec{b}\right] = m\left[\vec{a} \cdot \vec{b}\right]$, или $\left[m\vec{a} \cdot n\vec{b}\right] = mn\left[\vec{a} \cdot \vec{b}\right].$

4. При перестановке сомножителей векторное произведение умножается на (-1), т.е. результат меняет знак на противоположный:

$\left[\vec{a} \cdot \vec{b}\right] = -\left[\vec{b} \cdot \vec{a}\right]$, т.е: если $\left[\vec{a} \cdot \vec{b}\right] = \vec{c}$, то $\left[\vec{b} \cdot \vec{a}\right] = -\vec{c}$ (рис. 1.28).

Таким образом, *векторное произведение <u>не обладает</u> свойством переместительности*.

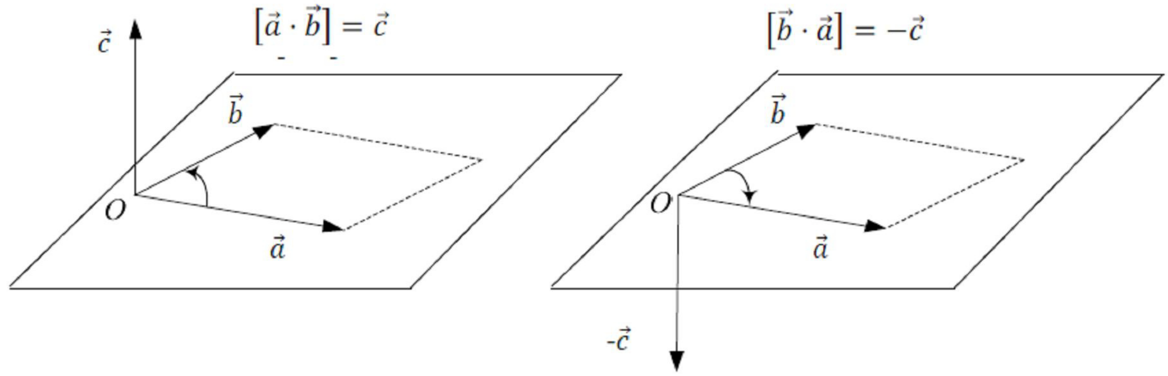


Рис. 1.28.

<u>Физические приложения</u>

В физике векторное произведение применяют для определения многих физических величин: момента силы, момента импульса, магнитного момента и др.

Например, ***моментом силы*** $\vec{M}$ относительно произвольной точки O называется векторное произведение радиус-вектора $\vec{r}$, проведенного из произвольной точки O в точку приложения силы, на вектор действующей силы $\vec{F}$ (рис. 1.29):

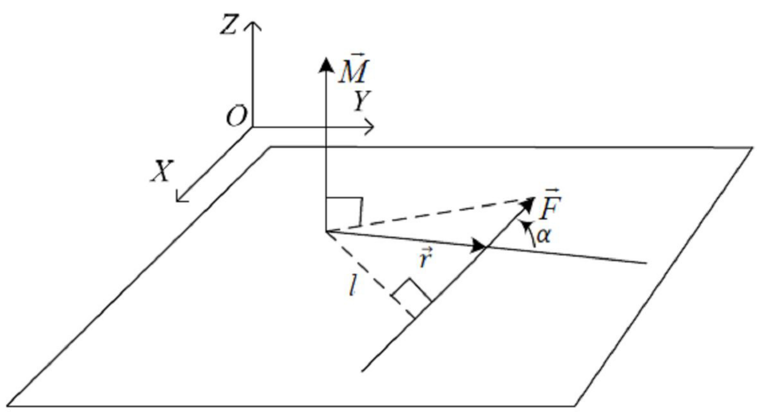


Рис. 1.29.

$$\vec{M} = [\vec{r} \cdot \vec{F}], \tag{1.23}$$

модуль момента силы:

$$M = F \cdot r \sin\alpha = F \cdot l, \tag{1.24}$$

где $l = r \sin\alpha$ – плечо силы.

Момент импульса $\vec{L}$ определяется как векторное произведение радиус-вектора и импульса материальной точки. Построение вектора $\vec{L}$ аналогично построению вектора момента силы.

$$\vec{L} = [\vec{r} \cdot \vec{p}] = [\vec{r} \cdot m\vec{V}] \tag{1.25}$$

Вопросы для самопроверки к 1.7

1. Как может символически обозначаться операция векторного произведения векторов и что является ее результатом?

2. Как определяется модуль результата векторного произведения двух векторов?

3. Как определяется направление результата векторного произведения двух векторов?

4. Обладает ли операция векторного произведения свойством переместительности?

5. Какие из физических величин определяются через векторное произведение векторов? Приведите примеры.

6. Чем отличается результат скалярного и векторного произведения вектора самого на себя?

Задания для самостоятельного решения

1.32. Для каждой пары векторов, лежащих на координатных осях (рис. 1.30), определите направление вектора, являющегося результатом векторного произведения: $[\vec{a} \cdot \vec{b}]$; $[\vec{b} \cdot \vec{a}]$; $[\vec{k} \cdot \vec{p}]$; $[\vec{p} \cdot \vec{k}]$; $[\vec{m} \cdot \vec{n}]$; $[\vec{n} \cdot \vec{m}]$.

1.33. Для каждой пары векторов, лежащих на координатных осях (рис. 1.31), определите направление вектора и его модуль – результат векторного произведения: $[\vec{a} \cdot \vec{b}]$; $[\vec{k} \cdot \vec{p}]$; $[\vec{p} \cdot \vec{k}]$; $[\vec{m} \cdot \vec{n}]$; $[\vec{n} \cdot \vec{m}]$, если a=5; b=12; k=8; p=11; m=0,7; n=1,5.

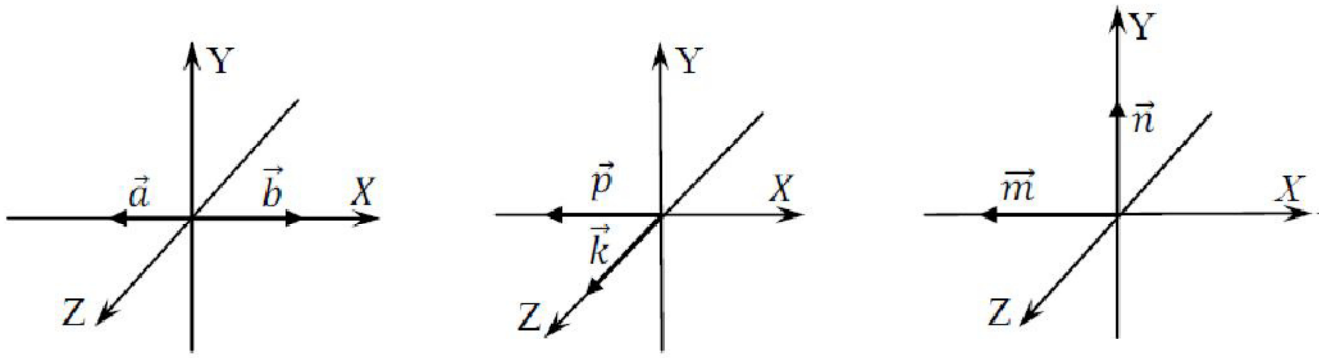


Рис. 1.30.

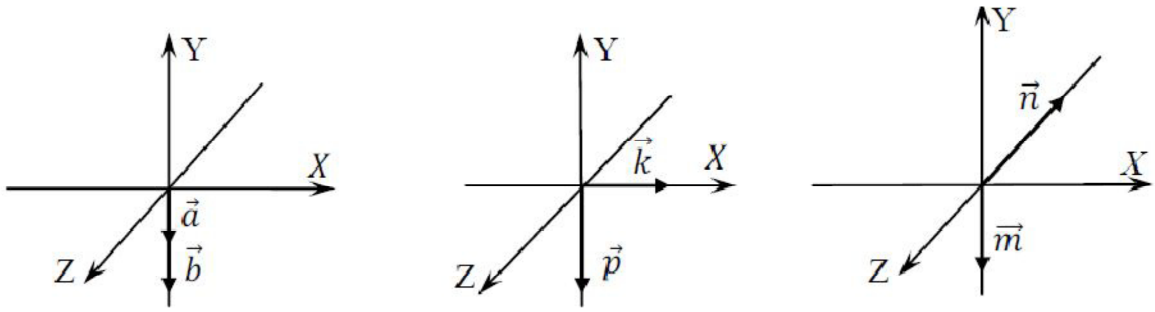


Рис. 1.31.

1.34. На блок, представляющий собой сплошной диск радиусом 5 см, намотана нить, к концу которой прикреплен груз массой 300 г. Определите момент силы (модуль и направление), приводящий блок во вращение.

1.35. Диск диаметром 20 см приводится во вращение постоянной касательной силой 40 Н. Кроме того, на него действует сила трения, линия действия которой лежит в плоскости вращения под углом 30° к касательной. Определите результирующий вращающий момент сил.

1.36. Материальная точка движется по окружности радиусом 20 см с линейной скоростью 20 м/с. Определите момент импульса материальной точки, если ее масса 0,2 кг.

1.37. Однородная лестница длиной ℓ=3,5 м опирается на стену, образуя с ней угол α=40° (рис. 1.32). Определите модуль и направление момента силы трения $F_{тр}$=24 Н относительно точки О.

1.38. Однородная лестница длиной ℓ=4 м опирается на стену, образуя с ней угол α=30° (рис. 1.33). Определите модуль и направление момента силы реакции опоры N=15 Н относительно точки О.

1.39. Однородная лестница длиной ℓ=2,5 м опирается на стену, образуя с полом угол α=45° (рис. 1.34). Определите модуль и направление момента силы тяжести $F_{тр}$=52 Н относительно точки О.

1.40. Однородная лестница длиной ℓ=3 м опирается на стену, образуя с полом угол α=50° (рис. 1.35). Определите модуль и направление момента силы трения $F_{тр}$=38 Н относительно точки О.

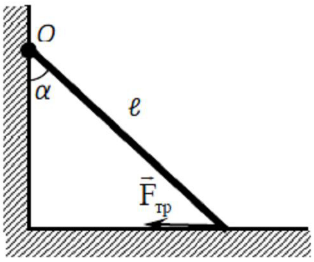


Рис. 1.32.

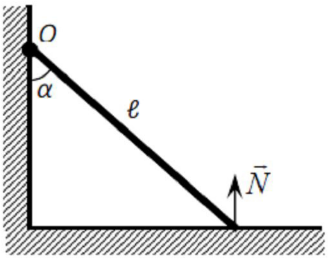


Рис. 1.33.

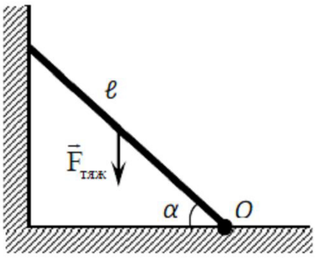


Рис. 1.34.

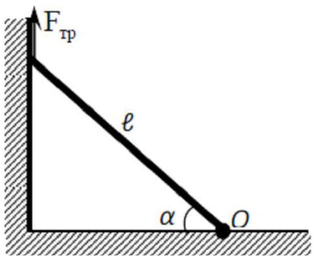


Рис. 1.35.

2. ОСНОВЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

2.1. Вводные замечания

Источником теории дифференциального исчисления были два вопроса: один – о разыскании касательной к произвольной линии, второй – о разыскании скорости при произвольном законе движения.

Оба они привели к одной и той же вычислительной задаче, которая и легла в основу дифференциального исчисления. Эта задача состоит в том, чтобы по данной функции *f(t)* отыскать другую функцию *f'(t),* получившую позднее название ***производной*** и представляющую скорость изменения функции *f(t)* относительно изменения ее аргумента *t*. В таком общем виде задача была поставлена Ньютоном и в сходной форме Лейбницем в 70-х и 80-х гг. XXVII в. Но еще в предшествующие полвека Ферма́, Паскаль и другие ученые фактически дали правила для разыскания производных многих функций.

Ньютон и Лейбниц завершили эту работу, они ввели общее понятие производной и дифференциала, а также обозначения, очень облегчившие вычисления. Ими был развит аппарат дифференциального исчисления до максимальных пределов и применено дифференциальное исчисление к решению многих задач геометрии и механики. Некоторые недостатки в логической строгости были устранены в XIX в. усилиями крупнейших ученых – таких как Коши, Н.И. Лобачевский, Абель, Риман и др.

2.2. Предел функции. Понятие о бесконечно малых и бесконечно больших величинах

Число b называется ***пределом функции*** $\boldsymbol{f(x)}$ при $x \to a$ (читается: «при *x*, стремящемся к *a*»), если по мере того, как значение *x* приближается к a (справа или слева), значение функции неограниченно приближается («стремится») к b.

Символическая запись: $\lim_{x\to a} f(x) = b$. (2.1)

Замечание. *Пределом постоянной величины* b *называется сама величина* b.

Бесконечно малой величиной называется переменная величина, предел которой равен нулю.

Утверждения «число b есть предел величины y» и «разность $y–b$ есть бесконечно малая величина» равнозначны.

<u>Замечание</u>. *Из постоянных величин лишь нуль является бесконечно малой величиной.*

Бесконечно большой величиной называется переменная величина, абсолютное значение которой неограниченно возрастает.

<u>Замечание</u>. *Никакая постоянная величина не является бесконечно большой.*

Связь между бесконечно большими и бесконечно малыми величинами: если y – бесконечно большая величина, то $\frac{1}{y}$ – бесконечно малая; если y – бесконечно малая величина, то $\frac{1}{y}$ – бесконечно большая, откуда следуют следующие равенства: $\frac{1}{0} = \infty$ и $\frac{1}{\infty} = 0$.

Вопросы для самопроверки к 2.1 и 2.2

1. Из необходимости решения каких вопросов возникла задача о дифференциальном исчислении?

2. Что называют пределом функции?

3. Какие величины называют бесконечно малыми и бесконечно большими? Какая между ними связь?

4. Может ли постоянная величина быть бесконечно малой или бесконечно большой?

2.3. Приращение переменной величины и приращение функции

Приращением переменной величины x называется разность значений, которые принимает x, т.е. если сначала $x=x_1$, затем $x=x_2$, то приращение

$$\Delta x = x_2 - x_1. \qquad (2.2)$$

Приращение обозначается буквой греческого алфавита Δ, запись Δx читается «дельта икс».

Приращение может быть положительным, отрицательным и равным нулю, согласно (2.2): если $x_1 < x_2$, то $\Delta x>0$; если $x_1 > x_2$, то $\Delta x<0$; если $x_1 = x_2$, то $\Delta x=0$.

Замечание. *Приращение постоянной величины равно нулю.*

Если x является аргументом функции $f(x)$, то разность $f(x_2) - f(x_1)$ называется ***приращением функции f(x)***:

$$\Delta f(x) = f(x_2) - f(x_1) = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1). \quad (2.3)$$

Выбор x_1 является произвольным, поэтому приращение функции можно представить в общем виде:

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x). \quad (2.4)$$

Пример 2.1

Начальное значение аргумента $x=3$, приращение аргумента $\Delta x=-2$. Найдите соответствующее приращение Δy функции $y=x^2$.

Решение. Так как $x_1=3$ и затем $x_2-x_1=-2$, то $x_2=1$. Функции $y=x^2$ принимает сначала значения $y_1=3^2=9$, а затем $y_2=1^2=1$. Приращение функции есть $\Delta y=y_2-y_1=1-9=-8$.

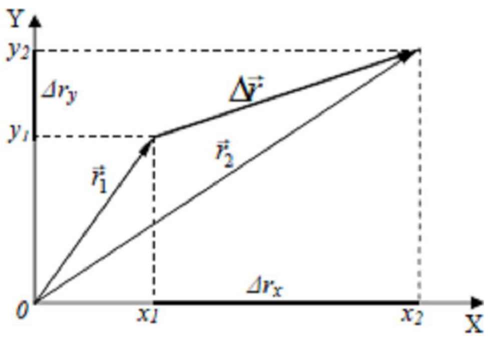


Рис. 2.1.

Понятие приращения справедливо и для векторных величин, – например, ***приращение радиус-вектора*** равно разности радиус-векторов $\vec{r}_2 = \vec{r}(t_2)$ и $\vec{r}_1 = \vec{r}(t_1)$, определяющих положение точки в пространстве в моменты времени t_2 и t_1 (рис.2.1), т.е:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1) = \vec{r}_2 - \vec{r}_1. \quad (2.5)$$

Приращение радиус-вектора $\Delta\vec{r}$ называют ***вектором перемещения точки***. Вектор перемещения показывает, на какое расстояние и в какую сторону смещается точка при движении. Этот вектор характеризует конечный результат любого перемещения. Длина вектора перемещения определяет кратчайшее расстояние между начальным (в момент времени t_1) и конечным (в момент времени t_2) положением точки. Из чертежа на рис.2.1 очевидно, что ***модуль вектора перемещения (модуль приращения радиус-вектора) – это:***

$$|\Delta\vec{r}| = \sqrt{\Delta r_x^2 + \Delta r_y^2} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, \quad (2.6)$$

где Δr_x и Δr_y – проекции вектора перемещения на координатные оси OX и OY соответственно.

Как и любой другой вектор, радиус-вектор $\vec{r}$, кроме направления, характеризуется еще и модулем $|\vec{r}|$. При изменении положения материальной точки в пространстве изменяется не только направление радиус-вектора, но и его модуль (сравните на рис. 2.1 $|\vec{r}_2|$ и $|\vec{r}_1|$).

Приращение (изменение) модуля радиус-вектора $\vec{r}$ (обозначается $\Delta|\vec{r}|$) определяется разностью модулей векторов $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$, т.е.:

$$\Delta|\vec{r}| = |\vec{r}_2| - |\vec{r}_1| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2} - \sqrt{x_1^2 + y_1^2}. \quad (2.7)$$

В общем случае $|\Delta\vec{r}| \neq \Delta|\vec{r}|$, т.е. модуль приращения вектора не равен приращению модуля вектора (сравните (2.6) и (2.7)).

<u>Замечание</u>. Полученные результаты (2.6) и (2.7) можно обобщить на трехмерный случай, когда движущаяся в пространстве точка имеет три степени свободы (т.е. ее положение в пространстве материальной точки задается тремя координатами):

$$|\Delta\vec{r}| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}, \quad (2.6а)$$

$$\Delta|\vec{r}| = |\vec{r}_2| - |\vec{r}_1| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} - \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}. \quad (2.7а)$$

Пример 2.2

Тело перемещается из точки с координатами $x_1=1$, $y_1=4$ в точку $x_2=5$, $y_2=1$. Найдите модуль вектора перемещения и приращение модуля радиус-вектора.

Решение.

Изобразим начальное и конечное положение тела на координатной плоскости (рис.2.2).

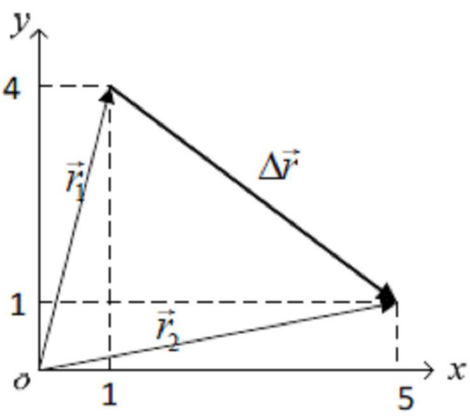


Рис. 2.2.

Положение тела в заданные моменты времени определяется радиус-векторами: $\vec{r_1} = \vec{i} + 4\vec{j}$ и $\vec{r_2} = 5\vec{i} + \vec{j}$.

Перемещением является разность векторов $\overrightarrow{r_2}$ и $\overrightarrow{r_1}$:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2\vec{\imath} + y_2\vec{\jmath}) - (x_1\vec{\imath} + y_1\vec{\jmath}) = (x_2 - x_1)\vec{\imath} + (y_2 - y_1)\vec{\jmath} =$$

$$= (5 - 1)\vec{\imath} + (1 - 4)\vec{\jmath} = 4\vec{\imath} - 3\vec{\jmath}.$$

Модуль вектора перемещения:

$$|\Delta\vec{r}| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5,$$

где $\Delta x = x_2 - x_1 = 5 - 1 = 4,\ \Delta y = y_2 - y_1 = 1 - 4 = -3$

Приращение модуля радиус-вектора:

$$\Delta|\overrightarrow{r}| = r_2 - r_1 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2} - \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{5^2 + 1^2} - \sqrt{1^2 + 4^2} \approx 1.$$

Пример 2.3

Начальное положение материальной точки задается радиус-вектором $\overrightarrow{r_1} = 4\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + 12\vec{k}$, конечное положение – радиус-вектором $\overrightarrow{r_2} = -\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 2\vec{k}$. Найдите: приращение радиус-вектора $\Delta\vec{r}$, модуль приращения $|\Delta\vec{r}|$, приращение модуля $\Delta|\vec{r}|$.

Решение. Приращение радиус-вектора

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \left(-\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 2\vec{k}\right) - \left(\overrightarrow{4\imath} - 3\vec{\jmath} + 12\vec{k}\right)$$

$$= (-1 - 4)\vec{\imath} + (-2 + 3)\vec{\jmath} + (2 - 12)\vec{k} = -5\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 10\vec{k}.$$

Модуль приращения радиус-вектора

$$|\Delta\vec{r}| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} = \sqrt{(-5)^2 + 1^2 + (-10)^2} \approx 11{,}23.$$

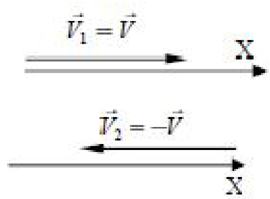
Приращение модуля радиус-вектора

$$\Delta|\vec{r}| = |\vec{r}_2| - |\vec{r}_1| = \sqrt{(-1)^2 + (-2^2) + 2^2} - \sqrt{4^2 + (-3)^2 + 12^2} =$$

$$= 3 - 13 = -10.$$

Пример 2.4

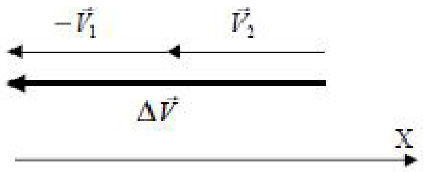
Вектор скорости изменил направление на противоположное. Найдите: приращение вектора $\Delta\vec{V}$; модуль приращения вектора скорости $\left|\Delta\vec{V}\right|$; приращение модуля $\Delta\left|\vec{V}\right|$.



Решение. Пусть в момент времени t_1 вектор $\vec{V}$ имеет направление вдоль положительного оси X, а в момент времени t_2 вектор $\vec{V}$ имеет противоположное направление.

Приращение вектора скорости:

$\Delta\vec{V} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1$ или $\quad \Delta\vec{V} = \vec{V}_2 + \left(-\vec{V}_1\right) = -\vec{V} + \left(-\vec{V}\right) = -2\vec{V}$



Модуль приращения вектора скорости (длина вектора $\Delta\vec{V}$ в единицах скорости). Согласно чертежу $\left|\Delta\vec{V}\right| = V_1 + V_2 = 2V$, (так как $V_1 = V_2 = V$).

Приращение модуля скорости есть разность модулей векторов $\vec{V}_1$ и $\vec{V}_2$, т.е. $\Delta\left|\vec{V}\right| = V_2 - V_1 = V - V = 0$.

Вопросы для самопроверки к 2.3

1. Что понимается под приращением переменной величины?

2. Что называется приращением функции?

3. Как определяется приращение векторной величины?

4. В чем состоит физический смысл приращения радиус-вектора?

5. Как определить приращение радиус-вектора, если известны координаты начального и конечного положения материальной точки?

6. Как определить модуль приращения радиус-вектора?

7. Чем отличаются понятия: модуль приращения и приращение модуля радиус-вектора?

Задания для самостоятельного решения

2.1. Начальное положение материальной точки задается радиус-вектором $\vec{r_1} = -6\vec{j} + \vec{k}$, конечное положение – радиус-вектором $\vec{r_2} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$. Найдите: приращение радиус-вектора $\Delta\vec{r}$, модуль приращения $|\Delta\vec{r}|$, приращение модуля $\Delta|\vec{r}|$.

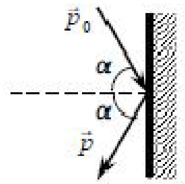
2.2. Начальное положение материальной точки задается радиус-вектором $\vec{r_1} = 4\vec{i} + 2\vec{j} - 6\vec{k}$, конечное положение – радиус-вектором $\vec{r_2} = -3\vec{i} + 6\vec{k}$. Найдите проекции вектора перемещения на все координатные оси.

2.3. Тело перемещается из точки с координатами $x_1=1$, $y_1=4$, $z_1=3$ в точку $x_2=5$, $y_2=1$, $z_2=0$. Найдите модуль вектора перемещения и приращение модуля вектора перемещения.

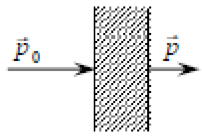
2.4. Тело перемещается из точки с координатами $x_1=2$, $y_1=-5$, $z_1=1$ в точку $x_2=-5$, $y_2=0$, $z_2=5$. Найдите: приращение радиус-вектора $\Delta\vec{r}$, модуль приращения $|\Delta\vec{r}|$, приращение модуля $\Delta|\vec{r}|$.

2.5. Материальная точка, двигающаяся вдоль оси OX со скоростью $V_1=15$ м/с, изменила направление движения, и стала двигаться параллельно оси OY со скоростью $V_2=10$ м/с. Найдите модуль приращения вектора скорости $\left|\Delta\vec{V}\right|$ и приращение модуля $\Delta\left|\vec{V}\right|$.

2.6. На рисунке указан начальный $\vec{p}_0$ и конечный $\vec{p}$ импульс мяча, который абсолютно упруго отразился от стены под углом $\alpha=30°$. Постройте вектор приращения импульса мяча $\Delta\vec{p}$ и определите модуль приращения импульса $|\Delta\vec{p}|$.



2.7. На рисунке указан начальный и конечный импульс пули, пробившей доску. Постройте вектор приращения импульса пули $\Delta\vec{p}$ и определите модуль приращения импульса $|\Delta\vec{p}|$, если $p=0{,}6p_0$.



2.4. Производная функции

Пусть $y=f(x)$ есть непрерывная функция аргумента x. Если придать аргументу x приращение Δx, функция $y=f(x)$ получит приращение Δy, равное

$\Delta y= f(x+\Delta x) - f(x)$.

При бесконечно малом Δx приращение Δy тоже бесконечно мало.

Предел, к которому стремится отношение бесконечно малого приращения функции к соответствующему бесконечно малому приращению аргумента, сам является функцией от аргумента x. Эта функция называется ***производной функции f(x)*** (обозначается $f''(x)$ или y':

$$y' \equiv f''^{(x)} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}. \qquad (2.8)$$

Процесс нахождения производной называется ***дифференцированием.***

Физический смысл производной

Функция $f''(x)$ представляет собой ***скорость изменения функции*** $f(x)$ относительно аргумента x.

Пример 2.5

Вектор перемещения показывает, на какое расстояние и в какую сторону смещается точка при движении. Как быстро происходит такое перемещение, показывает вектор средней скорости:

$$\vec{V}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}.$$

Его модуль показывает, как быстро в среднем перемещается точка, а направление определяет, в какую сторону в среднем происходит перемещение.

При неравномерном движении средняя скорость недостаточно характеризует быстроту движения в момент времени *t*. Но чем меньше Δt, тем точнее характеризуется эта быстрота. Поэтому скорость в момент времени t можно представить как предел, к которому стремится отношение $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ при $\Delta t \to 0$.

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \qquad (2.9)$$

Выражение (2.9) определяет вектор ***мгновенной скорости (***т.е. скорости в данный момент времени).

При $\Delta t \to 0$ модуль вектора перемещения равен длине пройденного пути $|\Delta\vec{r}| = \Delta S$, так как бесконечно малый участок криволинейной траектории можно считать прямолинейным отрезком, длина которого равна модулю вектора перемещения.

Таким образом, модуль мгновенной скорости есть производная пути по времени:

$$V = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t} = S'(t), \qquad (2.10)$$

где $S = S(t)$ – пройденный путь есть функция времени.

Если в процессе прямолинейного движения скорость меняется (т.е. V= $f(t)$), то величина, показывающая скорость изменения скорости, есть векторная величина – ***ускорение***, модуль которого определяется как производная скорости по времени:

$$a = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta V}{\Delta t} = V'(t). \qquad (2.11)$$

Геометрический смысл производной

Геометрически производная $f''(x)$ функции $y = f(x)$ представляет собой ***угловой коэффициент*** касательной к графику этой функции в точке с определенным значением x.

Доказательство. Пусть на графике произвольной функции $y = f(x)$ (рис. 2.3) точке M соответствует значение аргумента x и функции $y(x)$, точке N – значение аргумента $x + \Delta x$ и функции $y(x + \Delta x)=y(x)+\Delta y$. Угловой коэффициент прямой MN равен тангенсу угла β:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\beta. \qquad (2.12)$$

Угловой коэффициент касательной к графику функции в точке M равен тангенсу угла α. При $\Delta x \to 0$ $\beta \to \alpha$, т.е.: $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\beta\to\alpha} tg\,\beta = tg\alpha$.

Так как

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f''(x), \quad \text{то} \Rightarrow f'(x) = tg\alpha. \qquad (2.13)$$

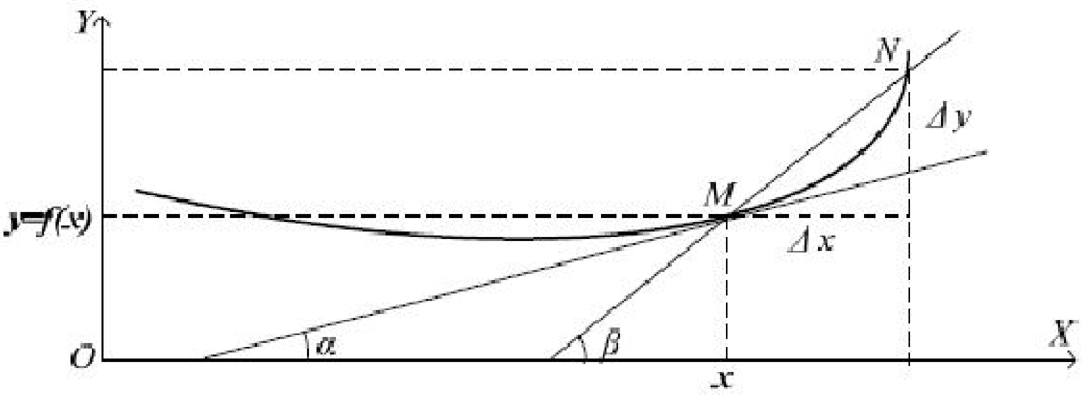


Рис. 2.3.

Выражение производной через дифференциал

Кроме обозначения производной в виде $f''(x)$, используются и другие обозначения производной. Например, для функции $y = f(x)$ применимы условные обозначения производной вида:

$$f'(x) \equiv \dot{f}(x) \text{ или } y'' \equiv \dot{y}, \qquad (2.14)$$

$$f''^{(x)} \equiv \frac{df(x)}{dx} \qquad \text{или} \qquad y' \equiv \frac{dy}{dx}, \qquad (2.15)$$

здесь символ dx, называемый ***дифференциалом*** x, означает не произведение двух величин d и x, а бесконечно малое приращение переменной величины x

(читается: «дэ икс»). Аналогично символ *df(x),* называемым ***дифференциалом функции*** *f(x),* означает бесконечно малое приращение функции (читается: «дэ эф от икс»). Выражение (2.15) читается: «дэ эф от икс по дэ икс» или «дэ игрек по дэ икс».

Употребляются также условные записи:

$$f''(x) \equiv \frac{d}{dx}f(x), \tag{2.16}$$

особенно удобные, когда берется производная от сложного выражения, например: $\frac{d}{dx}(3x^2+2x-1)$.

В физических задачах по кинематике, согласно определению (2.10), скорость может быть обозначена

$$V = S''(t) = \frac{dS}{dt}, \tag{2.17}$$

а ускорение тела, согласно (2.11), обозначается через производную скорости

$$a = V''(t) = \frac{dV}{dt}. \tag{2.18}$$

В математике и физике существуют некоторые различия в толковании смысла обозначений *dx, dt, dS,* $d\vec{r}$ и др.

Согласно математическому определению: ***дифференциал функции*** равен произведению производной на приращение (дифференциал) аргумента, т.е. $dS = S' \cdot dt = S' \cdot \Delta t$ или $d\vec{r} = \vec{r'} \cdot dt = \vec{r'} \cdot \Delta t$, где S' и $\vec{r'}$ – производные по переменной *t* от функций $S(t)$ и $\vec{r}(t)$.

Таким образом, согласно данному определению, ***дифференциал независимой переменной*** равен ее приращению, т.е. $dt = \Delta t$, а *dS* – дифференциал функции – представляет собой ***линейную часть приращения*** этой функции *при произвольном* изменении аргумента от *t* до *t+Δt.*

Согласно геометрическому толкованию производной (рис. 2.3): $y''(x) = \frac{dy}{dx} = tg\alpha$, но при *произвольном* приращении аргумента Δx (рис. 2.4) приращение функции $\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x)$ может существенно отличаться от дифференциала dy, т.е. $dy < \Delta y$. Из рис. 2.4 видно, что дифференциал функции dy есть приращение ординаты касательной, т.е. линейная часть приращения Δy.

В физике различают дифференциал аргумента *dx* и произвольное (конечное) приращение аргумента Δx, т.е. $\Delta x \neq dx$. Под ***дифференциалом аргумента dx***

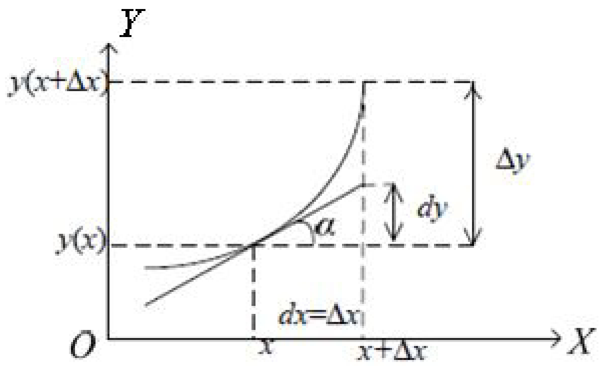


Рис. 2.4.

понимают ***столь малое его приращение*** (***элементарное приращение***), что можно пренебречь разностью между соответствующими приращениями функции и линейной частью ее приращения, т.е. $\Delta y \to dy$ при $\Delta x \to dx$.

Поэтому в физике используют предложенное Г. Лейбницем обозначение производной $y' \equiv \frac{dy}{dx}$, $S' \equiv \frac{dS}{dt}$, $\vec{r}\,' = \frac{d\vec{r}}{dt}$, и трактуют его не как отношение математических дифференциалов функции и аргумента, а как отношение бесконечно малых (элементарных) приращений функции и аргумента, т.е. dx – элементарное (бесконечно малое) изменение координаты, dt – элементарный (бесконечно малый) промежуток времени, dS – элементарный (бесконечно малый) путь за элементарный промежуток времени dt, $d\vec{r}$ – элементарное (бесконечно малое) перемещение за элементарный промежуток времени dt, причем $|d\vec{r}| = dS$.

2.5. Производные высших порядков

В некоторых случаях необходимо определить производную более высокого порядка (второго, третьего и т.д.).

Если y' есть производная функции $f(x)=y$, то производная от y' называется ***второй производной,*** или производной ***второго порядка*** от первоначальной функции $f(x)=y$ и обозначается:

$$y'' \equiv f''(x) \equiv \ddot{f}(x) \equiv \frac{d^2 f(x)}{dx^2}.$$

Читается: «дэ два эф от икс по дэ икс дважды».

Аналогично обозначаются производные любого порядка:

третьего порядка: $(y'''')'' = y'''''' = f''''''(x) = \dddot{f}(x) = \frac{d^3 f(x)}{dx^3}$;

n-го порядка: $(y^{n-1})' = y^n = f^{(n)}(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n}$.

Для нахождения производной какого-либо высшего порядка данной функции приходится последовательно находить все производные низших порядков, начиная с первой.

Физический смысл второй производной

Как было показано в 2.4, величина, показывающая скорость изменения скорости, есть ***ускорение***, модуль которой определяется как производная от модуля мгновенной скорости по времени $a = \frac{dV}{dt}$. Но сама скорость V есть производная от пути по времени $V = \frac{dS}{dt}$. Поэтому ускорение – вторая производная пути по времени, т.е $a = \frac{d^2S}{dt^2}$.

Вопросы для самопроверки к 2.4 и 2.5

1. Что называется производной функции?

2. Что понимается под дифференцированием функции? Приведите примеры применения операции дифференцирования в физике.

3. В чем заключается физический смысл производной?

4. В чем заключается геометрический смысл производной?

5. Какой смысл в физике имеет запись dt или dV?

6. В чем принципиальное отличие математического и физического понимания дифференциала аргумента функции?

7. Как обозначается производная функции через дифференциал? Приведите примеры различных обозначений производной функции.

8. Что понимается под производной функции высшего порядка? Как обозначается производная второго (или более высокого) порядка?

9. В чем заключается физический смысл второй производной?

10. Как определить производную высшего порядка?

2.6. Правила нахождения производных простейших функций и свойства производной

Понятие производной широко применяется для решения разнообразных задач. Однако использование выражений (2.8) и (2.13) предполагает достаточно трудоемкий алгоритм нахождения производной. Практически производные элементарных функций находятся по формулам дифференцирования. Более сложные функции предварительно подвергают тождественным преобразованиям для приведения их к виду, удобному для дифференцирования.

1. Производная постоянной величины равна нулю:

$$(\mathrm{c})' = 0, \text{ или } \frac{d\mathrm{c}}{dx} = 0, \text{ где } \mathrm{c} = const. \quad (2.19)$$

Данное свойство просто объясняется на основании геометрического смысла: угловой коэффициент прямой $y=c$ равен нулю, так как угол наклона касательной к оси OX (угол α) равен нулю (рис.2.5).

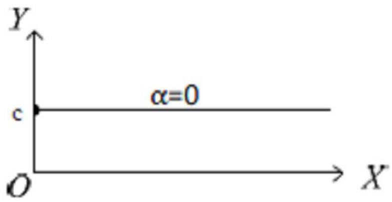


Рис. 2.5.

2. Производная независимой переменной равна единице:

$$(\mathrm{x})' = 1, \text{ или } \frac{dx}{dx} = 1, \quad (2.20)$$

где x – независимая переменная.

На основании геометрического смысла производной угловой коэффициент прямой $y=x$ равен единице, так как $tg45°=1$ (рис.2.6).

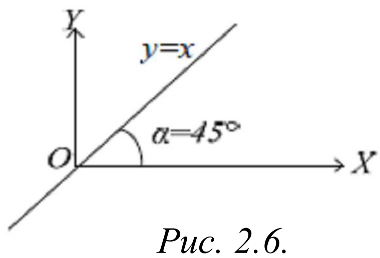


Рис. 2.6.

3. Производная степенной функции:

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1} \quad \text{или} \quad \frac{dx^n}{dx} = n \cdot x^{n-1}. \quad (2.21)$$

4. Производная суммы нескольких функций равна сумме производных этих функций:

$$(f_1(x) + f_2(x) - f_3(x))' = f_1'(x) + f_2'(x) - f_3'(x),$$

или

$$\frac{d}{dx}\big(f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)\big) = \frac{df_1(x)}{dx} + \frac{df_2(x)}{dx} - \frac{df_3(x)}{dx}. \quad (2.22)$$

5. Постоянный множитель выносится за знак производной:

$$\big(c \cdot f(x)\big)' = c \cdot f'(x) \quad \text{или} \quad \frac{d}{dx}\big(c \cdot f(x)\big) = c \cdot \frac{df(x)}{dx}, \quad (2.23)$$

где $c=const.$

6. Производные тригонометрических функций:

$$(\sin\alpha)'' = \cos\alpha \text{ или } \frac{d\,(\sin\alpha)}{d\alpha} = \cos\alpha, \quad (2.24)$$

$(\cos\alpha)' = -\sin\alpha$ или $\frac{d(\cos\alpha)}{d\alpha} = -\sin\alpha,$ (2.25)

$(tg\alpha)'' = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ или $\frac{d(tg\alpha)}{d\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha},$ (2.26)

$(ctg\alpha)'' = -\frac{1}{\sin^2\alpha}$ или $\frac{d(ctg\alpha)}{d\alpha} = -\frac{1}{\sin^2\alpha}.$ (2.27)

7. Производная логарифмической функции:

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$ или $\frac{d(\ln x)}{dx} = \frac{1}{x}.$ (2.28)

8. Производная показательной функции:

$(a^x)' = a^x \ln a$ или $\frac{d(a^x)}{dx} = a^x \ln a,$ (2.29)

где *a=const.*

Производная экспоненциальной функции (частный случай показательной функции):

$(e^x)' = e^x$ или $\frac{d(e^x)}{dx} = e^x.$ (2.29а)

9. Производная произведения двух функций равна сумме произведений каждой из функций на производную другой функции:

$$\big(f(x)\cdot\varphi(x)\big)' = f(x)\cdot\varphi'(x) + f'(x)\cdot\varphi(x),$$

или

$\frac{d}{dx}(f(x)\cdot\varphi(x)) = f(x)\cdot\frac{d\varphi(x)}{dx} + \varphi(x)\cdot\frac{df(x)}{dx}.$ (2.30)

10. Производная отношения функций равна произведению знаменателя на производную числителя минус произведение числителя на производную знаменателя и деленное все на квадрат знаменателя:

$\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right)' = \frac{\varphi(x)\cdot f'(x) - f(x)\cdot\varphi'(x)}{\big(\varphi(x)\big)^2}$ или $\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right) = \frac{\varphi(x)\cdot\frac{df(x)}{dx} - f(x)\cdot\frac{d\varphi(x)}{dx}}{\big(\varphi(x)\big)^2}$ (2.31)

Замечание. Отношение двух функций можно представить как произведение функции, стоящей в числителе, на функцию в минус первой степени знаменателя, тогда разыскание производной следует производить, применяя формулы (2.30), (2.21):

$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right) = \frac{d}{dx}\big(f(x)\cdot\varphi^{-1}(x)\big).$ (2.31а)

Если *y=f(u),* где *u=φ(x),* т.е. если *y* зависит от *x* через посредство промежуточного аргумента *u,* то *y* называется ***сложной функцией*** от *x*. Производная сложной функции равна произведению ее производной по промежуточному аргументу на производную этого аргумента по независимой переменной:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad \text{или} \quad y' = f'^{(u)} \cdot u'^{(x)}. \tag{2.32}$$

11. О знаке производной:

если производная какой-либо функции $f\,'(x) > 0$, то функция является возрастающей, т.е. с ростом *x* растет *f(x)*;

если производная функции $f'(x) < 0$, то функция является убывающей, т.е. при возрастании *x* функция *f(x)* убывает;

если производная функции $f'(x) = 0$, то функция имеет экстремум (значения max и min) при заданном значении *x*.

Примеры вычисления производных

1. Дана функция $f = 3x^2$. Найдите $\frac{df}{dx}$ и $\frac{d^2f}{dx^2}$.

Решение. Определяем первую производную используя правила **5)** и **3)**:

$$\frac{df}{dx} = \frac{d(3x^2)}{dx} = 3\frac{dx^2}{dx} = 3 \cdot 2x = 6x.$$

Определяем вторую производную, используя правила **5)** и **2)**:

$$\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d^2(3x^2)}{dx^2} = \frac{d(6x)}{dx} = 6\frac{dx}{dx} = 6.$$

2. Дана функция $f = \frac{5}{x^2}$. Найдите: $\frac{df}{dx}$ и $\frac{d^2f}{dx^2}$.

Решение. Определяем первую производную используя правила **5)** и **3)**:

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{5}{x^2}\right) = 5\frac{dx^{-2}}{dx} = 5(-2)x^{-3} = -10\frac{1}{x^3}.$$

Определяем вторую производную используя те же правила:

$$\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{5}{x^2}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{-10}{x^3}\right) = -10\frac{dx^{-3}}{dx} = -10 \cdot (-3)x^{-4} = 30\frac{1}{x^4}.$$

3. Дана функция $f = \sqrt{2x}$. Найдите: $\frac{df}{dx}$ и $\frac{d^2f}{dx^2}$.

Решение. Определяем первую производную, используя правила **5)** и **3)**:

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\sqrt{2x}\right) = \sqrt{2}\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{2x}}.$$

Определяем вторую производную, используя те же правила:

$$\frac{d^2f}{dx^2}=\frac{d^2}{dx^2}\left(\sqrt{2x}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{2x}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{d}{dx}\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^3}}.$$

4. Дана функция $f=0{,}3\mathrm{t}^2-2\mathrm{t}+0{,}8$. Найти: $\frac{df}{dt}$ и $\frac{d^2f}{dt^2}$.

Решение. Определяем первую производную, используя правила **4), 5), 3), 2), 1)**:

$$\frac{df}{dt}=\frac{d}{dt}(0{,}3t^2-2t+0{,}8)=\frac{d(0{,}3t^2)}{dt}-\frac{d(2t)}{dt}+\frac{d(0{,}8)}{dt}$$

$$=0{,}3\frac{dt^2}{dt}-2\frac{dt}{dt}+0==0{,}3\cdot 2t-2=0{,}6t-2.$$

Определяем вторую производную, используя правила **4), 5), 2), 1):**

$$\frac{d^2f}{dt^2}=\frac{d^2}{dt^2}(0{,}3t^2-2t+0{,}8)=\frac{d}{dt}(0{,}6t-2)=0{,}6\frac{dt}{dt}-\frac{d}{dt}(2)=0{,}6.$$

5. Дана функция $\mathrm{f}=\frac{3}{\mathrm{y}^2}-6\sqrt{\mathrm{y}}$. Найдите: $\frac{df}{dy}$ и $\frac{d^2f}{dy^2}$.

Решение. Определяем первую производную, используя правила **4), 5), 3)**:

$$\frac{df}{dy}=\frac{d}{dy}\left(\frac{3}{y^2}-6\sqrt{y}\right)=\frac{d}{dy}\left(\frac{3}{y^2}\right)-\frac{d}{dy}\left(6\sqrt{y}\right)=3\frac{d(y^{-2})}{dy}-6\frac{d}{dy}(y^{\frac{1}{2}})=$$

$$=3(-2)y^{-3}-6\cdot\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}=-6\frac{1}{y^3}-3\frac{1}{\sqrt{y}}.$$

Определяем вторую производную, используя те же правила:

$$\frac{d^2f}{dy^2}=\frac{d^2}{dy^2}\left(\frac{3}{y^2}-6\sqrt{y}\right)=\frac{d}{dy}\left(-6\frac{1}{y^3}-3\frac{1}{\sqrt{y}}\right)=-6\frac{d}{dy}(y^{-3})-3\frac{d}{dy}y^{-\frac{1}{2}}=$$

$$=-6\cdot(-3)y^{-4}-3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)y^{-\frac{3}{2}}=\frac{18}{y^4}+\frac{3}{2\sqrt{y^3}}.$$

6. Дана функция $f=(2x^2+3x)(x^3-2)$. Найдите: $\frac{df}{dx}$ и $\frac{d^2f}{dx^2}$.

Решение. Определяем первую производную, используя правила **9), 4), 5), 3), 2), 1)**:

$$\frac{d}{dx}((2x^2+3x)(x^3-2))(2x^2+3x)\frac{d}{dx}(x^3-2)+(x^3-2)\frac{d}{dx}(2x^2+3x)=$$

$$= (2x^2 + 3x)\left(\frac{d}{dx}x^3 - \frac{d}{dx}2\right) + (x^3 - 2)\left(\frac{d}{dx}(2x^2) + \frac{d}{dx}(3x)\right) =$$

$$= (2x^2 + 3x)(3x^2 - 0) + (x^3 - 2)(4x + 3) = 10x^4 + 12x^3 - 8x - 6.$$

Определяем вторую производную, предварительно преобразуя произведение в сумму (раскрыв скобки) и используя правила **4), 5), 3), 2)** и **1)**:

$$\frac{d^2}{dx^2}((2x^2 + 3x)(x^3 - 2)) = \frac{d}{dx}(10x^4 + 12x^3 - 8x - 6) =$$

$$= \frac{d}{dx}(10x^4) + \frac{d}{dx}(12x^3) - \frac{d}{dx}(8x) - \frac{d}{dx}(6) = 40x^3 + 36x^2 - 8.$$

7. Дана функция $f = (x^2 \cos x)$. Найдите $\frac{df}{dx}$ и $\frac{d^2 f}{dx^2}$.

Решение. Определяем первую производную, используя правила **9), 3), 6)**:

$$\frac{d}{dx}(x^2 \cos x) = x^2 \frac{d}{dx}\cos x + \cos x \frac{d}{dx}(x^2) = x^2(-\sin x) + \cos x \cdot (2x) =$$

$$= 2x \cos x - x^2 \sin x.$$

Определяем вторую производную, используя правила **4)**, **9)**, **6)**, **3)**, **2)**:

$$\frac{d^2}{dx^2}(x^2 \cos x) = \frac{d}{dx}(2x\cos x - x^2 \sin x) = \frac{d}{dx}(2x \cos x) - \frac{d}{dx}(x^2 \sin x) =$$

$$= (2x\frac{d}{dx}\cos x + \cos x \frac{d}{dx}(2x)) - (x^2 \frac{d}{dx}\sin x + \sin x \frac{d}{dx}(x^2) =$$

$$= 2x(-\sin x) + 2\cos x - x^2 \cos x - \sin x \cdot (2x)$$

$$= (2 - x^2)\cos x - 4x \sin x.$$

8. Найдите производную от функции y=(1+5x)^3.

Решение. Полагая $y=u^3$, где u=1+5x, и применяя правило дифференцирования сложной функции **11)**, имеем:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}; \qquad \frac{dy}{du} = \frac{du^3}{du} = 3u^2; \qquad \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(1 + 5x) = 5.$$

Таким образом, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = 3u^2 \cdot 5 = 15(1 + 5x)^2$.

9**.** Найдите производную от функции y=sin 5x.

Решение. Полагая y=sin u, где u=5x, и применяя правило дифференцирования сложной функции **11)**, имеем:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\,; \qquad \frac{dy}{du} = \frac{d\sin u}{du} = \cos u\,; \qquad \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(5x) = 5.$$

Таким образом: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \cos u \cdot 5 = 5\cos 5x$.

10. Найдите производную от функции $y = \cos^2 x$.

Решение. Полагая $y=u^2$, где $u = \cos x$, и применяя правило дифференцирования сложной функции **11)**, имеем:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}; \qquad \frac{dy}{du} = \frac{du^2}{du} = 2u; \qquad \frac{du}{dx} = \frac{d(\cos x)}{dx} = -\sin x.$$

Таким образом: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 2u \cdot (-\sin x) = 2\cos x \cdot (-\sin x) = -\sin 2x$.

11. Движение материальной точки описывается уравнением $x = 5t + 4t^3 - 2t^2$. Найдите уравнения скорости и ускорения данной материальной точки.

Решение. Согласно определению, скорость в данный момент времени есть производная перемещения, ускорение в данный момент времени – производная скорости, или вторая производная перемещения. Так как уравнение движения задается только для одной координаты, то это движение вдоль координатной оси OX, т.е. прямолинейное, при котором $|d\vec{r}| = dS = dx$.

$$V(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(5t + 4t^3 - 2t^2) = 5 + 12t^2 - 4t.$$

$$a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}(5 + 12t^2 - 4t) = 24t - 4.$$

Задания для самостоятельного решения

Найдите производную функции:

2.8. $y = -\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} + 4$

2.9. $y = \frac{4x^3 - 2x^2 + x + 1}{x^2}$

2.10 . $y = \frac{1-x}{1-\sqrt{x}}$

2.11. $y = (x^2 + 5x - 1) \cdot (x^2 - 3x + 5)$

2.12. $y = -\frac{x}{4}\cos^2 x$

2.13. $y = \frac{2e^x - 1}{x^3 + 2}$

2.14. $y = \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}$

2.15. $y = 4\sqrt{x}\ lnx^3$

Найдите вторую производную функции:

2.16. $y = 2x + \frac{x^2}{4}\sin x$

2.17. $y = 8e^x + 5x^4$

2.18. $y = \frac{5}{x^4}\ lnx^2$

2.19. $y = e^x\ tg2x$

2.20. $y = \sqrt{2x}\cos x^2$

2.21. $y = 2tgx + \frac{3}{x^5}$

Задачи на определение характеристик движения (механические приложения производной)

2.22. Движение материальной точки задано уравнением $x = At + Bt^2 + Ct^3$ *м*, где *A=5 м/с, B=0,2 м/с*^{2}*, C=0,1 м/с*^{3}. Определите скорость и ускорение точки в моменты времени $t_1 = 2\ с$ и $t_2 = 4\ с$, а также среднюю скорость и среднее ускорение в данном интервале времени.

2.23. Зависимость пройденного пути от времени выражается уравнением $S = At - Bt^2 + Ct^3$ *м*, где *A=2 м/с, B=3 м/с*^{2}*, C=4 м/с*^{3}. Запишите выражения для скорости и ускорения. Определить для момента времени $t = 2\ с$ после начала движения: пройденный путь; скорость; ускорение; среднюю скорость и среднее ускорение за промежуток времени, равный 2 *с*.

2.24. Автомобиль движется по участку дороги, имеющему радиус кривизны *R=50 м.* Уравнение движения имеет вид $S = A + Bt + Ct^2$ *м*, где *A=10 м, B=10 м/с, C=–0,5 м/с*^{2}. Найдите скорость автомобиля, его нормальное, тангенциальное и полное ускорения в момент времени $t = 5\ с$. Определите характер движения.

2.25. Зависимость пройденного пути от времени по окружности задается уравнением $S = 0{,}4t^2 + 0{,}5t$ *м*. Определите для момента времени $t = 1\ с$ после начала движения нормальное, тангенциальное и полное ускорения. Определите характер движения.

2.26. Материальная точка движется по окружности радиусом 4 *м*. Закон движения имеет вид $S = 8 - 2t^2$ *м*. Определите момент времени, когда нормальное ускорение точки равно 9 *м/с*^{2}. Найдите в данный момент времени скорость, нормальное и полное ускорения.

2.27. Материальная точка совершает гармоническое колебание по закону $x = \frac{3\sin \pi t}{\pi}$ *м*. Найдите скорость движения и ускорение в моменты времени $t_1 = \frac{1}{6}\ с,\ t_2 = \frac{1}{4}$с и $t_3 = 1\ с$. В какие моменты времени меняется направление движения? В какие моменты времени точка имеет наибольшую скорость?

2.28. Высота брошенного вертикально вверх тела изменяется по закону $h = 2 + 9t - 3t^2$ *м*. Найдите начальную скорость движения, скорость в моменты времени $t_1 = 0{,}5\ c$ и $t_2 = 1\ c$, наибольшую высоту подъема тела.

2.29. Вращение колеса описывается законом изменения угла поворота $\varphi = 4 + 5t - t^3$ *рад*. Найдит в конце первой секунды вращения угловую и линейную скорости точек, лежащих на ободе колеса, а также угловое, полное, нормальное и тангенциальное ускорения для этих же точек. Радиус колеса 20 *см*.

2.30. Диск радиусом 10 *см* вращается вокруг неподвижной оси так, что зависимость угла поворота диска от времени задается уравнением вида $\varphi = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$ *рад*, где $B=1$ *рад/с*, $C=4$ *рад/с*^{2}, $D=-1$ *рад/с*^{3}. Определите для точек, лежащих на ободе диска, к концу второй секунды после начала движения тангенциальное, нормальное и полное ускорения.

2.31. При торможении угол поворота маховика изменяется по закону $\varphi = 8 + 50t - 5t^2$ *рад*. Найдите угловую скорость в моменты времени $t_1 = 0{,}1\ c$, $t_2 = 1$ с *и* $t_3 = 1{,}9\ c$. Найдите момент времени, в который вращение маховика прекратится.

2.7. Дифференцирование функций нескольких аргументов

Переменная *S* называется функцией *n* переменных (аргументов) *x, y, z,...,t,* если каждой системе значений *x, y, z,...,t* из области их изменения соответствует определенное значение величины *S.*

Функциональная зависимость *S* от *x, y, z,...,t* символически обозначается *S=f(x, y, z,…,t),* где после символа функции в скобках указываются все переменные, от которых зависит данная функция.

Символическим обозначением функции может быть не только буква *f,* но и та же буква, которой обозначена сама функция, т.е. символическая запись функции нескольких переменных может иметь вид *S=S(x, y, z,...,t)* или *w=w(h, k, r)*.

Частное значение функции *S*(*x,y,z,...,t*) при *x=a, y=b,z=c,…t=l* обозначается *S*(*a,b,c,...l*). Например, если $S(x,y,z)=3x\cdot(y+z^2)$, то $S(2,-3,1)= 3\cdot 2\cdot(-3+1^2) = -12$.

Геометрически каждая система значений двух переменных x, y изображается <u>точкой на плоскости</u>, а функция двух переменных $z=f(x, y)$ – некоторой поверхностью в пространстве. Система значений трех переменных x, y, z изображается <u>точкой в пространстве</u> (обычно значения переменных рассматриваются как ***абсцисса***, ***ордината*** и ***аппликата*** точки в прямоугольной системе координат).

Пример 2.6

На топографических картах высота h пункта земной поверхности (над уровнем моря) есть функция географических координат: широты φ и долготы ψ, т.е. $h=f(\varphi, \psi)$. Широта может меняться в пределах от –90º до +90º (область изменения широты), долгота – от –180º до +180º (область изменения долготы). Таким образом, каждой паре φ и ψ соответствует однозначно определенное значение h.

Система значений четырех и большего числа переменных не имеет геометрического изображения. Однако существуют физические величины, зависимые от ряда других физических параметров, т.е. являющиеся функциями нескольких переменных.

Пример 2.7

Рассмотрим уравнение состояния идеального газа (уравнение Менделеева-Клапейрона): $pV=\nu RT$. С помощью этого уравнения одна из величин: p (давление), V (объем), T (температура) и ν (количество вещества) может быть определена в зависимости от других, которые считаются независимыми переменными (аргументами). Например, для расчета давления имеем: $p=\frac{\nu RT}{V}$, где давление является функцией трех аргументов: $p=f(\nu, V, T)$.

Пример 2.8

Для определения плотности ρ твердого тела правильной формы можно измерить его объем V и массу m. Если тело представляет собой параллелепипед, то его объем находится через измеренные длины сторон a, b, c ($V=a\cdot b\cdot c$), следовательно, плотность тела будет определяться как $\rho=\frac{m}{V}=\frac{m}{a\cdot b\cdot c}$, т.е. найденную таким способом плотность можно рассматривать как функцию четырех аргументов *ρ=ρ (m, a, b, c)*.

Функцию нескольких переменных можно ***дифференцировать по каждому из ее аргументов***, считая при этом все остальные аргументы ***<u>постоянными</u>***.

Производная от функции *U=f(x, y, z, t)* по *x*, взятая в предположении, что все остальные аргументы *y, z, t* являются постоянными, называется ***частной производной*** от *U* по *x* и обозначается $\frac{\partial U}{\partial x} \equiv U_x$, или

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial f(x,y,z,t)}{\partial x} \equiv f'_x(x,y,z,t) \quad \text{при } y = const, z = const, t = const.$$

Пример 2.9

Дана функция $f(x,y,z) = \dfrac{x^2}{2y} + \dfrac{5z^3y}{x}$.

Найдите частные производные функции по всем переменным.

Решение.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2}{2y} + \frac{5z^3y}{x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2}{2y}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{5z^3y}{x}\right) = \frac{1}{2y}\frac{\partial x^2}{\partial x} + 5z^3y\frac{\partial x^{-1}}{\partial x} =$$

$$= \frac{1}{2y}2x + 5z^3y(-1)x^{-2} = \frac{x}{y} - \frac{5z^3y}{x^2}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2}{2y} + \frac{5z^3y}{x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2}{2y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{5z^3y}{x}\right) = \frac{x^2}{2}\frac{\partial y^{-1}}{\partial y} + \frac{5z^3}{x}\frac{\partial y}{\partial y} =$$

$$= \frac{x^2}{2}(-1)y^{-2} + \frac{5z^3}{x} \cdot 1 = -\frac{x^2}{2y^2} + \frac{5z^3}{x}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x^2}{2y} + \frac{5z^3y}{x}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x^2}{2y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{5z^3y}{x}\right) = \frac{x^2}{2y}\frac{\partial(1)}{\partial z} + \frac{5y}{x}\frac{\partial z^3}{\partial z} =$$

$$= 0 + \frac{5y}{x}3z^2 = \frac{15yz^2}{x}.$$

Пример 2.10

Одним из примеров применения частной производной **<u>в физике</u>** является нахождение частных погрешностей косвенных измерений. Так, при экспериментальном определении плотности твердого тела цилиндрической формы необходимо измерить его массу m, диаметр d и высоту h (объем цилиндра $V = \frac{\pi d^2 h}{4}$). В результате численно рассчитываемая плотность является функцией трех переменных – массы, высоты и диаметра:

$$\rho = f(m, d, h) = \frac{m}{V} = \frac{4m}{\pi h d^2}$$

Погрешность измерения плотности определяется через частные погрешности $\Delta\rho_m$, $\Delta\rho_h$, и $\Delta\rho_d$ как: $\Delta\rho = \sqrt{(\Delta\rho_m)^2 + (\Delta\rho_h)^2 + (\Delta\rho_d)^2}$,

где $\Delta\rho_m = \frac{\partial\rho}{\partial m} \cdot \Delta m$, $\Delta\rho_h = \frac{\partial\rho}{\partial h} \cdot \Delta h$ и $\Delta\rho_d = \frac{\partial\rho}{\partial d} \cdot \Delta d$.

Таким образом, необходимо найти частные производные плотности по всем аргументам.

Решение.

$$\rho'_m \equiv \frac{\partial\rho}{\partial m} = \frac{\partial}{\partial m}\left(\frac{4m}{\pi h d^2}\right) = \frac{4}{\pi h d^2}\frac{\partial m}{\partial m} = \frac{4}{\pi h d^2}.$$

$$\rho'_h \equiv \frac{\partial\rho}{\partial h} = \frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{4m}{\pi h d^2}\right) = \frac{4m}{\pi d^2}\frac{\partial}{\partial h}(h^{-1}) = -\frac{4mh^{-2}}{\pi d^2} = -\frac{4m}{\pi h^2 d^2}.$$

$$\rho'_d \equiv \frac{\partial\rho}{\partial d} = \frac{\partial}{\partial d}\left(\frac{4m}{\pi h d^2}\right) = \frac{4m}{\pi h}\frac{\partial}{\partial d}(d^{-2}) = -2\frac{4md^{-3}}{\pi h} = -\frac{8m}{\pi h d^3}.$$

Вопросы для самопроверки к 2.7

1. Что называется функцией нескольких переменных, как она символически обозначается?

2. Приведите примеры функций нескольких переменных, имеющие физический смысл. Как геометрически может быть представлена функция двух переменных?

3. Что называется частной производной функции нескольких переменных? Как символически она обозначается?

4. Как выполняется дифференцирование функций нескольких переменных?

Задания для самостоятельного решения

Найдите частные производные функции нескольких переменных по каждой из переменных:

2.32. $f = 4x^2 + \frac{z^2}{y} + \frac{y}{2x} - 4$

2.33. $f = 3\sqrt{x} + \frac{y^2}{xz} - yx^4$

2.34. $f = 2e^{-x} + \frac{y+z}{4y}$

2.35. $f = 5yx^3 + 3lnz^2$

2.36. $f = \frac{y^2}{z} + 4y^3$

2.37. $f2\sin 4x + z^3 - 5y^4$

2.38. $f = 0{,}5y^2 - 2\,\mathrm{z} \cdot \cos x$

2.39. $f = \frac{2x^2+e^y}{1-z^2}$

2.40. $f = \frac{1}{x}\cos y + \operatorname{tg} z$

2.41. $f = y^5 x\sqrt{z} + z^2\,\frac{2}{y}$

3. ОСНОВЫ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

3.1. Вводные замечания

Интегральное исчисление возникло из потребности создать общий метод нахождения площадей, объемов и центров тяжести в задачах геометрии и физики.

В зародышевой форме такой метод применялся еще Архимедом. Систематическое развитие его началось в XVII в. в работах Бонавентура Кавальери и Эвангелиста Торричелли (ученики Галилея), Пьера Ферма, Блеза Паскаля и других ученых. В 1659 г. Исаак Барроу (англ. математик – учитель И. Ньютона) установил связь между задачей о нахождении площади и задачей о разыскании касательной. Исаак Ньютон и Г. Вильгельм Лейбниц (нем. ученый) в 70-х гг. XXVII в. отвлекли эту связь от упомянутых частных геометрических задач, тем самым установив связь между интегральным и дифференциальным исчислениями. Эта связь была использована Ньютоном для развития техники интегрирования.

Своего нынешнего состояния методы интегрирования в основном достигли в работах Леонарда Эйлера (Швейцария, академик Петербургской АН и Берлинской академии). Труды выдающихся русских математиков академиков М.В. Остроградского и П.Л. Чебышева завершили развитие этих методов.

3.2. Понятие интеграла

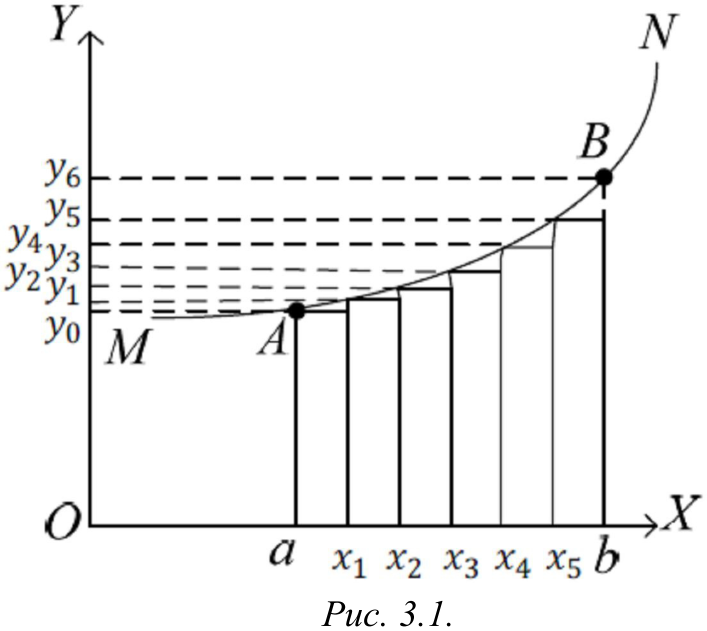


Рис. 3.1.

Введем понятие интеграла, для этого рассмотрим график функции *f(x)=y,* которым является линия *MN* (рис. 3.1). Найдем площадь криволинейной трапеции *aABb.*

Разделим отрезок ab на n частей (равных или неравных): ax_1, x_1x_2, x_2x_3, $x_3x_4, \dots$, $x_{n-1}b$. Построим ступенчатую фигуру, площадь которой равна:

$$S_n = y_0(x_1 - a) + y_1(x_2 - x_1) + \dots + y_n(b - x_{n-1}). \quad (3.1)$$

Обозначим длины отрезков:

$$x_1 - a = \Delta x_0, \quad x_2 - x_1 = \Delta x_1, \dots b - x_{n-1} = \Delta x_{n-1}$$

и значения функций: $y_0 = f(a), \; y_1 = f(x_1), \dots, \; y_n = f(b)$.

Если обозначить $a=x_0$, $b=x_n$, тогда сумму (3.1) можно представить в виде:

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot \Delta x_i. \quad (3.2)$$

При бесконечно большом n ($n \to \infty$) значения Δx_i являются бесконечно малыми (элементарными), т.е $\Delta x_i \to 0$, при этом площадь фигуры *aABb* есть ***предел суммы*** (3.2) ***бесконечно большого числа слагаемых***, который обозначается выражением вида:

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot \Delta x_i = \int_a^b f(x)\, dx. \quad (3.3)$$

Выражение $\int_a^b f(x)\, dx$ называется ***определенным интегралом.***

Выражение *f(x)dx* называется ***подынтегральным выражением,*** *f(x)* – ***подынтегральной функцией***, *x* – ***переменной интегрирования***, *a* и *b* – ***пределами интегрирования***.

Геометрическое истолкование определенного интеграла

Из выражения (3.3) и предшествующих ему рассуждений следует, что определенный интеграл $\int_a^b f(x)\, dx$ численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной сверху кривой, являющейся графиком подынтегральной функции $f(x)$, снизу – осью OX (осью переменной интегрирования), слева и справа – прямыми $x=a$ (нижний предел интегрирования) и $x=b$ (верхний предел интегрирования).

Название ***интеграл*** (от лат. *integralis – «целостный»)* и обозначение $\int$ введено Лейбницем (знак $\int$ – от курсивного написания буквы *S*, что обозначает начальную букву слова *summa* (сумма)).

3.3. Неопределенный интеграл и его приложения

Основная задача интегрального исчисления сводится к нахождению функции *F(x)* по данному выражению ее дифференциала $dF(x) = f(x)dx$ (или по ее производной $F'(x) = f(x)$). Данное действие называется ***интегровани-***

ем и является действием, ***обратным дифференцированию*** (т.е. нахождению производной функции).

Искомая функция *F(x)* при выполнении действия интегрирования называется ***первообразной*** функцией от функции *f(x)*.

Любая непрерывная функция *f(x)* имеет бесчисленное множество первообразных. Если *F(x)* есть одна из них, то всякая другая представляется выражением *F(x)+C,* где *C* – постоянная величина, задаваемая произвольно.

Совокупность первообразных $F(x)+C$ для функции *y=f(x)* на некотором промежутке называется ***неопределенным интегралом*** на данном промежутке (C – постоянная):

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \tag{3.4}$$

$$\frac{d}{dx}(F(x) + C) = f(x). \tag{3.5}$$

Свойства неопределенного интеграла (правила интегрирования)

1. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x). \tag{3.6}$$

2. Знак интеграла перед знаком дифференциала уничтожает последний, но при этом вводится произвольная постоянная *C*:

$$\int dF(x) = F(x) + C \quad \text{или} \quad \int F'(x)dx = F(x) + C. \tag{3.7}$$

3. Постоянный множитель выноситься за знак интеграла:

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx, \ \text{где } a = const. \tag{3.8}$$

4. Интеграл от суммы нескольких функций равен сумме интегралов всех функций:

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx. \tag{3.9}$$

Из каждой формулы дифференцирования, если ее обратить, получается соответствующая формула интегрирования, таким образом, из формул для нахождения производных (см. 2.6) получаются формулы нахождения основных интегралов.

Таблица основных интегралов:

1) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \; n \neq -1$

2) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

3) $\int e^x \, dx = e^x + C$

4) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

5) $\int \cos x \, dx = \sin x + C$

6) $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$

7) $\int tgx \, dx - \ln|\cos x| + C$

8) $\int ctgx \, dx = \ln|\sin x| + C$

9) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$

10) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\, ctgx + C$

11) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

12) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arctg} x + C$

Для решения интеграла необходимо свести его к табличному. Часто это удается сделать путем преобразования подынтегрального выражения с помощью алгебраических правил и тождеств (см. Приложение 2 и Приложение 3) и применения основных правил интегрирования.

Пример 3.1.

Найдите $\int \left(5\cos x - 3x^2 + \frac{1}{x}\right) dx$.

Решение.

Представим интеграл в виде суммы интегралов, используем правило (3.9) и применим табличные интегралы.

$$\int 5\cos x \, dx - \int 3x^2 dx + \int \frac{1}{x} dx = 5\int \cos x dx - 3\int x^2 \, dx + \int \frac{dx}{x} =$$

$$= 5\sin x - x^3 + \ln|x| + C.$$

Пример 3.2.

Найдите $\int ctg^2 x \, dx$.

Решение.

Преобразуем подынтегральное выражение, применяя тригонометрические тождества (см. Приложения), и сведем заданный интеграл к табличным.

$$\int ctg^2 x \, dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right) dx =$$

$$= \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int dx = -ctgx - x + C.$$

Пример 3.3.

Зависимость скорости от времени задается выражением $V = V_0\left(1+\frac{t}{5}\right)$. Значение начальной скорости равно $V_0 = 0{,}1\ \text{м/с}$. Найдите зависимость координаты от времени, если в момент времени $t = 0$ тело находилось в начале координат. Определите, где окажется тело в момент времени $t = 6\ с$.

Решение.

По определению скорость есть производная координаты по времени. Тогда координата – первообразная функции скорости:

$$\frac{dx}{dt} = V \quad \Rightarrow \quad x(t) = \int V dt$$

$$x(t) = \int V_0\left(1+\frac{t}{5}\right)dt = \int V_0\, dt + \int \frac{t}{5}V_0 dt = V_0\int dt + \frac{V_0}{5}\int tdt =$$

$$= V_0 t + \frac{V_0}{5}\frac{t^2}{2} + C = V_0 t\left(1+\frac{t}{10}\right) + C.$$

Найдем значение постоянной C, подставив начальное значение времени t=0: $x(0) = V_0 \cdot 0\left(1+\frac{0}{10}\right) + C = C$. Согласно условию: $x(0) = 0 \;=>\; \mathrm{C} = 0$. Таким образом, значение постоянной интегрирования С в физических задачах может определять ***начальные условия***, в частности в данной задаче – начальную координату $x(0) = x_0$.

Найдем координату в момент времени $t = 6\ с$:

$x(6) = 0{,}1 \cdot 6\left(1+\frac{6}{10}\right) = 0{,}96$ (м).

Ответ: $x(t) = x_0 + V_0 t\left(1+\frac{t}{10}\right)$, $\;x(6) = 0{,}96$ м.

Вопросы для самопроверки к 3.1– 3.3

1. Из потребности решения каких задач возникло интегральное исчисление?

2. В чем состоит геометрическое истолкование определенного интеграла?

3. В чем состоит основная задача интегрального исчисления?

4. Что понимается под первообразной функцией?

5. Почему любая непрерывная функция имеет бесчисленное множество первообразных?

5. Какова связь между действиями дифференцирования и интегрирования?

6. Что называется неопределенным интегралом? Перечислите основные свойства неопределенного интеграла.

Задания для самостоятельного решения

Найдите интеграл:

3.1. $\int 12\sqrt[4]{x^2}\,dx$

3.2. $\int \left(1+\frac{1}{5t}+\frac{2t^2}{3}\right)dt$

3.3. $\int \left(\frac{x^2}{3}+x+4\right)dx$

3.4. $\int x\left(\frac{2}{x}+\frac{x}{2}\right)dx$

3.5. $\int 2^z \cdot 3^z\,dz$

3.6. $\int \frac{24^x-2^x}{4^x}dx$

3.7. $\int (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)dx$

3.8. $\int \left(\frac{2u-1}{3u}\right)^2 du$

3.9. $\int \frac{y^3-8}{2-y}dy$

3.10. $\int \frac{e^{2x}-4}{6e^x-12}dx$

3.11. $\int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{4\sqrt{x}}dx$

3.12. $\int \frac{d\vartheta}{1+\cos 2\vartheta}d\vartheta$

3.4. Разыскание определенного интеграла. Формула Ньютона – Лейбница

Определенный интеграл от непрерывной на отрезке $[a,b]$ функции *y=f(x)* равен приращению первообразной *F(x)* для этой функции на указанном промежутке, т.е.:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a). \tag{3.11}$$

Чтобы вычислить определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$, следует сначала найти неопределенный интеграл $\int f(x)dx$ и далее, согласно ***формуле Ньютона – Лейбница*** (3.6), подставить в найденное выражение вместо *x* сначала верхний предел, затем нижний и вычесть вторую величину из первой.

Свойства определенного интеграла

1. Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла:

$$\int_a^b \mathrm{c}\ \cdot f(x)dx = c\int_a^b f(x)dx\ , \tag{3.12}$$

где c = const

2. Интеграл от суммы функций равен сумме интегралов от всех слагаемых:

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx. \tag{3.13}$$

3. Отрезок интегрирования можно разбить на части:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \tag{3.14}$$

4. При перестановке пределов изменяется знак интеграла:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx. \tag{3.15}$$

5. Интеграл с одинаковыми пределами равен нулю:

$$\int_a^a f(x)dx = 0. \tag{3.16}$$

Пример 3.4. Найдите $\int_{-2}^3 3x^2dx$.

Решение.

$$\int\limits_{-2}^{3} 3x^2dx = 3\frac{x^3}{3}\Bigg|_{-2}^{3} = 3^3\ - (-2)^3\ = 27 - (-8) = 35.$$

Пример 3.5. Найдите $\int_0^\pi \sin x\, dx$.

Решение.

$$\int\limits_0^\pi \sin x\, dx = -\cos x\ \big|_0^\pi = -(\cos\pi - \cos 0) = -(-1-1) = 2.$$

Задания для самостоятельно решения

Найдите интеграл

3.13. $\int_{-\pi}^{\pi}(3\cos\alpha + \sin\alpha)d\alpha$

3.14. $\int_0^\pi \left(\frac{\sin x}{2} + \frac{1}{\cos^2 x}\right)dx$

3.15. $\int_0^3 \left(\frac{5^t + t}{\sqrt{5}}\right)dt$

3.16. $\int_2^4 (x+1)^2(3x-4)dx$

3.17. $\int_{-1}^1 \frac{y^6 + 8y^4 + 1}{y}dy$

3.18. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)d\varphi$

Задачи на определение характеристик движения

(механические приложения интеграла)

3.19. Скорость прямолинейно движущейся точки меняется по закону $V = 3t^2 + 1$. Найти зависимость координаты от времени, если в момент времени *t=0*: а) точка находится в начале координат; б) координата точки равнялась 0,5 м.

3.20. Найдите закон движения тела массой 10 кг под действием силы *F*=6 Н, если в момент времени $t = 0$ тело покоилось в начале координат.

3.21. Зависимость скорости прямолинейно движущейся точки от времени выражается формулой $V = \sin\frac{\pi t}{2}$ *м/с*. Найдите координату точки в начальный момент времени $t = 0,$ если в момент времени $t = 1$ *с* координата равнялась 1 *м*.

3.22. Ускорение прямолинейно движущейся точки меняется по закону $a = 1{,}5\,t$. Известно, что к концу первой секунды тело прошло 6 *м* и скорость его была равна 3,75 *м/с*. Найдите зависимость скорости движения от времени и закон движения тела.

3.23. Тело массой 4 кг совершает прямолинейное движение из состояния покоя под действием переменной силы, которая изменяется по закону $F = \frac{2}{\sqrt{t+1}}$. Через 3 *с* после начала движения сила прекращает свое действие и тело движется равномерно с набранной к данному моменту скоростью. Найдите зависимость скорости движения от времени.

3.24. Зависимость угловой скорости от времени задается уравнением $\omega(t) = 2t^2 - 5t$. Найдите зависимость угла поворота от времени, если в начальный момент времени $\varphi = 0$.

4. ФИЗИЧЕСКИЙ ЭКСПЕРИМЕНТ И ОБРАБОТКА ЕГО РЕЗУЛЬТАТОВ

4.1. Общие сведения об измерениях

Физика является наукой познания окружающего нас мира, и познание в большинстве случаях происходит опытным путем. Несмотря на то, что современные физические теории (например, квантовая механика, теория поля) выглядят как сложные абстрактные конструкции из математических предположений, выкладок и формул, все эти теории опираются на опыт, и только опыт является критерием их достоверности.

Одна из основных целей физического практикума заключается в том, чтобы научиться правильно производить измерения физических величин и оценивать точность полученных результатов.

Измерением называется процесс экспериментального получения одного или более значений величины, которые могут быть обоснованно приписаны измеряемой величине.

Измерения производятся с помощью ***средств измерения.*** Средство измерений может быть *измерительным прибором* или *материальной мерой*. ***Измерительными приборами*** называют средство измерений, которое обеспечивает выходной сигнал в визуальной форме (на числовой шкале или экране), несущий информацию о значении измеряемой величины. Например: микрометр, термометр, вольтметр, секундомер, электронные весы.

Материальная мера – средство измерений, которое воспроизводит в процессе использования или постоянно хранит приписанные значения величины. Например: линейная шкала (линейка), эталонная гиря, эталонный электрический резистор, эталонный генератор сигналов. Измерение с помощью материальной меры заключается в сравнении параметра измеряемого объекта с мерой, которая принимается за эталон измеряемой величины.

Измерение предусматривает использование определенного метода измерений. ***Метод измерений*** **–** общее описание логической последовательности операций при измерении.

Методы измерений могут быть следующих видов: *метод прямых измерений* и *метод косвенных измерений*.

Метод прямых измерений – это такие измерения, при которых численное значение измеряемой величины получают либо непосредственным сравнением ее с мерой (эталоном), либо с помощью приборов, градуированных в единицах измеряемой величины. Например: измерение длины предмета масштабной линейкой, определение массы тела на весах с помощью разновеса, измерение интервала времени секундомером, и т.д.

Однако не для всех физических величин существуют меры или измерительные приборы, а значит, искомая физическая величина не всегда может быть получена в результате прямых измерений. В этом случае измеряется не сама искомая величина, а другие величины, связанные с нею теми или иными соотношениями и закономерностями, по значению которых вычислением определяется значение искомой величины. Такой ***метод измерения*** называется ***косвенным***. Например, проводимые в учебных лабораториях измерения плотности тел, измерения ускорения движения тел, измерения индукции магнитного поля и т.п.

Вопросы для самопроверки к 4.1

1. Какие существуют средства измерения? Приведите примеры.

2. Какой метод измерения называется прямым? Приведите примеры применения такого метода.

3. В чем заключается косвенный метод измерения? Приведите пример использования такого метода.

4.2. Неопределенность и погрешности измерений

Задачей эксперимента является определение ***истинного значения физической величины.*** Однако истинное значение определить невозможно, так как любое измерение всегда производится с какой-то степенью точности, что связано с несовершенствами измерительных приборов, методики измерений, несовершенством органов человеческих чувств и т.п. Поэтому <u>в задачу экспериментатора, помимо измерения искомой величины, в обязательном порядке входит</u>

оценка неопределенности (неточности) полученного результата. Без такой оценки результат опыта, как правило, не имеет практической ценности.

Неопределенность измерения – параметр, характеризующий рассеяние значений, приписываемых измеряемой величине на основании используемой информации. Неопределенность измерения является характеристикой (мерой) точности измерения. При практических измерениях неопределенности не вычисляются, а оцениваются.

Критерием численной оценки неопределенности измерения являются ***погрешности измерений***.

По характеру проявления погрешности разделяют на две основные группы – *случайные* и *систематические*.

Случайная погрешность – это составляющая погрешности измерения, изменяющаяся случайным образом при повторных измерениях одной и той же величины. Она обусловлена влиянием на результаты измерения большого числа изменяющихся случайным образом факторов и проявляется в хаотическом изменении результатов повторных наблюдений. Ее причиной могут служить, в частности, физическая и нервная реакция самого экспериментатора.

Признак случайной погрешности – она непредсказуемо изменяется по величине и знаку от опыта к опыту в узких пределах численных значений. Случайную погрешность нельзя исключить из результатов. Однако, пользуясь статистическими методами, можно учесть ее влияние на оценку истинного значения измеряемой величины. Многократное повторение опыта позволяет выявить и оценить случайную погрешность.

Систематической погрешностью называют составляющую погрешности измерения, остающуюся постоянной или закономерно изменяющуюся при повторных измерениях одной и той же величины.

Систематическая погрешность может быть связана с неисправностями измерительных приборов, неточностью их регулировки, несоблюдением условий их эксплуатации и т.п. Такие погрешности возникают, например, при не совсем горизонтальном положении некоторых приборов или при использовании стрелочного прибора, у которого стрелка до начала измерений не была установлена на нуль. Причина возникновения систематической погрешности может заключаться и в самой методике измерений. Так, например, определяя плотность твердого тела по измерениям его массы и объема, можно допустить ошибку, если внутри исследуемого тела имеются пустоты в виде пузырьков воздуха. В этом случае устранить ошибку можно при изменении метода измерений. В некоторых случаях систематические погрешности могут быть исключены введением поправок, однако часто они остаются не выявленными, поэтому систематические погрешности опаснее случайных. Случайные погрешности обнаруживают себя в ходе эксперимента, в то время как при наличии скрытой систематической погрешности результат будет казаться вполне надежным, хотя на самом деле он весьма неточен.

Кроме названных погрешностей, встречаются ошибки, называемые промахами. ***Промах*** – это вид грубой погрешности, зависящей от экспериментатора и связанной с неправильным обращением со средствами измерений: неверными отсчетами показаний приборов, описками при записи результатов, невнимательностью при снятии показаний и т.п. Результат, содержащий грубую ошибку, резко отличается от остальных, и его следует исключить из ряда измеренных значений.

Все составляющие погрешности, как правило, не зависят друг от друга, что допускает их раздельное вычисление.

По <u>*форме представления*</u> различают погрешности ***абсолютные, относительные и приведенные***.

Абсолютная погрешность – это погрешность измерения, выраженная в единицах измеряемой величины; она определяет отклонение измеренного значения величины $x_{изм}$ от ее истинного значения x_0:

$$\Delta x = x_{изм} - x_0 \quad (ед.\ изм) \qquad (4.1)$$

<u>**Замечание.**</u> Наряду с «абсолютной погрешностью» используется термин «абсолютное значение погрешности», под которым понимают значение погрешности без учета ее знака. Два названных понятия различны.

Относительная погрешность – это погрешность измерения, выраженная отношением абсолютной погрешности к результату измерения (в случае однократного измерения) или к среднему значению (в случае многократных измерений), являющаяся мерой точности результатов измерения и выражающаяся в долях:

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{x_{изм}} \text{ или } \varepsilon = \frac{\Delta x}{\langle x \rangle}, \tag{4.2}$$

или в процентах:

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{x_{изм}} \cdot 100\% \text{ или } \varepsilon = \frac{\Delta x}{\langle x \rangle} \cdot 100\% \tag{4.3}$$

Разновидностью систематических погрешностей являются ***приборные погрешности.*** Погрешность многих сложных измерительных приборов определяется классом точности. Значение ***класса точности*** γ выражает предельную погрешность, выраженную в процентах от верхнего предела измерений $x_{\max}$ (на данном диапазоне), называемую ***приведенной:***

$$\gamma = \frac{\Delta x_{пр}}{x_{\max}} \cdot 100\%. \tag{4.4}$$

Класс точности устанавливаетсязаводом-изготовителем и указывается, как правило, на шкале прибора или в паспорте.

Абсолютная погрешность такого прибора – ***приборная погрешность*** $\Delta x_{пр}$ – в этом случае может быть определена из (4.4) как:

$$\Delta x = \frac{\gamma \cdot x_{\max}}{100\%}, \text{ (ед. изм).} \tag{4.5}$$

Например, приборная погрешность вольтметром на пределе измерения $U_{\max}$ = 10 *В*, при классе точности γ=0,5 равна

$$\Delta U = \frac{0{,}5 \cdot 10}{100} = 0{,}05\,B.$$

В погрешность прибора могут входить как систематические (неточная разбивка шкалы и т.д.), так и случайные (силы трения в оси и т.д.) погрешности. Однако, поскольку при увеличении числа измерений точность прибора не возрастает, их следует рассматривать как _систематические_. Приборные погрешности часто употребляемых в лабораторной практике мер и приборов указаны в табл.4.1.

Таблица 4.1

Приборные погрешности

Прибор или мера	Цена деления	Погрешность
Измерительная линейка	1 мм/дел	1 мм
Штангенциркуль	0,1 мм/дел 0,05 мм/дел	0,1 мм, 0,05 мм
Микрометр	0,01 мм/дел	0,01 мм
Весы технические	-	0,1 г
Весы аналитические	0,1 мг/дел	0,1 мг
Секундомер с ручным запуском	0,1 с/дел	0,3 с
Часы с секундной стрелкой	1 с/дел	1 с

Замечания: 1) приборная погрешность приборов с нониусом равна точности нониуса; 2) приборная погрешность цифровых приборов (например, электронного секундомера) равна единице минимального разряда.

Вопросы для самопроверки к 4.2

1. В чем состоит задача измерений?

2. Как различаются погрешности измерений в зависимости от причин, их вызвавших?

3. Как различаются погрешности по форме представления?

4. Что такое класс точности прибора?

5. Как определить погрешности, вносимые различными измерительными приборами?

6. Что называется промахом и как он устраняется?

5. С какой целью определяется относительная погрешность? В каких единицах измерения она может быть представлена?

4.3. Обработка результатов прямых измерений

В практике физического эксперимента погрешность измеряемой величины остается неизвестной. В противном случае истинное значение находилось бы простым введением поправки к измеренной величине. Выполняя измерения, мы всегда имеем дело с погрешностями, являющимися суммой рассмотренных выше составляющих. Среди этих составляющих присутствует случайная погрешность, в силу чего при обработке результатов необходимо пользоваться методами математической статистики, которые, однако, позволяют лишь *с некоторой вероятностью* указать предельные значения погрешностей (случайных и выявленных систематических).

4.3.1. Обработка результатов однократных прямых измерений

Если измерение выполнено однократно или при повторных наблюдениях получаются одинаковые значения измеряемой величины, а значит, повторять эксперимент не имеет смысла, то абсолютная погрешность измерения принимается равной приборной погрешности $\Delta x=\Delta x_{пр}$, которая находится из соотношения (4.5). Если класс точности на приборе (или в паспорте прибора) не указан, то абсолютная погрешность измерения принимается равной ***цене деления*** шкалы прибора.

Цена деления шкалы – это разность значений измеряемой величины, соответствующих двум соседним отметкам шкалы. Для многопредельных измерительных приборов цена деления определяется как отношение верхнего предела измерения (на данном диапазоне) к числу делений шкалы. Окончательный результат измерения записывается в виде:

$x = x_{изм} \pm \Delta x$, *ед. изм;* $\varepsilon_x = \ldots\ldots\ \%$.

4.3.2. Обработка результатов многократных прямых измерений

Статистическую обработку результатов проводят, если при измерениях в тождественных условиях результат не повторяется. В таких случаях рекомендуется следующий порядок обработки результатов.

Предположим, что произведено n прямых измерений величины x, в которых получены значения: $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

1. Оценивается приборная погрешность $\Delta x_{пр}$.

2. Определяется ***среднее арифметическое измеренных значений***, так как оно, согласно законам статистики, ближе всего к истинному значению искомой величины***:***

$$< x >= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}. \qquad (4.6)$$

Замечание. Проводить усреднение результатов можно только для такой серии, в которой разброс результатов обусловлен случайными причинами. Если же результаты различаются вследствие целенаправленного изменения условий опыта, то среднее арифметическое такой серии не имеет смысла.

3. Определяются отклонения измеренных значений x_n от $< x >$. Эти отклонения носят случайный характер и называются ***абсолютными погрешностями отдельных измерений***:

$$\Delta x_i = x_i - <x>. \qquad (4.7)$$

4. Рассчитывается ***среднеквадратичное отклонение от среднеарифметического значения,*** которое является мерой разброса измеряемой величины и вычисляется по формуле:

$$S_{\langle x \rangle} = \sqrt{\frac{\sum_i (\Delta x_i)^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \cdots + \Delta x_n^2}{n(n-1)}}. \qquad (4.8)$$

5. Вычисляется ***статистическая погрешность*** (т.е. ***доверительный интервал***, в который попадет истинное значение) по формуле:

$$\Delta x_{ст} = t_{\alpha,n-1} \cdot S_{<x>}, \qquad (4.9)$$

где $t_{\alpha,n-1}$ – ***коэффициент Стьюдента***, значение которого задается таблично (табл. 4.2): на пересечении столбца (*степень надежности – доверительная вероятность* α) и строки (*число степеней свободы* $f=n-1$).

Степень надежности α *(доверительная вероятность)* – это вероятность, с которой истинное значение измеряемой величины x попадает в ***доверительный интервал:*** $(x_{ср}-\Delta x;\ x_{ср}+\Delta x)$.

В лабораторных работах, проводимых на специальном учебном оборудовании, степень надежности принимается равной 0,95.

Таблица 4.2

Коэффициент Стьюдента

Число степеней свободы f	Надежность α							
	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,98	0,999
1	1,00	1,38	2,0	3,1	6,3	12,7	32	640
2	0,82	1,06	1,3	1,9	2,9	4,3	7,0	32
3	0,77	0,98	1,3	1,6	2,4	3,2	4,5	13
4	0,74	0,94	1,2	1,5	2,1	2,8	3,7	8,6
5	0,73	0,92	1,2	1,5	2,0	2,6	3,4	6,9
6	0,72	0,90	1,1	1,4	1,9	2,4	3,1	6,0
7	0,71	0,90	1,1	1,4	1,9	2,4	3,0	5,4
8	0,71	0,90	1,1	1,4	1,9	2,3	2,9	5,0
9	0,70	0,88	1,1	1,4	1,8	2,3	2,8	4,8
14	0,69	0,87	1,1	1,3	1,8	2,1	2,6	4,1
19	0,69	0,86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	3,9
∞	0,67	0,84	1,0	1,3	1,6	2,0	2,3	3,3

6. Определяется ***полная абсолютная погрешность*** прямых измерений суммированием приборной погрешности $\Delta x_{пр}$ и статистической погрешности $\Delta x_{ст}$:

$$\Delta x = \sqrt{\left(\Delta x_{пр}\right)^2 + (\Delta x_{ст})^2}\,. \tag{4.10}$$

Если одна из составляющих погрешностей хотя бы в 2,5÷3 раза меньше другой, то меньшей составляющей можно пренебречь.

7. Оценивается ***относительная погрешность*** согласно (4.3), которая позволяет оценить степень точности произведенного измерения:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta x}{\langle x \rangle} \cdot 100\%.$$

8. Записывается окончательный результат измерения с учетом полной абсолютной погрешности в виде:

$x = x_{изм} \pm \Delta x$, *ед. изм.*, α=……, ε_x=…….%

Запись результата производится по правилам округления результатов и погрешностей.

4.3.3. Округление результата и погрешности

При обработке результатов измерений необходимо производить округление результатов промежуточных вычислений, а по окончании расчетов округлить найденную полную абсолютную погрешность и среднее арифметическое значение с учетом погрешности.

Округление следует производить в соответствии со следующими правилами.

1. В промежуточных вычислениях (например, при расчете среднего значения) число значащих цифр ***не должно превышать более чем на единицу*** число значащих цифр в исходных (измеренных) данных, так как лишние значащие цифры, появившиеся при расчете, не повышают точности вычислений, а лишь загромождают запись и усложняют визуальное восприятие результата.

Все промежуточные расчеты погрешностей достаточно вести ***с двумя*** *значащими цифрами*.

Значащей цифрой приближенного числа в десятичной записи называется любая цифра, кроме нулей, расположенных слева от первой ненулевой цифры.

Например**:** число 0,0076805. В данном числе пять значащих цифр: 7, 6, 8, 0 и 5. Первые два нуля не являются значащими и служат для указания разряда. Если это число является промежуточным результатом расчета погрешности (например, среднеквадратичное отклонение от среднеарифметического значения $S_{\langle x \rangle}$), то оно округляется до второй значащей цифры, т.е.: 0,0076805≈0,0077.

2. Округление полной абсолютной погрешности производится до ***одной (первой)*** значащей цифры или до двух, если первая значащая цифра равна 1.

Даже при высокоточных измерениях, в которых знание о точном значении погрешности очень важно, при округлении погрешности не оставляют более *двух значащих цифр.*

Например**:** Δx=0,00269≈0,003; Δy=1,561≈1,6; Δz=0,013289≈0,013; ΔU= 23,7981≈24

При округлении относительной погрешности достаточно оставить **две** значащие цифры.

Например: $\varepsilon_x = \dfrac{0{,}2}{15{,}5} \cdot 100\% = 12{,}903\% \approx 13\%;$

$$\varepsilon_y = \frac{0,8}{21,4} \cdot 100\% = 3,7383\% \approx 3,7\%.$$

3. По окончании вычислений точность записи необходимо привести в соответствие с полной абсолютной погрешностью измерений. Так, в окончательной записи результата x=20,27±0,4 указывать сотые бессмысленно, поскольку уже десятые содержат погрешность, а значит, необходимо округлить результат (среднее арифметическое значение) до того разряда, в котором находится последняя значащая цифра округленной абсолютной погрешности, т.е. правильной будет запись x=20,3±0,4.

В окончательной записи результата измерения следует использовать стандартную запись числа (число от 1 до 10, умноженное на 10 в какой-либо степени). При этом погрешность записывается в этом же виде с той же степенью 10. Указанное правило рекомендуется использовать и в промежуточных вычислениях, это облегчает действие с большими и малыми числами.

Например:

$x = 0,045871 \pm 0,000459 \approx 0,0459 \pm 0,0005 = (4,59 \pm 0,05) \cdot 10^{-2}$;

$y = 3634,831 \pm 5,71 \approx 3635 \pm 6 = (3,635 \pm 0,006) \cdot 10^{3}$;

$z = 258,9945 \pm 1,571 \approx 259,0 \pm 1,6 = (2,590 \pm 0,016) \cdot 10^{2}$;

$W = 8,1805 \cdot 10^{8} \pm 1,413 \cdot 10^{7} \approx 81,8 \cdot 10^{7} \pm 1,4 \cdot 10^{7} =$

$= (8,18 \pm 0,14) \cdot 10^{8}$.

Пример 4.1.

Измеряется диаметр цилиндра в различных сечениях с помощью микрометра (цена деления 0,01 *мм*). Получены следующие результаты: d_1 = 23,28 *мм*, d_2 = 23,30 *мм*, d_3 = 23,32 *мм*, d_4 = 23,33 *мм*, d_5 = 23,29 *мм*.

1. Вычисляем среднее значение диаметра согласно (4.6):

$$d_{ср} = \frac{d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5}{n} = \frac{23,28 + 23,30 + 23,32 + 23,33 + 23,29}{5} =$$

= 23,304 *мм*.

2. Вычисляем абсолютное отклонение каждого измерения d_i от среднего по формуле (4.7):

$\Delta d_1 = d_{cp} - d_1 = 0{,}024 = 24\cdot 10^{-3}$ *мм;*

$\Delta d_2 = d_{cp} - d_2 = 0{,}004 = 4\cdot 10^{-3}$ *мм;*

$\Delta d_3 = d_{cp} - d_3 = -0{,}016 = 16\cdot 10^{-3}$ *мм;*

$\Delta d_4 = d_{cp} - d_4 = -0{,}026 = 26\cdot 10^{-3}$ *мм;*

$\Delta d_5 = d_{cp} - d_5 = 0{,}014 = 14\cdot 10^{-3}$ *мм.*

3. Вычисляем среднюю квадратичную погрешность $S_{\langle d\rangle}$, применяя (4.8):

$$S_{\langle d\rangle} = \sqrt{\frac{\sum_i (\Delta d_i)^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{\left(24^2 + 4^2 + (-16)^2 + (-26)^2 + 14^2\right)\cdot 10^{-6}}{5(5-1)}} \approx 9{,}3\cdot 10^{-3}\,мм.$$

4. Вычисляем абсолютную случайную (статистическую) погрешность Δd_{cm} прямых измерений согласно (4.9) и, пользуясь табл. 4.2, надежность выбираем равной α=0,95 (если методика измерений не предполагает другого значения α). Число степеней свободы f=5–1=4. На пересечении данных f и α в таблице находим значение $t_{\alpha,f} = 2{,}8$:

$\Delta d_{cm} = S_{\langle d\rangle}\cdot t_{\alpha,f} = 9{,}3\cdot 10^{-3}\cdot 2{,}8 = 0{,}02604 \approx 0{,}03$ *мм.*

Как видно из представленных расчетов, погрешность появляется уже во втором знаке после запятой. Кроме того, приборная погрешность, равная цене деления микрометра Δd_{np} = 0,01 *мм*, сравнима по порядку величины с Δd_{cm}. Поэтому обе составляющие должны быть учтены в оценке полной абсолютной погрешности Δd.

5. Вычисляем полную абсолютную погрешность результата измерений по формуле (4.10):

$$\Delta d = \sqrt{\left(\Delta d_{np}\right)^2 + (\Delta d_{cm})^2} = \sqrt{0{,}03^2 + 0{,}01^2} = 0{,}0316 \text{ мм}.$$

Первая значащая цифра содержится во втором знаке после запятой, следовательно, Δd и $d_{ср}$ нужно округлить до сотых: Δd = 0,03 *мм* и $d_{ср}$ = 23,30 *мм*.

6. Вычисляем относительную погрешность результата измерений ε_d согласно (4.12):

$$\varepsilon_d = \frac{\Delta d}{d_{cp}}\cdot 100\% = \frac{0{,}03}{23{,}30}\cdot 100\% = 0{,}001287\% \approx 0{,}13\ \%.$$

7. Окончательный результат измерений диаметра цилиндра представляем в виде: $d = (23{,}30 \pm 0{,}03)$ *мм,* $\alpha = 0{,}95$, $\varepsilon_d = 0{,}13$ %.

Полученный результат означает, что истинное значение диаметра лежит в интервале значений от 23,27 до 23,33 *мм*, с вероятностью $\alpha = 0{,}95$.

Замечание. Как правило, относительная погрешность при проведении учебных лабораторных работ не должна превышать 20%, что указывает на правильность проведенного эксперимента и расчетов погрешностей.

Вопросы для самопроверки к 4.3

1. Какие измерения называются однократными? Как оценивается их погрешность?

2. С какой целью производят многократные измерения?

3. Для какой серии результатов можно проводить операцию усреднения?

4. Сформулируйте правила расчета погрешностей многократных прямых измерений.

5. Что такое доверительная вероятность? Какое ее значение следует брать при обработке результатов учебного эксперимента?

6. Как оценивается полная абсолютная погрешность прямых измерений?

7. В каком случае полная погрешность прямых измерений равна случайной погрешности?

8. Как записывается окончательный результат измерения с учетом полной абсолютной погрешности?

9. Что такое значащая цифра? Сколько значащих цифр следует брать при вычислениях?

10. Сформулируйте правила округления погрешности и результата многократных измерений.

4.4. Обработка результатов косвенных измерений

Часто оказывается, что искомая величина есть функция прямо измеряемых величин (например, объем параллелепипеда является функцией длин его сторон $V=a \cdot b \cdot c$, т.е. $V=f(a,b,c)$). Погрешность такой величины вычисляется через погрешности прямых измерений.

Пусть некоторая физическая величина F является функцией нескольких переменных x, y, z, которые в свою очередь являются результатами прямых измерений, т.е. $F=f(x,y,z)$. В этом случае рекомендуется следующий порядок обработки результатов.

1. Определяем ***среднее значение*** функции через среднеарифметические значения измеренных прямым методом величин:

$$\langle F \rangle = f(\langle x \rangle, \langle y \rangle, \langle z \rangle).$$

2. Находим ***частные погрешности*** функции по всем ее переменным:

$$\Delta F_x = F_x' \cdot \Delta x = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \Delta x,\ \Delta F_y = F_y' \cdot \Delta y = \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \Delta y,\ \Delta F_z = F_z' \cdot \Delta z = \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \Delta z,$$

где $F_x' = \frac{\partial f}{\partial x}$; $F_y' = \frac{\partial f}{\partial y}$; $F_z' = \frac{\partial f}{\partial z}$ – частные производные данной функции по каждой из переменных.

3. Рассчитываем ***полную абсолютную погрешность*** величины F:

$$\Delta F = \sqrt{\Delta F_x^2 + \Delta F_y^2 + \Delta F_z^2}.$$

4. Определяем ***относительную погрешность*** величины F:

$$\varepsilon_F = \frac{\Delta F}{\langle F \rangle} \cdot 100\%.$$

5. Записываем окончательный результат в виде:

$$F = \langle F \rangle \pm \Delta F \ \ (\text{ед. изм}), \quad \varepsilon_F = \cdots \%.$$

Пример 4.2

В ходе гипотетического эксперимента получен ряд результатов прямых измерений:

$x_1=2,3;\ x_2=2,4;\ x_3=2,5;\ x_4=2,3;\ x_5=2,2,$

$y_1=1,25;\ y_2=1,27;\ y_3=1,24;\ y_4=1,26;\ y_5=1,23.$

Требуется: 1) провести обработку прямых измерений и найти погрешности величин x и y; 2) найти физическую величину F, представленную в виде зависимости $F = \frac{x^2}{2} + 3y$ и определить ее абсолютную ΔF и относительную ε_F.погрешности.

Решение.

Проведем обработку прямых измерений величин x по методике, изложенной в 4.3.

1. $\langle x\rangle = \dfrac{2{,}3 + 2{,}4 + 2{,}5 + 2{,}3 + 2{,}2}{5} = 2{,}34;$

2. $\Delta x_1 = 2{,}34 - 2{,}3 = 0{,}04, \Delta x_2 = 2{,}34 - 2{,}4 = -0{,}06, \Delta x_3 = 2{,}34 -$ $-2{,}5 = -0{,}16$, $\Delta x_4 = 2{,}34 - 2{,}3 = 0{,}04$, $\Delta x_5 = 2{,}34 - 2{,}2 = 0{,}14$.

3. $S_{\langle x\rangle} = \sqrt{\frac{0{,}04^2+(-0{,}06)^2+(-0{,}16)^2+0{,}04^2+0{,}14^2}{5(5-1)}} = 0{,}07523 \approx 0{,}075.$

4. По табл. 4.2 определяем коэффициент Стьюдента. Надежность выбираем равной α=0,95. Находим статистическую погрешность:

$\Delta x_{\text{ст}} = 2{,}8 \cdot 0{,}075 = 0{,}21 \approx 0{,}2.$

5. Полная погрешность будет равна только статистической погрешности, так как приборная погрешность не задается, т.е. $\Delta x = \Delta x_{\text{ст}}$.

6. Уточняем среднее значение с учетом абсолютной погрешности

$\langle x\rangle = 2{,}34 \approx 2{,}3.$

7. Относительная погрешность измерения величины x:

$\varepsilon_x = \dfrac{0{,}2}{2{,}3} \cdot 100\% = 8{,}7\%.$

8. Записываем результат измерений в виде

$x = 2{,}3 \pm 0{,}2$, α=0,95, $\varepsilon_x = 8{,}7\%$.

Для удобства результаты обработки можно представить в виде табл. 4.3.

Таблица 4.3

Результаты обработки

x_i	$\langle x\rangle$	Δx_i	$(\Delta x_i)^2$	$S_{\langle x\rangle}$	Δx_{cm}	Δx	ε_x,%	$\langle x\rangle\pm \Delta x$
2,3	2,34	0,04	0,016	0,075	0,2	0,2	8,7	2,3±0,2
2,4		-0,06	0,036					
2,5		-0,16	0,0256					
2,3		0,04	0,016					
2,2		0,14	0,0196					

Аналогично проводим обработку результатов прямых измерений величины y. Результаты этих вычислений приведены в табл. 4.4.

Таблица 4.4

Результаты прямых измерений величины y

y_i	$\langle y\rangle$	Δy_i	$(\Delta y_i)^2$	$S_{\langle x\rangle}$	Δy_{cm}	Δy	ε_y, %	$\langle y\rangle \pm \Delta y$
1,25	1,250	0	0	0,007	0,02	0,02	1,6	1,25±0,02
1,27		-0,02	0,0004					
1,24		0,01	0,0001					
1,26		-0,01	0,0001					
1,23		0,02	0,0004					

Проведем обработку результата косвенных измерений.

1. Находим среднее значение искомой величины $F = \frac{x^2}{2} + 3y$:

$$\langle F\rangle = \frac{\langle x\rangle^2}{2} + 3\langle y\rangle = \frac{2{,}3^2}{2} + 3 \cdot 1{,}25 = 6{,}395.$$

2. Определяем частные производные по каждой переменной

$$F_x' = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2}{2} + 3y\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial(x^2)}{\partial x} + 0 = \frac{1}{2} \cdot 2x = x = 2{,}3,$$

$$F_y' = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2}{2} + 3y\right) = 0 + 3\frac{\partial y}{\partial y} = 3.$$

3. Находим частные погрешности величины F по каждой переменной:

$$\Delta F_x = F_x' \cdot \Delta x = 2{,}3 \cdot 0{,}2 = 0{,}46; \ \Delta F_y = F_y' \cdot \Delta y = 3 \cdot 0{,}02 = 0{,}06.$$

4. Определяем полную абсолютную погрешность функции F:

$$\Delta F = \sqrt{\Delta F_x^2 + \Delta F_y^2 =} \sqrt{0{,}46^2 + 0{,}06^2} = 0{,}46 \approx 0{,}5.$$

5. Относительная погрешность величины F, измеренной косвенным методом:

$$\varepsilon_F = \frac{\Delta F}{\langle F\rangle} \cdot 100\% = \frac{0{,}5}{6{,}4} \cdot 100\% = 7{,}8\%.$$

6. Окончательный результат, с учетом погрешности:

$F = 6{,}4 \pm 0{,}5.$

Ответ: $x = 2{,}3 \pm 0{,}2; \quad \alpha = 0{,}95; \quad \varepsilon_x = 8{,}7\%$

$y = 1{,}25 \pm 0{,}02; \ \alpha = 0{,}95; \ \varepsilon_y = 1{,}6\%$

$F = 6{,}4 \pm 0{,}5; \quad \varepsilon_F = 7{,}8\%.$

Вопросы для самопроверки к 4.4

1. Сформулируйте правила расчета погрешностей при косвенных измерениях.

2. Как определяются частные погрешности косвенных измерений?

3.От чего зависит погрешность косвенных измерений?

Задания для самостоятельного решения

Выполните обработку результатов гипотетического эксперимента, результаты которого представлены в таблице. Величины x, y, и z определены в ходе многократных прямых измерений. Величина F определяется косвенно на основании указанной в таблице функциональной зависимости от x, y и z.

4.1. $x_1=4,33;\ x_2=4,32;\ x_3=4,31;\ x_4=4,32;\ x_5=4,35$

$y_1=7,3;\ y_2=7,4;\ y_3=7,2;\ y_4=7,5;\ y_5=7,2$

$z_1=12;\ z_2=13;\ z_3=11;\ z_4=12;\ z_5=11$

$$F = x + \frac{y^2}{z}$$

4.2. $x_1=5,3;\ x_2=5,6;\ x_3=5,4;\ x_4=5,4;\ x_5=5,2$

$y_1=2,7;\ y_2=2,8;\ y_3=2,9;\ y_4=2,7;\ y_5=2,6$

$z_1=0,11;\ z_2=0,12;\ z_3=0,13;\ z_4=0,11;\ z_5=0,12$

$$F = zy^3 + \frac{x}{y}$$

4.3. $x_1=13,3;\ x_2=13,2;\ x_3=13,4;\ x_4=13,1;\ x_5=13,2$

$y_1=15,13;\ y_2=15,12;\ y_3=15,14;\ y_4=15,13;\ y_5=15,12$

$z_1=8,3; z_2=8,4;\ z_3=8,2;\ z_4=8,4;\ z_5=8,3$

$$F = yx^2 + zx$$

4.4. $x_1=7,8;\ x_2=7,9;\ x_3=7,8;\ x_4=7,5;\ x_5=7,7$

$y_1=13,3;\ y_2=13,2;\ y_3=13,4;\ y_4=13,3;\ y_5=13,2$

$z_1=0,01;\ z_2=0,02;\ z_3=0,01;\ z_4=0,01;\ z_5=0,02$

$$F = 3z^2x\sqrt{y}$$

4.5. $x_1=12,1;\ x_2=12,4;\ x_3=12,3;\ x_4=11,9;\ x_5=12,0$

$y_1=8,31;\ y_2=8,32;\ y_3=8,31;\ y_4=8,33;\ y_5=8,29$

$z_1=0,01;\ z_2=0,03;\ z_3=0,04;\ z_4=0,02;\ z_5=0,03$

$F = 4x + 5y^2z$

4.6. $a_1=0,12;\ a_2=0,16;\ a_3=0,13;\ a_4=0,14;\ a_5=0,15$

$b_1=4,13;\ b_2=4,11;\ b_3=4,15;\ b_4=4,12;\ b_5=4,11$

$c_1=6,1;\ c_2=6,2;\ c_3=6,1;\ c_4=6,3;\ c_5=6,4$

$F = 8b^2 - \frac{a}{c}$

4.7. $a_1=7,8;\ a_2=7,9;\ a_3=7,8;\ a_4=7,5;\ a_5=7,7$

$b_1=13,3;\ b_2=13,2;\ b_3=13,4;\ b_4=13,2;\ b_5=13,4$

$c_1=0,01;\ c_2=0,02;\ c_3=0,01;\ c_4=0,03;\ c_5=0,02$

$F = 3c^2\frac{a}{b}$

4.8. $a_1=4,33; a_2=4,32;\ a_3=4,31;\ a_4=4,34;\ a_5=4,35$

$b_1=24;\ b_2=25;\ b_3=24;\ b_4=23;\ b_5=25$

$c_1=1,12;\ c_2=1,17;\ c_3=1,14;\ c_4=1,13;\ c_5=1,14$

$F = ab + c^3$

4.9. $a_1=1,25;\ a_2=1,26;\ a_3=1,21;\ a_4=1,22;\ a_5=1,24$

$b_1=4,33;\ b_2=4,31;\ b_3=4,32;\ b_4=4,34;\ b_5=4,33$

$c_1=12;\ c_2=13;\ c_3=12,5;\ c_4=11;\ c_5=12,5$

$F = \frac{c + a^2}{b}$

4.10. $a_1=7,8; a_2=7,9;\ a_3=7,5;\ a_4=7,8;\ a_5=7,6$

$b_1=13,3;\ b_2=13,2;\ b_3=13,4;\ b_4=12,9;\ b_5=13,1$

$c_1=0,2;\ c_2=0,3;\ c_3=0,4;\ c_4=0,2;\ c_5=0,3$

$F = \frac{3c}{a} + b^2$

4.5. Графическое представление результатов эксперимента

В лабораторном практикуме и при выполнении расчетно-графических работ по физике часто возникает необходимость построения графических зависимостей. Графическое представление информации бывает весьма полезным именно в силу своей наглядности. По графикам можно определять характер функциональной зависимости, значения величин. Графики позволяют сравнить результаты, полученные экспериментально, с теорией. На графиках легко находить максимумы и минимумы, выявлять промахи и т.д.

При оформлении графиков нужно следовать перечисленным ниже правилам.

1. Графики строят только на бумаге, имеющей координатную сетку. Это может быть миллиметровая бумага с линейным масштабом по осям или логарифмическим масштабом, форматом не менее чем 14×16 мм (страница стандартной тетради). В виде исключения допускается построение зависимостей с помощью стандартных компьютерных программ, но и в этом случае графики должны соответствовать всем изложенным здесь требованиям (в частности, иметь масштабно-координатную сетку).

2. Строятся графики, за редким исключением, в прямоугольной системе координат, где по горизонтальной оси (оси абсцисс) откладывают аргумент, независимую физическую величину, а по вертикальной оси (оси ординат) – функцию, зависимую физическую величину.

3. Начало координат, если это не оговорено особо, может не совпадать с нулевыми значениями величин. Его выбирают таким образом, чтобы площадь чертежа была использована максимально. Обычно график строят на основании таблицы экспериментальных данных, откуда легко установить интервалы, в которых изменяются аргумент и функция. Их наименьшее и наибольшее значения задают значения масштабов, откладываемых вдоль осей (по каждой оси выбирается отдельно). Правильно построенная кривая должна заполнять все поле графика, что будет свидетельством правильного выбора масштабов по каждой из осей (рис. 4.1 (а)). Если же значительная часть поля оказывается незаполненной (рис. 4.1 (б)), то необходимо заново выбрать масштабы и перестроить зависимость.

4. Масштабные деления на координатных осях следует наносить равномерно. Масштабная шкала должна легко читаться, а для этого нужно выбрать удобную для восприятия ***цену деления шкалы***: производить отсчет значений

исследуемых величин будет удобно, если одному сантиметру (или делению) соответствует 1, 2, 5, 10, 100 и т.д. единиц измеряемой величины. Таким образом, числа 2; 0,5; 100; 0,02 подходят в качестве цены деления масштабной шкалы, а числа 3; 7; 0,15 – не подходят.

5. Против каждой оси указывают название или символ откладываемой по оси величины, а через запятую – единицы ее измерения, причем все единицы измерения приводят в русском написании в системе СИ (см. Приложение 5). Десятичный множитель масштаба, как в таблицах, относится к единицам измерения, – например, вместо 1000; 2000; 3000 … можно указать 1; 2; 3 … с общим множителем 10^3, указанным перед единицей измерения.

6. Экспериментальные точки аккуратно наносят на поле графика карандашом, чтобы они были отчетливо различимы. ***Координаты экспериментальных точек на осях не указывают, а линии, определяющие эти координаты, не проводят.***

7. Если в одних осях строят различные зависимости, полученные, например, при измененных условиях эксперимента или на разных этапах работы, то точки таких зависимостей должны отличаться друг от друга. Их следует отмечать разными значками (квадратами, кружками, крестиками и т.п.) или наносить карандашами разного цвета.

8. Экспериментальные точки, как правило, не соединяются между собой ни отрезками прямой, ни произвольной кривой. Если наблюдается значительный разброс экспериментальных точек, то прямую (или кривую) следует проводить не по точкам, а между ними – так, чтобы количество точек по обе стороны от нее было одинаковым, а кривая – плавной.

9. Графики обязательно нужно подписывать. Подпись должна отражать содержание графика. Следует объяснить в подписи (либо основном тексте) изображенные на графике линии.

На рис. 4.1 приведены примеры правильного (а) и неправильного (б) графического представления результатов эксперимента.

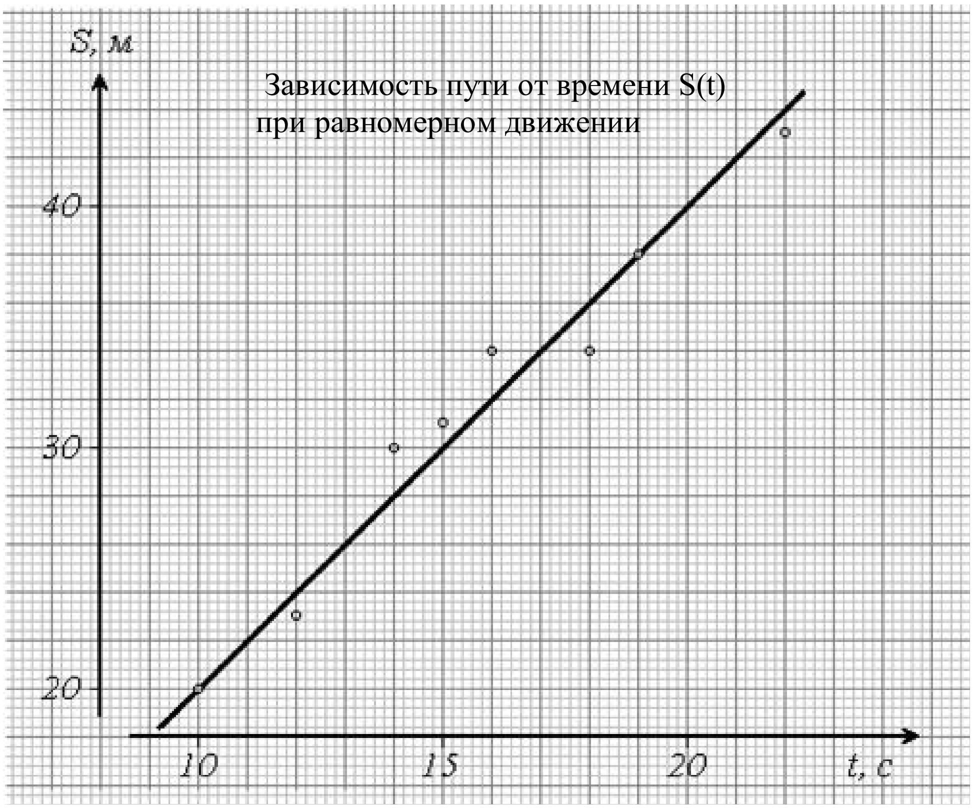


Рис. 4.1. а) **Правильное** построение графической зависимости.

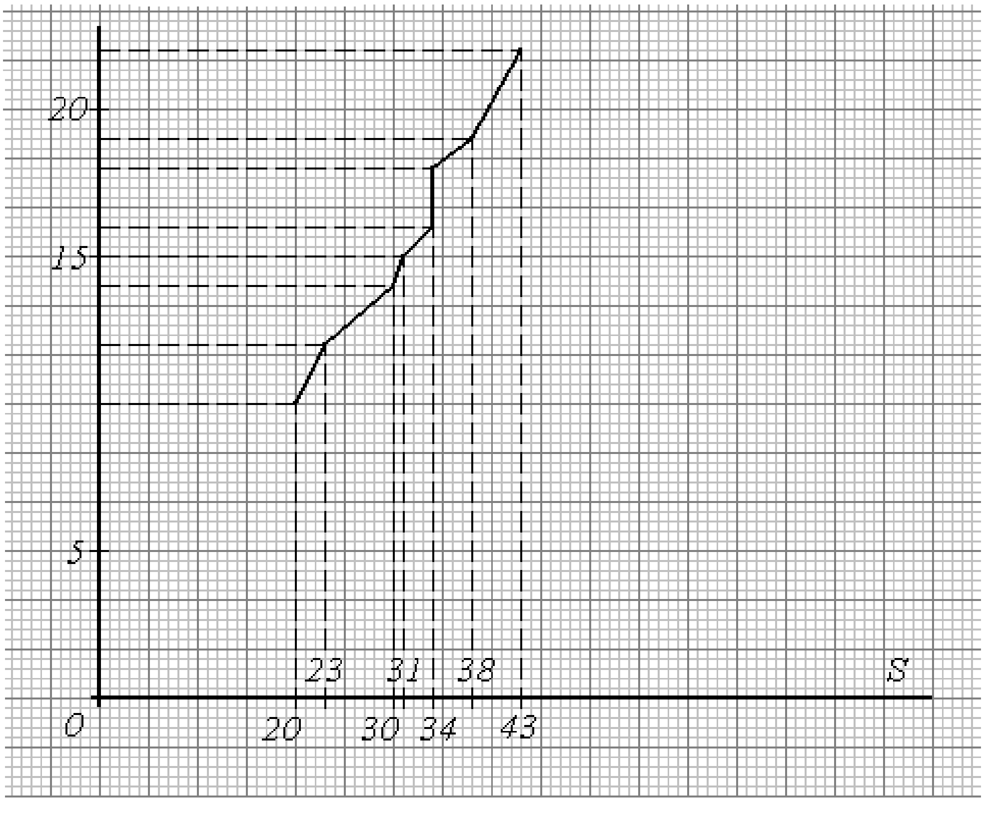


Рис. 4.1. б) **Неправильное** построение графической зависимости.

Если одна из физических величин (условно назовем ее y) связана линейной зависимостью вида $y=Ax+B$ с другой (назовем ее x), то графическое представление экспериментальных данных позволяет найти значение физической величины (А). Для этого необходимо определить *угловой коэффициент наклона* графика функции *y=f(x)*.

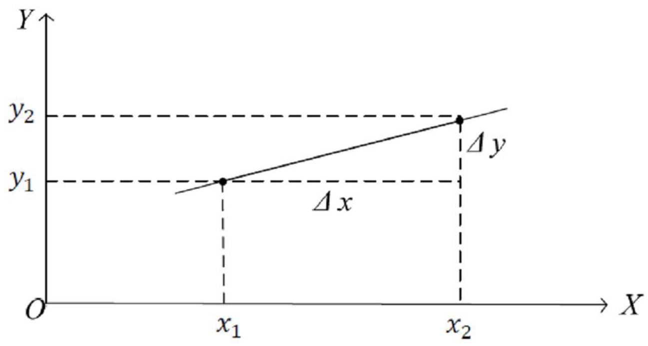


Рис. 4.2.

При определении углового коэффициента необходимо выбрать две произвольные точки на оси абсцисс x_1 и x_2, которые должны отстоять друг от друга на возможно большее расстояние. По графику провести отсчет соответствующих значений функции y_1 и y_2 (рис. 4.2). Чтобы коэффициент имел определенный физический смысл, величины x и y следует выражать в одной физической системе единиц.

Угловой коэффициент оценивается отношением приращения функции к приращению аргумента с учетом размерности и масштаба x и y:

$$A = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Вопросы для самопроверки к 4.5

1. С какой целью результаты эксперимента представляют графически?

2. Какие правила необходимо соблюдать при графическом представлении результатов эксперимента?

3. Как вычислить угловой коэффициент наклона прямой построенной по результатам измерений?

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Темпы развития современной техники и технологий непрерывно ускоряются, возникают и развиваются новые области наукоемких производств, что требует от выпускника вуза глубоких знаний в естественно-научной области. Физика является одной из тех наук, знание которой необходимо для успешного освоения общетехнических и специальных дисциплин. При изучении курса физики студенты должны прочно усвоить основные законы и теории, научиться выделять главное в сложных явлениях, освоить основные экспериментальные и математические методы физического исследования.

Настоящее учебное пособие призвано помочь подготовить студентов технических специальностей и направлений подготовки к восприятию курса общей физики через понимание основ математического аппарата, применяемого для записи физических законов, что поможет им свободно оперировать математическими понятиями при освоении физических закономерностей и в дальнейшем решать поставленные прикладные профессиональные задачи.

Учебное пособие является частью учебно-методического комплекта по дисциплине «Адаптивный курс физики», но оно может использоваться студентами (особенно обучающимися без отрыва от производства) и в качестве справочного пособия как при изучении курса общей физики, так и других специальных дисциплин.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Выгодский, М.Я. Справочник по высшей математике: Справочное издание. – [Б. м.]: Астрель; М.: АСТ, 2002. – 992 с.

2. Международный словарь по метрологии: основные и общие понятия и соответствующие термины / пер. с англ. и фр. Всерос. науч.-исслед. ин-т метрологии им. Д. И. Менделеева, Белорус. гос. ин-т метрологии. – Изд. 2-е, испр. – СПб.: НПО «Профессионал», 2010. – 82 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Греческий алфавит

Α α	[альфа]	Ι ι	[йота]	Ρ ρ	[ро]
Β β	[бета]	Κ ϰ	[каппа]	Σ σ	[сигма]
Γ γ	[гамма]	Λ λ	[ламбда]	Τ τ	[тау]
Δ δ	[дельта]	Μ μ	[мю]	Φ φ	[фи]
Ε ε	[эпсилон]	Ν ν	[ню]	Χ χ	[хи]
Ζ ζ	[дзета]	Ξ ξ	[кси]	Υ υ	[ипсилон]
Η η	[эта]	Ο ο	[омикрон]	Ψ ψ	[пси]
Θ θ	[тэта]	Π π	[пи]	Ω ω	[омега]

Латинский алфавит

Aa	[а]	Nn	[эн]
Bb	[бэ]	Oo	[о]
Cc	[цэ]	Pp	[пэ]
Dd	[дэ]	Qq	[ку]
E e	[э]	R r	[эр]
F f	[эф]	S s	[эс]
G g	[гэ] [же]	T t	[тэ]
H h	[ха] [аш]	U u	[у]
I i	[и]	V v	[вэ]
J j	[йот] [жи]	W w	[дубль-вэ]
K k	[ка]	X x	[икс]
L l	[эль]	Y y	[игрек]
M m	[эм]	Z z	[зэт]

ЭЛЕМЕНТЫ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ И ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Некоторые математические обозначения

Знак	Значение	Пример
1	2	3
=	равно	4 = 4
≠	не равно	3 ≠ 25
≈	приблизительно	2,54 ≈ 2,5
>,<	больше, меньше	50>2, 4<39
≥	больше или равно	$a \geq b$
≤	меньше или равно	$a \leq b$
≡	идентично	$f'(x) \equiv \dot{f}(x)$
$\sqrt{}$	квадратный корень	$\sqrt{25} = 5$
!	факториал	$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$
⇒	следует	*из формулы ⇒ что* *из формулы следует, что*
→	стремится	$x \to 0$ *x стремится к 0*
lim	предел	$\lim_{x \to a} f(x) = b$ *предел функции $f(x)$ при $x \to a$ равен b*
log_b	логарифм по основанию b	$log_2 3 = 8$
e	основание натурального логарифма	e=2,718281…
ln	натуральный логарифм	$ln 45 \approx 3{,}8$
lg	десятичный логарифм	$lg 100 = 2$
const	постоянная величина	b = const
∑	сумма	$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$
∏	произведение	$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$
~	пропорционально	AB ~ CD
π	число пи	π = 3,141
°	градус	$10°1'3''$ десять градусов одна секунда три минуты
′	минуты	
″	секунды	
sin	синус	$sin\, 30° = \frac{1}{2}$
cos	косинус	$cos\, 90° = 0$
tg	тангенс	$tg\ a = \frac{\sin a}{\cos a}$
ctg	котангенс	$ctg\ a = \frac{\cos a}{\sin a}$
arcsin	арксинус	$arcsin\ \frac{1}{2} = 30°$

1	2	3
arccos	арккосинус	$arccos\frac{1}{2}$= 60°
arctg	арктангенс	$arctg$ 1= 45°
sec	секанс	sec b =$\frac{1}{\sin b}$
cosec	косеканс	cosec b =$\frac{1}{cos\ b}$
$\exists$	существует	$\exists$ ***x*** *– существует такой **x**, что…*
$\nexists$	не существует	$\nexists$ ***x*** *– не существует такого **x**, что…*
$\in$	принадлежит	***x*** $\in$ N –***x*** *принадлежит натуральным числам*
$\notin$	не принадлежит	***x*** $\notin$ N – ***x***$\notin$ *не принадлежит натуральным числам*
N	натуральные числа	1, 2, 3, 4…
Z	целые числа	…-2, -1, 0, 1, 2…
R	рациональные числа	…$\frac{1}{2}$, 1$\frac{5}{2}$,$\frac{4}{53}$ …

Основные свойства действия с дробями

$$\frac{a\cdot c}{b\cdot c}=\frac{a}{b}\ ;\ \ b\neq 0\ \text{ и }\ c\neq 0$$

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c};\quad c\neq 0$$

$$\frac{a}{c}\cdot\frac{b}{d}=\frac{ab}{cd};\quad c\neq 0,\ \ d\neq 0$$

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{d}=\frac{ad+cb}{cd};\quad c\neq 0,\ \ d\neq 0$$

$$\frac{a}{c}\div\frac{b}{d}=\frac{ad}{cb};\quad b,d,c\neq 0$$

Формулы сокращенного умножения

$$a^2-b^2=(a+b)\cdot(a-b)$$

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

$$a^3-b^3=(a-b)\cdot(a^2+ab+b^2)$$

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

$$a^3+b^3=(a+b)\cdot(a^2-ab+b^2)$$

Степень с рациональным показателем

$a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a=a^n$ (n– количество множителей)

$a^1=a,\qquad a^0=1,\qquad$ где $a\neq 0$

$a^{\frac{n}{m}}=\sqrt[n]{a^m},$ где $a>0,\ \ m-$ целое число$,n>1-$ натуральное число

$\frac{1}{a^n}=a^{-n},\qquad$ где $a>0$

Свойства степеней

$$a^na^m=a^{n+m}$$

$$\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$$

$$(a^n)^m=a^{n\cdot m}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$$

$$(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n$$

Логарифмы

Запись $\log_a b = x$ означает, что $a^x = b$, где a>0, b>0, $a \neq 1$.

Запись $\lg b \equiv \log_{10} b$ – десятичный логарифм.

Запись $\ln x \equiv \log_e x$ – натуральный логарифм.

Основное логарифмическое тождество: $a^{\log_a b} = b$, где a>0, b>0, $a \neq 1$.

Основные свойства логарифмов:

$\log_a 1 = 0$; $\log_a a = 1$; $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$;

$\log_a x^p = p \log_a x$; $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$;

$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$, где x>0, a>0, b>0, $a \neq 1, b \neq 1$

Квадратное уравнение и его решение

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

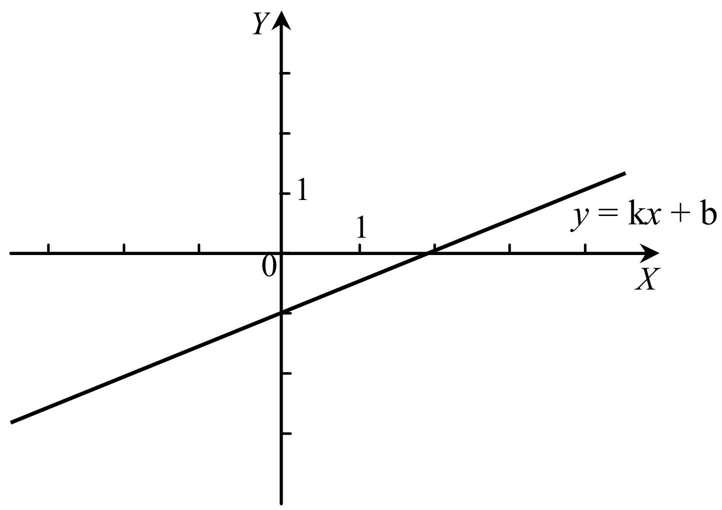
Некоторые приближенные значения

$\boldsymbol{\pi} \approx 3{,}1416$; **e** $\approx 2{,}7183$; $\sqrt{\mathbf{2}} \approx 1{,}4142$; $\sqrt{\mathbf{3}} \approx 1{,}7321$; $\sqrt{\mathbf{5}} \approx 2{,}2361$

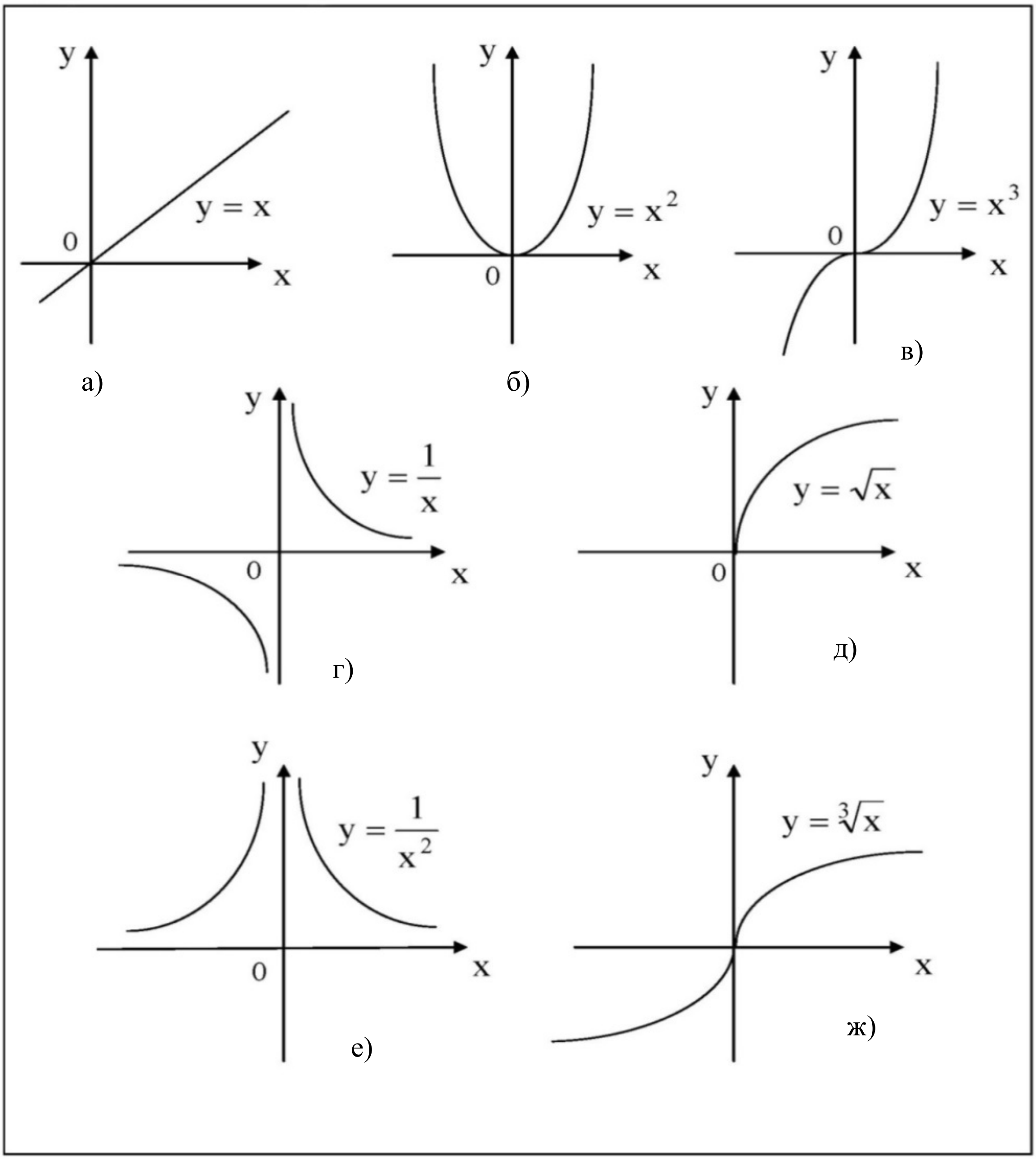
Графики основных элементарных функций

1) *Линейная функция* вида y=kx+b, где коэффициенты k и b – любые действительные числа. График функции – *прямая*, k – угловой коэффициент. При b=0 график проходит через начала координат.

На рисунке k = 0,5, b = –1.



2) *Степенная функция* $y = x^{\alpha}$, $\alpha \in R$



а) Частный случай степенной зависимости при $\alpha=1$ – *линейная функция* вида $y=kx$, где $k \neq 0$ – угловой коэффициент (на рис. $k=1$). График функции – *прямая.*

б) Простейший случай квадратичной зависимости $y=x^2$. График функции *симметричная парабола* с вершиной в начале координат.

в) Степенная функция $y=x^3$ – самый простой случай для целой нечетной степени. График функции – *кубическая парабола*.

г) Функция вида y=k/x – обратно-пропорциональная зависимость (на рис. k=1) – самый простой случай степенной функции для целой отрицательной степени α=–1. График функции – *гипербола.*

д) Функция вида $y=x^{1/2}=\sqrt{x}$ – самый простой случай степенной зависимости для дробной степени α=1/2.

е) Степенная функция для целой отрицательной степени α=–2.

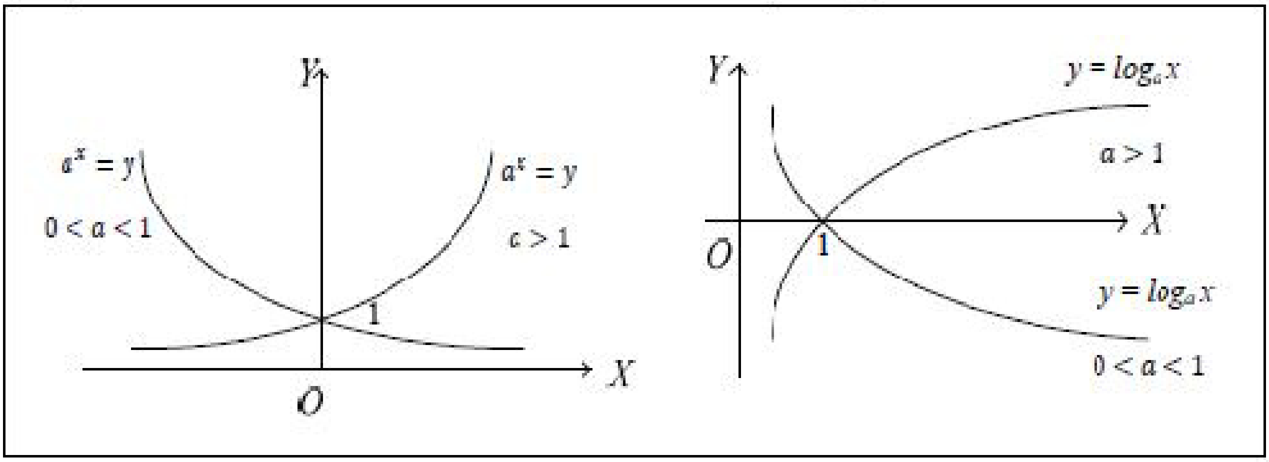
ж) Степенная функция для дробной степени α=1/3.

3) *Показательная функция*

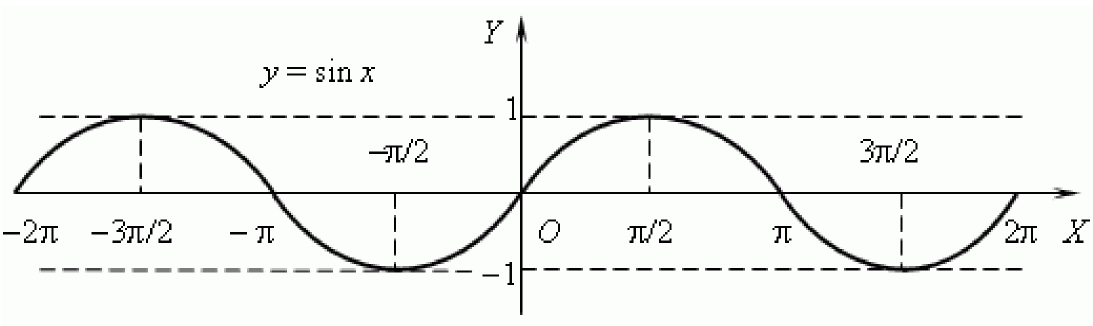
$y = a^x$, $a>0$, $a\neq 1$;

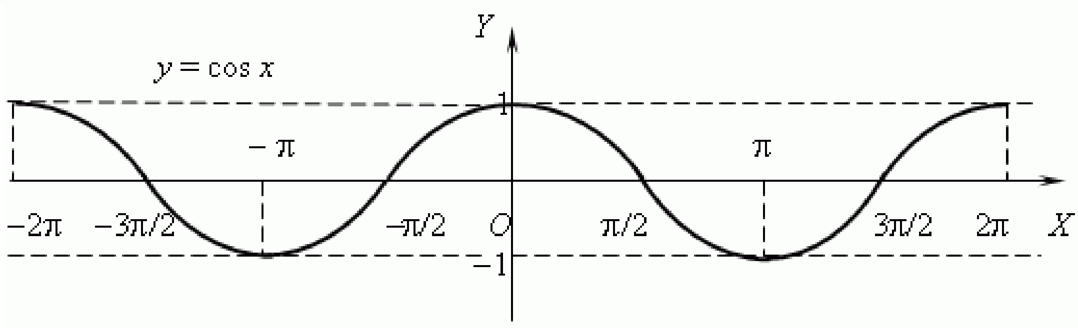
4) *Логарифмическая функция*

$y = log_a x$, $a> 0$, $a\neq 1$

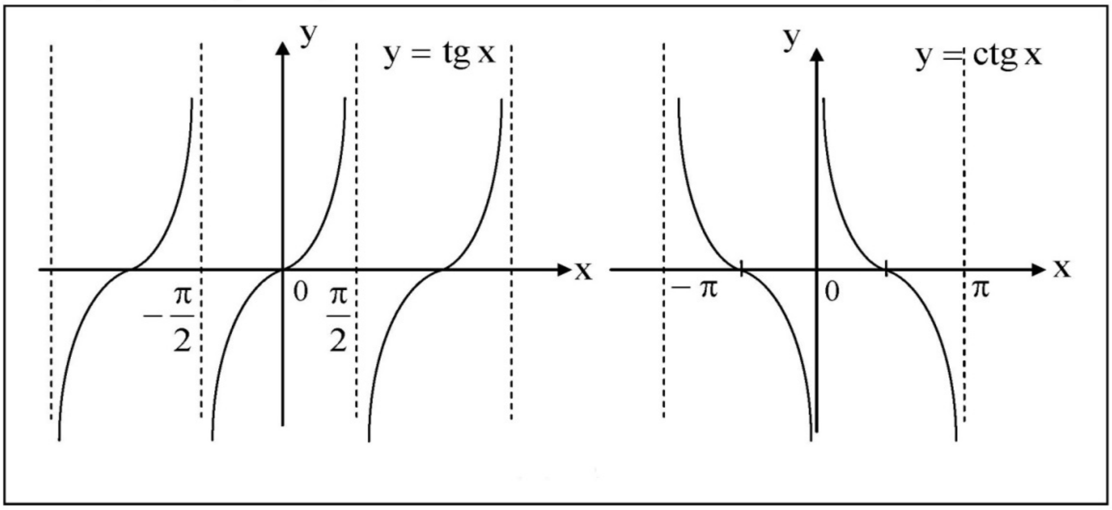


5) *Тригонометрические функции* $y = \sin x$, $y = \cos x$.

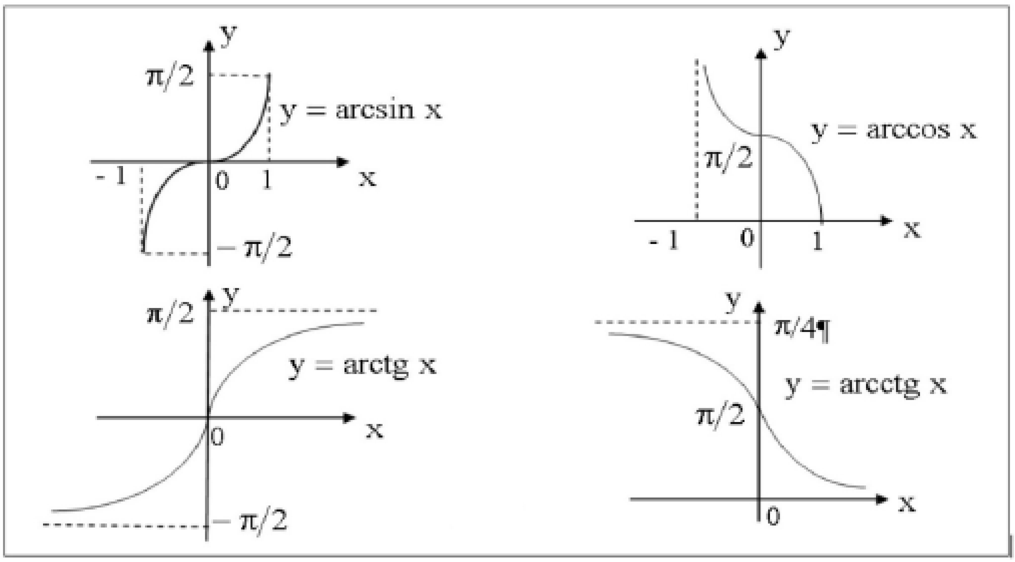




6) *Тригонометрические функции* $y = \mathrm{tg}\, x$, $y = \mathrm{ctg}\, x$.

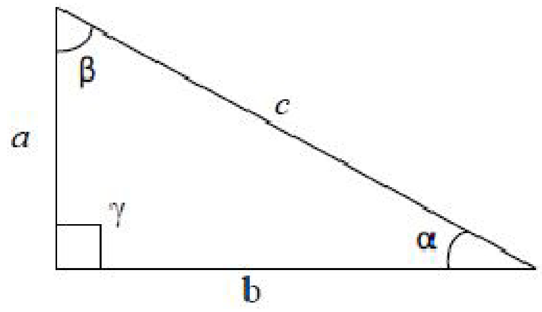


7) *Обратные тригонометрические функции* $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \mathrm{arctg}\, x$, $y = \mathrm{arcctg}\, x$.



ЭЛЕМЕНТЫ ГЕОМЕТРИИ И ТРИГОНОМЕТРИИ

Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника

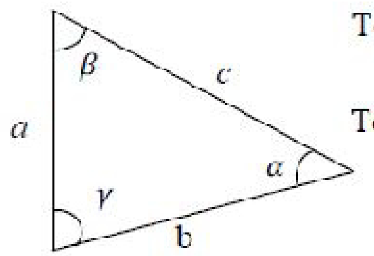


$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \qquad tg\ \alpha = \frac{a}{b}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} \qquad ctg\ \alpha = \frac{b}{a}$$

Теорема Пифагора: $c^2 = a^2 + b^2$

Соотношение между сторонами и углами треугольника



Теорема синусов: $\frac{a}{sin\alpha} = \frac{b}{sin\beta} = \frac{c}{sin\gamma} = 2R$

Теорема косинусов: $a^2 = c^2 + b^2 - 2cb\cos\alpha$

Значения тригонометрических функций некоторых углов

α	***0°*** (0 рад)	***30°*** ($\frac{\pi}{6}$ рад)	***45°*** ($\frac{\pi}{4}$ рад)	***60°*** ($\frac{\pi}{3}$ рад)	***90°*** ($\frac{\pi}{2}$ рад)	***120°*** ($\frac{2\pi}{3}$ рад)	***180°*** (π рад)	***270°*** ($\frac{3\pi}{2}$ рад)	***360°*** (2π рад)
sin α	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	0	-1	0
cos α	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	$-1/2$	-1	0	1
tg α	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	0	∞	0
ctg α	∞	$\sqrt{3}$	1	$1/\sqrt{3}$	0	$-1/\sqrt{3}$	∞	0	∞
sec α	1	$2/\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	2	-	-2	-1	-	1
cosec α	-	2	$\sqrt{2}$	$2/\sqrt{3}$	1	$2/\sqrt{3}$	-	-1	-

Тригонометрические тождества и формулы

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$$

$$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{cos^2\alpha} \qquad 1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{sin^2\alpha}$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha \qquad \cos 2\alpha = cos^2\alpha - sin^2\alpha \qquad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\,tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \qquad \cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha \cdot tg\beta} \qquad \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha \cdot tg\beta}$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta} \qquad \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}$$

$$\sin\alpha\,\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

$$\cos\alpha\,\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$$

$$\sin\alpha\,\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}} \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} = \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha} = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}}$$

$$\sin\alpha = \frac{2\,tg\frac{\alpha}{2}}{1 + tg^2\frac{\alpha}{2}} \qquad \cos\alpha = \frac{1 - tg^2\frac{\alpha}{2}}{1 + tg^2\frac{\alpha}{2}}$$

ЭЛЕМЕНТЫ ПЛАНИМЕТРИИ И СТЕРЕОМЕТРИИ

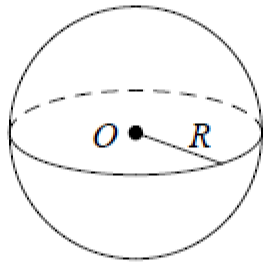
Формулы площади и объема некоторых фигур

Длина окружности $L = 2\pi R$,

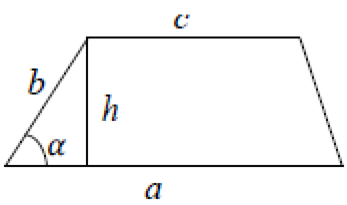
Площадь круга $S = \pi R^2$,

Площадь сферы $S = 4\pi R^2$,

Объем шара $V = \frac{4}{3}\pi R^3$



Площадь трапеции $S = \frac{(a+c)h}{2}$

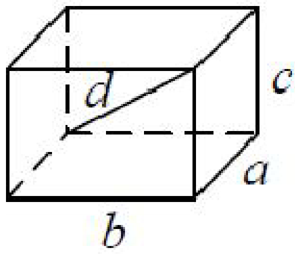


Площадь параллелограмма $S = ab\sin\alpha$

Объем прямоугольного параллелепипеда $V = abc$,

Длина диагонали прямоугольного параллелепипеда

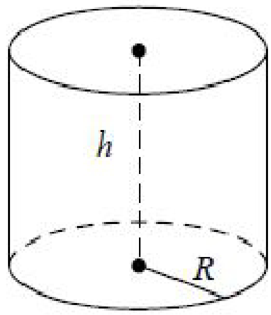
$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$



Площадь боковой поверхности цилиндра

$$S_{\text{бок}} = 2\pi Rh,$$

Объем цилиндра $V = \pi R^2 h$



ЭЛЕМЕНТЫ МЕТРОЛОГИИ

Основные и дополнительные единицы Международной системы (СИ)

Основные: метр (м) – единица длины;

килограмм (кг) – единица массы;

секунда (с) – единица времени;

ампер (А) – единица силы электрического тока;

кельвин (К) – единица термодинамической температуры;

моль (моль) – единица количества вещества;

кандела (кд) – единица силы света.

Дополнительные: радиан (рад) – единица для измерения плоского угла;

стерадиан (ср) – единица для измерения телесного угла.

Кратные, дольные и производные единицы

Десятичные кратные и дольные единицы, а также их наименования и обозначения образуются с помощью множителей и приставок, приведённых в таблице.

Приставки для обозначения десятичных кратных и дольных единиц

Наименование		Обозначение приставки		Множитель
		русское	международное	
кратные	экса	Э	E	10^{18}
	пета	П	P	10^{15}
	тера	Т	T	10^{12}
	гига	Г	G	10^{9}
	мега	М	M	10^{6}
	кило	к	k	10^{3}
	гекто	г	h	10^{2}
	дека	да	da	10^{1}
дольные	деци	д	d	10^{-1}
	санти	с	c	10^{-2}
	милли	м	m	10^{-3}
	микро	мк	μ	10^{-6}
	нано	н	n	10^{-9}
	пико	п	p	10^{-12}
	фемто	ф	f	10^{-15}
	атто	а	a	10^{-18}

Метрическая система измерений

Меры длины

1 километр (км) = 1000 метрам (м)

1 метр (м) = 10 дециметрам (дм) = 100 сантиметрам (см)

1 дециметр (дм) = 10 сантиметрам (см)

1 сантиметр (см) = 10 миллиметрам (мм)

Меры площади

1 кв. километр (км^2) = 1 000 000 кв. метрам (м^2)

1 кв. метр (м^2) = 100 кв. дециметрам (дм^2) = 10 000 кв. сантиметрам (см^2)

1 гектар (га) = 100 арам (а) = 10 000 кв. метрам (м^2)

1 ар (а) = 100 кв. метрам (м^2)

Меры объема

1 куб. метр (м^3)=1000 куб. дециметрам (дм^3)=1000 000 куб. сантиметрам (см^3)

1 куб. дециметр (дм^3)=1000 куб. сантиметрам (см^3)

1 литр (л)=1 куб. дециметру (дм^3)

1 гектолитр (гл)=100 литрам (л)

Меры веса

1 тонна (т)=1000 килограммам (кг)

1 центнер (ц)=100 килограммам (кг)

1 килограмм (кг)=1000 граммам (г)

1 грамм (г)=1000 миллиграммам (мг)

Производные единицы СИ образовываются с помощью уравнений связи между физическими величинами.

Например: в системе величин, где основными величинами являются длина, время и масса (***Международная система (СИ)***) импульс — производная величина, которая определяется как произведение массы на скорость (длина в единицу времени), таким образом, единицы импульса – кг·м/с.

СОДЕРЖАНИЕ

Оксана Васильевна Зотова,

доцент кафедры физики АмГУ, канд. физ.-мат. наук;

Ирина Анатольевна Голубева,

доцент кафедры физики АмГУ, канд. физ.-мат. наук

Математические основы курса общей физики. *Учебное пособие.*

Изд-во АмГУ. Подписано к печати 29.03.16. Формат 60x84 1/16. Усл. печ. л. 5,81. Тираж 250. Заказ 678.

Отпечатано в типографии АмГУ.