Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Амурский государственный университет»

«Кадры для регионов»

ФГБОУ ВПО «Амурский государственный университет»

Учебное пособие подготовлено в рамках реализации проекта по подготовке высококвалифицированных кадров для предприятий и организаций регионов («Кадры для регионов»)

О.В. Зотова, И.А. Голубева, О.В. Казачкова

АДАПТИВНЫЙ КУРС ФИЗИКИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ КУРСА ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

Учебное пособие

Благовещенск
Издательство АмГУ
2013

ББК 22.311я73
З-88

*Печатается по решению
редакционно-издательского совета
Амурского государственного
университета*

Разработано в рамках реализации гранта «Подготовка высококвалифицированных кадров в сфере электроэнергетики и горно-металлургической отрасли для предприятий Амурской области» по заказу предприятия-партнера ОАО «Дальневосточная распределительная сетевая компания»

Рецензент

Дмитрий Анатольевич Голубев, зам. начальника инженерного центра филиала «Амурские электрические сети» ОАО «ДРСК»

Василий Иванович Польшин, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры физики Амурского государственного университета

Зотова О.В., Голубева И.А., О.В. Казачкова О.В.

З-88 Адаптивный курс физики. Математические основы курса общей физики: учебное пособие / О.В. Зотова, И.А. Голубева, О.В. Казачкова. – Благовещенск: Изд-во АмГУ, 2014. – 90 с.

Учебное пособие предназначено для освоения дисциплины «Адаптивный курс физики» и содержит основные сведения о математическом аппарате физики. Рассмотрены базовые понятия и процедуры векторной алгебры, дифференциально-интегрального исчисления и их физические приложения. В пособии приведены методы статистической обработки экспериментальных данных и оценки их достоверности. Каждая глава настоящего пособия содержит задания для самостоятельной работы студентов. Содержание пособия полностью соответствует рабочей программе по дисциплине.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлению подготовки 13.03.02 (140400.62) – «Электроэнергетика и электротехника», профили «Электрические станции», «Электроэнергетические системы и сети», «Электроснабжение», «Релейная защита и автоматизация электроэнергетических систем».

В авторской редакции.

ББК 22.311я73

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие предназначено для освоения дисциплины «Адаптивный курс физики» и содержит основные сведения о математическом аппарате физики.

Цель данного учебного пособия – помочь студентам первокурсникам в освоении курса общей физики, через понимание основ математического аппарата, применяемого для записи физических законов и решения задач теоретического и прикладного характера.

Содержание школьного курса естественных наук и сегодня остается одной из актуальных проблем. Сокращение числа часов на преподавание естественнонаучных дисциплин привело к тому, что в рамках школьной программы оказалось практически невозможным в полной мере показать учащимся смысл одного и того же понятия в разных предметах, т.е. осуществить логический переход от абстрактных математических понятий к записи с их помощью законов физики.

В частности, это относится к таким разделам как векторная алгебра, дифференциально-интегральное исчисление, на которых базируется математический аппарат физики и последующих специальных дисциплин, таких как техническая механика, электротехника, электроника, электрические машины и др.

Классическая механика И. Ньютона, как основа всех изучаемых физических дисциплин, по существу является векторной и поэтому базовые знания векторной алгебры необходимы при изучении практически всего курса физики. Но удивительно, что и авторы школьных учебников физики не акцентируют на этом внимание учащихся. Возникает вопрос, как можно сформировать базовые знания по физике у студентов вуза, параллельно восполняя «пробелы» школьного образования по математике и физике, что бы в дальнейшем они могли успешно освоить специальные дисциплины?

Одним из возможных вариантов улучшения усвоения физики студентами первого курса (особенно, если курс физики начинается с первого семестра) является введение в учебный план дисциплины «Адаптивный курс физики», предваряющей изучение основного курса физики. В рамках этой дисциплины появляется возможность подготовить студентов к восприятию учебного материала по основному курсу, ознакомить студентов с понятийным и соответствующим математическим аппаратом физики для дальнейшего освоения теории, решения практических задач, и выполнения лабораторного практикума..

В данном учебном пособии рассмотрены элементы векторной алгебры, дифференциально-интегрального исчисления и их физические приложения, приведены методы статистической обработки экспериментальных данных и оценки их достоверности. В приложениях приведены некоторые справочные сведения по элементарной математике, алгебре, геометрии, тригонометрии, системе единиц измерения, что может использовать студентами не только при решении физических задач, но и как справочный материал, при изучении других естественнонаучных и профессиональных дисциплин.

Содержание пособия полностью соответствует рабочей программе по дисциплине «Адаптивный курс физики» для студентов, обучающихся по направлению подготовки 13.03.02 (140400.62) – «Электроэнергетика и электротехника», профили «Электрические станции», «Электроэнергетические системы и сети», «Электроснабжение», «Релейная защита и автоматизация электроэнергетических систем».

ВВЕДЕНИЕ

Изначально физика являлась единственной наукой о природе, но по мере накопления фактов и методов наблюдения и исследования различных явлений природы отдельные ее разделы превратились в самостоятельные науки. Например, астрономия – наука о движении и строении небесных тел, биология – наука, изучающая все живое, геология – наука о строении Земли, химия – наука о составе и строении веществ, и их взаимных превращениях.

Что тогда остается физике?

Физика рассматривает природу, как объективную реальность, которая существует независимо от нашего сознания. Материя и есть объективная реальность, данная нам в ощущении. На сегодняшний день известны две формы материи: вещество и поле. Из вещества состоят все тела в природе, поле – это особая форма материи, посредством которой осуществляются любые взаимодействия между любыми телами в природе.

Вещество и поле образуют физическое пространство, в котором протекают все физические явления в течение того или иного конечного времени. Многие свойства пространства и времени современной науке уже известны, и, в частности, известно, что материя, пространство и время взаимосвязаны и взаимообусловлены – стоит измениться одному, как обязательно измениться другое.

Простейшие виды движения, такие как механическое, волновое, атомно-молекулярное и т.д., одновременно являясь фундаментальными, входят в состав сколь угодно сложных видов движения. Поэтому важность физики заключается в том, что физика является основой современного естествознания.

Одна из главных задач современной физики – изучение свойств вещества, входящих в состав как неживых, так и живых тел, изучение процессов в этих телах, т.е. изменений различных свойств, происходящих в результате тех или иных воздействий на рассматриваемое тело. Поэтому современные отрасли промышленности, энергетика, медицина и даже сельское хозяйство немыслимы в отрыве от физики.

Еще одна из основных задач физики состоит в изучении структуры различных веществ, объяснений на этой основе уже известных свойств и прогнозирование новых, еще не известных. Кроме этого физика изучает строение самих атомов и молекул, а также строение отдельных частей атомов и молекул, атомные ядра и элементарные частицы.

Физика является опытной наукой, т.к. все установленные законы, все физические теории в своей основе вытекают из наблюдений и экспериментов, результаты которых обобщены и сформулированы в виде законов.

Как правило, все явления взаимосвязаны между собой, поэтому проводить изучение всей совокупности явлений достаточно сложная задача. В связи с этим возникает необходимость в упрощении описания того или иного процесса за счет учета лишь основных факторов, определяющих рассматриваемое явление. Чтобы достичь определенной цели в физике применяется прием разделения существенных и несущественных характеристик и связей в условиях поставленной задачи.

Упрощенное рассмотрение явлений позволяет установить сравнительно простые количественные связи между различными величинами, характеризующими явление или целую группу явлений. Эти связи и называют ***физическими законами***.

Критерием верности теории или гипотезы является опыт: если выводы теории не согласуются с опытом, противоречат ему, то теория является не верной; согласование опытных данных с выводами теории служит её подтверждением. Существует так же возможность пересмотра теории или её замены на новую при появлении экспериментальных данных, которые не укладываются в рамках данной теории.

При любых исследованиях, наблюдениях, экспериментах приходиться делать те или иные ***измерения***. Очевидно, что любое измерение не может быть абсолютно точным. Точность измерений определяется многими факторами: видом и качеством приборов, умением экспериментатора, характеристиками измеряемого объекта и т.д. Все искажения при измерениях, так называемые ошибки, необходимо учитывать при исследованиях и вычислениях.

Математика наряду с экспериментом является важнейшим инструментом физического исследования. Физика имеет дело с количественными соотношениями и языком физики является язык математических уравнений, поэтому физика является наукой точной. Математические формулы физики связывают в уравнения физические величины, выражающие те или иные закономерности природы. Эти величины могут иметь различный математический характер.

Определением физической величины называется соотношение, в котором подчеркивается основная ее особенность и дается способ определить ее численное значение.

Существует две основные категории физических величин, которые используются в курсе физики – скаляры и векторы. Математические операции над ними производятся по различным правилам, которые более подробно будут рассмотрены в разделах данного методического пособия.

Математические соотношения в физике представляют собой уравнения одного из трех видов. Уравнение выражает *определение некоторой физической величины*, если все другие входящие в него величины выясняются независимо от этого уравнения. Уравнение выражает *функциональную (причинную) связь*, если все физические величины, входящие в него, включая и коэффициенты, известны независимо от этого уравнения, причем физические коэффициенты в уравнении имеют определенные значения. В случае, если уравнение связывает средние статистические значения переменных величин, то оно является *корреляционным*.

Связь математики и физики и их влияние взаимны. Развитие математики позволяет решать все более сложные физические задачи, формулировать новые, более сложные физические закономерности. Эти возможности особенно расширились в последние годы и даже переросли в отдельный раздел физики – моделирование физических процессов и объектов.

Темп развития физики все время ускоряется, становиться все более бурным. Возникают и развиваются целые новые области физики, например биофизика, астрофизика, физическая химия и другие.

На энергетическом факультете физика является системообразующей дисциплиной предметных знаний. Она служит научной основой для всей современной электротехники и новых технологий в энергетике. Без знания курса общей физики невозможно овладеть профессиональными дисциплинами, а, следовательно, невозможна подготовка качественного специалиста, конкурентоспособного на рынке труда.

Для того чтобы успешно работать современному инженеру-энергетику необходимо овладеть основами физики – изучить наиболее важные физические законы и их следствия, научиться выделять главное в сложных явлениях, освоить основные экспериментальные и математические методы физического исследования.

Данное учебное пособие поможет свободно оперировать математическими понятиями при освоении физических закономерностей и решать поставленные физические и прикладные профессиональные задачи.

Глава I. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

§ 1.1 Векторы и скаляры

При изучении реального мира приходиться сталкиваться с такими свойствами исследуемых объектов, которые характеризуются числовой мерой (масса тела, объем тела, электрический заряд и т.д.) Этими характеристиками являются скаляры, которые обозначаются либо буквами обычного шрифта, либо цифрами (a, b, t, I, 5, $-7,\dots$). Скаляры могут быть как положительными, так и отрицательными. Математические операции над скалярами выполняются по правилам арифметики и элементарной алгебры. В то же время некоторые объекты изучения могут обладать такими свойствами, которые требуют не только знания числовой меры, но и охарактеризовать направление в пространстве. Такие свойства характеризуются величинами, которые называются векторами. Примерами векторных величин являются скорость, ускорение, сила и т.д. Векторы в отличие от скаляров обозначаются буквами жирного шрифта ($\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{V}$, …) или буквой обычного шрифта (нежирного), но со стрелкой над ней.

Скалярной величиной или ***скаляром*** называется величина, не обладающая направлением. Например: S – путь, $t°C$ – температура, ρ – плотность, R – сопротивление, I – сила тока.

Векторной величиной или ***вектором*** называется всякая величина, имеющая направление. Например: $\vec{r} - радиус\ вектор, \overrightarrow{V} - скорость,\ \vec{a} - ускорение, \vec{F} - сила$.

Вектор изображается (рис. 1.1) в виде направленного отрезка, направление которого указывается стрелкой, а длина отрезка является ***модулем*** вектора или его ***абсолютной величиной***. Обозначают векторы $\vec{a}$, $\vec{b},\ \vec{c},\dots, или\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{CD},\ \overrightarrow{NM},\dots, или\ \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{AB},\dots$ Длина вектора $\vec{a}$ обозначается $|\vec{a}| = a$.

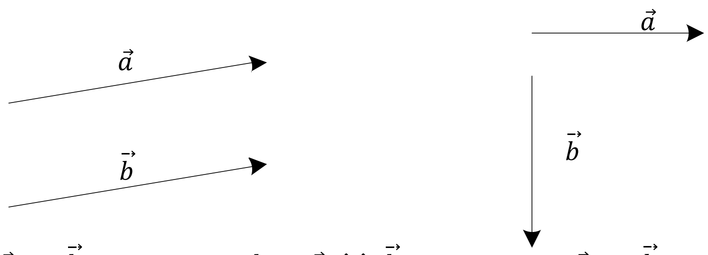
Рис. 1.1

Отрезки, начало и конец которых совпадают, определяют вектор, который называется ***нулевым вектором*** и обозначается $\vec{0}$. Абсолютная величина нулевого вектора считается равной нулю. Понятие направления для нулевого вектора не определено.

Векторы называются ***коллинеарными,*** если они лежат на одной прямой или параллельны между собой.

Векторы называются ***компланарными***, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

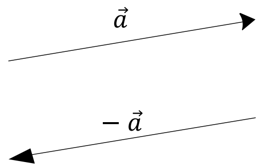
Два вектора называются ***равными,*** если они имеют одинаковый модуль и являются равнонаправленными (рис. 1.2).



$\vec{a} = \vec{b}$, если $a = b$ и $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ $\qquad$ $\vec{a} \neq \vec{b}$, хотя $a = b$, но $\vec{a} \cancel{\uparrow\uparrow} \vec{b}$

Рис. 1.2

Два вектора называются ***противоположными***, если они равны по модулю и противоположно направлены (рис. 1.3).



$\overrightarrow{|a|} = \overrightarrow{|-a|}$ и $\vec{a} \uparrow\downarrow -\vec{a}$

Рис. 1.3

Всякие векторы (в любом количестве) можно привести к ***общему началу***, т.е. построить векторы из одной точки (т. О) перенося их в пространстве параллельно самим себе (рис. 1.4).

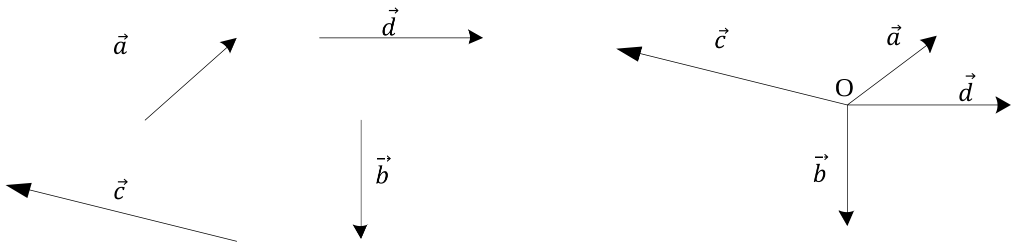


Рис. 1.4

В физике данный прием используется при решении задач с применением второго закона Ньютона:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F} = m\vec{a}$$

В сумму сил могут входить силы, приложенные к одному телу, но имеющие разные точки приложения, и для нахождения их суммы вектора сил удобнее построить из одной точки (рис. 1.5).

Рис. 1.5

§ 1.2 Сложение и вычитание векторов

Суммой двух векторов $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ называется третий вектор $\vec{c}$, полученный в результате построения применяя***правило треугольника*** или ***правило параллелограмма***.

Правило треугольника: из произвольного начала (т. О) строиться вектор $\vec{a}$, конец которого совмещается с началом вектора $\vec{b}$. Вектор, проведенный из начала вектора $\vec{a}$ в конец вектора $\vec{b}$ есть вектор $\vec{c}$, являющийся их суммой (рис. 1.6). Модуль вектора $\vec{c}$ можно найти, применяя теорему косинусов:

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha \tag{1.1}$$

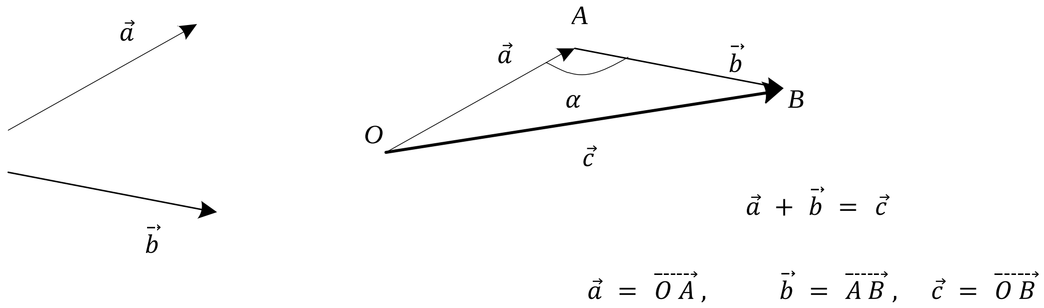


Рис.1.6

Правило параллелограмма: суммарный вектор $\vec{c}$ является диагональю параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ (рис.1.7). Модуль вектора $\vec{c}$ также можно найти, применяя теорему косинусов:

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\beta \tag{1.2}$$

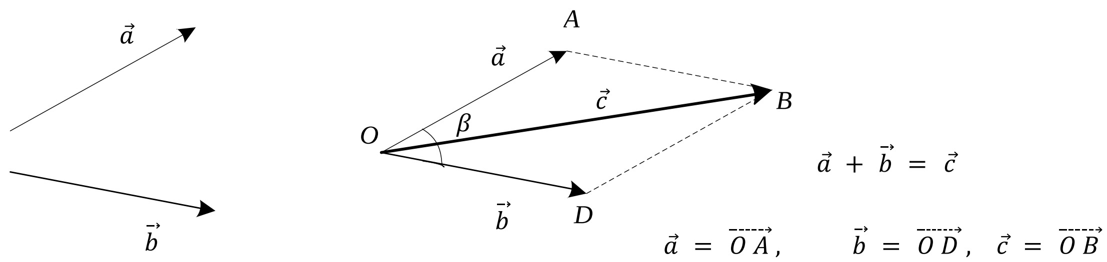


Рис. 1.7

В случае коллинеарности векторов построение проводиться вдоль прямой (рис. 2.8) по правилу треугольника (правило параллелограмма для коллинеарных векторов не применимо).

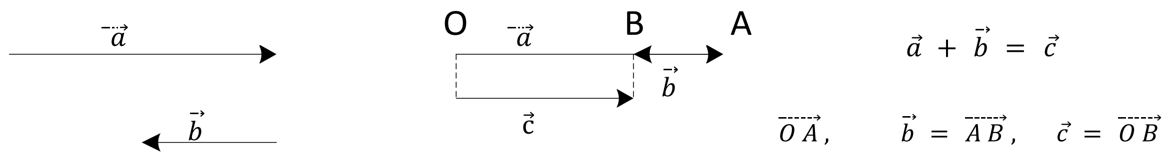


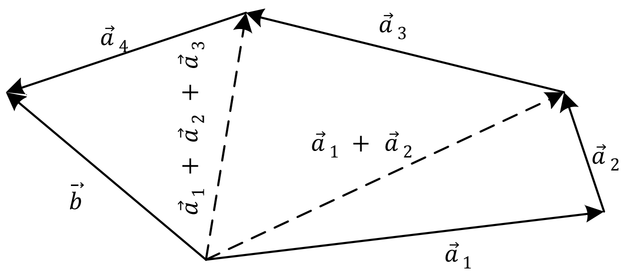
Рис. 1.8

Сложение векторов обладает свойством ***коммутативности***:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \tag{1.3}$$

Сложение векторов обладает свойством ***ассоциативности:***

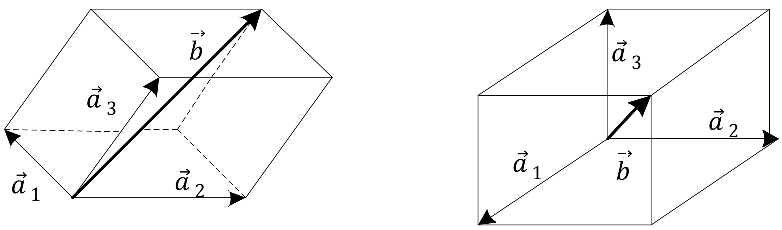
$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = (\vec{a} + \vec{c}) + \vec{b} \tag{1.4}$$



$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4 = \vec{b}$

Рис. 1.9

На свойстве ассоциативности основано сложение нескольких векторов с помощью ***правила многоугольника*** (или ***правила цепи***): при сложении нескольких векторов, лежащих в одной плоскости, сумму можно найти последовательным сложением двух векторов. Например, при сложении векторов$\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$, $\vec{a}_4$,к вектору $\vec{a}_1$ суммируется вектор $\vec{a}_2$, к получившемуся вектору прибавляется вектор $\vec{a}_3$, и т.д. Результатом является вектор $\vec{b}$, проведенный из начала вектора $\vec{a}_1$ в конец вектора $\vec{a}_4$ (рис. 1.9).



$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 = \vec{b}$

Рис. 1.10

В частном случае, сложение векторов, не лежащих в одной плоскости, проводится согласно ***правилу параллелепипеда***: суммой трёх векторов является вектор по длине и направлению совпадающий с диагональю параллелепипеда, сторонами которого являются складываемые вектора, приведенные к одному началу (рис. 1.10).

Разностью векторов $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, который после приведения векторов $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ к общему началу, можно провести из конца вектора $\vec{b}$ в конец вектора $\vec{a}$ (рис. 1.11).

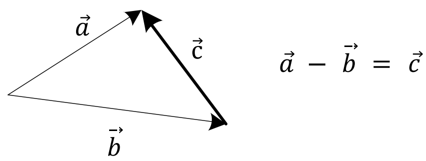


Рис. 1.11

Можно представить разность векторов $(\vec{a} - \vec{b})$ в виде суммы вектора $\vec{a}$ и вектора $-\vec{b}$, т.е. $\vec{a} + \left(-\vec{b}\right)$, и находить результат по правилу сложения векторов (рис. 1.12).

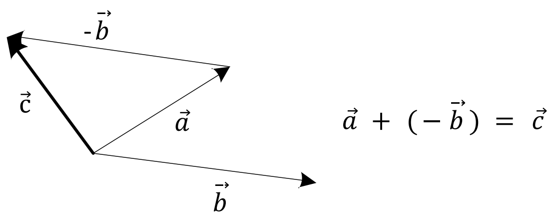


Рис. 1.12

Помимо вычитания, обратным действием сложению является ***разложение*** вектора на составляющие, которое заключается в замене вектора на равную ему сумму нескольких векторов. При разложении на два вектора по заданным направлениям, задача решается просто построением параллелограмма. Например, в некоторых задачах кинематики применяется разложение вектора ускорения на нормальную и тангенциальную составляющие (рис. 1.13).

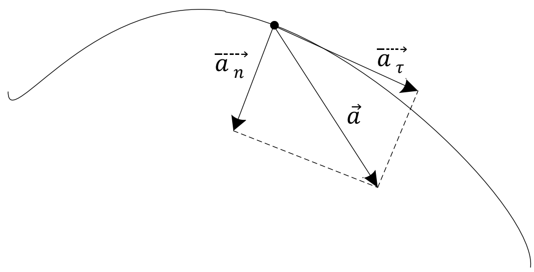


Рис. 1.13

<u>В физике</u> при описании гармонических колебательных процессов используется метод векторных диаграмм, где физических величины, совершающих гармонические колебания, представляются в виде вращающихся векторов (рис. 1.14). На такой векторной диаграмме колебанию с угловой частотой ω в момент времени t сопоставляется вектор, модуль которого равен амплитуде колебания A и образует с осью OX угол $\varphi = \omega t + \varphi_0$, равный фазе колебания (φ_0 – начальная фаза в момент времени *t=0).* С течением времени данный вектор равномерно вращается с угловой скоростью ω против часовой стрелки, а проекции его конца на координатные оси определяют значение колеблющейся величины в данный момент времени: $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$ *и* $y = A\sin(\omega t + \varphi_0)$.

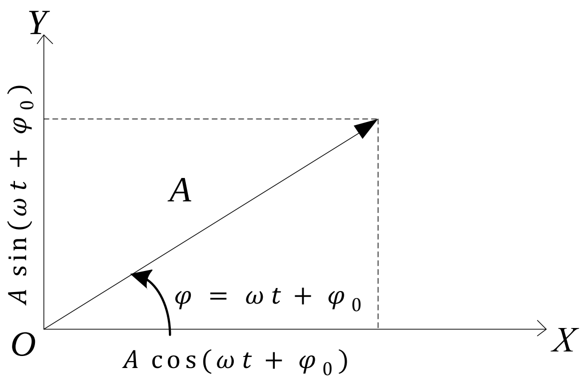


Рис. 1.14

Применяя метод векторных диаграмм, можно провести сложение колебаний одного направления. Такой способ графического представления колеблющихся величин широко используется в электротехнике при расчете электрических цепей переменного синусоидального тока.

§ 1.3 Умножение и деление вектора на число

Произведением вектора $\vec{a}$ на число A есть новый вектор, модуль которого получен в результате умножения модуля вектора $\vec{a}$ на абсолютное значение числа A, а направление совпадает с направлением вектора $\vec{a}$, если $A > 0$, или противоположно ему, если $A < 0$ (рис. 1.15).

Разделить вектор $\vec{a}$ на число A, значит найти такой вектор $\vec{c}$, который при умножении на число A, даст в произведении вектор $\vec{a}$*:*

$$\vec{a} = A \cdot \vec{c}\ ,\ \text{т.е.}\ \vec{c} = \frac{\vec{a}}{A} \tag{1.5}$$

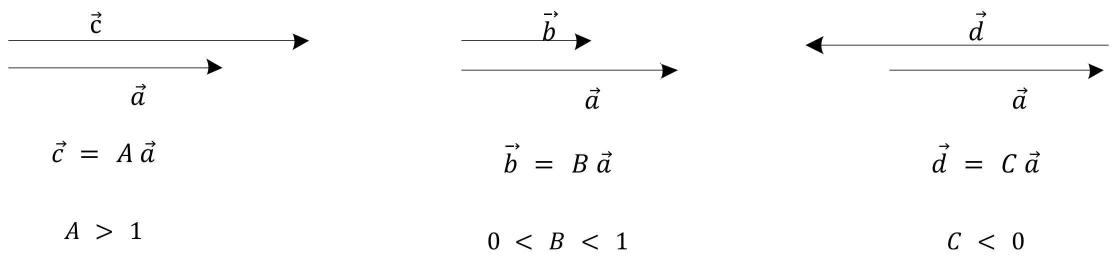


Рис. 1.15

Умножение вектора на число подчиняется тем же законам, что и умножение чисел:

1) ***дистрибутивный (распределительный***) закон, по отношению к числовому множителю

$$(A + B) \cdot \vec{a} = A \cdot \vec{a} + B \cdot \vec{a} \tag{1.6}$$

2) ***дистрибутивный (распределительный***) закон, по отношению к векторному множителю

$$A \cdot \left(\vec{a} + \vec{b}\right) = A \cdot \vec{a} + A \cdot \vec{b} \tag{1.7}$$

3) ***свойство сочетательности***

$$A \cdot\ (B \cdot \vec{a}) = (A \cdot B) \cdot \vec{a} \tag{1.8}$$

§ 1.4 Проекция вектора

Проецирование вектора можно проводить на оси или на плоскости.

Осью называется всякая прямая, на которой выделено одно из двух её направлений. Данное направление называется ***положительным***, противоположное направление называется ***отрицательным***.

Проекция точки М на ось *ОХ* есть точка M_x, которая является основанием перпендикуляра проведенного из точки *М* на ось *ОХ* (рис. 1.16).

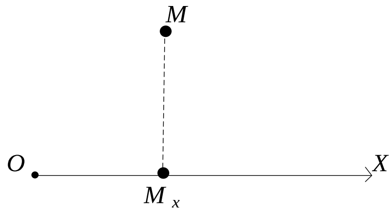


Рис. 1.16

Выражение «проекция вектора на ось» употребляется в двух разных смыслах: ***геометрическом и алгебраическом.***

Геометрической проекцией вектора $\vec{a}$ на ось *ОХ* называется вектор, начало которого есть проекция начала вектора $\vec{a}$ на ось *ОХ*, а конец - проекция конца вектора $\vec{a}$ на ту же ось*ОХ* (рис. 1.17). Геометрическая проекция вектора $\vec{a}$ на *ОХ* называется ***компонентой*** вектора $\vec{a}$ по оси *ОХ*, т.е. $\overrightarrow{a_x}$.

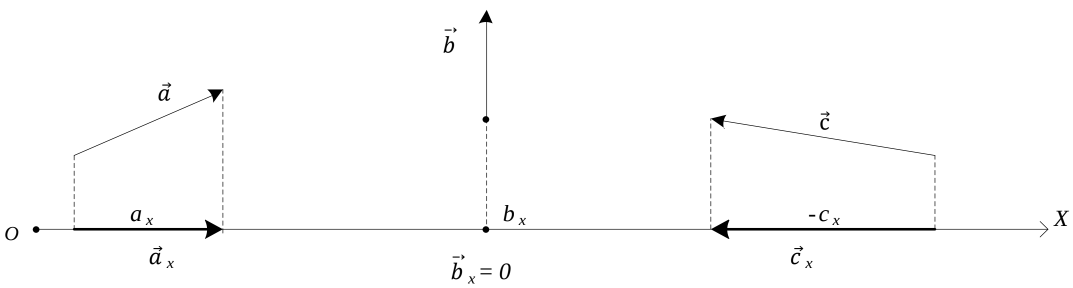


Рис. 1.17

Алгебраической проекцией вектора $\vec{a}$ на ось *ОХ* называется модуль вектора геометрической проекции вектора $\vec{a}$ на ось *ОХ* (компонента вектора $\vec{a}$ по оси *ОХ*), т.е. $|\vec{a}_x|$, взятая с положительным или отрицательным знаком в зависимости от того совпадает направление геометрической проекции с осью или противоположно ей, т.о. на рис. 1.17: $|\vec{a}_x| = a_x,\ a_x > 0$; $|\vec{b}_x| = b_x = 0$; $-|\vec{c}_x| = -c_x,\ c_x < 0$.

Теорема 1 о проекциях векторов: проекция суммы векторов на какую-либо ось равна сумме проекций слагаемых векторов на данную ось (рис. 1.18).

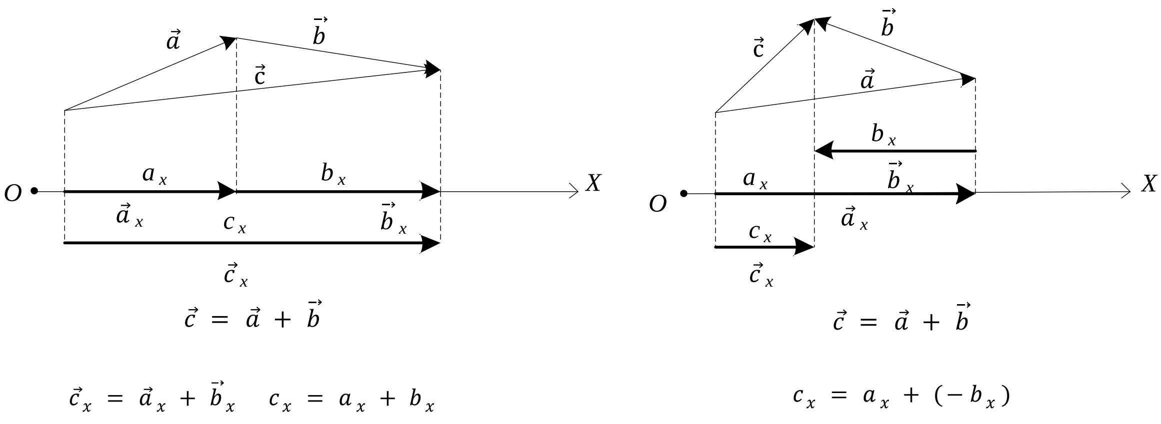


Рис. 1.18

Теорема 2 о проекциях векторов: алгебраическая проекция вектора на какую-либо ось равна произведению модуля вектора на косинус угла между положительным направлением оси *OX* и вектором:

$$a_x = a \cdot \cos(\vec{a}\,\hat{}\,\overrightarrow{OX}) \tag{1.9}$$

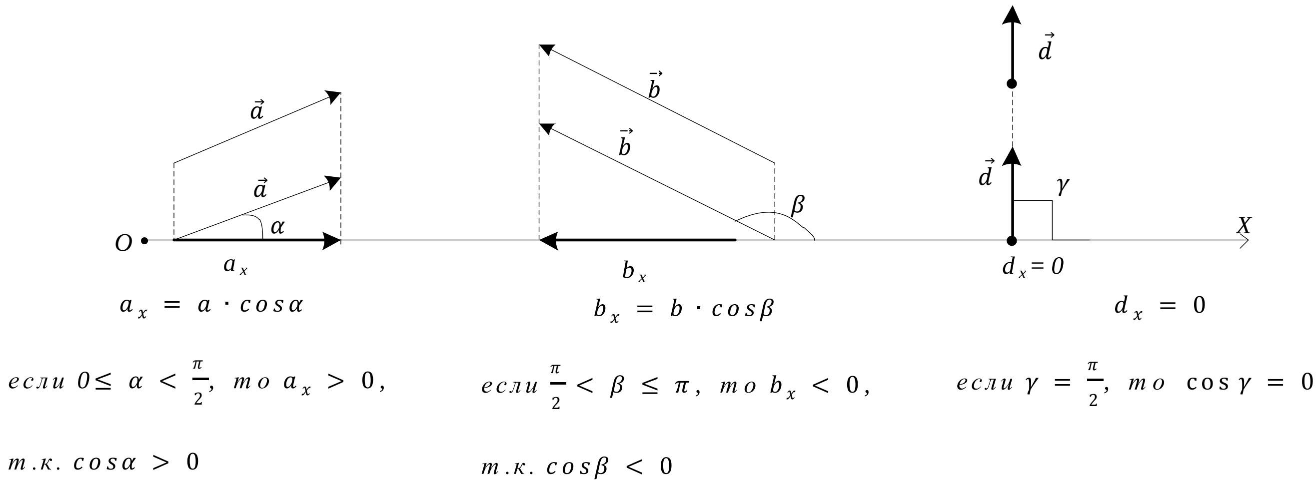


Рис. 1.19

При проецировании вектора в пространстве необходимо определить систему координат.

Системой координат называется совокупность (набор) параметров, полностью определяющих положение материальной точки (тела) в пространстве.

Системы координат бывают: *прямоугольная (декартова),сферическая (полярная), цилиндрическая* и др.

Прямоугольная (декартова) система координат – совокупность трех взаимно-перпендикулярных осей, проходящих через одну точку O (начало координат).

Декартова система координат является ***правой (правовинтовой)***, т.е. положительные направления осей выбираются так, что при вращении правого винта от оси OX к оси OY поступательное движение острия винта указывает на направление оси OZ.

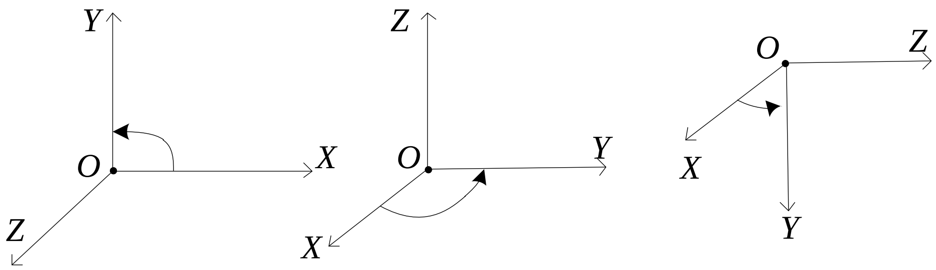
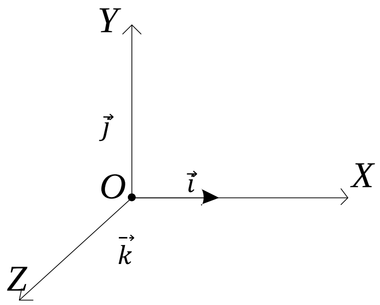


Рис. 1.20

Для масштаба по координатным осям вводятся ***единичные векторы (орты)*** осей $\vec{i}, \ \vec{j}, \overrightarrow{k}$.



$$i = j = k = 1$$

$$\vec{i} \perp \vec{j} \perp \vec{k}$$

Рис. 1.21

Любой вектор $\vec{a}$, спроецированный на оси декартовой системы координат, равен геометрической сумме его проекций (компонент) на координатные оси (рис. 1.22):

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y \tag{1.10}$$

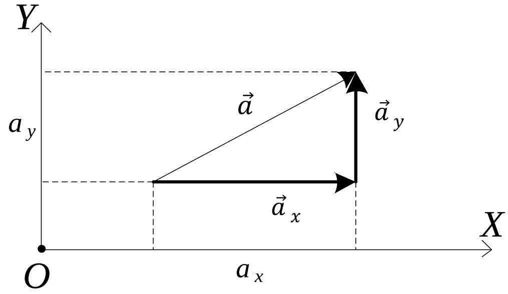


Рис. 1.22

Из рис.1.22 очевидно, что модуль вектора равен корню квадратному из суммы квадратов его алгебраических проекций:

$$|\vec{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \qquad (1.11)$$

<u>В физике</u> для определения положения материальной точки (тела) в пространстве используется *радиус-вектор* $\vec{r}$ (рис. 1.23), проводимый из начала координат в данную точку. Проекции конца радиус-вектора на координатные оси дают координаты, фиксируемой им точки:

$$\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} \qquad (1.12)$$

$$|r| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2} \qquad (1.13)$$

Для произвольного вектора:

$$\vec{a} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k} \qquad (1.14)$$

Модуль вектора будет равен:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \qquad (1.15)$$

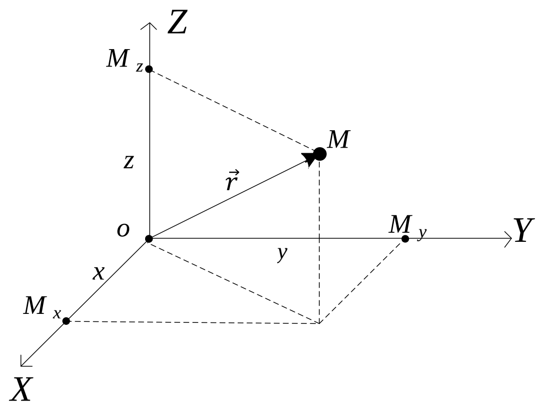


Рис. 1.23

§ 1.5 Скалярное и векторное произведения двух векторов

Скалярным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется произведение модулей этих векторов на косинус угла между ними. Обозначение действия скалярного произведения может быть в виде $(\vec{a},\vec{b})$ или $\vec{a}\cdot\vec{b}$. Результат скалярного произведения есть скалярная величина:

$$(\vec{a},\vec{b}) = ab\cos(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}) \tag{1.16}$$

Скалярное произведение двух векторов можно представить как произведение модуля одного из векторов и алгебраической проекции другого вектора на направления первого.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_b\cdot b = b_a\cdot a \tag{1.17}$$

где $a_b = a\cdot\cos(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b})$, $b_a = b\cdot\cos(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b})$.

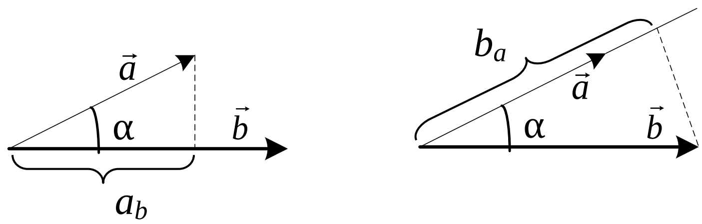


Рис. 1.24

Результат скалярного произведения зависит от значения, которое принимает косинус угла между векторами, т.е.

1) если $0 \le (\vec{a}\hat{}\vec{b}) < \frac{\pi}{2}$, то $\vec{a}\cdot\vec{b} > 0$ (результат произведения положительный);

2) если $\frac{\pi}{2} < (\vec{a}\hat{}\vec{b}) \le \pi$, то $\vec{a}\cdot\vec{b} < 0$ (результат произведения отрицательный);

3) если $(\vec{a}\hat{}\vec{b}) = \frac{\pi}{2}$, то $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$;

4) если $\vec{a}\cdot\vec{a} = a\cdot a\cos 0 = a^2$, имеем произведение вектора самого на себя, результатом которого является квадрат его модуля.

Скалярное произведение двух векторов представленных в декартовой системе координат можно записать в виде суммы произведений одноименных компонентов:

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \tag{1.18}$$

<u>Замечание:</u> скалярное произведение нельзя применить в случае трех сомножителей, т.к. скалярное произведение есть скаляр, если его умножить на вектор, то в результате получиться вектор:

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)\cdot\vec{d} = \vec{d}\cdot ab\cos(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}) = \vec{d}\cdot B = \vec{c} \tag{1.19}$$

где B – скаляр, результат умножения векторов $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$,

векторы $\vec{d}$ *и* $\vec{c}$ коллинеарные.

<u>В физике</u> результатом скалярного произведения вектора силы $\vec{F}$ на вектор перемещения $\Delta\vec{r}$, является численное значение *работы силы А*.

$$\left(\vec{F},\Delta\vec{r}\right) = F\Delta r\cos\alpha = \Delta r F_{\Delta r} = A \tag{1.20}$$

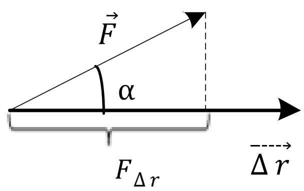


Рис. 1.25

Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на неколлинеарный с ним вектор $\vec{b}$ называется третий вектор $\vec{c}$, модуль которого определяется произведением модулей векторов $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ на синус угла между ними и числено, равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ (рис. 1.26):

$$\vec{c} = \left[\vec{a},\vec{b}\right] \tag{1.21}$$

$$c = a\cdot b\sin(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}) \tag{1.22}$$

Направление вектора $\vec{c}$ определяется ***<u>правилом правого винта:</u>*** если правый винт вращать от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ по пути их наикратчайшего совмещения, то направление поступательного движения острия винта укажет направление вектора $\vec{c}$, который является результатом векторного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Вектор $\vec{c}$ всегда перпендикулярен плоскости, в которой лежат вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

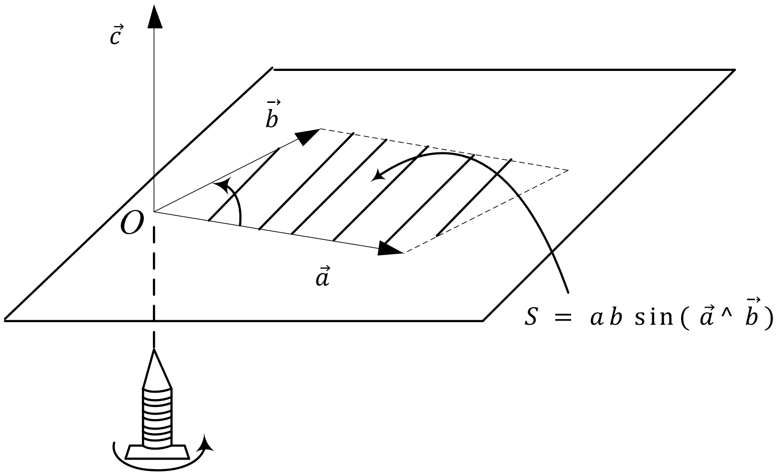


Рис. 1.26

Обозначение действия векторного произведения может быть в виде

$$[\vec{a}, \vec{b}] \quad \text{или} \quad \vec{a} \times \vec{b}$$

Свойства векторного произведения:

1) $[\vec{a}, \vec{a}] = 0,\ т.к.\ (\vec{a}\ \hat{}\ \vec{a}) = 0, то\ \sin(\vec{a}\ \hat{}\ \vec{a}) = 0;$

2) при перестановке сомножителей векторное произведение умножается на (-1), т.е. результат меняет знак на противоположный:

$[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$, т.о: если $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{c},\ то\ [\vec{b}, \vec{a}] = -\vec{c}$

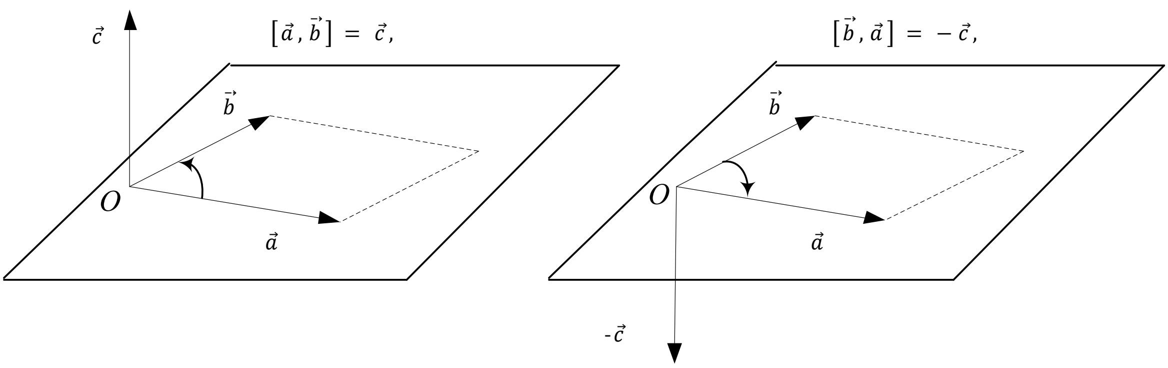


Рис. 1.27

В физике векторное произведение применяют для определения многих физических величин: момента силы, момента импульса, магнитного момента и др.

Например**,** *моментом силы* $\vec{M}$ относительно произвольной точки *O,* называется векторное произведение радиус-вектора $\vec{r}$, проведенного из произвольной точки O в точку приложения силы, на вектор действующей силы $\vec{F}$ (рис. 1.28):

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}] \tag{1.23}$$

Модуль вектора момента силы:

$$M = F \cdot r \sin\alpha = F \cdot l \tag{1.24}$$

где $l = r \sin\alpha$ – плечо силы.

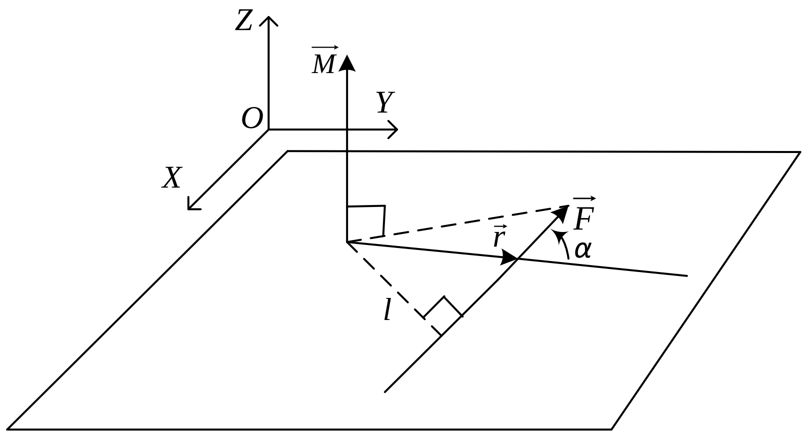


Рис. 1.28

Момент силы относительно какой-либо координатной оси M_z есть проекция вектора момента силы $\vec{M}$ относительно точки O (начала координат) на данную ось (рис. 1.29).

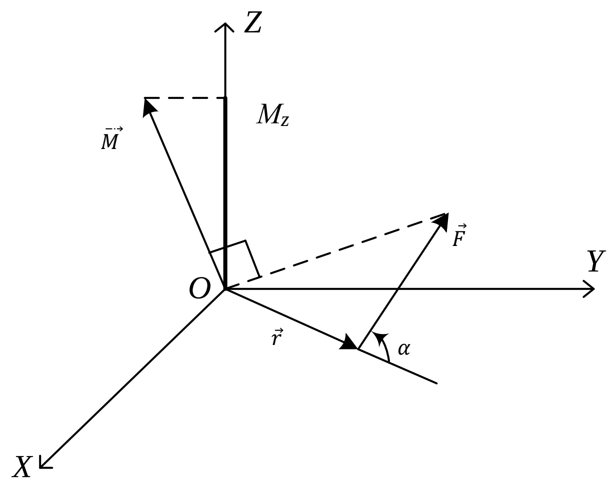


Рис. 1.29

Момент импульса, определяется как векторное произведение радиус-вектора и импульса материальной точки. Построение аналогично построению вектора момента силы.

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}] = [\vec{r}, m\vec{V}] \tag{1.25}$$

Задания для самостоятельной работы

1.1 Какие из указанных ниже величин являются векторными, а какие скалярными: масса, энергия, скорость, перемещение, сила, ускорение, момент инерции, момент импульса, площадь, объем, время, температура, работа, импульс, угловая скорость, напряжённость электрического поля?

1.2 Точки *A, B, C* и *D*–вершины параллелограмма, *O* – точка пересечения его диагоналей, *M* – середина стороны *AB*. Изобразите рисунок, и укажите пары точек, определяющие: один и тот же вектор; векторы одинаково направленные с $\overrightarrow{AD}$; противоположные векторы; векторы, противоположно направленные $\overrightarrow{AD}$.

1.3 Дан параллелограмм *ABCD*. Точка *M* лежит на стороне *CD*. Найти сумму векторов: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$; $\left(-\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{DM}\right)$; $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BM}$.

1.4 На материальную точку действуют две силы $\overrightarrow{F_1}$ и $\overrightarrow{F_2}$, направленные под углом α друг к другу. Построить вектор результирующей силы и найти ее модуль, если: $\vec{F}_1 = 3\,H,\ \overrightarrow{F_2} = 4\,H,\ \alpha = 90°$;$\vec{F}_1 = 3\,H,\ \overrightarrow{F_2} = 7\,H,\ \alpha = 30°$; $\vec{F}_1 = 11{,}7\,H, \overrightarrow{F_2} = 20{,}5\,H,\ \alpha = 35°$.

1.5 Величина равнодействующей двух взаимно перпендикулярных сил равна 10 Н. Найти модуль одной составляющей, если модуль другой равен 4 Н.

1.6 Груз массой *m=0,6* кг подвешен на нити и оттянут горизонтально оттяжкой. Найти модуль сил натяжения нити и оттяжки, если угол между нитью и оттяжкой α=*120*°.

1.7 Между двумя стенами висит на веревках фонарь массой *m=2,3* кг. Левая веревка образует со стеной угол α=*46*°, а правая угол β=*54*°. Найти натяжение обоих веревок.

1.8 Отложите от данной точки *O* три таких вектора, чтобы их сумма была равна $\vec{0}$.

1.9 Дан параллелограмм *ABCD*. Точка *O* – точка пересечения диагоналей. Назовите вектор, равный вектору: $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AO}$; $\overrightarrow{DO} - \overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{CO} - \overrightarrow{OB}$; $-\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{AB}$.

1.10 Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найти: $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{C_1B_1}$; $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{B_1A_1} + A\overrightarrow{D_1} + +\overrightarrow{D_1C_1}$; $\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{D_1A_1} - D\vec{B} + \overrightarrow{DD_1}$; $\overrightarrow{D_1C} + \overrightarrow{AA_1} - B\vec{C} - \overrightarrow{CC_1}$.

1.11 Найти модуль равнодействующей трех взаимно перпендикулярных сил, приложенных к одной точке, если: $\left|\overrightarrow{F_1}\right| = 2\,H,\ \left|\overrightarrow{\overrightarrow{F_2}}\right| = 3\,H,\ \left|\overrightarrow{F_3}\right| = 6\,H$; $\left|\overrightarrow{F_1}\right| = 3\,H,\ \left|\overrightarrow{\overrightarrow{F_2}}\right| = 6\,H,\ \left|\overrightarrow{F_3}\right| = 12\,H$.

1.12 Даны векторы $\vec{a}\ и\ \vec{b}$. Постройте векторы:

$3 \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{a}\right)$; $\frac{3}{2}\vec{a}$; $-\frac{3}{2}\vec{b}$; $\left(2 + +\frac{3}{2}\right)\vec{b}$; $2\vec{b} + \frac{3}{2}\vec{b}$; $-2(\vec{a} + \vec{b})$; $-2\vec{a} - 2\vec{b}$; $2(\vec{a} - \vec{b}) + 3\vec{b} - \vec{a}$; $\frac{3}{4}(\vec{a} + 2\vec{b}) - \frac{1}{4}(\vec{a} - 2\vec{b})$.

1.13 Даны векторы $\vec{a}$ и $C\vec{a}$. При каких значениях C эти векторы: равны;; противоположно направлены; коллинеарны? Найти модуль суммы векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{a}| = 11$, $|\vec{b}| = 23$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 30$.

1.14 Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол 120°. Зная модули $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 5$ вычислить: $(\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b})$; $(2\vec{a} + \vec{b})^2$; $|\vec{a} - 2\vec{b}|$; $|\vec{a} + 2\vec{b}|$; $|\vec{b} - 3\vec{a}|$; $(2\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b})$.

1.15 Единичные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол α. Найти значение угла, если векторы $\vec{a} + 2\vec{b}$ и $5\vec{a} - 4\vec{b}$ перпендикулярны.

1.16 Рассчитать работу силы, приложенной к телу под углом 30°, при его перемещении на 20 м. Модуль силы равен 4,2 кН.

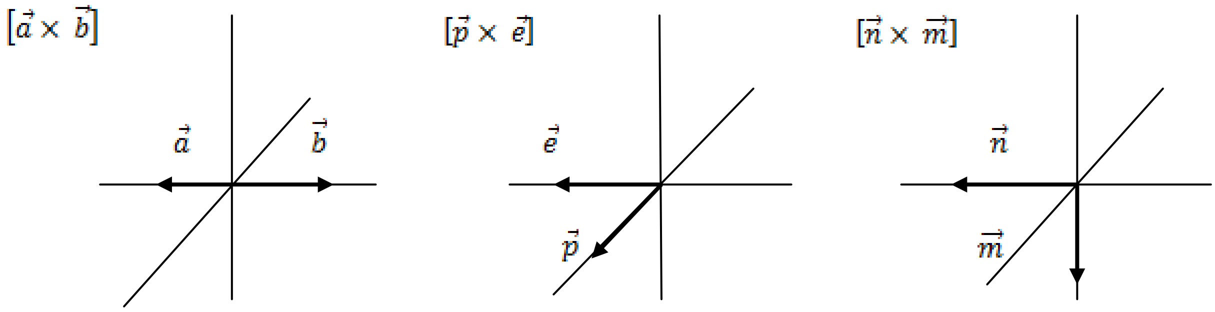
1.17 Найти скалярное произведение векторов, которые образуют угол 60°, если модули векторов имеют значения: $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$.

1.18 Под каким углом должна быть направлена сила F=20 Н, чтобы совершенная работа была равна 30 Дж при перемещении на 3 м.

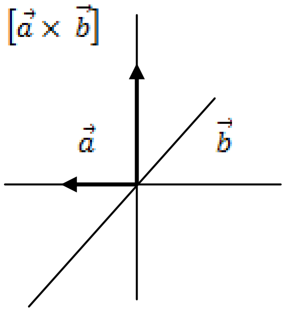
1.19 Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол α. Найти значение угла, если векторы заданы в виде уравнений: $\vec{a} = 0{,}2\vec{\imath} + 5\vec{\jmath} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{\imath} + 2{,}5\vec{\jmath}$.

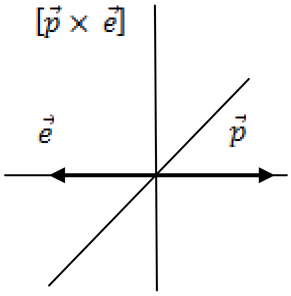
1.20 Материальная точка движется по окружности радиусом 20 см с линейной скоростью 20 м/с. Определить момент импульса материальной точки (модуль и направление), если ее масса 0,2 кг.

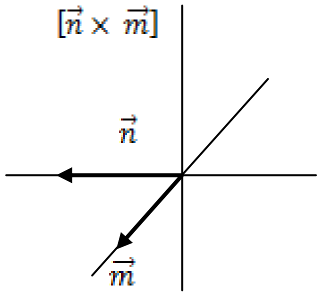
1.21 Для каждой пары векторов, лежащих на координатных осях, определить направление вектора, являющегося результатом векторного произведения заданных векторов.



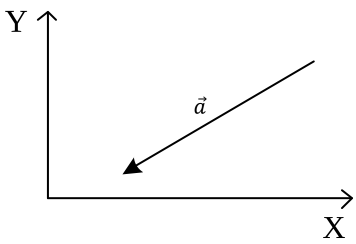
1.22 Для каждой пары векторов, лежащих на координатных осях, определить направление вектора, являющегося результатом векторного произведения заданных векторов.

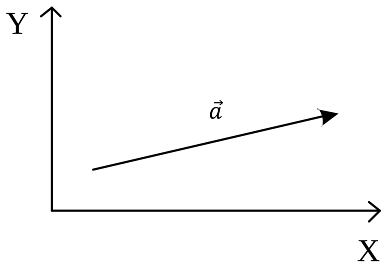






1.23 Найти геометрические проекции заданного вектора на координатные оси. Сделать чертеж. Записать выражения, позволяющее определить величину и знак алгебраической проекции вектора на каждую из координатных осей.





Глава II. ОСНОВЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

§ 2.1 Вводные замечания

Источником дифференциального исчисления были два вопроса:

1) о разыскании касательной к произвольной линии;
2) о разыскании скорости при произвольном законе движения.

Оба они привели к одной и той же вычислительной задаче, которая и легла в основу дифференциального исчисления. Эта задача состоит в том, чтобы по данной функции $f(t)$ отыскать другую функцию $f\,'(t)$, получившую позднее название *производной* и представляющую скорость изменения функции $f(t)$ относительно изменения ее аргумента t. В таком общем виде задача была поставлена Ньютоном и в сходной форме Лейбницем в 70-х и 80-х годах 17-го века. Но еще в предшествующие полвека Ферма, Паскаль и другие ученые фактически дали правила для разыскания производных многих функций.

Ньютон и Лейбниц завершили это развитие; они ввели общее понятие производной и дифференциала, а также обозначения, очень облегчившие вычисления; они развили аппарат дифференциального исчисления до максимальных пределов и применили дифференциальное исчисление к решению многих задач геометрии и механики. Некоторые недостатки в логической строгости были устранены в 19-ом веке усилиями крупнейших ученых, таких как Коши, Н.И. Лобачевский, Абель, Риман и др.

§ 2.2 Предел функции. Понятие о бесконечно малых и бесконечно больших величинах

Число b называется ***пределом функции*** $\boldsymbol{f(x)}$ при $x \to a$ (читается: «при *x*, стремящемся к *a*»), если по мере того, как значение *x* приближается к *a* (справа или слева) – значение функции неограниченно приближается («стремится») к b.

Символическая запись: $$\lim_{x \to a} f(x) = b \qquad (2.1)$$

<u>Замечание</u>. Пределом постоянной величины b называется сама величина b.

Бесконечно малой величиной называется переменная величина, предел которой равен нулю.

Утверждение «число b есть предел величины y» и «разность $y – b$ есть бесконечно малая величина» равнозначны.

Замечание. *Из постоянных величин лишь нуль является бесконечно малой величиной.*

Бесконечно большой величиной называется переменная величина, абсолютное значение которой неограниченно возрастает.

Замечание. *Никакая постоянная величина не является бесконечно большой.*

Связь между бесконечно большими и бесконечно малыми величинами: если y – бесконечно большая величина, то $\frac{1}{y}$ – бесконечно малая; если y – бесконечно малая величина, то $\frac{1}{y}$ – бесконечно большая.

§ 2.3 Приращение переменной величины и приращение функции

Приращением переменной величины x называется разность значений, которые принимает x, т.е. если сначала $x=x_1$, затем $x=x_2$, то приращение

$$\Delta x = x_2 - x_1. \qquad (2.2)$$

Приращение обозначается буквой греческого алфавита Δ, запись Δx читается «дельта икс».

Приращение может быть положительным, отрицательным и равным нулю, согласно (2.2): если $x_1 < x_2$, то $\Delta x>0$; если $x_1 > x_2$, то $\Delta x<0$; если $x_1 = x_2$, то $\Delta x=0$.

Замечание. *Приращение постоянной величины равно нулю.*

Если x является аргументом функции $f(x)$, то разность $f(x_2) - f(x_1)$ называется ***приращением функции f(x)***:

$$\Delta f(x) = f(x_2) - f(x_1) = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1) \qquad (2.3)$$

Выбор x_1 является произвольным, поэтому приращение функции можно представить в виде:

$$\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x) \qquad (2.4)$$

Пример 2.1

Начальное значение аргумента x=3, приращение аргумента Δx=–2. Найти соответствующее приращение Δy функции $y=x^2$.

Решение. Так как x_1=3, и затем x_2-x_1=–2, то x_2=1. Функции $y=x^2$ принимает сначала значения $y_1=3^2=9$, а затем $y_2=1^2=1$. Приращение функции есть $\Delta y=y_2-y_1=1-9=-8$.

Понятие приращения справедливо и для векторных величин, например, ***приращение радиус-вектора*** равно разности радиус-векторов $\vec{r}_2 = \vec{r}(t_2)$ и $\vec{r}_1 = \vec{r}(t_1)$, определяющих положение точки в пространстве в моменты времени t_2 и t_1 (рис.2.1), т.е :

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1) = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \qquad (2.5)$$

Приращение радиус-вектора $\Delta\vec{r}$ называют ***вектором перемещения точки***. Вектор перемещения показывает, на какое расстояние и в какую сторону смещается точка при движении. Этот вектор характеризует конечный результат любого перемещения. Длина вектора перемещения определяет кратчайшее расстояние между начальным (в момент времени t_1) и конечным (в момент времени t_2) положением точки. Из чертежа на рис.2.1 очевидно, что ***модуль вектора перемещения (модуль приращения радиус-вектора)***

$$|\Delta\vec{r}| = \sqrt{\Delta r_x^2 + \Delta r_y^2} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2} \qquad (2.6)$$

где Δr_x^2 и Δr_y^2 – проекции вектора перемещения на координатные оси OX и OY соответственно.

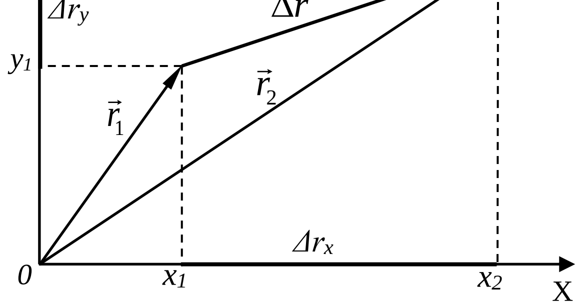


Рис. 2.1

Как и любой другой вектор, радиус-вектор $\vec{r}$ кроме направления, характеризуется еще и модулем $|\vec{r}|$. При изменении положения материальной точки в пространстве изменяется не только направление радиус-вектора, но и его модуль (сравните на рис. 2.1 $|\vec{r}_2|$ и $|\vec{r}_1|$).

Приращение (изменение) модуля радиус-вектора $\vec{r}$ (обозначается $\Delta|\vec{\mathrm{r}}|$) определяется разностью модулей векторов $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$, т.е.:

$$\Delta|\vec{\mathrm{r}}| = |\vec{r}_2| - |\vec{r}_1| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2} - \sqrt{x_1^2 + y_1^2}\ . \qquad (2.7)$$

В общем случае $|\Delta\vec{r}| \neq \Delta|\vec{\mathrm{r}}|$, т.е. модуль приращения вектора не равен приращению модуля вектора (сравните (2.6) и (2.7)).

Замечание. Полученные результаты (2.6) и (2.7) можно обобщить на трехмерный случай, когда движущаяся в пространстве точка имеет три степени свободы (т.е. ее положение в пространстве задается тремя координатами):

$$|\Delta\vec{r}| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}, \qquad (2.6а)$$

$$\Delta|\vec{\mathrm{r}}| = |\vec{r}_2| - |\vec{r}_1| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} - \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\,. \qquad (2.7а)$$

Пример 2.2

Тело перемещается из точки с координатами $x_1=1$, $y_1=4$ в точку $x_2=5$, $y_2=1$. Найти модуль вектора перемещения и приращение модуля вектора перемещения.

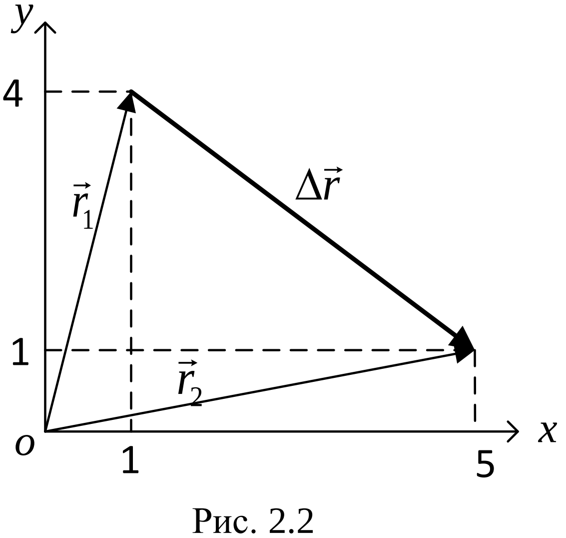


Рис. 2.2

Решение. Изобразим начальное и конечное положение тела на координатной плоскости (рис.2.2). Положение тела в заданные моменты времени определяется радиус-векторами: $\overrightarrow{r_1} = \vec{i} + 4\vec{j}$ и $\overrightarrow{r_2} = 5\vec{i} + \vec{j}$.

Перемещением является разность векторов $\overrightarrow{r_1}$ и $\overrightarrow{r_2}$:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2\vec{i} + y_2\vec{j}) - (x_1\vec{i} + y_1\vec{j}) = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} =$$

$$= (5 - 1)\vec{i} + (1 - 4)\vec{j} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$$

Модуль вектора перемещения:

$$|\Delta\vec{r}| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$$

где $\Delta x = x_2 - x_1 = 5 - 1 = 4,\ \Delta y = y_2 - y_1 = 1 - 4 = -3$

Приращение модуля вектора перемещения:

$$\Delta|\overrightarrow{r}| = r_2 - r_1 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2} - \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{5^2 + 1^2} - \sqrt{1^2 + 4^2} \approx 1$$

Пример 2.3

Начальное положение материальной точки задается радиус-вектором $\overrightarrow{r_1} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 12\vec{k}$, конечное положение – радиус-вектором $\overrightarrow{r_2} = -\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$. Найти: приращение радиус-вектора $\Delta\vec{r}$, модуль приращения $|\Delta\vec{r}|$, приращение модуля $\Delta|\vec{r}|$.

Решение. Приращение радиус-вектора

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \left(-\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}\right) - \left(\overrightarrow{4i} - 3\vec{j} + 12\vec{k}\right) =$$

$$= (-1 - 4)\vec{i} + (-2 + 3)\vec{j} + (2 - 12)\vec{k} = -5\vec{i} + \vec{j} - 10\vec{k}$$

Модуль приращения радиус-вектора

$$|\Delta\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(-5)^2 + 1^2 + (-10)^2} \approx 11{,}23$$

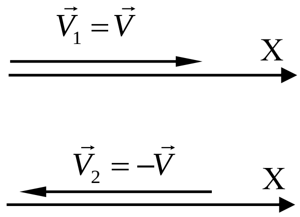
Приращение модуля радиус-вектора

$$\Delta|\vec{r}| = |\vec{r}_2| - |\vec{r}_1| = \sqrt{(-1)^2 + (-2^2) + 2^2} - \sqrt{4^2 + (-3)^2 + 12^2} =$$

$$= 3 - 13 = -10$$

Пример 2.4

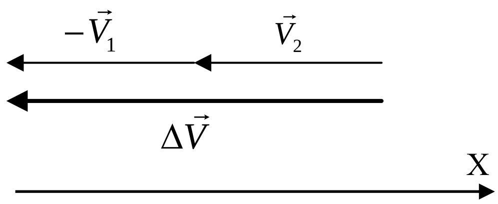
Вектор скорости изменил направление на противоположное. Найти: приращение вектора $\Delta\vec{V}$; модуль приращения вектора скорости $\left|\Delta\vec{V}\right|$; приращение модуля $\Delta\left|\vec{V}\right|$.



Решение. Пусть в момент времени t_1 вектор $\vec{V}$ имеет направление вдоль положительного оси X, а в момент времени t_2 вектор $\vec{V}$ имеет противоположное направление.

Приращение вектора скорости:

$$\Delta\vec{V} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1 \quad \text{или} \quad \Delta\vec{V} = \vec{V}_2 + \left(-\vec{V}_1\right) = -\vec{V} + \left(-\vec{V}\right) = -2\vec{V}$$



Приращение модуля вектора скорости (длина вектора $\Delta\vec{V}$ в единицах скорости). Согласно чертежу $\left|\Delta\vec{V}\right| = 2V_1 = 2V$, (т.к. $V_1 = V_2 = V$).

Приращение модуля скорости есть разность длин векторов $\vec{V}_1$ и $\vec{V}_2$, т.е. $\Delta\left|\vec{V}\right| = V_2 - V_1 = V - V = 0$.

§ 2.4 Производная функции

Пусть $y=f(x)$ есть непрерывная функция аргумента x. Если придать аргументу x приращение Δx, функция $y=f(x)$ получит приращение Δy, равное

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$

При бесконечно малом Δx приращение Δy тоже бесконечно мало.

Предел, к которому стремиться отношение бесконечно малого приращения функции к соответствующему бесконечно малому приращению аргумента сам является функцией от аргумента x. Эта функция называется ***производной функции f(x)*** (обозначатся $f'(x)$ или y'):

$$y' \equiv f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (2.8)$$

Процесс нахождение производной называется ***дифференцированием.***

Физический смысл производной

Функция $f'(x)$ представляет собой ***скорость изменения*** функции $f(x)$ относительно аргумента *x*.

Пример 2.5

Вектор перемещения показывает, на какое расстояние и в какую сторону смещается точка при движении. Как быстро происходит такое перемещение, показывает вектор средней скорости:

$$\vec{V}_{\text{ср}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

Его модуль показывает, как быстро в среднем перемещается точка, а направление определяет, в какую сторону в среднем происходит перемещение.

При неравномерном движении средняя скорость недостаточно характеризует быстроту движения в момент времени *t*. Но чем меньше Δ*t,* тем точнее характеризуется эта быстрота. Поэтому *скорость в момент времени t* можно представить как предел, к которому стремиться отношение $\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ при Δ*t→0*.

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad (2.9)$$

Данный предел определяет значение вектора ***мгновенной скорости (*** т.е. скорости в данный момент времени).

При Δ*t→0* модуль вектора перемещения равен длине пройденного пути $|\Delta \vec{r}| = \Delta S$, т.к. бесконечно малый участок криволинейной траектории можно считать прямолинейным отрезком, длина которого равна модулю вектора перемещения.

Т.о модуль мгновенной скорости есть производная пути по времени:

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = S'(t) \quad (2.10)$$

где $S = S(t)$ – пройденный путь, есть функция времени.

Если в процессе прямолинейного движения скорость меняется (т.е. V= $f(t)$), то величина показывающая скорость изменения скорости есть векторная величина – ***ускорение***, модуль которого определяется, как производная скорости по времени:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = V'(t) \tag{2.11}$$

Геометрический смысл производной

Геометрически производная $f'(x)$ функции $y = f(x)$ представляет собой ***угловой коэффициент*** касательной к графику этой функции в точке с определенным значением x.

<u>Доказательство</u>. Пусть на графике произвольной функции $y = f(x)$ (рис. 2.3) точке M соответствует значение аргумента x и функции $y(x)$, точке N – значении аргумента $x + \Delta x$ и функции $y(x + \Delta x)$=$y(x)$+Δy. Угловой коэффициент прямой MN равен тангенсу угла β

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\beta \tag{2.12}$$

Угловой коэффициент касательной к графику функции в точке M равен тангенсу угла α. При $\Delta x \to 0$ $\beta \to \alpha$, т.е.:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\beta \to \alpha} tg\,\beta = tg\alpha$$

$$\text{т.к.} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x), \quad \text{то} \Rightarrow \qquad \boxed{f'(x) = tg\alpha} \tag{2.13}$$

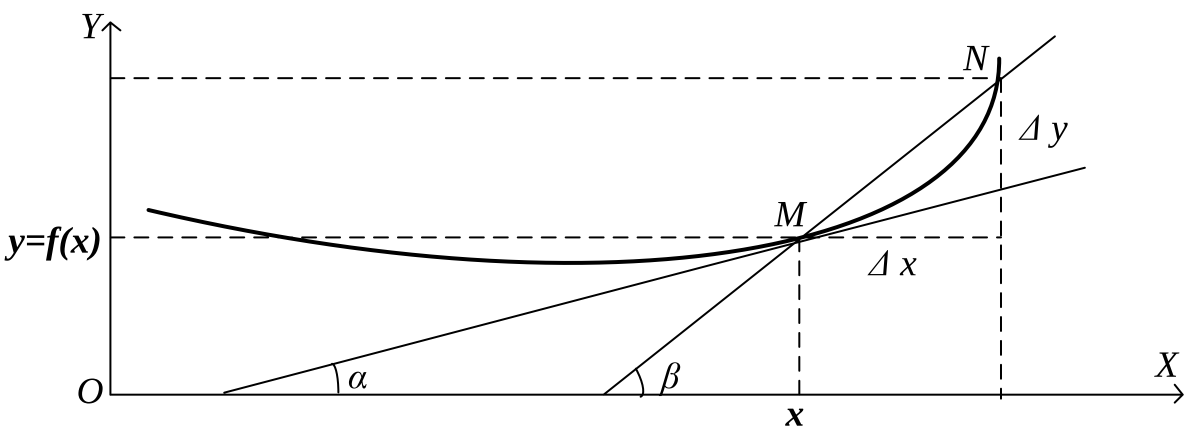


Рис. 2.3

§ 2.5 Выражение производной через дифференциал

Кроме обозначения производной в виде $f'(x)$, введенной в § 2.4 используются и другие обозначения производной. Например, для функции $y = f(x)$ применимы условные обозначения производной вида:

$$f'(x) \equiv \dot{f}(x) \quad \text{или} \quad y' \equiv \dot{y} \tag{2.14}$$

$$f'(x) \equiv \frac{df(x)}{dx} \quad \text{или} \quad y' \equiv \frac{dy}{dx} \tag{2.15}$$

здесь символ *dx* означает не произведение двух величин d и x, а бесконечно малое приращение переменной величины x (читается: «дэ икс»). Аналогично символ *df(x)* означает бесконечно малое приращение функции (читается: «дэ эф от икс»). Выражение (2.15) читается: «дэ эф от икс по дэ икс» или «дэ игрек по дэ икс».

Употребляются так же условные записи

$$f'(x) \equiv \frac{d}{dx} f(x) \, , \tag{2.16}$$

особенно удобные, когда берется производная от сложного выражения, например: $\frac{d}{dx}(3x^2 + 2x - 1)$.

В физических задачах по кинематике, согласно определению (2.10) скорость может быть обозначена

$$V = S'(t) = \frac{dS}{dt}, \tag{2.17}$$

а ускорение тела, согласно (2.11) обозначается через производную скорости

$$a = V'(t) = \frac{dV}{dt}. \tag{2.18}$$

В математике и физике существуют некоторые различия в толковании смысла обозначений dx, dt, dS, $d\vec{r}$, и др.

Согласно <u>математическому определению</u>: ***дифференциал функции*** равен произведению производной на приращение (дифференциал) аргумента, т.е.

$dS = S' \cdot dt = S' \cdot \Delta t$ или $d\vec{r} = \overrightarrow{r'} \cdot dt = \overrightarrow{r'} \cdot \Delta t$, где S' и $\overrightarrow{r'}$ - производные по переменной t от функций $S(t)$ и $\vec{r}(t)$.

Т.о. согласно данному определению, ***дифференциал независимой переменной*** равен ее приращению, т.е. <u>$dt = \Delta t$</u>; а dS – дифференциал функции, представляет собой ***линейную часть приращения*** этой функции <u>*при произвольном*</u> изменении аргумента от *t* до *t+Δt.*

Согласно геометрическому толкованию производной (рис. 2.3): $y'(x) = \frac{dy}{dx} = tg\alpha$, но <u>*при произвольном*</u> приращении аргумента Δx (рис. 2.4) приращение функции $\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x)$ может существенно отличаться от дифференциала dy, т.е. $dy < \Delta y$. Из рис.2.4. очевидно, что дифференциал функции dy – есть приращение ординаты касательной, т.е. линейная часть приращения Δy.

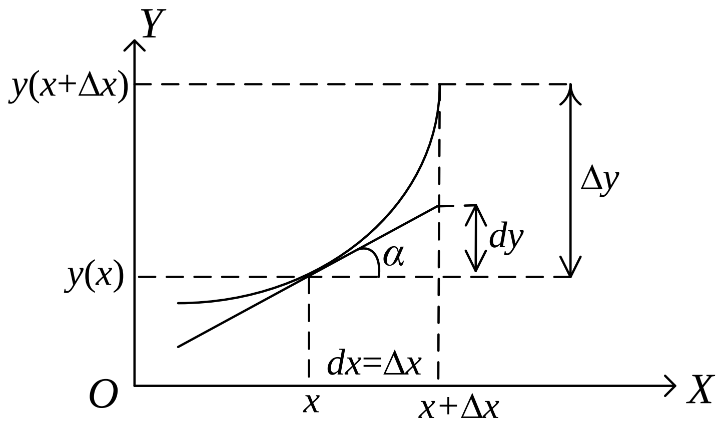


Рис. 2.4

<u>В физике</u> различают дифференциал аргумента *dx* и произвольное (конечное) приращение аргумента Δx, т.е. $\boxed{\Delta x \neq dx.}$

Под ***дифференциалом аргумента dx*** понимают ***столь малое его приращение*** (***элементарное приращение***), что бы можно было пренебречь разностью между соответствующими приращениями функции и линейной частью ее приращения, т.е. $\Delta y \to dy$ при $\Delta x \to dx$.

Поэтому в физике, используя предложенное Г. Лейбницем обозначение производной $y' \equiv \frac{dy}{dx}$, $S' \equiv \frac{dS}{dt}$, $\vec{r}\,' = \frac{d\vec{r}}{dt}$, и трактуют его, как отношение не математических дифференциалов функции и аргумента, а как отношение бесконечно малых (элементарных) приращений функции и аргумента: dx – элементарное (бесконечно малое) изменение координаты, dt – элементарный (бесконечно малый) промежуток времени, dS – элементарный (бесконечно малый) путь за элементарный промежуток времени dt, $d\vec{r}$ - элементарное (бесконечно малое) перемещение за элементарный промежуток времени dt, причем $|d\vec{r}| = dS$.

§ 2.6 Производные высших порядков

В некоторых случаях необходимо определить производную более высшего порядка (второго, третьего и т.д.).

Если y' есть производная функции $f(x)=y$, то производная от y' называется ***второй производной*** или производной ***второго порядка*** от первоначальной функции $f(x)=y$, и обозначается: $y'' \equiv f''(x) \equiv \ddot{f}(x) \equiv \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$ (читается: «дэ два эф от икс по дэ икс дважды»).

Аналогично обозначаются производные любого порядка:

третьего порядка: $(y'')' = y''' = f'''(x) = \dddot{f}(x) = \frac{d^3 f(x)}{dx^3}$,

n-го порядка: $(y^{n-1})' = y^n = f^{(n)}(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n}$.

Для нахождения производной какого-либо высшего порядка данной функции приходится последовательно находить все производные низших порядков.

Физический смысл второй производной

Как было показано в § 2.4, величина показывающая скорость изменения скорости есть ***ускорение***, модуль которой определяется как производная от модуля мгновенной скорости по времени $a = \frac{dV}{dt}$. Но сама скорость V есть производная от пути по времени $V = \dfrac{dS}{dt}$. Поэтому ускорение есть вторая производная пути по времени, т.е $a = \dfrac{d^2V}{dt^2}$.

§ 2.7 Правила нахождения производных простейших функций и свойства производной

Понятие производной широко применяется для решения разнообразных задач. Однако, использование выражений (2.8) и (2.13) предполагают достаточно трудоемкий алгоритм нахождения производной. Практически производные элементарных функций находятся по формулам дифференцирования. Более сложные функции предварительно подвергают тождественным преобразованиям, для приведения их к виду удобному для дифференцирования.

1) Производная постоянной величины равна нулю:

$$(c)'=0 \quad \text{или} \quad \frac{dc}{dx} = 0 \quad \text{где } c=const \qquad (2.19)$$

Данное свойство просто объясняется на основании геометрического смысла: угловой коэффициент прямой $y=c$ равен нулю, т.к. угол наклона касательной к оси ОХ равен нулю (рис.2.5).

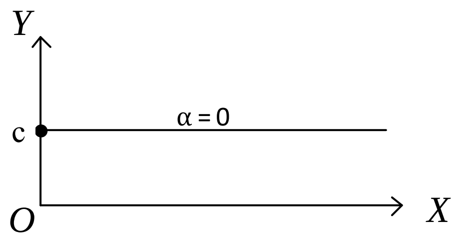


Рис. 2.5

2) Производная независимой переменной равна единице:

$$(x)'=1 \quad \text{или} \quad \frac{dx}{dx} = 1, \qquad (2.20)$$

где x – независимая переменная.

На основании геометрический смысла производной: угловой коэффициент прямой $y=x$ равен единице, т.к. $tg45°=1$ (рис.2.6).

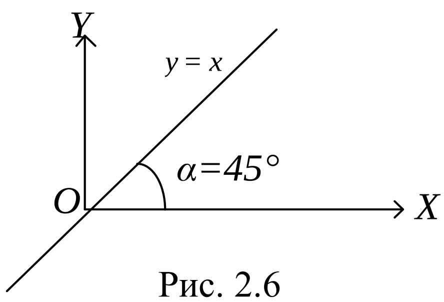


Рис. 2.6

3) Производная степенной функции:

$$(x^n)'=n\cdot x^{n-1} \quad \text{или} \quad \frac{dx^n}{dx}=n\cdot x^{n-1} \tag{2.21}$$

4) Производная суммы нескольких функций равна сумме производных этих функций:

$$(f_1(x)+f_2(x)-f_3(x))'=f_1{}'(x)+f_2{}'(x)-f_3{}'(x)$$

$$\text{или} \quad \frac{d}{dx}\big(f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)\big)=\frac{df_1(x)}{dx}+\frac{df_2(x)}{dx}+\frac{df_3(x)}{dx} \quad . \tag{2.22}$$

5) Постоянный множитель выноситься за знак производной:

$$\big(c\cdot f(x)\big)'=c\cdot f'(x) \quad \text{или} \quad \frac{d}{dx}\big(c\cdot f(x)\big)=c\cdot\frac{df(x)}{dx}, \tag{2.23}$$

где $c=const.$

6) Производные тригонометрических функций:

$$(\sin\alpha)'=\cos\alpha \quad \text{или} \quad \frac{d\,(\sin\alpha)}{d\alpha}=\cos\alpha \tag{2.24}$$

$$(\cos\alpha)'=-\sin\alpha \quad \text{или} \quad \frac{d\,(\cos\alpha)}{d\alpha}=-\sin\alpha \tag{2.25}$$

$$(tg\alpha)'=\frac{1}{\cos^2\alpha} \quad \text{или} \quad \frac{d\,(tg\alpha)}{d\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha} \tag{2.26}$$

$$(ctg\alpha)'=-\frac{1}{\sin^2\alpha} \quad \text{или} \quad \frac{d\,(ctg\alpha)}{d\alpha}=-\frac{1}{\sin^2\alpha} \tag{2.27}$$

7) Производная логарифмической функции:

$$(\ln x)'=\frac{1}{x} \quad \text{или} \quad \frac{d(\ln x)}{dx}=\frac{1}{x} \tag{2.28}$$

8) Производная показательной функции:

$$(a^x)'=a^x\ln a \quad \text{или} \quad \frac{d(a^x)}{dx}=a^x\ln a, \tag{2.29}$$

где $a=const.$

Производная экспоненциальной функции (частный случай показательной функции):

$$(e^x)'=e^x \quad \text{или} \quad \frac{d(e^x)}{dx}=e^x \tag{2.29 а}$$

9) Производная произведения двух функций равна сумме произведений каждой из функций на производную другой функции:

$$\left(f(x)\cdot\varphi(x)\right)' = f(x)\cdot\varphi'(x) + f'(x)\cdot\varphi(x)$$

или $$\frac{d}{dx}(f(x)\cdot\varphi(x)) = f(x)\cdot\frac{d\varphi(x)}{dx} + \varphi(x)\cdot\frac{df(x)}{dx} \qquad (2.30)$$

10) Производная отношения функций равна произведению знаменателя на производную числителя минус произведение числителя на производную знаменателя, и деленное все на квадрат знаменателя:

$$\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right)' = \frac{\varphi(x)\cdot f'(x) - f(x)\cdot\varphi'(x)}{\left(\varphi(x)\right)^2}$$

или $$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right) = \frac{\varphi(x)\cdot\frac{df(x)}{dx} - f(x)\cdot\frac{d\varphi(x)}{dx}}{\left(\varphi(x)\right)^2} \qquad (2.31)$$

Замечание. Отношение двух функций можно представить как произведение функции стоящей в числителе на функцию в минус первой степени знаменателя, тогда разыскание производной следует производить, применяя формулы (2.30), (2.21):

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right) = \frac{d}{dx}\left(f(x)\cdot\varphi^{-1}(x)\right) \qquad (2.31a)$$

11) Если $y=f(u)$, где $u=\varphi(x)$, т.е. если y зависит от x через посредство промежуточного аргумента u, то y называется ***сложной функцией*** от x. Производная сложной функции равна произведению ее производной по промежуточному аргументу на производную этого аргумента по независимой переменной:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} \qquad \text{или} \qquad y' = f'(u)\cdot u'(x) \qquad (2.32)$$

12) О знаке производной:

- если производная какой-либо функции $f'(x) > 0$, то функция является возрастающей, т.е. с ростом x, растет $f(x)$;
- если производная функции $f'(x) < 0$, то функция является убывающей, т.е. при возрастании x, функция $f(x)$ убывает;

– если производная функции $f'(x) = 0$, то функция имеет экстремум (значения max и min) при заданном значении x.

Примеры вычисления производных

1. Дана функция f=$3x^2$. Найти: $\frac{df}{dx}$ и $\frac{d^2f}{dx^2}$

Решение. Определяем первую производную используя правила 5) и 3):

$$\frac{df}{dx} = \frac{d(3x^2)}{dx} = 3\frac{dx^2}{dx} = 6x$$

Определяем вторую производную используя правила 5) и 2):

$$\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d^2(3x^2)}{dx^2} = \frac{d(6x)}{dx} = 6\frac{dx}{dx} = 6$$

2. Дана функция $f = \frac{5}{x^2}$. Найти: $\frac{df}{dx}$ и $\frac{d^2f}{dx^2}$

Решение. Определяем первую производную используя правила 5) и 3):

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{5}{x^2}\right) = 5\frac{dx^{-2}}{dx} = 5(-2)x^{-3} = -10\frac{1}{x^3}$$

Определяем вторую производную используя те же правила:

$$\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{5}{x^2}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{-10}{x^3}\right) = -10\frac{dx^{-3}}{dx} = -10\cdot(-3)x^{-4} = 30\frac{1}{x^4}$$

3. Дана функция $f = \sqrt{2x}$. Найти: $\frac{df}{dx}$ и $\frac{d^2f}{dx^2}$.

Решение. Определяем первую производную, используя правила 5) и 3):

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\sqrt{2x}\right) = \sqrt{2}\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}}\right) = \sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{2x}}$$

Определяем вторую производную, используя те же правила:

$$\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2}\left(\sqrt{2x}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{2x}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{d}{dx}\left(x^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

4. Дана функция $\mathrm{f} = 0{,}3\mathrm{t}^2 - 2\mathrm{t} + 0{,}8$. Найти: $\frac{df}{dt}$ и $\frac{d^2f}{dt^2}$.

Решение. Определяем первую производную, используя правила 4), 5), 3), 2), 1):

$$\frac{df}{dt}=\frac{d}{dt}(0{,}3t^2-2t+0{,}8)=\frac{d(0{,}3t^2)}{dt}-\frac{d(2t)}{dt}+\frac{d(0{,}8)}{dt}=0{,}3\frac{dt^2}{dt}-2\frac{dt}{dt}+0=$$
$$=0{,}3\cdot 2t-2=0{,}6t-2$$

Определяем вторую производную, используя правила 4), 5), 2), 1):

$$\frac{d^2f}{dt^2}=\frac{d^2}{dt^2}(0{,}3t^2-2t+0{,}8)=\frac{d}{dt}(0{,}6t-2)=0{,}6\frac{dt}{dt}-\frac{d}{dt}(2)=0{,}6$$

5. Дана функция $\mathrm{f}=\frac{3}{\mathrm{y}^2}-6\sqrt{\mathrm{y}}$. Найти: $\frac{df}{dy}$ и $\frac{d^2f}{dy^2}$

Решение. Определяем первую производную, используя правила 4), 5), 3):

$$\frac{df}{dy}=\frac{d}{dy}\left(\frac{3}{y^2}-6\sqrt{y}\right)=\frac{d}{dy}\left(\frac{3}{y^2}\right)-\frac{d}{dy}\left(6\sqrt{y}\right)=3\frac{d(y^{-2})}{dy}-6\frac{d}{dy}(y^{\frac{1}{2}})=$$
$$=3(-2)y^{-3}-6\cdot\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}=-6\frac{1}{y^3}-3\frac{1}{\sqrt{y}}$$

Определяем вторую производную, используя те же правила:

$$\frac{d^2f}{dy^2}=\frac{d^2}{dy^2}\left(\frac{3}{y^2}-6\sqrt{y}\right)=\frac{d}{dy}\left(-6\frac{1}{y^3}-3\frac{1}{\sqrt{y}}\right)=-6\frac{d}{dy}(y^{-3})-3\frac{d}{dy}y^{-\frac{1}{2}}=$$
$$=-6\cdot(-3)y^{-4}-3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)y^{-\frac{3}{2}}=\frac{18}{y^4}+\frac{3}{2\sqrt{y^3}}$$

6. Дана функция $f=(2x^2+3x)(x^3-2)$. Найти: $\frac{df}{dx}$ и $\frac{d^2f}{dx^2}$.

Решение. Определяем первую производную, используя правила 9), 4), 5), 3), 2), 1):

$$\frac{d}{dx}((2x^2+3x)(x^3-2))=(2x^2+3x)\frac{d}{dx}(x^3-2)+(x^3-2)\frac{d}{dx}(2x^2+3x)=$$
$$=(2x^2+3x)\left(\frac{d}{dx}x^3-\frac{d}{dx}2\right)+(x^3-2)\left(\frac{d}{dx}(2x^2)+\frac{d}{dx}(3x)\right)=$$
$$=(2x^2+3x)(3x^2-0)+(x^3-2)(4x+3)=10x^4+12x^3-8x-6$$

Определяем вторую производную, преобразуя предварительно произведение в сумму (раскрыв скобки) и используя правила 4), 5), 3), 2) и 1):

$$\frac{d^2}{dx^2}((2x^2+3x)(x^3-2))=\frac{d}{dx}(10x^4+12x^3-8x-6)=$$
$$=\frac{d}{dx}(10x^4)+\frac{d}{dx}(12x^3)-\frac{d}{dx}(8x)-\frac{d}{dx}(6)=40x^3+36x^2-8$$

7. Дана функция $f = (x^2\, cos\, x)$. Найти: $\frac{df}{dx}$ и $\frac{d^2f}{dx^2}$

Решение. Определяем первую производную, используя правила 9), 3), 6):

$$\frac{d}{dx}(x^2\cos x) = x^2\frac{d}{dx}\cos x + \cos x\frac{d}{dx}(x^2) = x^2(-\sin x) + \cos x\cdot(2x) =$$

$$= 2x\cos x - x^2\sin x$$

Определяем вторую производную, используя правила 4), 9), 6), 3), 2):

$$\frac{d^2}{dx^2}(x^2\cos x) = \frac{d}{dx}(2x\cos x - x^2\sin x) = \frac{d}{dx}(2x\cos x) - \frac{d}{dx}(x^2\sin x) =$$

$$= (2x\frac{d}{dx}\cos x + \cos x\frac{d}{dx}(2x)) - (x^2\frac{d}{dx}\sin x + \sin x\frac{d}{dx}(x^2)) =$$

$$= 2x(-\sin x) + 2\cos x - x^2\cos x - \sin x\cdot(2x) =$$

$$= (2 - x^2)\cos x - 4x\sin x$$

8. Движение материальной точки описывается уравнением $x = 5t + +4t^3 - 2t^2$. Найти и записать уравнения скорости и ускорения данной материальной точки.

Решение: согласно определению, скорость в данный момент времени есть производная перемещения, ускорение в данный момент времени – производная скорости или вторая производная перемещения.

$$V(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(5t + 4t^3 - 2t^2) = 5 + 12t^2 - 4t$$

$$a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}(5 + 12t^2 - 4t) = 24t - 4$$

9. Найти производную от функции $y=(1+5x)^3$.

Решение: Полагая $y=u^3$, где $u=1+5x$, и применяя правило дифференцирования сложной функции 11), имеем:

$$\frac{dy}{du} = \frac{du^3}{du} = 3u^2;\quad \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(1 + 5x) = 5$$

$$\text{т.о. } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = 3u^2\cdot 5 = 15(1 + 5x)^2$$

10. Найти производную от функции $y=\sin 5x$.

Решение: Полагая $y=\sin u$, где $u=5x$, и применяя правило дифференцирования сложной функции 11), имеем:

$$\frac{dy}{du}=\frac{d\sin u}{du}=\cos u\,; \quad \frac{du}{dx}=\frac{d}{dx}(5x)=5$$

$$\text{т. о. } \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\cos u\cdot 5=5\cos 5x$$

11. Найти производную от функции $y=\cos^2 x$.

Решение: Полагая $y=u^2$, где $u=\cos x$, и применяя правило дифференцирования сложной функции 11), имеем:

$$\frac{dy}{du}=\frac{du^2}{du}=2u; \quad \frac{du}{dx}=\frac{d(\cos x)}{dx}=-\sin x$$

$$\text{т. о. } \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=2u\cdot(-\sin x)=2\cos x\cdot(-\sin x)=-\sin 2x$$

§ 2.8 Дифференцирование функций нескольких аргументов

Переменная w называется функцией n переменных (аргументов) $x, y, z\ldots.,t$, если каждой системе значений $x, y, z\ldots.,t$, из области их изменения, соответствует определенное значение величины w.

Функциональная зависимость w от $x, y, z\ldots.,t$, символически обозначается

$$w=f(x, y, z,\ldots.,t)$$

где после символа функции (которым может быть не только буква f, но и другие буквы) в скобках указываются все переменные, от которых зависит данная функция.

Частное значение функции $P(x, y, z\ldots.,t)$ при $x=a$, $y=b$, $z=c,\ldots.,t=l$ обозначается $P(a, b, c\ldots.,l)$. Например, если $F(x, y, z)=3x\cdot(y+z^2)$, то $F(2,-3, 1)=3\cdot 2\cdot(-3+1^2)=-12$.

Геометрически каждая система значений двух переменных x, y изображается точкой на плоскости, а функция двух переменных $z=f(x, y)$ – некоторой поверхностью в пространстве; система значений трех переменных x, y, z изображается точкой в пространстве. (Обычно значения переменных рассматриваются как абсцисса, ордината и аппликата точки в прямоугольной системе координат.)

Система значений четырех и большего числа переменных не имеет геометрического изображения. Однако, существуют физические величины которые являются зависимыми от ряда других физических параметров, т.е. являются функциями нескольких переменных.

Пример 2.6

Высота h пункта на земной поверхности (над уровнем моря) есть функция географических координат широты φ и долготы ψ. Широта может меняться в пределах от -90^{o} до $+90^{o}$, долгота – от -180^{o} до $+180^{o}$.

Пример 2.7

Для определения плотности тела ρ необходимо измерить его объем V, и массу m. Если тело представляет собой параллелепипед, то его объем находится через измеренные длин его сторон a, b, c ($V=a \cdot b \cdot c$), т.о. плотность тела будет определяться как $\rho = \dfrac{m}{V} = \dfrac{m}{a \cdot b \cdot c}$, т.е. плотность в этом случае можно рассматривать как функцию четырех аргументов $\rho = f(m, a, b, c)$.

Функцию $u=f(x, y, z, ..., t)$ можно дифференцировать по каждому из ее аргументов, считая при этом все остальные аргументы постоянными.

Производная от функции $u=f(x, y, z, ..., t)$ по x, взятая в предположении, что все остальные аргументы $y, z, ..., t$ являются постоянными, называется ***частной производной*** от u по x, и обозначается $\dfrac{\partial u}{\partial x} \equiv u'_x$, или

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} \equiv f'_x(x,y,z) \quad \text{при } y = const, z = const$$

<u>В физике</u> понятие частной производной используется в теории погрешностей для нахождения погрешности косвенных измерений.

Примеры вычисления частных производных

1. Дана функция $f(x,y,z)=\frac{x^2}{2y}+\frac{5z^3y}{x}$.

Найти частные производные функции по всем переменным.

Решение:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2}{2y}+\frac{5z^3y}{x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2}{2y}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{5z^3y}{x}\right)=\frac{1}{2y}\frac{\partial x^2}{\partial x}+5z^3y\frac{\partial x^{-1}}{\partial x}=$$

$$=\frac{1}{2y}2x+5z^3y(-1)x^{-2}=\frac{x}{y}-\frac{5z^3y}{x^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2}{2y}+\frac{5z^3y}{x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2}{2y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{5z^3y}{x}\right)=\frac{x^2}{2}\frac{\partial y^{-1}}{\partial y}+\frac{5z^3}{x}\frac{\partial y}{\partial y}=$$

$$=\frac{x^2}{2}(-1)y^{-2}+\frac{5z^3}{x}\cdot 1=-\frac{x^2}{2y^2}+\frac{5z^3}{x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x^2}{2y}+\frac{5z^3y}{x}\right)=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x^2}{2y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{5z^3y}{x}\right)=\frac{x^2}{2y}\frac{\partial 1}{\partial z}+\frac{5y}{x}\frac{\partial z^3}{\partial z}=$$

$$=0+\frac{5y}{x}3z^2=\frac{15yz^2}{x}$$

2. При экспериментальном определении плотности вещества твердого тела в форме цилиндра необходимо измерить его массу, и объем. В результате, числено рассчитываемая плотность является функцией трех переменных – массы, высоты и диаметра:

$$\rho=f(m,d,h)=\frac{m}{V}=\frac{4m}{\pi hd^2}$$

Найти частные производные плотности по всем аргументам.

Решение:

$$\rho'_m=\frac{\partial\rho}{\partial m}=\frac{\partial}{\partial m}\left(\frac{4m}{\pi hd^2}\right)=\frac{4}{\pi hd^2}\frac{\partial m}{\partial m}=\frac{4}{\pi hd^2}$$

$$\rho'_h=\frac{\partial\rho}{\partial h}=\frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{4m}{\pi hd^2}\right)=\frac{4m}{\pi d^2}\frac{\partial}{\partial h}(h^{-1})=-\frac{4mh^{-2}}{\pi d^2}=-\frac{4m}{\pi h^2d^2}$$

$$\rho'_d=\frac{\partial\rho}{\partial d}=\frac{\partial}{\partial d}\left(\frac{4m}{\pi hd^2}\right)=\frac{4m}{\pi h}\frac{\partial}{\partial d}(d^{-2})=-2\frac{4md^{-3}}{\pi h}=-\frac{8m}{\pi hd^3}$$

Задания для самостоятельного решения

Найти производную функции первого и второго порядков:

2.1 $y = -\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} + 4$

2.2 $y = 2x + \sin x$

2.3 $y = \frac{4x^2 - 2x^2 + x + 1}{x^2}$

2.4 $y = \frac{1-x}{1-\sqrt{x}}$

2.5 $y = (x^2 + 5x - 1) \cdot (x^2 - 3x + 5)$

2.6 $y = -\frac{x}{4}\cos x + \frac{x}{4}\sin x$

2.7 $y = \frac{2x+1}{x+2}$

2.8 $y = \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}$

2.9 $y = t^3 + 5t^4$

2.10 $y = \frac{1+t^3}{t^2-1}$

Найти частные производные функции нескольких переменных:

2.11 $f = 4x^2 + \frac{z^2}{y} + \frac{y}{2x} - 4$

2.12 $f = 3\sqrt{x} + \frac{y^2}{xz} - yx^4$

2.13 $f = 2x + \frac{y+z}{4y}$

2.14 $f = 5yx^3 + 3z^2$

2.15 $f = \frac{y^2}{z} + 4y^3$

2.16 $f = 2\sin 4x + z^3 - 5y^4$

2.17 $f = 0{,}5y^2 - 2\,\mathrm{z}\cos x$

2.18 $f = \frac{2x^2+y}{1-z^2}$

2.19 $f = \frac{1}{x}\cos y + \operatorname{tg} z$

2.20 $f = y^5 x\sqrt{z} + z^2\frac{2}{y}$

Задачи на определение характеристик движения

2.21 Движение материальной точки задано уравнением $x = at + bt^2 + ct^3$, где *a=5 м/с, b=0,2 м/с², c=0,1 м/с³*. Определить скорость и ускорение точки в моменты времени $t_1 = 2\ c$ и $t_2 = 4\ c$, а так же среднюю скорость и среднее ускорение в данном интервале времени.

2.22 Зависимость пройденного пути от времени выражается уравнением $S = at - bt^2 + ct^3$,где *a=2м/с, b=3 м/с², c=4 м/с³*.Записать выражения для скорости и ускорения. Определить для момента времени $t = 2\ c$после начала движения: пройденный путь; скорость; ускорение; среднюю скорость и среднее ускорение за промежуток времени равный 2 сек.

2.23 Автомобиль движется по участку дороги, имеющий радиус кривизны *R=50 м.* Уравнение движения имеет вид $S = a + bt + ct^2$, где *a=10м, b=10 м/с, c=-0,5 м/с²*. Найти скорость автомобиля, его нормальное, тангенциальное и полное ускорения в момент времени $t = 5\ c$. Определить характер движения.

2.24 Зависимость, пройденного пути от времени по окружности задается уравнением $S = 0{,}4t^2 + 0{,}5t$. Определить для момента времени $t = 1\ c$ после начала движения нормальное, тангенциальное и полное ускорения. Определить характер движения.

2.25 Материальная точка движется по окружности радиусом 4 м. Закон движения имеет вид $S = 8 - 2t^2$. Определить момент времени, когда нормальное ускорение точки равно 9 м/с^2. Найти в данный момент времени скорость, нормальное и полное ускорения.

2.26 Высота, брошенного вертикально вверх тела, изменяется по закону $h = 2 + 9t - 3t^2$. Найти начальную скорость движения, скорость в моменты времени $t_1 = 0{,}5\ c$ и $t_2 = 1\ c$, наибольшую высоту подъема тела.

2.27 Материальная точка совершает гармоническое колебание по закону $x = \frac{3 \sin \pi t}{\pi}$. Найти скорость движения и ускорение в моменты времени $t_1 =$

$\frac{1}{6}\ c, t_2 = \frac{1}{4}$ и $t_3 = 1\ c$. В какие моменты времени меняется направление движения? В какие моменты времени точка имеет наибольшую скорость?

2.28 Вращение колеса описывается законом изменения угла поворота $\varphi = 4 + 5t - t^3$. Найти в конце первой секунды вращения угловую и линейную скорости точек, лежащих на ободе колеса, а так же угловое, полное, нормальное и тангенциальное ускорения для этих же точек. Радиус колеса 20 см.

2.29 Диск радиусом 10 см вращается вокруг неподвижной оси так, что зависимость угла поворота диска от времени задается уравнением вида $\varphi = a + bt + ct^2 + dt^3$, где *b=1 рад/с, c=4 рад/с²*, *d=-1 рад/с³*. Определить для точек, лежащих на ободе диска к концу второй секунды после начала движения тангенциальное, нормальное и полное ускорения.

2.30 При торможении угол поворота маховика изменяется по закону $\varphi = 8 + 50t - 5t^2$. Найти угловую скорость в моменты времени $t_1 = 0{,}1\ c, t_2 = 1$ с и $t_3 = 1{,}9\ c$. Найти момент времени, когда вращение маховика прекратиться.

Глава III. ОСНОВЫ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

§ 3.1 Вводные замечания

Интегральное исчисление возникло из потребности создать общий метод нахождения площадей, объемов и центров тяжести в задачах геометрии и физики.

В зародышевой форме такой метод применялся еще Архимедом. Систематическое развитие произошло в 17 веке в работах Бонавентура Кавальери и Эвангелиста Торричелли (итал. ученые, ученики Галилея), Пьера Ферма, Блеза Паскаля и др. ученых. В 1659 г. Исаак Барроу (англ. математик – учитель И. Ньютона) установил связь между задачей о нахождении площади и задачей о разыскании касательной. Исаак Ньютон (англ. уч.) и Г. Вильгельм Лейбниц (нем. уч.) в 70-х годах 17-го века отвлекли эту связь от упомянутых частных геометрических задач, тем самым установив связь между интегральным и дифференциальным исчислениями. Эта связь была использована Ньютоном для развития техники интегрирования.

Своего нынешнего состояния методы интегрирования в основном достигли в работах Леонарда Эйлера (Швейцария, академик Петербургской АН и Берлинской академии). Труды выдающихся русских математиков академиков М.В. Остроградского и П.Л. Чебышева завершили развитие этих методов.

§ 3.2 Понятие интеграла

Введем понятие интеграла, Рассмотрим график функции $f(x)=y$, которым является линия *MN* (рис. 3.1). Найдем площадь «криволинейной трапеции» *aABb.*

Разделим отрезок ab на n частей (равных или неравных): ax_1, x_1x_2, x_2x_3, $x_3x_4, \dots$, $x_{n-1}b$. Построим ступенчатую фигуру, площадь которой равна:

$$S_n = y_0(x_1 - a) + y_1(x_2 - x_1) + \cdots + y_n(b - x_{n-1}) \qquad (3.1)$$

Обозначим длины отрезков:

$$x_1 - a = \Delta x_0,\ x_2 - x_1 = \Delta x_1, \dots b - x_{n-1} = \Delta x_{n-1},$$

а значения функций: $y_0 = f(a)$, $y_1 = f(x_1), \dots$, $y_n = f(b)$.

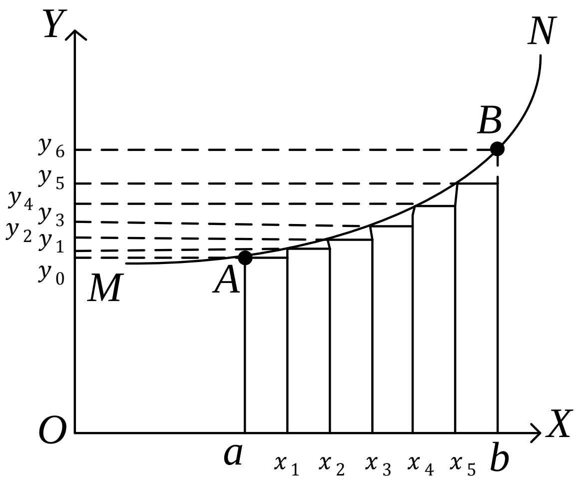


Рис. 3.1

Если обозначить $a=x_0$, $b=x_n$, тогда сумму (3.1) можно представить в виде:

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot \Delta x_i \tag{3.2}$$

При бесконечно большом n ($n \to \infty$), значения Δx_i являются бесконечно малыми (элементарными), т.е $\Delta x_i \to 0$, при этом площадь фигуры *aABb* есть ***предел суммы*** (3.2) ***бесконечного числа слагаемых***, который обозначается выражением вида:

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot \Delta x_i = \int_a^b f(x)\, dx \tag{3.3}$$

Выражение $\int_a^b f(x)\, dx$ – называется ***определенным интегралом***, где *f(x)* – ***подынтегральная функция***, *x* – ***переменная интегрирования***, *a* и *b* – ***пределы интегрирования***.

Название ***интеграл*** (от лат. *integralis – «целостный»)* и обозначение $\int$– введено Лейбницем (знак $\int$– от курсивного написания буквы *S*, что обозначает начальную букву слова *summa* (сумма)).

Основная задача интегрального исчисления сводиться к нахождению функции *F(x)* по данному выражению ее дифференциала $dF(x) = f(x)dx$ (или по ее производной $F'(x) = f(x)$). Данное действие называется

интегрированием и является действием ***обратным дифференцированию*** (т.е. нахождению производной функции).

Искомая функция *F(x)*, при выполнении действия интегрирования, называется ***первообразной*** функцией от функции *f(x)*.

Любая непрерывная функция *f(x)* имеет бесчисленное множество первообразных. Если *F(x)* есть одна из них то, всякая другая представляется выражением *F(x)+C,* где *C* – постоянная величина, задаваемая произвольно.

§ 3.3 Неопределенный интеграл и его приложения

Совокупность первообразных $F(x) + C$ для функции *y=f(x)* на некотором промежутке называется ***неопределенным интегралом*** на данном промежутке (C – постоянная):

$$\int f(x)dx = F(x) + C \qquad (3.4)$$

$$\frac{d}{dx}(F(x) + C) = f(x) \qquad (3.5)$$

Свойства неопределенного интеграла:

1) Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x)$$

2) Знак интеграла перед знаком дифференциала уничтожает последний, но при этом вводиться произвольная постоянная *C*:

$$\int dF(x) = F(x) + C \text{ или} \int F'(x)dx = F(x) + C$$

3) Постоянный множитель выноситься за знак интеграла:

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx, \text{ где } a = const$$

4) Интеграл от суммы нескольких функций равен сумме интегралов всех функций:

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

Из каждой формулы дифференцирования, если ее обратить, получается соответствующая формула интегрирования, т.о. из формул для нахождения производных (см.§ 2.7) получаются формулы нахождения основных интегралов.

Таблица основных интегралов:

1) $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$

2) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

3) $\int e^x\, dx = e^x + C$

4) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

5) $\int \cos x\, dx = \sin x + C$

6) $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$

7) $\int tgx\, dx = -\ln|\cos x| + C$

8) $\int ctgxdx = \ln|\sin x| + C$

9) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$

10) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\, ctgx + C$

11) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

12) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arctg} x + C$

Для решения интеграла необходимо свести его к табличному. Это часто удается сделать путем преобразования подынтегрального выражения и применения основных правил интегрирования.

Пример 3.1.

Найти $\int \left(5\cos x - 3x^2 + \frac{1}{x}\right) dx$

Решение: Представим интеграл в виде суммы интегралов и применим табличные интегралы.

$$\int 5\cos x\, dx - \int 3x^2 dx + \int \frac{1}{x} dx =$$

$$= 5\int \cos x dx - 3\int x^2\, dx + \int \frac{dx}{x} = 5\sin x - x^3 + \ln|x| + C$$

Пример 3.2.

Найти $\int ctg^2 x\, dx$

Решение:

$$\int ctg^2 x\, dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right) dx =$$

$$= \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int dx = -ctgx - x + C$$

Пример 3.3

Зависимость скорости от времени задается выражением $V = V_0\left(1 + \frac{t}{5}\right)$. Найти зависимость координаты от времени. Найти, где окажется тело в момент времени $t = 6\ c$. Значение начальной скорости равно $V_0 = 0{,}1$ м/с.

Решение: по определению скорость есть производная координаты по времени. Тогда координата есть первообразная функции скорости:

$$\frac{dx}{dt} = V \ \Rightarrow\ x = \int V dt$$

$$x = \int V_0\left(1 + \frac{t}{5}\right) dt = \int V_0\, dt + \int \frac{t}{5} V_0 dt = V_0 \int dt + \frac{V_0}{5}\int t dt =$$

$$= V_0 t + \frac{V_0}{5}\frac{t^2}{2} + C = V_0 t\left(1 + \frac{t}{10}\right) + C$$

Найдем значение постояннойC, подставив начальное значение времени: $x(0) = V_0 \cdot 0\left(1 + \frac{0}{10}\right) + C = C = x_0 = 0$. Таким образом, значение константы в физических задачах может определять начальные условия, в частности начальную координату или начальную скорость.

Найдем координату в момент времени $t = 6\ c$

$$x(6) = 0{,}1 \cdot 6\left(1 + \frac{6}{10}\right) = 0{,}96 \text{ (м)}$$

Ответ: $x(t) = x_0 + V_0 t\left(1 + \frac{t}{10}\right)$, $\ x(6) = 0.96$ м.

§ 3.4 Разыскание определенного интеграла.
Формула Ньютона-Лейбница

Определенный интеграл от непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции *y=f(x)* равен приращению первообразной *F(x)* для этой функции на указанном промежутке, т.е.:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a) \tag{3.6}$$

Что бы вычислить определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ следует сначала найти неопределенный интеграл $\int f(x)dx$ и далее, согласно формуле Ньютона-Лейбница (3.6), подставить в найденное выражение вместо *x* сначала верхний предел, затем нижний и вычесть вторую величину из первой.

Свойства определенного интеграла.

1) Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла:

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$$

где c = const

2) Интеграл от суммы функций равен сумме интегралов от всех слагаемых:

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

3) Отрезок интегрирования можно разбить на части:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

4) При перестановке пределов изменяется знак интеграла:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

5) Интеграл с одинаковыми пределами равен нулю:

$$\int_{a}^{a} f(x)dx = 0$$

Пример 3.4 Найти $\int_{-2}^{3} 3x^2 dx$

Решение:

$$\int_{-2}^{3} 3x^2 dx = 3\frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{3} = 3^3 - (-2)^3 = 27 - (-8) = 35$$

Пример 3.5 Найти $\int_{0}^{\pi} \sin x\, dx$

Решение:

$$\int_{0}^{\pi} \sin x\, dx = -\cos x|_0^{\pi} = -(\cos\pi - \cos 0) = -(-1-1) = 2$$

Задания для самостоятельно решения

Найти интеграл

3.1 $\int 12\sqrt[4]{x^2}\, dx$

3.2 $\int \left(1 + \frac{1}{5t} + \frac{2t^2}{3}\right) dt$

3.3 $\int \left(\frac{x^2}{3} + x + 4\right) dx$

3.4 $\int x\left(\frac{2}{x} + \frac{x}{2}\right) dx$

3.5 $\int_{-\pi}^{\pi}(3\cos\alpha + \sin\alpha)d\alpha$

3.6 $\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin x}{2} + \frac{1}{\cos^2 x}\right) dx$

3.7 $\int_0^3\left(\frac{5^t+t}{\sqrt{5}}\right) dt$

3.8 $\int_{-1}^{1}\frac{y^6+8y^4+1}{y} dy$

3.9 $\int 2^z \cdot 3^z\, dz$

3.10 $\int \frac{24^x-2^x}{4^x} dx$

3.11 $\int_2^4 (x+1)^2(3x-4)dx$

3.12 $\int(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)dx$

3.13 $\int\left(\frac{2u-1}{3u}\right)^2 du$

3.14 $\int\frac{y^3-8}{2-y} dy$

3.15 $\int\frac{e^{2x}-4}{6e^x-12} dx$

3.16 $\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{4\sqrt{x}} dx$

3.17 $\frac{1}{2}\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi$

3.18 $\int\frac{d\vartheta}{1+\cos 2\vartheta} d\vartheta$

Задачи на определение характеристик движения

3.19 Скорость прямолинейно движущейся точки меняется по закону $V = 3t^2 + 1$. Найти зависимость координаты от времени, если в момент времени t=0: точка находиться в начале координат, координата точки равнялась 0,5 м.

3.20 Зависимость скорости прямолинейно движущейся точки от времени выражается формулой $V = \sin\frac{\pi t}{2}$. Найти координату точки в начальный момент времени $t = 0$, если в момент времени $t = 1$скоордината равнялась 1 м.

3.21 Найти закон движения тела массой 10 кг под действием силы *F=6 H*, если в момент времени $t = 0$ тело покоилось в начале координат.

3.22 Ускорение прямолинейно движущейся точки меняется по закону $a = 1{,}5t$. Найти зависимость скорости движения от времени, закон движения тела. Известно, что к концу первой секунды тело прошло 6 м и скорость его была равна 3,75 м/с.

3.23 Тело массой 4 кг совершает прямолинейное движение из состояния покоя под действием переменной силы, которая изменяется по закону $F = \frac{2}{\sqrt{t+1}}$. Через 3 с после начала движения сила прекращает свое действие и тело движется равномерно с набранной к данному моменту скоростью. Найти зависимость скорости движения от времени.

3.24 Зависимость угловой скорости от времени задается уравнением $w(t) = 2t^2 - 5t$. Найти зависимость угла поворота от времени, если в начальный момент времени $\varphi = 0$.

Глава IV. ТЕОРИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ

§ 4.1 Основные понятия и определения

Физика является наукой познания окружающего нас мира и познание в большинстве случаях происходит опытным путем. Не смотря на то, что современные физические теории (например, квантовая механика, теория поля) выглядят как сложные абстрактные конструкции из математических предположений, математических выкладок и выводов в виде математических формул, однако все эти теории опираются на опыт, и только опыт является критерием их достоверности.

Физическим опытом называется такое измерение, в котором все воздействия на исследуемую систему поддаются учету и измерению. Это требование необходимо выполнять, чтобы реализовать главное свойство опыта – его воспроизводимость.

Процесс познания в физике начинается либо с наблюдения некоторого (обычно – повторяющегося) явления в естественных условиях, либо со специально поставленных опытов-экспериментов. На основе накопленного экспериментального материала путем обобщения строится некоторое предварительное предположение – гипотеза. Гипотеза требует проверок, подтверждений и доказательств достоверности. Не все гипотезы выдерживают проверок (светоносный эфир, флогистон и др.). Гипотезы, выдерживающие проверку, превращаются в законы.

Задачей эксперимента является определение истинного значения физической величины. Истинное значение измеряемой величины является объективным, наиболее полным отражением определенных свойств этой величины, как в количественном, так и в качественном отношениях. Однако при однократном измерении истинное значение определить невозможно.

Многократное повторение опыта позволяет выявить отклонение от истинного значения, и такое отклонение определяется ошибкой измерений или так называемой погрешностью. Любое измерение всегда производится с какой-то степенью точности, что связано с несовершенствами измерительных приборов, методики измерений, несовершенством органов человеческих чувств и т.п. Поэтому в задачу экспериментатора помимо измерения искомой величины в обязательном порядке входит оценка погрешности полученного результата. Без такой оценки результат опыта не имеет, как правило, практической ценности.

Физические измерения делятся на ***прямые*** и ***косвенные***.

Прямым называется измерение, при котором значение измеряемой величины непосредственно считывается со шкалы прибора, проградуированного в соответствующих единицах измерения. Примерами прямых измерений могут служить измерения линейных размеров предметов различными измерительными инструментами: линейкой, штангенциркулем, микрометром, измерения времени секундомером, измерения электрических величин (тока, напряжения) соответствующими электроизмерительными приборами.

Косвенным называется измерение, результат которого определяют на основании прямых измерений величин, связанных с измеряемой величиной известной зависимостью. К косвенным относятся, например, проводимые в учебных лабораториях измерения плотности тел, измерения ускорения движения тел, измерения индукции магнитных полей и т.п.

По *характеру проявления* погрешности разделяют на две основные группы ***случайные*** и ***систематические***.

Систематической погрешностью называют составляющую погрешности измерения, остающуюся постоянной или закономерно изменяющуюся при повторных измерениях одной и той же величины.

Систематическая погрешность может быть связана с неисправностями измерительных приборов, неточностью их регулировки, несоблюдением условий их эксплуатации и т.п. Такие погрешности возникают, например, при не совсем горизонтальном положении некоторых приборов или при использовании стрелочного прибора, у которого стрелка до начала измерений не была установлена на нуль. Причина возникновения систематической погрешности может заключаться и в самой методике измерений. Так, например, определяя плотность твердого тела по измерениям его массы и объема, можно допустить ошибку, если внутри исследуемого тела имеются пустоты в виде пузырьков воздуха. В этом случае устранить ошибку можно при изменении метода измерений.

Т.о. систематические погрешности, в принципе, могут быть исключены введением поправок, однако часто они остаются не выявленными.

Случайная погрешность - это составляющая погрешности измерения, изменяющаяся случайным образом при повторных измерениях одной и той же величины. Она обусловлена влиянием на результаты измерения большого числа изменяющихся случайным образом факторов и проявляется в хаотическом изменении результатов повторных наблюдений. Её причиной могут служить, в частности физическая и нервная реакция самого экспериментатора.

Признак случайной погрешности – она непредсказуемо изменяется по знаку от опыта к опыту в узких пределах численных значений. Случайную погрешность нельзя исключить из результатов. Однако, пользуясь статистическими методами, можно учесть ее влияние на оценку истинного значения измеряемой величины.

Кроме названных погрешностей встречаются ошибки, называемые промахами. ***Промах*** — это вид грубой погрешности, зависящей от наблюдателя и связанный с неправильным обращением со средствами измерений: неверными отсчетами показаний приборов, описками при записи результатов, невнимательностью экспериментатора, путаницей номеров образцов и т. п. Результат, содержащий грубую ошибку, резко отличается от остальных, и его после проверки следует исключить.

Все составляющие погрешности, как правило, не зависят друг от друга, что допускает их раздельное рассмотрение.

Сами погрешности (являющиеся суммой указанных составляющих) могут быть подставлены в виде *абсолютной, относительной или* *приведенной погрешности.*

Абсолютная погрешность - это погрешность измерения, выраженная в единицах измеряемой величины, она определяет отклонение измеренного значения величины x от ее истинного значения x_0:

$$\Delta x = x - x_0$$

Наряду с абсолютной погрешностью используется термин абсолютное значение погрешности, под которым понимают значение погрешности без учета её знака. Эти два понятия различны

Относительная погрешность - это погрешность измерения, выраженная отношением абсолютной погрешности к результату измерения, является мерой точности результатов измерения и выражается в долях:

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{x_0} \approx \frac{\Delta x}{x},$$

или в процентах:

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{x_0} \cdot 100\%.$$

В практике физического эксперимента погрешность измеряемой величины остается неизвестной. В противном случае истинное значение находилось бы простым введением поправки к измеренной величине. Выполняя измерения, мы всегда имеем дело с погрешностями, являющимися суммой рассмотренных выше составляющих. Среди этих составляющих присутствует случайная составляющая, в силу чего при обработке результатов мы должны пользоваться методами математической статистики. Методы определения погрешности позволяют лишь *с некоторой вероятностью* указать предельные значения погрешностей (случайных и выявленных систематических).

§ 4.2. Обработка экспериментальных данных

1.Погрешности однократных прямых измерений

Если при повторных наблюдениях получаются одинаковые значения измеряемой величины, то повторять эксперимент не имеет смысла. В этом случае погрешность определяется точностью измерительного прибора. Если погрешность измерения на приборе (или в паспорте) не указана, она принимается ***равной цене наименьшего деления***.

Погрешность многих сложных измерительных приборов определяется классом точности. Значение класса точности γ выражает предельную абсолютную погрешность, выраженную в процентах от верхнего предела измерений (на данном диапазоне), называемую ***приведенной:***

$$\gamma = \frac{\Delta x}{x_{\max}} \cdot 100\%.$$

Абсолютная погрешность в этом случае может быть определена по формуле

$$\Delta x = \frac{\gamma \cdot x_{\max}}{100\%}, \text{ ед. изм.}$$

Например, приведенная погрешность вольтметра на пределе измерения 10 В, при классе точности 0,5 равна

$$\Delta U = \frac{0{,}5 \cdot 10}{100} = 0{,}05\, B$$

В погрешность прибора могут входить как систематические (неточная разбивка шкалы и т.д.), так и случайные (силы трения в оси и т.д.) погрешности. Однако поскольку при увеличении числа измерений точность прибора не возрастает, их следует рассматривать как *систематические*. Предельные погрешности приборов, часто употребляемых в лабораторной практике, указаны в табл.4.1.

Таблица 4.1

Приведенные погрешности приборов.

Прибор или инструмент	Цена деления	Предельная погрешность
Измерительная линейка	1 мм/дел	1 мм
Штангенциркуль	0,1 мм/дел 0,05 мм/дел	0,1 мм , 0,05 мм
Микрометр	0,01 мм/дел	0,01 мм
Весы технические	-	0,1 г
Весы аналитические	0,1 мг/дел	1 мг
Секундомер с ручным запуском	0,1 с/дел	0,3 с
Часы с секундной стрелкой	1 с/дел	1 с
Термометры	Т К/дел	Т, К

2. Обработка результатов многократных прямых измерений

1) Предположим, что произведено n прямых измерений величины x, имеющих значения: $x_1, x_2, \ldots x_n$.

2) Согласно теории вероятностей истинное значение измеряемой величины (при отсутствии систематических погрешностей) равно ее среднему значению, получаемому при бесконечно большом числе измерений. Поэтому наиболее близким к истинному значению для данной серии измерений будет ***среднее арифметическое значение***:

$$\langle x \rangle = x_{\text{ср}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

3) Отклонения измеренных значении xn от xcp носят случайный характер и называются абсолютными ошибками отдельных измерений:

$$\Delta x_1 = \langle x \rangle - x_1$$

$$\Delta x_2 = \langle x \rangle - x_2$$

…………………………..

$$\Delta x_n = \langle x \rangle - x_n$$

или $\Delta x_i = \langle x \rangle - x_i$

4) Мерой разброса измеряемой величины является ***среднеквадратичное отклонение от среднеарифметического значения*** и вычисляется по формуле:

$$S_{\langle x\rangle} = \sqrt{\frac{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \cdots + \Delta x_n^2}{n(n-1)}}$$

5) Доверительная граница погрешности (доверительный интервал, в который попадет истинное значение) является ***статистической погрешностью*** и вычисляется по формуле:

$$\Delta x_{\text{ст}} = t_{\alpha f} \cdot S_{\langle x\rangle}$$

где $t_{\alpha f}$ - коэффициент Стьюдента, зависящий от заданной надежности α (доверительной вероятности) и числа степеней свободы $f = n - 1$. Коэффициент Стьюдента находится по соответствующим таблицам.

Таблица 4.2

Значения коэффициента Стьюдента

Число степеней свободы f=n-1	***Надежность α***							
	0,5	***0,6***	***0,7***	***0,8***	***0,9***	***0,95***	***0,98***	***0,999***
1	1,00	1,38	2,0	3,1	6,3	12,7	32	640
2	0,82	1,06	1,3	1,9	2,9	4,3	7,0	32
3	0,77	0,98	1,3	1,6	2,4	3,2	4,5	13
4	0,74	0,94	1,2	1,5	2,1	2,8	3,7	8,6
5	0,73	0,92	1,2	1,5	2,0	2,6	3,4	6,9
6	0,72	0,90	1,1	1,4	1,9	2,4	3,1	6,0
7	0,71	0,90	1,1	1,4	1,9	2,4	3,0	5,4
8	0,71	0,90	1,1	1,4	1,9	2,3	2,9	5,0
9	0,70	0,88	1,1	1,4	1,8	2,3	2,8	4,8
14	0,69	0,87	1,1	1,3	1,8	2,1	2,6	4,1
19	0,69	0,86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	3,9
∞	0,67	0,84	1,0	1,3	1,6	2,0	2,3	3,3

6) ***Абсолютная погрешность*** или ***полная погрешность*** прямых измерений представима в виде:

$$\Delta x = \sqrt{\Delta x_{\text{ст}}^2 + \Delta x_{\text{пр}}^2}$$

$\Delta x_{пр}$ – погрешность измерительного прибора.

Если одна из составляющих погрешностей($\Delta x_{ст}$ или $\Delta x_{пр}$) хотя бы в 2,5-3 раза меньше другой, то меньшей составляющей можно пренебречь.

7) ***Относительная погрешность*** измерений:

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{\langle x \rangle} \cdot 100\%$$

8) Окончательный результат измерения с учетом погрешности записывается в виде:

$$x = \langle x \rangle \pm \Delta x \ \text{(ед. изм)}$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{\langle x \rangle} \cdot 100\%$$

Замечание Проводить указанную выше статистическую обработку результатов можно только для такой серии, в которой разброс результатов обусловлен случайными причинами. Если же результаты различаются вследствие целенаправленного изменения условий опыта, то усреднение результатов такой серии не имеет смысла.

3. Обработка косвенных измерений

Часто оказывается, что искомая величина есть функция прямо измеряемых величин. (Например, объем параллелепипеда являляется функцией длин его сторон $V=a \cdot b \cdot c$, т.е. $V=f(a,b,c)$). Погрешность такой величины вычисляется через погрешности прямых измерений.

1) Пусть некоторая физическая величина F является функцией нескольких переменных x, y, z которые в свою очередь являются результатами прямых измерений

$$F = f(x, y, z)$$

2) ***Среднее значение*** функции, определяется через среднеарифметические значения измеренных величин:

$$\langle F \rangle = f(\langle x \rangle, \langle y \rangle, \langle z \rangle)$$

3) Находим ***частные погрешности*** функции по ее пременным

$$\Delta F_x = F_x^{'} \cdot \Delta x = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \Delta x$$

$$\Delta F_y = F_y^{'} \cdot \Delta y = \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \Delta y$$

$$\Delta F_z = F_z^{'} \cdot \Delta z = \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \Delta z$$

где $F_x^{'} = \frac{\partial f}{\partial x}$; $F_y^{'} = \frac{\partial f}{\partial y}$; $F_z^{'} = \frac{\partial f}{\partial z}$ есть ***частные производные*** данной функции по каждой из переменных

4) ***Полная абсолютная погрешность*** функции *F*:

$$\Delta F = \sqrt{\Delta F_x^2 + \Delta F_y^2 + \Delta F_z^2}$$

5) ***Относительная погрешность***:

$$\varepsilon = \frac{\Delta F}{\langle F \rangle} \cdot 100\%$$

6) Окончательный результат записывается в виде :

$$F = \langle F \rangle \pm \Delta F \ \ (\text{ед. изм})$$

Пример

В результате эксперимента получены результаты прямых измерений:

$x_1=2,3$; $x_2=2,4$; $x_3=2,5$; $x_4=2,3$; $x_5=2,2$

$y_1=1,25$; $y_2=1,27$; $y_3=1,24$; $y_4=1,26$; $y_5=1,23$.

Провести обработку прямых измерений и найти полную погрешность данных измерений. Найти физическую величину, представленную в виде зависимости $F = 3x + \frac{y^2}{2}$ и провести обработку косвенных измерений.

Решение: проведем обработку прямых измерений величин x и y.

1) $\langle x \rangle = \frac{2,3+2,4+2,5+2,3+2,2}{5} = 2,34$

2) $\Delta x_1 = 2,34 - 2,3 = 0,04$

$\Delta x_2 = 2,34 - 2,4 = -0,06$

$\Delta x_3 = 2,34 - 2,5 = -0,16$

$\Delta x_4 = 2,34 - 2,3 = 0,04$

$\Delta x_5 = 2,34 - 2,2 = 0,14$

3) $S_{\langle x\rangle} = \sqrt{\frac{0{,}04^2+(-0{,}06)^2+(-0{,}16)^2+0{,}04^2+0{,}14^2}{5(5-1)}} = \sqrt{\frac{0{,}016+0{,}036+0{,}0256+0{,}016+0{,}0196}{20}} =$

=0,75

4) По таблице 4.2 определим значение коэффициента Стьюдента. Надежность обычно берется равной α=0,95 (если методика измерений не предполагает другого значения α). Число степеней свободы $f = 5 - 1 = 4$. На пересечении данных f и α в таблице находим значений $t_{\alpha,f} = 2{,}8$.

5) Статистическая погрешность $\Delta x_{\text{ст}} = 2{,}8 \cdot 0{,}075 = 0{,}21$

6) Полная погрешность будет равна только статистической погрешности, т.к. приборная погрешность не задается $\Delta x_{\text{ст}} = \Delta x$.

7) Относительная погрешность измерения *x* : $\varepsilon_x = \frac{2{,}34}{0{,}21} \cdot 100\% = 11\%$

Как правило, относительная погрешность при проведении учебных лабораторных работ не должна превышать 20%, что указывает на правильность проведенного эксперимента и расчетов погрешностей.

8) Истинное значение лежит в интервале значений $x = 2{,}34 \pm 0{,}21$

Для удобства результаты обработки можно представить в виде таблицы.

$\boldsymbol{x_i}$	$\langle \boldsymbol{x} \rangle$	$\Delta \boldsymbol{x_i}$	$(\Delta \boldsymbol{x_i})^2$	$\boldsymbol{S_{\langle x\rangle}}$	$\Delta \boldsymbol{x}_{\text{ст}}$	$\Delta \boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{\varepsilon_x}$, %
2,3	2,34	0,04	0,016	0,075	0,21	0,21	11
2,4		-0,06	0,036				
2,5		-0,16	0,0256				
2,3		0,04	0,016				
2,2		0,14	0,0196				

Аналогично проводятся расчеты при обработке значений прямых измерений *y*.

$\boldsymbol{y_i}$	$\langle \boldsymbol{y} \rangle$	$\Delta \boldsymbol{y_i}$	$(\Delta \boldsymbol{y_i})^2$	$\boldsymbol{S_{\langle y\rangle}}$	$\Delta \boldsymbol{y}_{\text{ст}}$	$\Delta \boldsymbol{y}$	$\boldsymbol{\varepsilon_y}$, %
1,25	1,25	0	0	0,007	0,02	0,02	1,6
1,27		-0,02	0,0004				
1,24		0,01	0,0001				
1,26		-0,01	0,0001				
1,23		0,02	0,0004				

Проведем теперь обработку косвенных результатов.

1) Находим среднее значение величины искомой величины F:

$$\langle F\rangle = 3\cdot 2{,}34 + \frac{1{,}25^2}{2} = 7{,}8$$

2) Определяем частные производные по каждой переменной

$$F_x' = \frac{\partial}{\partial x}\left(3x + \frac{y^2}{2}\right) = 3\frac{\partial x}{\partial x} + 0 = 3$$

$$F_y' = \frac{\partial}{\partial y}\left(3x + \frac{y^2}{2}\right) = 0 + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}(y^2) = \frac{1}{2}2y = y$$

3) Находим частные погрешности величины F по каждой переменной, подставляя средние значения $x=\langle x\rangle$ и $y=\langle y\rangle$

4) $\Delta F_x = F_x' \cdot \Delta x = 3\cdot 0{,}21 = 0{,}63$

$\Delta F_y = F_y' \cdot \Delta y = 1{,}25\cdot 0{,}02 = 0{,}025$

5) Определяем полную абсолютную погрешность функции F:

$$\Delta F = \sqrt{0{,}63^2 + 0{,}025^2} = 0{,}63 \text{ (ед. изм.)}$$

6) Относительная погрешность величины F, измеренной косвенным методом

$$\varepsilon_F = \frac{0{,}63}{7{,}8}\cdot 100\% = 8\%$$

7) Окончательный результат, с учетом погрешности: истинное значениеF лежит в интервале $F = 7{,}80 \pm 0{,}63$ (ед. изм)

Ответ:$x = 2{,}34 \pm 0{,}21;\quad \varepsilon_x = 11\%$

$y = 1{,}25 \pm 0{,}02;\quad \varepsilon_y = 1{,}6\%$

$$F = 7{,}80 \pm 0{,}63;\quad \varepsilon_F = 8\%$$

§ 4.3 Округление результата и погрешности

При обработке полученных результатов измерений необходимо округлять полную (абсолютную) погрешность и среднее арифметическое значения в соответствии со следующими правилами.

1) Сначала округляется ***полная абсолютная погрешность***, т.к. от результатов этого округления зависит округление среднего арифметического значения. Округление производиться до одной ***значащей цифры*** или до двух, если значащая цифра равна 1.

Замечание**:** ***значащими цифрами*** в десятичной записи числа являются все цифры, кроме нулей перед отличными от нуля цифрами числа, по модулю меньшего единицы.

Например**:** 0,007605≈0,08 т.к. первые три нуля числа 0,007605, значащими не являются. В данном числе 4 значащих цифры, в том числе и нуль в предпоследнем разряде.

1,561≈1,6

0,013289≈0,014

2) Затем по обычным правилам проводиться округление ***среднего арифметического значения*** до того разряда, в котором находиться последняя значащая цифра округленной абсолютной погрешности. В окончательной записи среднего арифметического используется стандартная запись числа (число от 1 до 10, умноженное на 10 в какой-либо степени). При этом погрешность записывается в этом же виде с той же степенью у 10.

Например:

$0{,}045871 \pm 0{,}000459 \approx 0{,}0459 \pm 0{,}0005 \approx (4{,}59 \pm 0{,}05) \cdot 10^{-2}$

$258{,}9935 \pm 2{,}571 \approx 259 \pm 3 \approx (2{,}59 \pm 0{,}03) \cdot 10^{2}$

$258{,}9945 \pm 1{,}571 \approx 259{,}0 \pm 1{,}6 \approx (2{,}590 \pm 0{,}016) \cdot 10^{2}$

$8{,}1805 \cdot 10^{8} \pm 1{,}413 \cdot 10^{7} \approx 81{,}8 \cdot 10^{7} \pm 1{,}4 \cdot 10^{7} \approx (8{,}18 \pm 0{,}14) \cdot 10^{8}$

§ 4.4 Графическое представление экспериментальных данных

Графики дают визуальное представление о связи между величинами, что крайне важно при интерпретации полученных данных. На основе графика легче сделать вывод о соответствии теоретических представлений данным эксперимента.

Графики строят только на бумаге, имеющей координатную сетку. Это может быть обычная миллиметровка с линейным масштабом по осям или логарифмическая бумага.

Строятся графики, за редким исключением, в прямоугольной системе координат, где по горизонтальной оси (оси абсцисс) откладывают аргумент, независимую физическую величину, а по вертикальной оси (оси ординат)– функцию, зависимую физическую величину.

Обычно график строят на основании таблицы экспериментальных данных, откуда легко установить интервалы, в которых изменяются аргумент и функция. Их наименьшее и наибольшее значения задают значения масштабов, откладываемых вдоль осей. Не следует стремиться поместить на осях точку (0,0), используемую как начало отсчета на математических графиках. Для экспериментальных графиков масштабы по обеим осям выбирают независимо друг от друга и, как правило, соотносят с погрешностью измерения аргумента и функции: желательно, чтобы цена наименьшего деления каждой шкалы примерно равнялась соответствующей погрешности.

Масштабная шкала должна легко читаться, а для этого необходимо выбрать удобную для восприятия ***цену деления шкалы***: одной клетке должно соответствовать кратное 10 количество единиц откладываемой физической величины: 10n, 2*10n или 5*10n , где n – любое целое число, положительное или отрицательное. Т. о. числа 2; 0,5; 100; 0,02 – подходят, а числа 3; 7; 0,15 – не подходят для этой цели (рис 4.1).

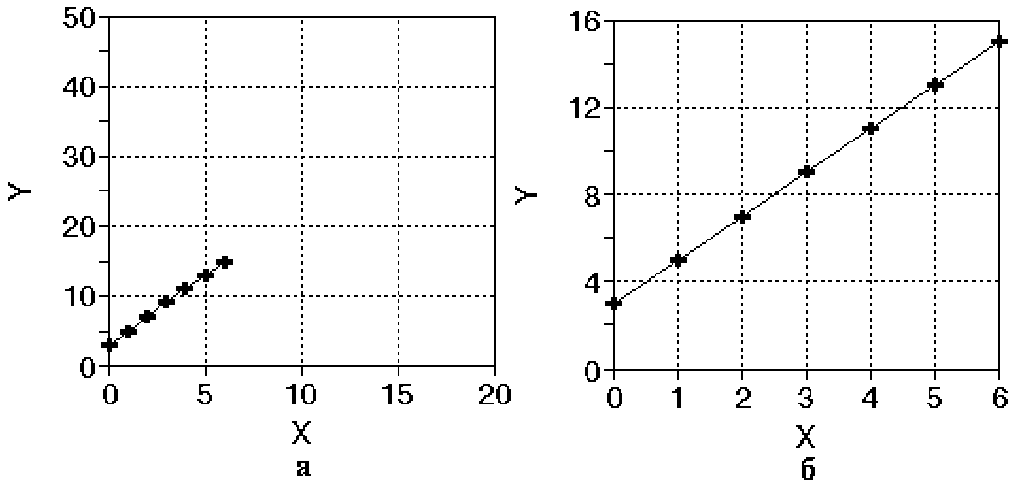


Рис. 4.1 Неправильный (а) и правильный (б) выбор масштаба на графике.

Стрелки, задающие положительное направление, на координатных осях обычно не указывают, если выбрано принятое положительное направление осей: снизу– вверх и слева – направо. Против каждой оси указывают название или символ откладываемой по оси величины, а через запятую – единицы ее измерения, причем все единицы измерения приводят в русском написании в системе СИ. Числовой масштаб выбирают в виде равноотстоящих по значению «круглых чисел», например: 2; 4; 6; 8 … или 1,82; 1,84; 1,86 … Десятичный множитель масштаба, как в таблицах, относится к единицам измерения, например, вместо 1000; 2000; 3000 … получится 1; 2; 3 … с общим множителем 10^3 , указанным перед единицей измерения (рис.4.2).

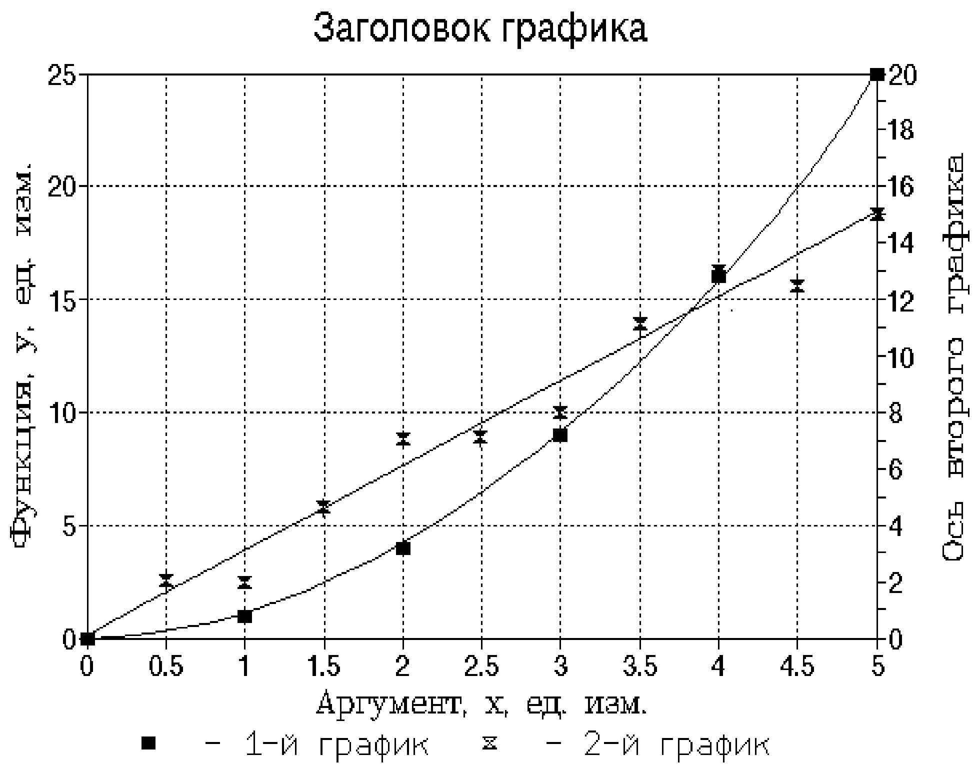


Рис. 4.2 Пример построения графиков

Экспериментальные точки аккуратно наносят на поле графика карандашом, чтобы они были отчетливо различимы. Если в одних осях строят различные зависимости, полученные, например, при измененных условиях эксперимента или на разных этапах работы, то точки таких зависимостей должны отличаться друг от друга. Их следует отмечать разными значками (квадратами, кружками, крестиками и т.п.) или наносить карандашами разного цвета.

Правильно построенная кривая должна заполнять все поле графика, что будет свидетельством правильного выбора масштабов по каждой из осей. Если же значительная часть поля оказывается незаполненной, то необходимо заново выбрать масштабы и перестроить зависимость.

Если одна из физических величин (условно назовем ее y) связана линейной зависимостью вида $y = A\ x + B$ с другой (назовем ее x), то графическое представление экспериментальных данных позволяет найти значение физической величины (A). Для этого необходимо определить угловой коэффициент наклона графика функции *y=f(x)*.

При определении углового коэффициента необходимо выбрать две произвольные точки на оси абсцисс x_1 и x_2, которые должны отстоять друг от друга на возможно большем расстоянии. По графику провести отсчет соответствующих значений функции y_1 и y_2 (рис. 4.3). Для того чтобы коэффициент имел определенный физический смысл, величины x и y следует выражать в одной физической системе единиц.

Угловой коэффициент оценивается отношением приращения функции к приращению аргумента с учетом размерности и масштаба x и *y=f(x)*:

$$A = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

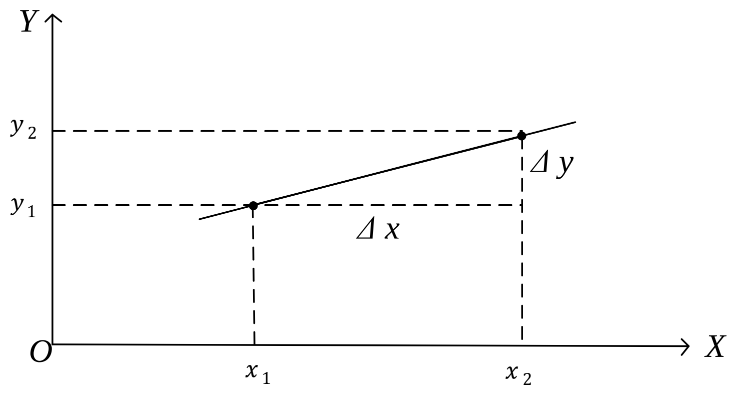


Рис. 4.3

Задания для самостоятельной работы

Провести обработку прямых и косвенных измерений по заданным значениям.

4.1 $x_1=4,33;\ x_2=4,32;\ x_3=4,31;\ x_4=4,32;\ x_5=4,35$

$y_1=7,3;\ y_2=7,4;\ y_3=7,2;\ y_4=7,5;\ y_5=7,2$

$z_1=12;z_2=13;\ z_3=11;\ z_4=12;\ z_5=11$

$$F=x+\frac{y^2}{z}$$

4.2 $x_1=1,25;x_2=1,26;\ x_3=1,21;\ x_4=1,18;\ x_5=1,22$

$y_1=10,1;\ y_2=10,2;\ y_3=10,1;\ y_4=10,3;\ y_5=10,2$

$z_1=5,3;z_2=5,6;\ z_3=5,7;\ z_4=5,4;\ z_5=5,2$

$$F=xy^2+\frac{x}{z}$$

4.3 $x_1=5,3;x_2=5,6;\ x_3=5,4;\ x_4=4,9;\ x_5=5,1$

$y_1=11,01;\ y_2=11,02;\ y_3=11,04;\ y_4=11,07;\ y_5=11,06$

$z_1=6;z_2=7;\ z_3=6;\ z_4=8;\ z_5=9$

$$F=x+\frac{y}{z^2}$$

4.4 $x_1=5,3;x_2=5,6;\ x_3=5,4;\ x_4=5,4;\ x_5=5,2$

$y_1=2,7;\ y_2=2,8;\ y_3=2,9;\ y_4=2,7;\ y_5=2,6$

$z_1=0,11;z_2=0,12;\ z_3=0,13;\ z_4=0,11;\ z_5=0,12$

$$F=zy^3+\frac{x}{y}$$

4.5 $x_1=13,3;x_2=13,2;\ x_3=13,4;\ x_4=13,1;\ x_5=13,2$

$y_1=15,13;\ y_2=15,12;\ y_3=15,14;\ y_4=15,13;\ y_5=15,12$

$z_1=8,3;z_2=8,4;\ z_3=8,2;\ z_4=8,4;\ z_5=8,3$

$$F=yx^2+zx$$

4.6 $x_1=7,8;x_2=7,9;\ x_3=7,8;\ x_4=7,5;\ x_5=7,7$

$y_1=13,3;\ y_2=13,2;\ y_3=13,4;\ y_4=13,3;\ y_5=13,2$

$z_1=0,01;z_2=0,02;\ z_3=0,01;\ z_4=0,01;\ z_5=0,02$

$$F=3z^2x\sqrt{y}$$

4.7 x_1=4,33;x_2=4,32; x_3=4,31; x_4=4,32; x_5=4,35

y_1=7,3; y_2=7,4; y_3=7,2; y_4=7,5; y_5=7,2

z_1=11;z_2=12; z_3=13; z_4=11; z_5=12

$$F = x + \frac{y^2}{z}$$

4.8 x_1=5,3;x_2=5,6; x_3=5,4; x_4=4,9; x_5=5,1

y_1=11,01; y_2=11,02; y_3=11,07; y_4=11,04; y_5=11,03

z_1=6;z_2=7; z_3=8; z_4=9; z_5=6

$$F = \frac{y}{z^2} - x$$

4.9 x_1=12,1;x_2=12,4; x_3=12,3; x_4=11,9; x_5=12,0

y_1=8,31; y_2=8,32; y_3=8,31; y_4=8,33; y_5=8,29

z_1=0,01;z_2=0,03; z_3=0,04; z_4=0,02; z_5=0,03

$$F = 4x + 5y^2z$$

4.10 x_1=14,51;x_2=14,52; x_3=14,51; x_4=14,53; x_5=14,52

y_1=7,8; y_2=7,9; y_3=7,7; y_4=7,8; y_5=7,9

z_1=6,73;z_2=6,75; z_3=6,74; z_4=6,73; z_5=6,75

$$F = 3x + y^2z$$

4.11 a_1=0,12;a_2=0,16; a_3=0,13; a_4=0,14; a_5=0,15

b_1=4,13; b_2=4,11; b_3=4,15; b_4=4,12; b_5=4,11

c_1=6,1;c_2=6,2; c_3=6,1; c_4=6,3; c_5=6,4

$$F = 8b^2 - \frac{a}{c}$$

4.12 a_1=7,8;a_2=7,9; a_3=7,8; a_4=7,5; a_5=7,7

b_1=13,3; b_2=13,2; b_3=13,4; b_4=13,2; b_5=13,4

c_1=0,01;c_2=0,02; c_3=0,01; c_4=0,03; c_5=0,02

$$F = 3c^2\frac{a}{b}$$

4.13 a_1=4,12;a_2=4,13; a_3=4,11; a_4=4,16; a_5=4,13

b_1=6; b_2=8; b_3=7; b_4=9; b_5=7

c_1=7,31;c_2=7,32; c_3=7,33; c_4=7,36; c_5=7,34

$F = c^2ab^3$

4.14 a_1=5,3;a_2=5,6; a_3=5,7; a_4=5,4; a_5=5,2

b_1=26; b_2=28; b_3=27; b_4=29; b_5=27

c_1=0,11;c_2=0,12; c_3=0,11; c_4=0,13; c_5=0,12

$F = ca^3 + \frac{b}{a}$

4.15 a_1=6,3;a_2=6,6; a_3=6,7; a_4=6,4; a_5=6,5

b_1=10,1; b_2=10,2; b_3=10,3; b_4=10,2; b_5=10,1

c_1=1,22;c_2=1,21; c_3=1,19; c_4=1,20; c_5=1,23

$F = 4a + bc^2$

4.16 a_1=7,3;a_2=7,4; a_3=7,2; a_4=7,4; a_5=7,5

b_1=16,12; b_2=16,13; b_3=16,12; b_4=16,11; b_5=16,13

c_1=5;c_2=6; c_3=7; c_4=5; c_5=6

$F = 5a(a + bc^2)$

4.17 a_1=4,33;a_2=4,32; a_3=4,31; a_4=4,34; a_5=4,35

b_1=24; b_2=25; b_3=24; b_4=23; b_5=25

c_1=1,12;c_2=1,17; c_3=1,14; c_4=1,13; c_5=1,14

$F = ab + c^3$

4.18 a_1=44,3;a_2=44,4; a_3=44,1; a_4=44,3; a_5=44,2

b_1=4,12; b_2=4,13; b_3=4,11; b_4=4,15; b_5=4,12

c_1=0,11;c_2=0,12; c_3=0,11; c_4=0,13; c_5=0,12

$F = ac + b^2$

4.19 a_1=1,25;a_2=1,26; a_3=1,21; a_4=1,22; a_5=1,24

b_1=10,1; b_2=10,2; b_3=10,1; b_4=10,3; b_5=10,2

c_1=5,3;c_2=5,6; c_3=5,7; c_4=5,4; c_5=5,2

$F = ab^2 + \frac{b}{c}$

4.20 a_1=1,25;a_2=1,26; a_3=1,21; a_4=1,22; a_5=1,24

b_1=4,33; b_2=4,31; b_3=4,32; b_4=4,34; b_5=4,33

c_1=12;c_2=13; c_3=12,5; c_4=11; c_5=12,5

$$F = \frac{c + a^2}{b}$$

4.21 a_1=7,8;a_2=7,9; a_3=7,5; a_4=7,8; a_5=7,6

b_1=13,3; b_2=13,2; b_3=13,4; b_4=12,9; b_5=13,1

c_1=0,2;c_2=0,3; c_3=0,4; c_4=0,2; c_5=0,3

$$F = \frac{3c}{a} + b^2$$

4.22 a_1=5,3;a_2=5,6; a_3=5,4; a_4=5,2; a_5=5,1

b_1=11,01; b_2=11,02; b_3=11,03; b_4=11,04; b_5=11,07

c_1=6;c_2=7; c_3=5; c_4=7; c_5=8

$$F = \frac{b^2}{c^2} + a$$

4.23 a_1=12;a_2=13; a_3=11; a_4=12; a_5=14

b_1=6,3; b_2=6,7; b_3=6,4; b_4=6,6; b_5=6,4

c_1=0,12;c_2=0,13; c_3=0,15; c_4=0,11; c_5=0,14

$$F = b^2 + ac^3$$

4.24 a_1=12,1;a_2=12,2; a_3=12,1; a_4=12,3; a_5=12,4

b_1=8,3; b_2=8,4; b_3=8,2; b_4=8,3; b_5=8,4

c_1=1,2;c_2=1,3; c_3=1,2; c_4=1,1; c_5=1,5

$$F = ac^2 + 5b$$

4.25 a_1=7,3;a_2=7,2; a_3=7,5; a_4=7,3; a_5=7,4

b_1=4,33; b_2=4,31; b_3=4,32; b_4=4,34; b_5=4,33

c_1=12;c_2=13; c_3=12,5; c_4=11,5; c_5=12,5

$$F = \frac{ca^2 - b^2}{4}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ

Греческий алфавит

Α α	[альфа]	Ι ι	[йота]	Ρ ρ	[ро]
Β β	[бета]	Κ κ	[каппа]	Σ σ	[сигма]
Γ γ	[гамма]	Λ λ	[ламбда]	Τ τ	[тау]
Δ δ	[дельта]	Μ μ	[мю]	Φ φ	[фи]
Ε ε	[эпсилон]	Ν ν	[ню]	Χ χ	[хи]
Ζ ζ	[дзета]	Ξ ξ	[кси]	Υ υ	[юпсилон]
Η η	[эта]	Ο ο	[омикрон]	Ψ ψ	[пси]
Θ θ	[тэта]	Π π	[пи]	Ω ω	[омега]

Латинский алфавит

Aa	[а]	Nn	[эн]
Bb	[бэ]	Oo	[о]
Cc	[цэ]	Pp	[пэ]
Dd	[дэ]	Qq	[ку]
E e	[э]	R r	[эр]
F f	[эф]	S s	[эс]
G g	[гэ] [же]	T t	[тэ]
H h	[ха] [аш]	U u	[у]
I i	[и]	V v	[вэ]
J j	[йот] [жи]	W w	[дубль-вэ]
K k	[ка]	X x	[икс]
L l	[эль]	Y y	[игрек]
M m	[эм]	Z z	[зэт]

Некоторые математические обозначения

Знак	Значение	Пример
=	равно	4 = 4
$\neq$	не равно	$3 \neq 25$
≈	приблизительно	2,54 ≈ 2,5
>,<	больше, меньше	50>2, 4<39
≥	больше или равно	$a \geq b$
≤	меньше или равно	$a \leq b$
$\sqrt{\ }$	квадратный корень	$\sqrt{25} = 5$
!	факториал	3!=3 · 2 · 1 = 6
⇒	следует	*из формулы ⇒ что* *из формылы следует, что*
log_b	логарифм по основанию b	$log_2 3\ = 8$
e	основание натурального логарифма	2,718281…
lg	десятичный логарифм	lg100 = 2
const	постоянная величина	b = const
∑	сумма	
∏	произведение	
~	пропорционально	AB ~ CD
π (Pi)	число пи	π = 3,141
°	градус	10°1\`3\`\` десять градусов одна секунда три минуты
\`	минуты	
\`\`	секунды	
sin	синус	$\sin 30° = \frac{1}{2}$
cos	косинус	cos 90° = 0
tg	тангенс	$tg\ a = \frac{\sin a}{\cos a}$
ctg	котангенс	$ctg\ a = \frac{\cos a}{\sin a}$
arcsin	арксинус	$arcsin\ \frac{1}{2} = 30°$
arccos	арккосинус	$arccos \frac{1}{2} = 60°$
arctg	арктангенс	$arctg\ 1 = 45°$
sec	секанс	$\sec b = \frac{1}{\sin b}$
cosec	косеканс	$\text{cosec } b = \frac{1}{cos\ b}$
∃	существует	∃***x*** *– существует такой **x**, что…*
∄	не существует	∄***x*** *– не существуют такого **x**, что…*
ϵ	принадлежит	***x*** ϵ N –***x****принадлежит натуральным числам.*
∉	не принадлежит	***x*** ϵ N – ~~***x***~~*не принадлежит натуральным числам.*
N	натуральные числа	1,2,3,4…
Z	целые числа	…-2,-1,0,1,2…
R	рациональные числа	$\ldots \frac{1}{2}, 1\frac{5}{2}, \frac{4}{53} \ldots$

Основные и дополнительные единицы Международной системы (СИ)

Основные: метр (м) – единица длины;

килограмм (кг) – единица массы;

секунда (с) – единица времени;

ампер (А) – единица силы электрического тока;

кельвин (К) – единица термодинамической температуры;

моль (моль) – единица количества вещества;

кандела (кд) – единица силы света.

Дополнительные: радиан (рад) – единица для измерения плоского угла;

стерадиан (ср) – единица для измерения телесного угла.

Производные единицы СИ образовываются с помощью уравнений связи между физическими величинами.

Единицы, название которых произошло от фамилий учёных, в сокращенном виде пишутся с большой буквы. Десятичные кратные и дольные единицы, а также их наименования и обозначения образуются с помощью множителей и приставок, приведённых в таблице.

Приставки для обозначения десятичных кратных и дольных единиц

Наименование		Обозначение приставки		Множитель
		русское	международное	
кратные	экса	Э	E	10^{18}
	пета	П	P	10^{15}
	тера	Т	T	10^{12}
	гига	Г	G	10^{9}
	мега	М	M	10^{6}
	кило	к	k	10^{3}
	гекто	г	h	10^{2}
	дека	да	da	10^{1}
дольные	деци	д	d	10^{-1}
	санти	с	c	10^{-2}
	милли	м	m	10^{-3}
	микро	мк	μ	10^{-6}
	нано	н	n	10^{-9}
	пико	п	p	10^{-12}
	фемто	ф	f	10^{-15}
	атто	а	a	10^{-18}

Метрическая система измерений

Меры длины

1 километр (км)=1000 метрам (м)

1 метр (м)=10 дециметрам (дм)=100 сантиметрам (см)

1 дециметр (дм)=10 сантиметрам (см)

1 сантиметр (см)=10 миллиметрам (мм)

Меры площади

1 кв. километр (км^2)=1 000 000 кв. метрам (м^2)

1 кв. метр (м^2)=100 кв. дециметрам (дм^2)=10 000 кв. сантиметрам (см^2)

1 гектар (га)=100 арам (а)=10 000 кв. метрам (м^2)

1 ар (а)=100 кв. метрам (м^2)

Меры объёма

1 куб. метр (м^3)=1000 куб. дециметрам (дм^3)=1000 000 куб. сантиметрам (см^3)

1 куб. дециметр (дм^3)=1000 куб. сантиметрам (см^3)

1 литр (л)=1 куб. дециметру (дм^3)

1 гектолитр (гл)=100 литрам (л)

Меры веса

1 тонна (т)=1000 килограммам (кг)

1 центнер (ц)=100 килограммам (кг)

1 килограмм (кг)=1000 граммам (г)

1 грамм (г)=1000 миллиграммам (мг)

Некоторые приближенные значения

$$\pi \approx 3{,}1416,\ \ e \approx 2{,}7183,\ \ \sqrt{2} \approx 1{,}4142,\ \ \sqrt{3} \approx 1{,}7321,\ \ \sqrt{5} \approx 2{,}2361$$

Основные свойства действия с дробями

$$\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b}\ ;\ \ b \neq 0, \qquad c \neq 0$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c};\ \ \ c \neq 0$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{ad+cb}{cd};\ \ \ c \neq 0,\ \ d \neq 0$$

$$\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{ab}{cd};\ \ \ c \neq 0,\ \ d \neq 0$$

$$\frac{a}{c} \div \frac{b}{d} = \frac{ad}{cb};\ \ \ b, d, c \neq 0$$

Степень с рациональным показателем

$$a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a = a^n$$

$$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[n]{a^m}, \qquad \text{где } a > 0, \;\; m - \text{целое число}, n > 1 - \text{натуральное число}$$

$$\frac{1}{a^n} = a^{-n}, \qquad \text{где } a > 0$$

$$a^1 = a, \qquad a^0 = 1, \qquad \text{где } a \neq 0$$

Свойства степеней

$$a^{\boldsymbol{n}} a^m = a^{n+m}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

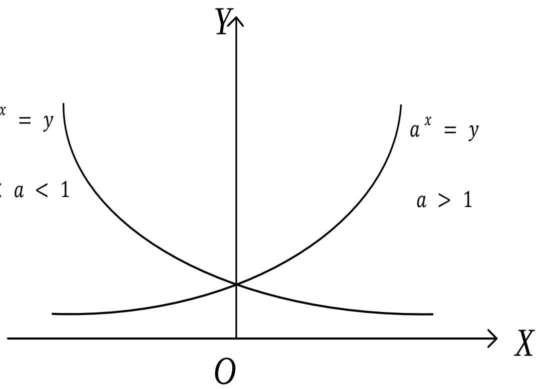
$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^m$$

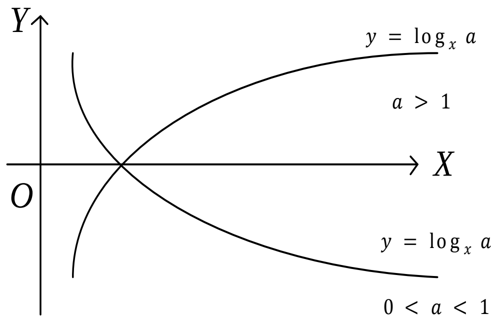
Квадратное уравнение и его решение

$$ax^2 + bx + c = 0$$

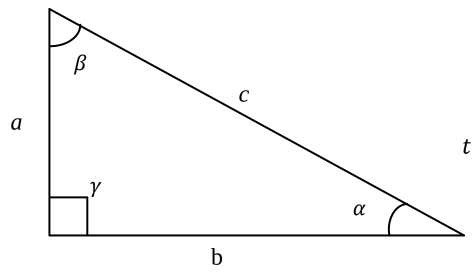
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Графики функций





Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника

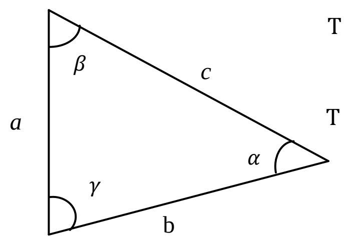


$$\sin\alpha = \frac{b}{c}, \qquad \cos\alpha = \frac{a}{c},$$

$$tg\,\alpha = \frac{a}{b}, \quad ctg\,\alpha = \frac{b}{a} = \frac{1}{tg\,\alpha}$$

*Теорема Пифагора***:** $c^2 = a^2 + b^2$

Соотношение между сторонами и углами треугольника



Теорема синусов: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$

Теорема косинусов: $a^2 = c^2 + b^2 - 2cb\cos\alpha$

Значение некоторых углов

α	***0°*** (0 рад)	***30°*** ($\frac{\pi}{6}$ рад)	***45°*** ($\frac{\pi}{4}$ рад)	***60°*** ($\frac{\pi}{3}$ рад)	***90°*** ($\frac{\pi}{2}$ рад)	***1800°*** (π рад)	***270°*** ($\frac{3\pi}{2}$ рад)	***360°*** (2π рад)
sinα	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	-1	0
cosα	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1	0	1
tgα	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	0
ctgα	-	$\sqrt{3}$	1	$1/\sqrt{3}$	0	∞	0	∞
secα	1	$2/\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	2	-	-1	-	1
cosecα	-	2	$\sqrt{2}$	$2/\sqrt{3}$	1	-	-1	-

Тригонометрические тождества и формулы

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$$

$$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{cos^2\alpha}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha\, tg\beta} \qquad \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha\, tg\beta}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\, tg\alpha}{1 - tg^2\alpha} \qquad \sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cos\beta$$

$$\cos 2\alpha = cos^2\alpha - sin^2\alpha$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos\alpha \cos\beta} \qquad \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos\alpha \cos\beta}$$

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

$$\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$$

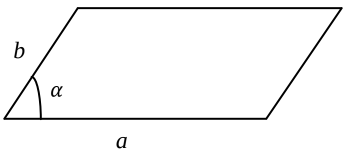
$$\sin\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$$

$$\sin\alpha = \frac{2\, tg\frac{\alpha}{2}}{1 + tg^2\frac{\alpha}{2}} \qquad \cos\alpha = \frac{1 - tg^2\frac{\alpha}{2}}{1 + tg^2\frac{\alpha}{2}}$$

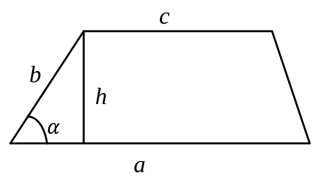
Формулы площади и объема некоторых фигур

Площадь круга $S = \pi R^2$, *длина окружности* $L = 2\pi R$

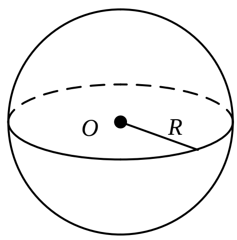
Площадь параллелограмма $S = ab\sin\alpha$



Площадь трапеции $S = \frac{(a+c)h}{2}$

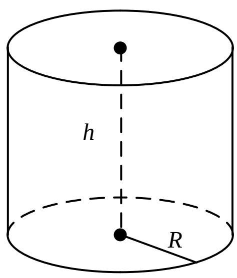


Площадь сферы $S = 4\pi R^2$, *объем шара* $V = \frac{4}{3}\pi R^3$



Площадь боковой поверхности цилиндра $S_{\text{бок}} = 2\pi Rh$,

Объем цилиндра $V = \pi R^2 h$



Объем прямоугольного параллелепипеда $V = abc$, $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$

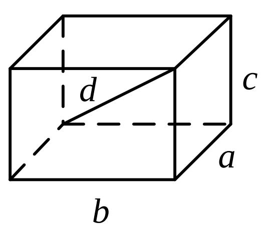


Таблица производных

Функция	***Производная***	***Функция***	***Производная***
C – const	0	sin x	cos$x$
kx + b	k	cos$x$	-sin x
x^n,n ≠ 0,n ≠ 1	nx^{n-1}	tg$x$	$\frac{1}{cos^2 x}$
ln x	$\frac{1}{x}$, x> 0	ctg$x$	$-\frac{1}{sin^2 x}$
$log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$, x> 0	arctg$x$	$\frac{1}{1+ x^2}$
e^x	e^x	arcsin$x$	$\frac{1}{\sqrt{1- x^2}}$
a^x	a^x ln a	arccos$x$	$-\frac{1}{\sqrt{1- x^2}}$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Выгодский М. Я. Справочник по высшей математике [Текст] : справочное издание / М.Я. Выгодский . - [Б. м.] : Астрель ; М. : АСТ, 2002. - 992 с.
2. Третьякова О. Н. Основы высшей математики для инженеров [Электронный ресурс] : учебное пособие / О. Н. Третьякова, Ю. В. Липовцев. - М.: Вузовская книга, 2009. - 484 с. - Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=129630
3. Шкуратник В. Л. Измерения в физическом эксперименте [Электронный ресурс] : учебник / В. Л. Шкуратник. - М.: Горная книга, 2006. - 326 с. Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=83802
4. Яворский Б.М. Справочник по физике для инженеров и студентов вузов/ Б. М. Яворский, А. А. Детлаф, А. К. Лебедев. -8-е изд., перераб. и испр.. -М.: ОНИКС: Мир и Образование, 2007.-1055 с.