Министерство образования и науки Российской Федерации

Амурский государственный университет

Н.А. Ермилова, А.В. Павельчук

МАТРИЦЫ, ОПРЕДЕЛИТЕЛИ, СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Учебно-методическое пособие

Благовещенск

Издательство АмГУ

2013

ББК 22.16я73
Е73

Рекомендовано
учебно-методическим советом университета

Рецензент:
Максимова Н.Н., доцент кафедры МАиМ АмГУ, канд. физ.-мат. наук

Ермилова, Н.А., Павельчук, А.В.

Е73 Матрицы, определители, системы линейных уравнений: Учебно-методическое пособие / Н.А. Ермилова, А.В. Павельчук. – Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2013. – 68 с.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов инженерно-технических специальностей университетов. Доступность теоретического обоснования методов решения задач, многообразие разобранных примеров помогут студентам при самостоятельной работе по изучению данного раздела математики.

ББК 32.973-018.1я73

ВВЕДЕНИЕ

При решении линейной системы уравнения умножают на подходящие числа, их складывают, переставляют и т.д. − по существу все эти операции проделываются с соответствующими коэффициентами уравнений системы. Так выделение таблицы коэффициентов системы линейных уравнений привело еще в XVII в. к понятию *матрицы*. (Немецкое − Matrize − от латинского matrix, что означает − источник, начало).

Попытки ответить на вопрос, как по матрице системы определить имеет ли она решение, привели к понятию *детерминанта* или *определителя*. Оно по своим идеям восходит к немецким математикам Г.Лейбницу (1646-1716), К.Гауссу (1777-1855), Г.Крамеру (1704-1725). Другое важное понятие – *ранг матрицы*, было введено немецким математиком Г. Фробениусом (1849-1917), который внес вклад в теорию матриц и разработал ее приложения в механике.

Во второй половине XIX в. матрицы независимо от систем уравнений стали объектом самостоятельных исследований. В современной математике матричный метод применяется очень широко благодаря своей универсальности. Без матричной техники немыслимы и многие разделы современной физики, механики, оптики, квантовой механики.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАТРИЦЫ. ВИДЫ МАТРИЦ

Матрицей размером $m\times n$ называется совокупность $m\cdot n$ чисел, расположенных в виде прямоугольной таблицы из m строк и n столбцов.

Матрицу обозначают заглавной латинской буквой. В общем виде матрицу размером $m\times n$ записывают в круглых скобках или используют двойные вертикальные линии:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}a_{m2}\ldots a_{mn}\end{pmatrix} \text{ или } A=\begin{Vmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}a_{m2}\ldots a_{mn}\end{Vmatrix}$$

Условимся $m\times n$ называть ***размерностью*** матрицы.

Например, матрица $\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 6\end{pmatrix}$ имеет размерность 2×2, а матрица $\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}$ − размерность 3×1.

Если в матрице число строк равно числу столбцов, то матрица называется ***квадратной,*** причём число ее строк или столбцов называется ***порядком*** *матрицы*

Матрица, в которой число строк не равно числу столбцов, называется ***прямоугольной***.

Различаются также матрицы, имеющие только одну строку или один столбец.

Матрица $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\end{pmatrix}$, у которой всего одна строка, называется ***матрицей – строкой*** (или строковой матрицей),а матрица $A=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\ldots\\a_{n1}\end{pmatrix}$, у которой всего один столбец, называется ***матрицей-столбцом.***

Числа, составляющие матрицу, называются ***элементами*** матрицы.

Элементы матрицы обозначаются малой буквой с двумя индексами a_{ij}; первый указывает номер строки, а второй – номер столбца. Например, элемент a_{23} стоит во 2-ой строке, 3-м столбце.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется ***нулевой*** и обозначается буквой O.

Например, $O=\begin{pmatrix}0 & 0 & \ldots & 0\end{pmatrix}$ или $O=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$

Главной диагональю квадратной матрицы назовём элементы матрицы, лежащие по главной диагонали, идущей из левого верхнего в правый нижний угол:

$$A=\begin{pmatrix}\underline{a_{11}} & a_{12}\ldots & a_{1n}\\ a_{21} & \underline{a_{22}}\ldots & a_{2n}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} & a_{m2}\ldots & \underline{a_{mn}}\end{pmatrix}$$

Вторую диагональ матрицы называют − ***побочной.***

Квадратная матрица, у которой все элементы, лежащие ниже главной диагонали, равны нулю, называется ***треугольной матрицей***:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Матрица, у которой все диагональные элементы равны единице, а остальные − нули, называется ***единичной матрицей*** и обозначается буквой *E*.

Например, единичная матрица 3-го порядка имеет вид:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Две матрицы *A* и *B* называются **равными**, если они имеют одинаковую размерность и их соответствующие элементы равны: $a_{ij} = b_{ij}$.

Так, например, если $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, то *A* = *B*, если $a_{11} = b_{11}, a_{21} = b_{21}$ и так далее.

2. ДЕЙСТВИЯ НАД МАТРИЦАМИ

Рассмотрим произвольную матрицу *A* размерностью $m \times n$. Составим матрицу A^T размерностью $n \times m$, у которой каждая строка является столбцом матрицы *A* с тем же номером (следовательно, каждый столбец является строкой матрицы *A* с тем же номером). Итак, если

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ то } A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Матрицу A^T называют ***транспонированной*** матрицей для данной матрицы *A*, а операцию перехода от *A* к A^T называют *транспонированием*.

Таким образом, транспонирование – это перемена местами строк и столбцов матрицы.

Связь между данной матрицей *A* и транспонированной можно записать в виде $(a_{ij}^T) = (a_{ji})$.

Пример 2.1. Найти матрицу, транспонированную матрице

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Поменяем местами строки и столбцы данной матрицы:

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Сложение матриц. Пусть матрицы *A* и *B* имеют одинаковую размерность. Тогда для того, чтобы сложить матрицы *A* и *B*, нужно к элементам матрицы *A* прибавить элементы матрицы *B*, стоящие на тех же местах.

О п р е д е л е н и е. *Суммой двух матриц A* и *B* называется матрица С, элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц-слагаемых. Например,

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \end{pmatrix}.$$

Согласно определению операция сложения (вычитания) распространяется только на матрицы одинаковой размерности.

Сложение матриц подчиняется коммутативному и ассоциативному законам:

$$A+B=B+A;$$

$$(A+B)+C=A+(B+C).$$

Умножение матрицы на число. Для того чтобы умножить матрицу *A* на число *k*, нужно каждый элемент матрицы *A* умножить на это число.

О п р е д е л е н и е. Произведением матрицы A на число k называется матрица, каждый элемент которой умножается на число k.

Например, если $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, то $kA=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{pmatrix}$

Для любых чисел a и b и матриц A и B выполняются равенства:

$$(\alpha\beta)A=\alpha(\beta A);$$

$$\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B;$$

$$(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A.$$

Пример 2.2. Найти $2A-B$, если $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. $2A=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 4 & 0 & -4 \end{pmatrix}$;

$$2A-B=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 4 & 0 & -4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 5 \\ 5 & -4 & -5 \end{pmatrix}.$$

Пример 2.3. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу $C = -3A+4B$.

Решение. Матрицу C найти нельзя, т.к. матрицы A и B имеют разные размерности (3×2 и 2×3 соответственно).

Умножение матриц. Перемножать можно квадратные матрицы одинаковой размерности, а из прямоугольных только те матрицы, у которых число столбцов первой матрицы совпадает с числом строк второй матрицы.

О п р е д е л е н и е. Произведением матрицы A размерностью $m\times n$ на матрицу B размерностью $n\times k$ называется новая матрица $C=AB$, размерность которой $m\times k$, а элементы которой равны сумме произведений элементов строк первой матрицы на соответствующие элементы столбцов второй матрицы.

На рис. 1 схематически изображено правило умножения третьей строки на третий столбец, в результате которого получается элемент c_{33} матрицы $C = AB$:

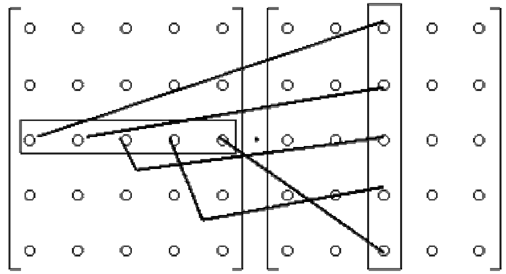


Рис. 1

Таким образом, например, чтобы получить элемент матрицы C, стоящий в 1-ой строке и 3-м столбце c_{13} нужно в 1-ой матрице взять 1-ую строку, во 2-ой – 3-й столбец, и затем элементы строки умножить на соответствующие элементы столбца и полученные произведения сложить. Аналогично получаются и другие элементы матрицы-произведения.

Например, произведение матриц с размерностями 2×2 и 2×3 находят следующим образом:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23} \end{pmatrix}.$$

В результате получается матрица размерностью 2×3.

Из определения следует, что произведение матриц, вообще говоря, не обладает свойством коммутативности, т.е. $AB \neq BA$

При умножении матрицы-строки на матрицу-столбец, например, получим:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 \end{pmatrix}.$$

Пример 2.4. Пусть $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = AB$.

Найти элементы c_{12}, c_{23}, c_{21} матрицы *C*.

Решение. Согласно схеме (рис.1) имеем:

$c_{12} = 0 - 2 + 3 = 1,$
$c_{23} = 0 + 0 + 1 = 1,$
$c_{21} = 0 - 3 + 1 = -2.$

Пример 2.5. Найти произведение матриц:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2 & 4+1 \\ 3+2+2 & 6+1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix};$

б) $\begin{pmatrix} -1 - 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-2+2 & -3-2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -7 \end{pmatrix};$

в) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$ − произведение найти нельзя, так как число столбцов первой матрицы не совпадает с числом строк второй.

Пример 2.6. Найти произведения матриц *AB* и *BA*, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Решение. $AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 \\ -1 \cdot 1 + (-3) \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \end{pmatrix}$. Произведение же *BA* найти невозможно, так как число столбцов первой матрицы (*B*) не совпадает с числом строк второй матрицы (*A*). Таким образом, как видим, что $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Можно проверить, что умножение матриц подчиняется ассоциативному и дистрибутивному законам, т.е.

$(AB)C = A(BC)$;

$(A+B)C = AC + BC$.

При умножении квадратной матрицы A на единичную матрицу E того же порядка вновь получим матрицу A, причём AE = EA = A (проверьте!).

Можно отметить следующий любопытный факт. Как известно произведение 2-х отличных от нуля чисел не равно 0. Для матриц это может не иметь места, т.е. произведение 2-х ненулевых матриц может оказаться равным нулевой матрице.

Например, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, то $AD = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Упражнения

Задание 1. Найти значение многочлена $f(A)$ от матрицы *A*.

	$f(x) = 3x^2 - 4, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.
2	$f(x) = x^2 - 3x + 1, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.
3	$f(x) = 3x^2 - 2x + 5, \; A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$

Задание 2. Вычислить.

1	$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$	2	$2\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	4	$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}$	6	$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$	8	$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot$

Задание 3. Решить матричные уравнения, применяя правило умножения матриц.

1	$\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$	2	$X\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 3 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$
3	$X\cdot\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 6 & 2\end{pmatrix}$	4	$\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & -2\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 6\end{pmatrix}$

3. ПОНЯТИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ

Рассмотрим *квадратную* матрицу второго порядка

$$A=\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{pmatrix}.$$

О п р е д е л е н и е. *Определителем (детерминантом)* второго порядка, соответствующим матрице A, называется число, равное $a_1 b_2 - a_2 b_1$ и обозначаемое символом $\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}$.

Определитель матрицы A обозначается либо «$\det A$», либо «$|A|$», либо просто значком «Δ» (Δ − дельта, буква греческого алфавита).

Итак, $\det A=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=a_1 b_2 - a_2 b_1$

Чтобы найти определитель второго порядка, нужно из произведения элементов главной диагонали вычесть произведение элементов побочной диагонали.

Например, вычислим определители второго порядка:

$$\begin{vmatrix}2 & 5\\ 3 & -4\end{vmatrix}=-8-15=-23;\quad \begin{vmatrix}0 & -3\\ 2 & 1\end{vmatrix}=0+6=6.$$

Аналогично можно рассмотреть матрицу третьего порядка и соответствующий ей определитель.

Понятие определителя существует только для квадратных матриц

О п р е д е л е н и е. *Определителем (детерминантом) третьего порядка*, соответствующим матрице $A=\begin{pmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{pmatrix}$, называется число, равное $a_1b_2c_3+b_1c_2a_3+c_1a_2b_3-c_1b_2a_3-b_1a_2c_3-a_1c_2b_3$.

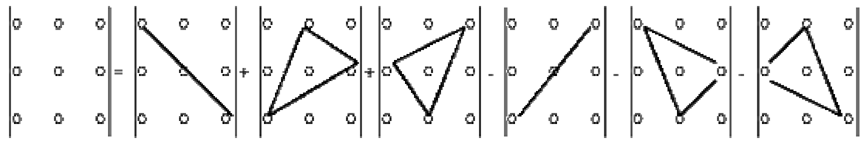
Итак, по определению,

$$\det A=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}=a_1 b_2 c_3+b_1 c_2 a_3+c_1 a_2 b_3-c_1 b_2 a_3-b_1 a_2 c_3-$$

$$-a_1 c_2 b_3. \qquad (*)$$

В отличие от матрицы, которая представляет собой таблицу чисел, определитель− это число, которое определённым образом ставится в соответствие матрице.

Для запоминания формулы (*) можно воспользоваться схемой, называемой *правилом треугольников* (или правилом Саррюса):



Можно вычислить определитель третьего порядка путем дописывания столбцов по схеме (пример 3.1, способ 2).

Пример 3.1. Способ 1.

$$\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & 2 & 1\\ 2 & -2 & 0\end{vmatrix}=1\cdot2\cdot0+(-1)\cdot1\cdot2+3\cdot(-2)\cdot2-2\cdot2\cdot2-3\cdot(-1)\cdot0-$$

$$-(-2)\cdot1\cdot1=-2-12-8+2=-20.$$

Способ 2.

$$\left|\begin{matrix}1 & -1 & 2\\ 3 & 2 & 1\\ 2 & -2 & 0\end{matrix}\right|\begin{matrix}1 & -1\\ 3 & 2\\ 2 & -2\end{matrix}\Bigg|=1\cdot2\cdot0+(-1)\cdot1\cdot2+2\cdot3\cdot(-2)-2\cdot2\cdot2-1\cdot1\cdot(-2)-$$

$$-(-1)\cdot3\cdot0=-2-12-8+2=-20.$$

Определитель порядка выше третьего можно вычислить, если воспользоваться свойствами определителя, которые будут рассмотрены ниже.

Упражнения

Задание 1. Вычислить определитель по правилу Саррюса.

	$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 5 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 4 & -3 & -2 \\ -1 & 5 & -2 \end{vmatrix}$
	$\begin{vmatrix} 5 & 5 & -1 \\ -3 & -3 & 4 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} -2 & -4 & 3 \\ -1 & -3 & 1 \\ 5 & 3 & -2 \end{vmatrix}$
	$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 4 \\ -4 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} -2 & 3 & -4 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

Задание 2. Вычислить определитель при помощи дописывания столбцов.

	$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 4 \\ -4 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} -2 & 3 & -4 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$
	$\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \\ -1 & 4 & -1 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} -3 & 5 & 2 \\ -3 & 4 & 3 \\ 1 & -4 & -2 \end{vmatrix}$
	$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & -3 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 5 & -3 & -5 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

4. МИНОРЫ И АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДОПОЛНЕНИЯ

Пусть имеется определитель $n-$го порядка матрицы *A*:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Выделим в нем *k* строк и *k* столбцов. Элементы, стоящие на пересечении этих строк и столбцов, образуют матрицу порядка *k*. Определитель этой матрицы называется *минором k-го порядка матрицы A*.

Если вычеркнуть строки и столбцы матрицы А, на пересечении которых стоит этот минор, то оставшиеся элементы составят минор M' порядка $n-k$, который называют дополнительным минором к минору *M*.

О п р е д е л е н и е. *Минором* M_{ij} элемента a_{ij} определителя $n-$го порядка, называется определитель $(n-1)$-го порядка, полученный из данного вычёркиванием $i-$й строки и $j-$го столбца.

Таким образом, минор M_{ij} является дополнительным к минору a_{ij}, состоящему из одного элемента.

Например, $M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$ – минор, полученный вычёркиванием из определителя $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ первой строки и второго столбца.

О п р е д е л е н и е. *Алгебраическим дополнением* элемента a_{ij} определителя называется его минор M_{ij}, умноженный на $(-1)^{i+j}$. Алгебраическое дополнение элемента a_{ij} обозначается A_{ij}. Таким образом,

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Пример 4.1. Найти миноры M_{23}, M_{33}, M_{21} определителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ -2 & 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

Решение. $M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 5 + 6 = 11$ (вычеркнуты вторая строка и третий столбец);

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 6 = -7; \quad M_{21} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 20 = -17.$$

Пример 4.2. Найти алгебраические дополнения A_{23}, A_{33}, A_{21} определителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ -2 & 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

Решение. $A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = -(5+6) = -11.$

Аналогично находим:

$$A_{33} = (-1)^6 \cdot M_{33} = -7; \quad A_{21} = (-1)^3 \cdot M_{21} = 17.$$

5. СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

Иллюстрацию свойств для простоты изложения приведем для определителя второго порядка.

Свойство 1. При транспонировании матрицы ее определитель не меняется.

Действительно, $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12} = |A^T| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}.$

Свойство 2. Если все элементы некоторой строки (столбца) определителя равны нулю, то определитель равен нулю.

Например, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = a_{11} \cdot 0 - 0 \cdot a_{12} = 0.$

Свойство 3. Если все элементы некоторой строки (столбца) определителя имеют общий множитель, то его можно вынести за знак определителя.

Действительно,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \lambda a_{22} - \lambda a_{21} \cdot a_{12} = \lambda(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = \lambda|A|.$$

Свойство 4. При перестановке двух параллельных строк (столбцов) определителя его знак меняется на противоположный.

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{21} \cdot a_{12} - a_{11} \cdot a_{22} = -(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Свойство 5. Если определитель имеет две одинаковых строки (два столбца), то он равен нулю.

Действительно, пусть определитель любого порядка имеет два одинаковых параллельных ряда. Поменяем их местами, тогда на основании свойства 4 он поменяет знак, а с другой стороны определитель не изменится, т.е. $|A| = -|A| \Rightarrow 2|A| = 0$ или $|A| = 0$.

Свойство 6. Определитель, у которого соответствующие элементы двух строк (столбцов) пропорциональны, равен нулю.

Действительно, в силу свойства 3, коэффициент пропорциональности можно вынести за знак определителя. В результате получится определитель с двумя одинаковыми параллельными рядами, который равен нулю на основании свойства (5).

Свойство 7. Определитель, у которого каждый элемент некоторой строки или некоторого столбца является суммой двух слагаемых, равен сумме двух определителей, у первого из которых в указанном ряду стоят первые слагаемые, а у второго − вторые слагаемые. Элементы, стоящие на остальных местах у всех трех определителей, одни и те же. Например,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31} + a''_{31} & a'_{32} + a''_{32} & a'_{33} + a''_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a''_{31} & a''_{32} & a''_{33} \end{vmatrix}$$

Для определителя второго порядка, например, имеем:

$$\begin{vmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_1 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Предлагается проверить самостоятельно.

Свойство 8. Если к элементам некоторой строки (столбца) определителя прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на один и тот же множитель λ, то значение определителя не изменится. Это свойство следует из свойств 7,3,6:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21}+\lambda a_{11} & a_{22}+\lambda a_{12} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Свойство 9. (Теорема Лапласа). Определитель равен сумме произведений элементов любого ряда на соответствующие алгебраические дополнения элементов этого ряда, т.е.

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}, \quad i = \overline{1,n};$$

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}, \quad j = \overline{1,n}.$$

Например, вычислим определитель $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, используя теорему Лапласа. Разложим его, например, по элементам 2-го столбца:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3\cdot\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 0\cdot\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -3\cdot(2-8) - 1\cdot(1-10) = 27.$$

Итак, определителем третьего порядка, соответствующим данной квадратной матрице третьего порядка, называется число, обозначаемое и получаемое следующим образом:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Таким образом, теорема Лапласа позволяет понизить порядок определителя.

Свойство 10. (*Теорема аннулирования*) Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) матрицы на алгебраические дополнения элементов параллельной ей строки (столбца), равна нулю.

Рассмотрим для примера определитель $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.

Докажем, например, что $a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} = 0$.

Так как $A_{21} = -a_{12}, A_{22} = a_{11}$, то

$a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} = a_{11}(-a_{12}) + a_{12}a_{11} = 0$.

Свойство 11. Определитель произведения двух матриц одинакового порядка равен произведению определителей, т.е. $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ (предлагается показать на примере определителей второго порядка).

Пример 5.1. Вычислить определитель третьего порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Решение. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 3\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 4\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 8+3-8 = 3.$

Пример 5.2. Вычислить определитель 4-го порядка

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 5 \\ -1 & 6 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Решение. Опираясь на свойства определителя, преобразуем его го элемента. Для примера возьмем за основу первый столбец. Первую строку умножим на (-2) и сложим со второй, затем первую строку умножим на (-3) и сложим с третьей, и к четвертой строке прибавим первую. В результате получим:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 5 \\ -1 & 6 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & -6 & -3 & 3 \\ 0 & -10 & -10 & 8 \\ 0 & 9 & 6 & 2 \end{vmatrix}.$$

По теореме Лапласа разложим полученный определитель по элементам первого столбца, в котором все элементы, кроме одного, равны нулю:

$$|A| = 1\cdot\begin{vmatrix} -6 & -3 & 3 \\ -10 & -10 & 8 \\ 9 & 6 & 2 \end{vmatrix} + 0\cdot A_{21} + 0\cdot A_{31} + 0\cdot A_{41} = -3\cdot(-2)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 5 & -4 \\ 9 & 6 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 6(20 - 36 - 30 + 45 + 48 - 10) = 6\cdot 37 = 222.$$

Пример 5.3. Решить уравнение

$$\begin{vmatrix} x+3 & 2+x & 4 \\ 3 & x-1 & 3 \\ 4 & x & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Решение. Разложим определитель по элементам первой строки:

$$(x+3)\cdot\begin{vmatrix} x-1 & 3 \\ x & 4 \end{vmatrix} - (2+x)\cdot\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + 4\cdot\begin{vmatrix} 3 & x-1 \\ 4 & x \end{vmatrix} = 0,$$

Откуда следует:

$$(x + 3)(4x - 4 - 3x) + 4(3x - 4x + 4) = 0,$$

$$(x + 3)(x - 4) + 4(-x + 4) = 0,$$

$$(x - 4)(x - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 4, x_2 = 1.$$

При вычислении определителей четвёртого, пятого порядков понижают их порядок, используя свойста определителя.

Упражнения

Задание 1. Вычислить определитель путем разложения по элементам любой строки или столбца.

	$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ -3 & -4 & 5 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} -4 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$
	$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -5 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 5 & 4 & -4 \\ -3 & -3 & 1 \end{vmatrix}$

	$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 5 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 4 & -3 & -2 \\ -1 & 5 & -2 \end{vmatrix}$
	$\begin{vmatrix} -3 & 5 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -5 & -3 & 5 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix}$
	$\begin{vmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 5 & -3 & 4 \\ 5 & -3 & 5 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -4 & -3 & 3 \\ -2 & -1 & 5 \end{vmatrix}$

Задание 2. Вычислить определитель, понизив его порядок.

	$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -4 & 5 \\ -2 & 1 & 2 & -2 \\ 5 & -3 & -2 & 4 \\ 3 & 5 & 7 & 3 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} 5 & -2 & -2 & 3 \\ -3 & 5 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & -3 & 5 \\ -4 & -1 & 4 & -6 \end{vmatrix}$
	$\begin{vmatrix} -1 & -4 & 2 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & -4 \\ 2 & -1 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & -4 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} 6 & -3 & -2 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & -2 \\ 4 & -5 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & -4 & 6 \end{vmatrix}$
	$\begin{vmatrix} 6 & 2 & -1 & 4 \\ 4 & -3 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -4 & 7 \\ 5 & 4 & 3 & 3 \\ 4 & -3 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 4 \end{vmatrix}$

Задание 3. Вычислить определитель пятого порядка.

	$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -3 & -2 \\ 3 & -3 & -2 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 3 & 3 & -1 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} -2 & -1 & 3 & 4 & -1 \\ -3 & 1 & -2 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -2 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -3 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$
	$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & -3 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & -4 & 4 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & 1 & -3 & -2 \\ 1 & -3 & 2 & -1 & -2 \end{vmatrix}$

6. ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

Понятие *обратной матрицы* вводится только для *квадратных матриц*.

Если А – квадратная матрица, то обратной для неё матрицей называется матрица, обозначаемая A^{-1} и удовлетворяющая условию

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1}A = E\,.$$

Теорема. Для того чтобы квадратная матрица A имела обратную матрицу, необходимо и достаточно, чтобы её определитель $|A|$ был отличен от нуля.

Доказательство. Необходимость. Пусть для матрицы А существует обратная матрица A^{-1}. Покажем, что $|A| \neq 0$.

Заметим, что согласно свойству 11 определителей

$$|AB| = |A| \cdot |B|\,.$$

Предположим, что $|A| = 0$. Тогда $|AA^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}| = 0$. Но с другой стороны по определению $|AA^{-1}| = |E| = 1$. Полученное противоречие и доказывает, что $|A| \neq 0$.

Достаточность. Для простоты доказательство проведём для случая матрицы третьего порядка. Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{pmatrix}$ и $|A| \neq 0$.

Покажем, что в этом случае обратной матрицей будет матрица

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{13}}{|A|} \\ \frac{A_{21}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \frac{A_{23}}{|A|} \\ \frac{A_{31}}{|A|} & \frac{A_{32}}{|A|} & \frac{A_{33}}{|A|} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} алгебраическое дополнение элемента a_{ij}. Найдём произведение $A \cdot A^{-1} = C$. Заметим, что все диагональные элементы матрицы C будут равны единице. Действительно, например,

$$c_{11} = a_{11}\frac{A_{11}}{|A|} + a_{12}\frac{A_{12}}{|A|} + a_{13}\frac{A_{13}}{|A|} = \frac{1}{|A|}\left(a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}\right) = \frac{1}{|A|} \cdot |A| = 1.$$ Аналогично по теореме о разложении определителя по элементам строки можно доказать, что $c_{22} = c_{33} = 1$.

Кроме того, все недиагональные элементы матрицы С равны нулю (свойство 10 определителей). Например,

$$c_{12} = a_{11}\frac{A_{21}}{|A|} + a_{12}\frac{A_{22}}{|A|} + a_{13}\frac{A_{23}}{|A|} = \frac{1}{|A|}\left(a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23}\right) =$$

$$= \frac{1}{|A|} \cdot \left(-a_{11}\begin{vmatrix} a_{12}a_{13} \\ a_{32}a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}\begin{vmatrix} a_{11}a_{13} \\ a_{31}a_{33} \end{vmatrix} - a_{13}\begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{31}a_{32} \end{vmatrix} \right) = 0$$

Следовательно, $AB = E$. Аналогично можно показать, что $BA = E$. Поэтому $B = A^{-1}$.

Таким образом, теорема содержит способ нахождения обратной матрицы.

Если условия теоремы выполнены, то матрица обратная матрице A, находится следующим образом:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11}A_{21}A_{31} \\ A_{12}A_{22}A_{32} \\ A_{13}A_{23}A_{33}\end{pmatrix}, \qquad (1)$$

где A_{ij} –алгебраические дополнения элементов a_{ij} данной матрицы A.

Итак, чтобы найти обратную матрицу A^{-1}, нужно:

1) Найти определитель матрицы ,если он отличен от нуля, то

2) найти алгебраические дополнения A_{ij} всех элементов матрицы A и составить матрицу A', элементами которой являются алгебраические дополнения A_{ij};

3) составить матрицу, транспонированную полученной матрице A', и умножить её на $\frac{1}{|A|}$. Это и будет искомая обратная матрица $A^{-1}=\frac{1}{|A|}(A')^T$.

Для матриц второго порядка, например, обратной будет следующая матрица: $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11}A_{21} \\ A_{12}A_{22}\end{pmatrix}$.

Пример 6.1. Найти матрицу, обратную матрице $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2\end{pmatrix}$, сделать проверку.

Решение. Найдем определитель: $|A| = 2$.

Найдем алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$$A_{11}=2,\ A_{12}=0,\ A_{21}=1,\ A_{22}=1.$$

Далее имеем: $A'=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $(A')^T=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $A^{-1}=\frac{1}{|A|}(A')^T=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

Проверка: $A^{-1}\cdot A=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}=E.$

Аналогично $A\cdot A^{-1}=E$.

Пример 6.2. Найти элементы a_{12}^{-1} и a_{31}^{-1} матрицы A^{-1}, обратной даннойматрице $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2\end{pmatrix}$.

Решение. Вычислим определитель данной матрицы: $|A| = 4$.

Тогда $a_{12}^{-1}=\frac{1}{4}A_{21}=-\frac{1}{4}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2\end{vmatrix}=0$, $a_{31}^{-1}=\frac{1}{4}A_{13}=\frac{1}{4}\cdot\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1\end{vmatrix}=\frac{3}{4}$.

Пример 6.3. Для матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$ найти обратную.

Решение.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix}=-9;\ A_{11}=6,\ A_{12}=-6,\ A_{13}=3,\ A_{21}=-4,\ A_{22}=2,$$

$$A_{23}=-1,\ A_{31}=2,\ A_{32}=-1,\ A_{33}=-4.$$

$$A'=\begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -4 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -4\end{pmatrix},\ (A')^T=\begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -6 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -4\end{pmatrix},$$

$$A^{-1}=-\frac{1}{9}(A')^T=\begin{pmatrix} -1/3 & 4/9 & -2/9 \\ 2/3 & -2/9 & 1/9 \\ -1/3 & 1/9 & 4/9\end{pmatrix}.$$

Упражнения

Вычислить обратную матрицу.

	$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & -4 \\ 4 & 2 & -3\end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ -4 & 3 & 2\end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 5 & -2 & 3 \\ 2 & -5 & 1\end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} -2 & -4 & 1 \\ 3 & 4 & -3 \\ 2 & 5 & -3\end{pmatrix}$

	$\begin{pmatrix} -3 & 5 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -5 & -3 & 5 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

7. МАТРИЧНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пусть дана система из 3-х уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \qquad (2)$$

Рассмотрим матрицу, составленную из коэффициентов при неизвестных, называемую матрицей системы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

и матрицы-столбцы неизвестных и свободных членов:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Найдем произведение AX:

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix},$$

т.е. в результате произведения мы получаем левые части уравнений данной системы. Тогда, пользуясь определением равенства матриц, данную систему можно записать в виде:

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

или короче:

$$A \cdot X = B \qquad (3)$$

Уравнение (3) называют *матричным уравнением* данной системы.

Здесь матрицы A и B известны, а матрица X неизвестна. Её и нужно найти, т.к. её элементы являются решением данной системы.

Пусть определитель матрицы A отличен от нуля: $|A| \neq 0$. Тогда матричное уравнение (3) решается следующим образом.

Умножим обе части уравнения слева на матрицу A^{-1}, обратную матрице A:

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Rightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B.$$

Поскольку

$$A^{-1} \cdot A = E \text{ и } E \cdot X = X,$$

то получаем решение матричного уравнения (3) в виде:

$$X = A^{-1} \cdot B. \qquad (4)$$

Заметим, что поскольку обратную матрицу можно найти только для квадратных матриц, то матричным методом можно решать только те системы, в которых число уравнений совпадает с числом неизвестных.

Однако, матричная запись системы вида (2) с любым числом неизвестных возможна и в случае, когда число уравнений не равно числу неизвестных, однако тогда матрица A не будет квадратной и поэтому нельзя найти решение системы в виде (4).

Пример 7.1. Решить систему уравнений $\begin{cases} 3x + 2y = 7, \\ x - y = 4 \end{cases}$ матричным методом.

Решение. Для данной системы $\begin{cases} 3x + 2y = 7, \\ x - y = 4. \end{cases}$ имеем:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad X = A^{-1}B.$$

Найдем матрицу, обратную матрице А.

$$|A| = -5,\ A' = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix},\ A^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$X = A^{-1}B = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -15 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow x = 3, y = -1$$

Таким образом, $x = 3$, $y = -1$.

Пример 7.2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 10, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 23, \\ x_2 + 2x_2 = 13. \end{cases}$$

Решение. Решим систему уравнений при помощи обратной матрицы. Составим матрицы из коэффициентов, неизвестных и свободных членов:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},\quad A = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 10 \\ 23 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

Найдем главный определитель системы:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 12 - 1 = -9.$$

Составим матрицу из алгебраических дополнений:

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -4 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix},$$

после чего вычислим обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (A')^T = -\frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -6 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Теперь найдем матрицу неизвестных *X*:

$$X = A^{-1}B = -\frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -6 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 23 \\ 13 \end{pmatrix} = -\frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} -36 \\ -27 \\ -45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Итак, $x_1 = 4; x_2 = 3; x_3 = 5$.

Пример 7.3. Решить матричное уравнение: $XA + B = C$, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & -5 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Выразим искомую матрицу X из заданного уравнения. $XA = C - B$, $X = (C - B) \cdot A^{-1}$. Найдем матрицы $C - B$ и A^{-1}.

$C - B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; определитель системы равен $|A| = -1$,

$$A' = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix},\ (A')^T = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}, A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix},$$

откуда имеем: $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Проверка: $X \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$,

$$XA + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = C$$

Пример 7.4. Решить матричное уравнение $AX + B = C$, где

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & -8 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Решение. Из данного уравнения получаем:

$$X = A^{-1}(C - B),\ C - B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},\ \det A = -1,\ A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -12 \\ 2 & 21 \end{pmatrix}.$$

Упражнения

Задание 1. Найти матрицу, обратную данной.

	$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 & 3 \\ -4 & 2 & -2 & 7 \\ 4 & 1 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & -6 \\ -2 & -1 & -3 & 4 \\ -2 & 5 & 5 & -1 \\ 5 & -3 & 4 & -4 \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} 6 & -4 & -1 & -4 \\ 2 & 6 & 5 & 2 \\ -4 & 5 & -1 & -2 \\ -1 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 & 6 \\ -2 & 4 & -1 & -4 \\ -3 & 5 & -5 & -1 \\ 6 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 & 4 \\ -4 & 3 & -4 & -2 \\ 5 & 4 & -3 & 3 \\ 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Задание 2. Решить матричное уравнение.

1.	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$	2.	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
3.	$X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}$	4.	$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

Задание 3. Решить систему уравнений матричным методом.

	$\begin{cases} -3x_1 - x_2 - 2x_3 = -7, \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 9, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 9. \end{cases}$		$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -9, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -6. \end{cases}$

	$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 10, \\ x_1 - 3x_2 - 3x_3 = -6, \\ 2x_1 - x_2 + 2\,x_3 = 6. \end{cases}$		$\begin{cases} -2x_1 - 2x_2 + x_3 = 9, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 9, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -7. \end{cases}$
	$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_1 + -2x_2 - x_3 = -5, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 = 7. \end{cases}$		$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = -2, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$

8. ПРАВИЛО КРАМЕРА

Рассмотрим систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \qquad (5)$$

Определитель третьего порядка, соответствующий матрице системы, т.е. составленный из коэффициентов при неизвестных

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad (6)$$

называется *главным определителем* системы.

Составим ещё три определителя, заменив в определителе Δ последовательно первый, второй и третий столбцы на столбец из свободных членов:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{12} & b_1 & a_{13} \\ a_{22} & b_2 & a_{23} \\ a_{32} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} & b_1 \\ a_{22} & a_{22} & b_2 \\ a_{32} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}. \qquad (7)$$

Полученные таким образом определители $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ называются *вспомогательными определителями* данной системы.

Теорема (правило Крамера). Если главный определитель системы (6) отличен от нуля, т.е. $\Delta \neq 0$, то рассматриваемая система имеет одно и только одно решение, причём $x = \frac{\Delta_1}{\Delta}$; $y = \frac{\Delta_2}{\Delta}$; $z = \frac{\Delta_3}{\Delta}$.

Доказательство. Рассмотрим систему трех уравнений с тремя неизвестными (5).

Умножим первое уравнение системы на алгебраическое дополнение A_{11} элемента a_{11}, второе уравнение – на A_{21} итретье – на A_{31}.

$$\begin{cases} A_{11}a_{11}x_1 + A_{11}a_{12}x_2 + A_{11}a_{13}x_3 = A_{11}b_1, \\ A_{21}a_{21}x_1 + A_{21}a_{22}x_2 + A_{21}a_{23}x_3 = A_{21}b_2, \\ A_{31}a_{31}x_1 + A_{31}a_{32}x_2 + A_{31}a_{33}x_3 = A_{31}b_3. \end{cases}$$

Сложим эти уравнения:

$$\begin{aligned} &(A_{11}a_{11} + A_{21}a_{21} + A_{31}a_{31})x_1 + (A_{11}a_{12} + A_{21}a_{22} + A_{31}a_{32})x_2 + \\ &+ (A_{11}a_{13} + A_{21}a_{23} + A_{31}a_{33})x_3 = A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + A_{31}b_3, \end{aligned} \qquad (*)$$

Рассмотрим каждую из скобок в левой части и правую часть этого уравнения. По теореме о разложении определителя по элементам 1-го столбца:

$$A_{11}a_{11} + A_{21}a_{21} + A_{31}a_{31} = \Delta.$$

Далее рассмотрим коэффициенты при x_2 и x_3. Они равны нулю согласно теореме аннулирования (свойство 10 определителей). Действительно,

$$A_{11}a_{12} + A_{21}a_{22} + A_{31}a_{32} = a_{12}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{22}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{32}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Аналогично можно показать, что и $A_{11}a_{13} + A_{21}a_{23} + A_{31}a_{33} = 0$.

Наконец, несложно заметить, что

$$A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + A_{31}b_3 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \Delta_1.$$

Таким образом, из равенства (*) получаем равенство:

$$\Delta \cdot x_1 = \Delta_1 \Rightarrow x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$$

Аналогично выводятся равенства

$$\Delta \cdot x_2 = \Delta_2 \text{ и } \Delta \cdot x_3 = \Delta_3 \Rightarrow x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

откуда и следует утверждение теоремы.

Следствие.

Если главный определитель системы отличен от нуля, т.е. $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение: $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$, $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$.

Если главный определитель системы равен нулю, то возможны два случая:

а) система имеет бесконечное множество решений, если все вспомогательные определители равны нулю;

б) система не имеет решений (несовместна), когда хотя бы один из вспомогательных определителей отличен от нуля.

Пример 8.1. Решить систему уравнений $\begin{cases} x + 2y - z = 2, \\ 2x - 3y + 2z = 2, \\ 3x + y + z = 8. \end{cases}$

Решим данную систему методом Крамера. Для этого найдем главный и вспомогательные определители системы.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 + 12 - 2 - 9 - 2 - 4 = -8.$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -6 + 32 - 2 - 24 - 4 - 4 = -8.$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 2+12-16+6-16-4=-16.$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 8 \end{vmatrix} = -24+12+4+18-2-32=-24.$$

По правилу Крамера найдем: $x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}=1;\ y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}=2;\ z=\dfrac{\Delta_z}{\Delta}=3.$

Пример 8.2. Решить систему уравнений $\begin{cases} px+30y=p+30, \\ 30x+py=0 \end{cases}$ при различных значениях параметра p.

Решение. Найдем главный определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} p & 30 \\ 30 & p \end{vmatrix} = p^2-30^2.$$

Система имеет единственное решение, если $\Delta \neq 0$, т.е. $p \neq \pm 30$.

Найдем вспомогательные определители:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} p+30 & 30 \\ 0 & p \end{vmatrix} = p\cdot(p+30),\ \Delta_y = \begin{vmatrix} p & p+30 \\ 30 & 0 \end{vmatrix} = -30\cdot(p+30).$$

Итак, при $p \neq \pm 30$ система имеет решение

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{p}{p-30},\quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{-30}{p-30}.$$

При $p = 30$ получаем систему уравнений $\begin{cases} 30x+30y=60, \\ 30x+30y=0, \end{cases}$

которая не имеет решений.

При $p = –30$ система принимает вид:

$$\begin{cases} -30x+30y=0, \\ 30x-30y=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 30x-30y=0, \\ 30x-30y=0 \end{cases}$$

и, следовательно, имеет бесконечное множество решений: $x = y$.

Упражнения

Решить систему линейных уравнений методом Крамера.

	$\begin{cases} -3x_1-x_2-2x_3=-7, \\ -x_1+3x_2-2x_3=9, \\ 2x_1+2x_2+x_3=9. \end{cases}$		$\begin{cases} -x_1+2x_2-x_3=3, \\ x_1+2x_2+2x_3=-9, \\ x_1-x_2+2x_3=-6. \end{cases}$
	$\begin{cases} 3x_1-x_2+3x_3=10, \\ x_1-3x_2-3x_3=-6, \\ 2x_1-x_2+2x_3=6. \end{cases}$		$\begin{cases} -2x_1-2x_2+x_3=9, \\ x_1-2x_2+2x_3=9, \\ 2x_1+x_2-x_3=-7. \end{cases}$
	$\begin{cases} x_1+3x_2+3x_3=2, \\ x_1+-2x_2-x_3=-5, \\ -3x_1+2x_2+x_3=7. \end{cases}$		$\begin{cases} x_1-x_2+3x_3=2, \\ 3x_1+4x_2+3x_3=-2, \\ x_1-x_2+2x_3=3. \end{cases}$

9. МЕТОД ГАУССА

Ранее рассмотренные методы можно применять при решении только тех линейных систем, в которых число уравнений совпадает с числом неизвестных, причём определитель системы должен быть отличен от нуля.

Метод Гаусса является более универсальным и пригоден для систем с любым числом уравнений. Он заключается в последовательном исключении неизвестных из уравнений системы. Для этого данная система преобразуется в *эквивалентную (равносильную)* методом *элементарных преобразований*.

Элементарные преобразования системы включают:

1) умножение обеих частей уравнений системы на любое, отличное от нуля число;

2) прибавление к одному уравнению системы другого, умноженного на некоторое число;

3) перестановку уравнений;

4) перестановку неизвестных в системе уравнений.

Вновь рассмотрим систему из трёх уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \qquad (*)$$

Первое уравнение оставим без изменения, а из 2-го и 3-го исключим слагаемые, содержащие x_1. Для этого второе уравнение разделим на a_{21} и умножим на $-a_{11}$, а затем сложим с 1-м уравнением. Аналогично третье уравнение разделим на a_{31} и умножим на $-a_{11}$, а затем сложим с первым. В результате исходная система примет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ \qquad\quad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2, \\ \qquad\quad a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 = b'_3. \end{cases}$$

Теперь из последнего уравнения исключим слагаемое, содержащее x_2. Для этого третье уравнение разделим на a'_{32}, умножим на $-a'_{22}$ и сложим со вторым. Получится система уравнений треугольного вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ \qquad\quad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2, \\ \qquad\qquad\qquad a''_{33}x_3 = b''_3. \end{cases}$$

Из последнего уравнения легко найти x_3, затем из 2-го уравнения x_2 и, наконец, из 1-го найдем x_1.

На практике метод Гаусса обычно реализуют в матричной форме. Для этого выписывают *расширенную матрицу* из коэффициентов и свободных членов системы (*):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right)$$

и затем приводят её к треугольному (или диагональному) виду с помощью *элементарных преобразований*.

К элементарным преобразованиям матрицы относятся следующие преобразования:

- умножение (деление) строки на число, отличное от нуля;
- почленное сложение (вычитание) строк;
- перестановка строк или столбцов;
- вычеркивание нулевой строки.

В результате элементарных преобразований получается матрица, *эквивалентная* данной (обозначается значком « ~ »).

Цель элементарных преобразований – получить матрицу треугольного вида, затем записав треугольную систему, найти неизвестные «обратным ходом».

Пример 9.1. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x + 2y - z = 12, \\ 3x - y + 4z = -13, \\ -x + 5y - z = 27 \end{cases}$$

методом Гаусса.

Решение. Составим расширенную матрицу системы и при помощи элементарных преобразований приведем ее к треугольному виду (прямой ход Гаусса):

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 12 \\ 3 & -1 & 4 & -13 \\ -1 & 5 & -1 & 27 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 12 \\ 0 & -7 & 7 & -49 \\ 0 & 7 & -2 & 39 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 12 \\ 0 & -7 & 7 & -49 \\ 0 & 0 & 5 & -10 \end{array}\right).$$

Теперь запишем систему с коэффициентами получившейся треугольной матрицы и найдем неизвестные, начиная с последнего уравнения (обратный ход Гаусса):

$$\begin{cases} x + 2y - z = 12, \\ \quad -7y + 7z = -49, \\ \qquad\quad 5z = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -2, \\ y = 5, \\ x = 4. \end{cases}$$

Ответ: $\{(4;5;-2)\}$.

Пример 9.2. Решить методом Гаусса систему уравнений

$$\begin{cases} 3x-3y+2z=2, \\ 4x-5y+2z=1, \\ 5x-6y+4z=3. \end{cases}$$

Решение. Преобразуем расширенную матрицу системы

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 2 & 2 \\ 4 & -5 & 2 & 1 \\ 5 & -6 & 4 & 3 \end{array}\right).$$

Обнулим элементы ниже главной диагонали. Для чего умножим первую строку на − 4, вторую – на 3, сложим эти строки и результат запишем во второй строке.

Затем первую строку умножим на −5 и сложим с третьей, умноженной на 3, результат запишем в третьей строке. Первая строка остается без изменения.

А затем умноженную на −1 вторую строку сложим с третьей, после чего получится треугольная матрица

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 2 & 2 \\ 4 & -5 & 2 & 1 \\ 5 & -6 & 4 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & -5 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right).$$

Вернувшись к системе уравнений, обратным ходом найдем неизвестные:

$$\begin{cases} 3x-3y+2z=2, \\ \quad -3y-2z=-5, \\ \qquad 4z=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=1, \\ y=1, \\ x=1. \end{cases}$$

Пример 9.3. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x-2y+3z=5, \\ x-5y+2z=3, \\ 2x+3y+z=0. \end{cases}$$

Решение. Выпишем расширенную матрицу системы, поменяем местами первую и вторую строки (для удобства) и сведем ее к треугольному виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 2 & 3 \\ 0 & 13 & -3 & -4 \\ 0 & 13 & -3 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 2 & 3 \\ 0 & 13 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Вернувшись к системе уравнений, несложно заметить, что третье уравнение системы будет ложным (0 = 2), а значит, система уравнений решений не имеет.

Пример 9.4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x+3y-z=3, \\ 2x+3y-z=3, \\ 3x-y+2z=-1. \end{cases}$$

Удобно, когда строка начинается с единицы. Поэтому поменяем местами первый и третий столбики. Тогда первый столбец будет соответствовать коэффициентам при неизвестной z, а третий – при x. Преобразуем матрицу, сначала просто вычитая вторую строку из первой, а затем удвоенную первую сложив с третьей.

Получим:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 7 & 5 \end{array}\right).$$

Вернемся к системе уравнений, не забыв, что первый столбец соответствует коэффициентам при z, а третий – при x:

$$\begin{cases} 2x+3y-z=3, \\ \quad 0=0, \\ 7x+5y=5. \end{cases}$$

Из третьего уравнения выразим одну неизвестную через другую и подставим в первое:

$$\begin{cases} y=1-\frac{7}{5}x, \\ 2x+3-\frac{21}{5}x-z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1-\frac{7}{5}x, \\ z=-\frac{11}{5}x. \end{cases}$$

Таким образом, система имеет бесконечное множество решений:

$$\left\{x;\ 1-\frac{7}{5}x;\ -\frac{11}{5}x\right\},$$

где x – любое число.

Упражнения

Решить систему методом Гаусса.

	$\begin{cases} x+3y+3z=2, \\ x-2y-z=-5, \\ -3x+2y+z=7. \end{cases}$		$\begin{cases} x-y+3z=2, \\ 3x+4y+3z=-2, \\ x-y+2z=3. \end{cases}$
	$\begin{cases} 2x-y-5z=-5, \\ x-3y+z=2, \\ -x+2y+2z=3. \end{cases}$		$\begin{cases} -x+y-2z=-3, \\ 3x+2y-z=-2, \\ x+2y-2z=-3. \end{cases}$
	$\begin{cases} 2x-y-3z+t=-6, \\ -3x+2y+z+2t=14, \\ 3x+y+2z-t=-12, \\ 3x-2y+z-3t=-17. \end{cases}$		$\begin{cases} x-y+3z-t=2, \\ -4x+2y-3z+2t=7, \\ x-y+2z-t=-1, \\ 2x-3y-z+4t=5. \end{cases}$
	$\begin{cases} -x+3y+2z-3t=-24, \\ -x+2y-3z+2t=13, \\ x-y+3z-2t=-15, \\ 2x-3y+3z+2t=2. \end{cases}$		$\begin{cases} x-2y-3z+t=-8, \\ 4x-3y+2z-2t=-12, \\ 3x-2y+z-3t=-2, \\ -2x+y-3z+4t=-5. \end{cases}$
	$\begin{cases} x+3y-2z+t=-3, \\ 4x-2y+3z+4t=5, \\ 2x+3y+z+t=-2, \\ -x+2y+2z-3t=-1. \end{cases}$		$\begin{cases} -3x+4y-3z-3t=-2, \\ 2x-y-2z+3t=7, \\ -x+2y+z-2t=1, \\ 3x-y-2z+3t=9. \end{cases}$

10. РАНГ МАТРИЦЫ

Рассмотрим прямоугольную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12} \ldots\ a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} \ldots\ a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\ a_{m2} \ldots\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Подматрицей матрицы A назовем любую матрицу, получаемую из матрицы A удалением некоторых строк и столбцов. Определитель квадратной подматрицы порядка k называется минором k-го порядка матрицы A.

Таким образом, каждый элемент матрицы является ее минором 1-го порядка.

Очевидно, что матрица A обладает минорами любого порядка от 1 до наименьшего из чисел m и n.

Среди всех отличных от нуля миноров матрицы A найдется по крайней мере один минор, порядок которого будет наибольшим.

О п р е д е л е н и е. Наибольший из порядков миноров данной матрицы, отличных от нуля, называется *рангом матрицы*.

Ранг матрицы A обозначается через $r(A)$, или $\mathrm{rang}(A)$. Очевидно, что выполняется соотношение

$$0 \le r(A) \le \min (m,n).$$

Теорема 1. Пусть матрица A' получается из матрицы А в результате конечного числа злементарных преобразований, тогда $rangA' = rangA$.

Теорема 2. Ранг матрицы не меняется при транспонировании.

Пример 10.1 Найти ранг матрицы:

$$1) A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};\ 2)\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};\ 3) C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 5 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}; 4) E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. 1) $r(A) = 0$;

2) Матрица В содержит единственный ненулевой элемент b_{11}, являющийся минором 1-го порядка. Все определители более высоких порядков, составленные из элементов этой матрицы, будут содержать нулевую строку и поэтому равны 0. Следовательно, $r(B) = 1$.

3) Единственным минором 3-го порядка является определитель матрицы C, но он равен 0, поскольку содержит пропорциональные столбцы. Следова-

тельно, $r(C) < 3$. Для того, чтобы доказать, что $r(C) = 2$, достаточно указать хотя бы один минор 2-го порядка, не равный 0, например,

$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$. Значит, $r(C) = 2$.

4) Пусть $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Имеем, $|E| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.следовательно, $r(C) = 3$.

Ранг матрицы находится либо методом *окаймления миноров*, либо методом *элементарных преобразований*.

Метод окаймляющих миноров. При вычислении ранга матрицы первым способом следует переходить от миноров низших порядков к минорам более высокого порядка. Если уже найден минор D порядка k матрицы А, отличный от нуля, то требуют вычисления лишь миноры (k+1)-го порядка, окаймляющие минор D, т.е. содержащие его в качестве минора. Если все они равны нулю, то ранг матрицы равен k.

Метод элементарных преобразований. Как было отмечено при рассмотрении метода Гаусса, элементарными называются следующие преобразования матрицы:

1) перестановка двух любых строк (или столбцов),

2) умножение строки (или столбца) на отличное от нуля число,

3) прибавление к одной строке (или столбцу) другой строки (или столбца), умноженной на некоторое число,

4) вычеркивание нулевой строки.

Две матрицы называются *эквивалентными*, если одна из них получается из другой с помощью конечного множества элементарных преобразований.

Эквивалентные матрицы не являются, вообще говоря, равными, но *их ранги равны*. Если матрицы *A* и *B* эквивалентны, то это записывается так: А ~ В.

Пример 10.1. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Теоретически ранг этой матрицы может принимать значения от 1 до 4, так как из элементов матрицы можно создать миноры по 4-й порядок включительно.

Но вместо того, чтобы вычислять все возможные миноры 4-го, 3-го и т.д. порядка, применим к матрице А метод эквивалентных преобразований.

Сначала добьемся того, чтобы в первом столбце все элементы, кроме первого, равнялись 0. Для этого запишем вместо второй строки ее сумму с первой, а вместо третьей – разность третьей и удвоенной первой:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Затем, оставив две первые строки без изменений, из третьей строки вычтем вторую, а к четвертой прибавим вторую:

$$\tilde{\tilde{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

После вычеркивания нулевых строк получим матрицу размерности 2×5, для которой максимальный порядок миноров, а, следовательно, и максимально возможное значение ранга равно 2:

$$\tilde{\tilde{\tilde{A}}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Минор полученной матрицы второго порядка, например,

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

следовательно, $r(\overset{\overset{\approx}{\approx}}{A}) = r(A) = 2.$

О п р е д е л е н и е. *Канонической матрицей* называется матрица, у которой в начале главной диагонали стоят подряд несколько единиц (число которых может равняться нулю), а все остальные элементы равны нулю, например, матрица $\begin{pmatrix} 1\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,1\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,0 \end{pmatrix}$ является канонической.

При помощи элементарных преобразований строк и столбцов любую матрицу можно привести к *канонической*.

Ранг канонической матрицы равен числу единиц на ее главной диагонали.

О п р е д е л е н и е. *Базисным минором* матрицы называется любой ее ненулевой минор, порядок которого равен рангу матрицы.

О п р е д е л е н и е. Строки (столбцы) матрицы называются *линейно зависимыми*, если существует их линейная комбинация, не все коэффициенты в которой равны 0, равная нулевой строке (столбцу).

В противном *случае* строки (столбцы) называются *линейно независимыми.*

Замечание. Можно доказать, что необходимым и достаточным условием линейной зависимости строк матрицы является то, что одна из них является линейной комбинацией остальных.

Теорема. Строки и столбцы матрицы, элементы которых входят в базисный минор, линейно независимы. Любая строка (столбец) матрицы является линейной комбинацией этих строк (столбцов).

Доказательство (для строк).

1. Если бы базисные строки были линейно зависимыми, то с помощью эквивалентных преобразований из них можно было бы получить нулевую строку, что противоречит условию, что базисный минор не равен 0.

2. Строка, входящая в базисный минор, является линейной комбинацией его строк, в которой коэффициент при данной строке равен 1, а остальные коэффициенты равны 0.

Докажем это свойство для строки, не входящей в базисный минор.

Добавим к базисному минору эту строку (пусть ее номер – k) и любой столбец матрицы (пусть его номер – j). Затем разложим полученный определитель, равный 0 (так как его порядок больше ранга матрицы) по j-му столбцу:

$$a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{rj}A_{rj} + a_{kj}A_{kj} = 0.$$

Поскольку базисный минор не равен нулю, значит $A_{kj} \neq 0$, поэтому, разделив полученное равенство на A_{kj}, найдем, что

$$a_{kj} = \lambda_1 a_{1j} + \lambda_2 a_{2j} + \ldots + \lambda_r a_{rj}$$

для всех $j = 1,2,\ldots,n$, где $\lambda_i = -\dfrac{A_{ij}}{A_{kj}}$.

Следовательно, выбранная строка является линейной комбинацией базисных строк. Теорема доказана.

Упражнения

Задание 1. Найти ранг следующих матриц методом окаймляющих миноров и методом элементарных преобразований.

1.	$\begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & 4 & -2 & 5 \\ -2 & 4 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$	2.	$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 7 & 9 \\ 7 & 5 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$
3.	$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 & -5 & 1 \\ 0 & -7 & 1 & -3 & -5 \\ 3 & 4 & 5 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$	4.	$\begin{pmatrix} 8 & -4 & 5 & 5 & 9 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

Задание 2. Найти ранг следующих матриц при различных значениях параметра λ.

	$\begin{pmatrix} 7-\lambda & -12 & 6 \\ 10 & -19-\lambda & 10 \\ 12 & -24 & 13-\lambda \end{pmatrix}.$		$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$
	$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}.$		$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-\lambda^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-\lambda^2 \end{pmatrix}.$

11. КРИТЕРИЙ СОВМЕСТНОСТИ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим систему *m* линейных уравнений с *n* неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (8)$$

где a_{ij} и b_i (i =1,…,m; I =1,…,n) – некоторые известные числа, а $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – неизвестные. В обозначении коэффициентов a_{ij} первый индекс *i* обозначает номер уравнения, а второй *j* – номер неизвестного, при котором стоит этот коэффициент.

О п р е д е л е н и е. Система линейных уравнений, имеющая хотя бы одно решение, называется *совместной*. В противном случае она называется *несовместной*.

О п р е д е л е н и е. Совместная линейная система называется *определенной*, если она имеет единственное решение, и *неопределенной*, если она имеет более одного решения.

Коэффициенты при неизвестных запишем в виде матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}a_{m2}\ldots a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad (9)$$

которая называется матрицей системы.

Числа b_i, стоящие в правых частях уравнений, называются свободными членами. Свободные члены системы (8) образуют матрицу-столбец:

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}. \qquad (10)$$

Неизвестные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ образуют матрицу-столбец

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}. \qquad (11)$$

Матрица

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ldots\ a_{1n} & b_1 \\ a_{21}\ a_{22}\ldots\ a_{2n} & b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{m1}\ a_{m2}\ldots\ a_{mn} & b_m \end{pmatrix}, \qquad (12)$$

образованная путем приписывания справа к матрице *A* столбца свободных членов, называется *расширенной матрицей* системы.

Вопрос о совместности системы (8) решается следующей теоремой.

Теорема Кронекера-Капелли. Система (8) совместна тогда и только тогда, если ранг матрицы (9) системы равен рангу расширенной матрицы (12) , т.е. $r(A) = r(\tilde{A})$.

Доказательство.

1) *Необходимость:* пусть система (8) совместна и $c_1, c_2, \ldots, c_n$ – ее решение. Тогда

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \ldots + a_{1n}c_n = b_1 \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \ldots + a_{2n}c_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \ldots + a_{mn}c_n = b_m \end{cases},$$

т.е. столбец свободных членов является линейной комбинацией столбцов матрицы системы и, следовательно, столбцов любого ее базисного минора. Поэтому добавление элементов этого столбца и любой строки расширенной матрицы к базисному минору даст нулевой определитель, то есть $r(A_1) = r(A)$.

2) *Достаточность*: если $r(A_1) = r(A)$, то любой базисный минор матрицы A является также базисным минором расширенной матрицы. Поэтому столбец свободных членов представляет собой линейную комбинацию столбцов этого базисного минора, и, следовательно, линейную комбинацию всех столбцов матрицы А. Если обозначить коэффициенты этой линейной комбинации $c_1, c_2, \ldots, c_n$, то эти числа будут решением системы (8), т.е. эта система совместна. Теорема доказана.

12. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ОДНОРОДНОЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными, в которой столбец свободных членов равен нулю:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Такая система называется *однородной линейной системой*.

Ясно, что в этом случае

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0,$$

т.к. все элементы одного из столбцов в этих определителях равны нулю.

Так как неизвестные находятся по формулам

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta};\ y = \frac{\Delta_2}{\Delta};\ z = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

то в случае, когда $\Delta \neq 0$, система (13) имеет единственное нулевое (*тривиальное*) решение:

$$x = y = z = 0.$$

Однако, во многих задачах интересен вопрос о том, имеет ли однородная система решения, отличные от нулевого.

Теорема. Для того чтобы система линейных однородных уравнений имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы $\Delta = 0$. Иными словами, ранг матрицы системы должен быть меньше числа неизвестных.

Рассмотрим однородную линейную систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}. \quad (14)$$

Отметим, что такая система всегда совместна, поскольку имеет нулевое решение $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, называемое *тривиальным*.

Пусть ранг матрицы системы $r < n$. Предположим, что в базисный минор входят коэффициенты первых r уравнений. Тогда оставшиеся $m - r$ уравнений являются линейными комбинациями, то есть следствиями предыдущих. Поэтому можно оставить в системе только первые r уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rn}x_n = 0 \end{cases}.$$

Оставим в левой части каждого уравнения неизвестные, коэффициенты при которых входят в базисный минор, а остальные неизвестные перенесем вправо:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = -a_{1,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r = -a_{2,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rr}x_r = -a_{r,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n \end{cases} \quad (15)$$

Эта система будет иметь единственное решение относительно неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_r$, выражающее их через остальные неизвестные $x_{r+1}, \ldots, x_n$, которым можно придавать любые произвольные значения. Таким образом, данная система при $r < n$ является *неопределенной*, т.е. имеет *бесконечное множество решений*.

О п р е д е л е н и е . Неизвестные $x_1, x_2, \ldots, x_r$, коэффициенты при которых входят в базисный минор матрицы системы, называются *базисными неизвестными*, а остальные неизвестные $x_{r+1}, \ldots, x_n$ – *свободными неизвестными*.

Базисные неизвестные будут однозначно определяться для выбранных свободных неизвестных из полученной системы (15) по правилу Крамера. В результате получим *общую систему решений* (см. пример 11.2).

Полагая в полученном общем решении $X(c_1, c_2, \ldots, c_{n-r})$, что $E_1 = X(1,0,\ldots,0)$, $E_2 = X(0,1,\ldots,0), \ldots$, $E_{n-r} = X(0,0,\ldots,1)$, получим *фундаментальную систему решений*.

З а м е ч а н и е. Очевидным образом доказываются свойства решений однородной линейной системы.

Свойство 1. Сумма решений системы (14) является ее решением.

Свойство 2. Столбец решений системы (14), умноженный на любое число, тоже есть решение этой системы.

Следовательно, любая линейная комбинация фундаментальной системы решений системы (14) является ее решением. Имеет место и обратное утверждение (примем его без доказательства):

Теорема. Любое решение однородной линейной системы (14) является линейной комбинацией фундаментальной системы ее решений.

Таким образом, любое решение системы (14) имеет вид:

$$X(c_1, c_2, \ldots, c_{n-r}) = c_1E_1 + c_2E_2 + \ldots + c_{n-r}E_{n-r},$$ где

$E_1, E_2, \ldots, E_{n-r}$ – фундаментальная система решений,

$c_1, c_2, \ldots, c_{n-r}$ – произвольные постоянные.

Пример 12.1. Решим однородную систему $\begin{cases} x + 3y - z = 0, \\ 2x + 2y + z = 0, \\ 4x + 11y - z = 0. \end{cases}$

Решение. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 11 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 12 - 22 + 8 - 11 + 6 = -9 \neq 0$,

а значит, система имеет единственное тривиальное решение:

$$x = y = z = 0.$$

Пример 12.2. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0. \end{cases}$$

Решение. Данная система является однородной (все свободные члены – нули). Однородная система всегда имеет тривиальное (нулевое) решение $x_1 = 0; x_2 = 0; x_3 = 0; x_4 = 0$.

Для существования нетривиального решения необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы A был меньше числа неизвестных, т.е. чтобы $r = rang\,(A) < 4$ (4 – число неизвестных).

Матрица коэффициентов $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 & 3 \\ 3 & -6 & 4 & 2 \\ 4 & -8 & 17 & 11 \end{pmatrix}$ имеет ранг $r = 2$,

т. к. все миноры третьего порядка равны нулю, а второго – нет (проверьте!).

Найдем общую и фундаментальную системы решений. Для этого выберем в качестве базового минора любой отличный от нуля минор, например, минор $M_2 = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$. Тогда неизвестные $x_3, x_4 -$ базисные, $x_1, x_2 -$свободные, а укороченная система имеет вид:

$$\begin{cases} 5x_3 + 3x_4 = -2x_1 + 4x_2, \\ 13x_3 + 9x_4 = -x_1 + 2x_2. \end{cases}$$

В ней определителем, составленным из коэффициентов левой части, является минор M_2.

Полагая, что $x_1 = c_1, x_2 = c_2$, и используя формулы Крамера, найдем:

$x_3 = -\frac{5}{2}c_1 + 5c_2$, $x_4 = \frac{7}{2}c_1 - 7c_2$.

Общая система решений тогда будет иметь вид:

$$X(c_1, c_2) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ -\frac{5}{2}c_1 + 5c_2 \\ \frac{7}{2}c_1 - 7c_2 \end{pmatrix}.$$

Для компактности можно записать так:

$$X^T(c_1, c_2) = \left(c_1;\;\; c_2;\; -\frac{5}{2}c_1 + 5c_2;\;\; \frac{7}{2}c_1 - 7c_2\right)^T.$$

Из общей системы решений находим фундаментальную:

$$E_1 = X(1{,}0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{5}{2} \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}, \quad E_2 = X(0{,}1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, любое решение данной системы имеет вид:

$X(c_1, c_2) = c_1E_1 + c_2E_2$, где $c_1, c_2 -$произвольные постоянные.

Пример 12.3. Решить линейную однородную систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Решение. Найдем ранг матрицы системы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 5 & 3 \\ 1 & -4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Преобразуем матрицу A к виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 5 & 3 \\ 1 & -4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $r(A) = 2$.

В качестве базисного минора выберем $M = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -5 \end{vmatrix}$.

Тогда $x_1, x_2 -$ базисные неизвестные, $x_3, x_4 -$ свободные неизвестные. Обозначим $x_3 = c_1$, $x_4 = c_2$.

Заменим исходную систему системой из первых двух уравнений, коэффициенты которых входят в базисный минор, и перенесем свободные неизвестные в правые части уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -c_1 - c_2, \\ 2x_1 - 3x_2 = -4c_1 - 2c_2 \end{cases}$$

Полагая в полученном общем решении $X(c_1, c_2)$, что $E_1 = X(1{,}0)$, $E_2 = X(0{,}1)$, получим фундаментальную систему решений:

Итак, $E_1 = X(1{,}0) = \begin{pmatrix} -1{,}4 \\ 0{,}4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = X(0{,}1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Теперь общее решение системы можно записать в виде:

$$X(c_1, c_2) = c_1 E_1 + c_2 E_2,$$

где c_1 и c_2 – произвольные числа.

Упражнения

Найти фундаментальную систему решений.

	$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 6x_5 = 0. \end{cases}$		$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 4x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 11x_3 - 6x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$
	$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$		$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$
	$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 16x_3 + x_4 + 6x_5 = 0. \end{cases}$		$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$

13. СТРУКТУРА ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ НЕОДНОРОДНОЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

Рассмотрим неоднородную линейную систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}. \qquad (16)$$

Докажем следующие свойства ее решений:

Теорема. Сумма (разность) любого решения системы (16) и любого решения соответствующей однородной системы

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}. \qquad (17)$$

является решением системы (16).

Доказательство.

Пусть $c_1, c_2, \ldots, c_n$ – решение системы (16), а $d_1, d_2, \ldots, d_n$ – решение системы (17) с теми же коэффициентами при неизвестных.

Подставим $x_i = c_i + d_i$ в систему (16):

$$\begin{cases} a_{11}(c_1 + d_1) + a_{12}(c_2 + d_2) + \ldots + a_{1n}(c_n + d_n) = b_1 \\ a_{21}(c_1 + d_1) + a_{22}(c_2 + d_2) + \ldots + a_{2n}(c_n + d_n) = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}(c_1 + d_1) + a_{m2}(c_2 + d_2) + \ldots + a_{mn}(c_n + d_n) = b_m \end{cases}.$$

После перегруппировки слагаемых получим:

$$\begin{cases} (a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \ldots + a_{1n}c_n) + (a_{11}d_1 + a_{12}d_2 + \ldots + a_{1n}d_n) = b_1 \\ (a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \ldots + a_{2n}c_n) + (a_{21}d_1 + a_{22}d_2 + \ldots + a_{2n}d_n) = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \ldots + a_{mn}c_n) + (a_{m1}d_1 + a_{m2}d_2 + \ldots + a_{mn}d_n) = b_m \end{cases}.$$

Но в силу того, что $c_1, c_2, \ldots, c_n$ – решение системы (16), а $d_1, d_2, \ldots, d_n$ – решение системы (17), имеем:

$$a_{i1}c_1 + \ldots + a_{1n}c_n = b_i, a_{i1}d_1 + \ldots + a_{in}d_n = 0.$$

Следовательно, $x_i = c_i + d_i$ является решением системы (16).

Аналогично доказывается и для случая $x_i = c_i - d_i$.

Следствие. Общее решение неоднородной системы (16) представляет собой сумму общего решения соответствующей однородной системы (17) и частного решения системы (16).

Пример 13.1. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 3 \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

Решение. Можно проверить, что r(A) < 4, а именно r(A) =2. Базисные переменные x_1 и x_2. Свободные переменные $x_3 = C_1$ и $x_4 = C_2$. Решим *однородную* систему двух уравнений относительно x_1 и x_2:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Получим общее решение однородной системы:

$$x_1 = -1{,}4C_1 - C_2;\ x_2 = 0{,}4C_1;\ x_3 = C_1;\ x_4 = C_2.$$

$$X(C_1, C_2) = \begin{pmatrix} -1{,}4C_1 - C_2 \\ 0{,}4C_1 \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = C_1 \cdot X(1{,}0) + C_2 X(0{,}1) =$$

$$= C_1 \begin{pmatrix} -1{,}4 \\ 0{,}4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Общее решение неоднородной системы можно записать в виде:

$$X = C_1 \begin{pmatrix} -1{,}4 \\ 0{,}4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = X(0{,}0)$ - частное решение данной неоднородной системы линейных уравнений.

Упражнения

Найти фундаментальную систему решений линейной системы уравнений.

	$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_5 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 + 4x_4 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 4x_4 - 3x_5 = 1. \end{cases}$		$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_5 = 0, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 1. \end{cases}$
	$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 3x_5 = 7, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 3. \end{cases}$		$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ 4x_1 - 7x_2 + 2x_3 + x_4 = 3, \\ 3x_1 - 5x_2 - x_3 - 3x_4 = 2. \end{cases}$
	$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 3x_5 = 2, \\ 2x_1 + 9x_2 - x_3 - 4x_4 = 5, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 3. \end{cases}$		$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 1, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 - x_4 = 3, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 2. \end{cases}$

14. СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ И СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ МАТРИЦЫ

Пусть задана квадратная матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

и матрица-столбец X, высота которой совпадает с порядком матрицы A, т.е.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Во многих задачах приходится рассматривать матричное уравнение

$$A \cdot X = \lambda \cdot X \qquad (18)$$

относительно X, где λ – некоторое число.

Понятно, что при любом λ это уравнение имеет нулевое решение:

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Действительное число λ, при котором это уравнение имеет ненулевые решения, называется *собственным значением матрицы A*, а матрица *X* при таком λ называется *собственным вектором матрицы A*.

Найдём собственный вектор матрицы А. Поскольку $E \cdot X = X$, то матричное уравнение можно переписать в виде

$$AX = \lambda \cdot E \cdot X \text{ или } (A - \lambda \cdot E)X = 0.$$

Действительно, так как

$$A - \lambda \cdot E = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{pmatrix},$$

то в развёрнутом виде матричное уравнение $(A - \lambda \cdot E)X = 0$ можно переписать в виде системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + a_{23}x_3 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (a_{33} - \lambda)x_3 = 0. \end{cases}$$

Итак, получили систему однородных линейных уравнений для определения координат x_1, x_2, x_3 вектора *X*. Чтобы система имела ненулевые решения необходимо и достаточно, чтобы определитель системы был равен нулю, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ или коротко: } |A - \lambda \cdot E| = 0. \quad (19)$$

Это уравнение третьей степени относительно λ. Оно называется *характеристическим уравнением* матрицы *A* и служит для определения собственных значений λ. Поэтому числа λ называют еще *характеристическими числами* матрицы *A*.

Каждому *собственному значению* λ соответствует *собственный вектор X*, координаты которого определяются из системы при соответствующем значении λ.

Примеры 14.1. Найти собственные векторы и соответствующие им собственные значения матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение. Составим характеристическое уравнение и найдём собственные значения λ:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 8 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (1-\lambda)(3-\lambda) - 8 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 5.$$

Найдем собственные векторы матрицы *A*.

При $\lambda_1 = -1$ получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0, \\ 8x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -2x_1, \\ x_2 = -2x_1. \end{cases}$$

Если $x_1 = \alpha$ $(\alpha \in R)$, то $\overrightarrow{X_1} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -2\alpha \end{pmatrix}$.

При $\lambda = 5$ получаем систему уравнений

$$\begin{cases} -4x_1 + x_2 = 0, \\ 8x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 4x_1, \\ x_2 = 4x_1. \end{cases}$$

$\overrightarrow{X_1}$ и $\overrightarrow{X_2}$ − собственные векторы матрицы *A*, которые можно представить в виде разложения по осям OX и OY:

$$\overrightarrow{X_1} = \alpha \cdot \vec{i} - 2\alpha \cdot \vec{j} = \alpha(\vec{i} - 2\vec{j});$$
$$\overrightarrow{X_2} = \beta \cdot \vec{i} + 4\beta \cdot \vec{j} = \beta(\vec{i} + 4\vec{j}), \ \alpha \neq 0 \text{ и } \beta \neq 0 - \text{произвольные числа.}$$

Пример 14.2. Найти собственные векторы и соответствующие им собственные значения матрцы $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение. Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -\lambda^3 + 2\lambda^2 - 2\lambda = 0.$$

Полученное уравнение имеет один действительный корень (собственное значение матрицы) $\lambda = 0$.

Соответственно получим однородную систему:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2, \\ x_3 = 3x_2, \quad x_2 = \alpha \Rightarrow \vec{X} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 3\alpha \end{pmatrix}. \\ x_1 = x_2 \end{cases}$$

Или $\vec{X} = \alpha\left(\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}\right)$ − собственный вектор матрицы A.

Упражнения

Найти собственные значения и собственные векторы заданных матриц.

	$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$		$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
	$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$		$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$
	$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$		$A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 12 \end{pmatrix}$
	$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$		$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}$

15. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задание 1. Вычислить определитель по правилу Саррюса

	$\begin{vmatrix} 5 & -1 & -2 \\ 3 & -3 & -4 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} 5 & -4 & -3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \end{vmatrix}$

	$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -2 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & -4 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & -5 \\ -1 & 5 & 2 \end{vmatrix}$
	$\begin{vmatrix} 1 & -3 & -3 \\ -4 & 4 & 5 \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 5 & -2 & 1 \\ -3 & 3 & 2 \end{vmatrix}$
	$\begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 \\ -2 & -3 & 4 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & -3 & -3 \\ -1 & 5 & 5 \end{vmatrix}$
	$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -1 \\ 3 & -4 & -2 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & -4 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix}$
	$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ -4 & 3 & -2 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 5 & -2 & 3 \\ 2 & -5 & 1 \end{vmatrix}$
	$\begin{vmatrix} -2 & -4 & 1 \\ 3 & 4 & -3 \\ 2 & 5 & -3 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} -3 & 5 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$
	$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -5 & -3 & 5 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 5 & -3 & 4 \\ 5 & -3 & 5 \end{vmatrix}$
	$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -4 & -3 & 3 \\ -2 & -1 & 5 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ -3 & -4 & 5 \end{vmatrix}$
	$\begin{vmatrix} -4 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -5 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$

	$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 5 & 4 & -4 \\ -3 & -3 & 1 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 5 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}$
	$\begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 4 & -3 & -2 \\ -1 & 5 & -2 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} 5 & 5 & -1 \\ -3 & -3 & 4 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix}$
	$\begin{vmatrix} -2 & -4 & 3 \\ -1 & -3 & 1 \\ 5 & 3 & -2 \end{vmatrix}$		

Задание 2. Вычислить определитель дописыванием столбцов

	$\begin{vmatrix} -3 & 5 & 2 \\ -3 & 4 & 3 \\ 1 & -4 & -2 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & -3 \end{vmatrix}$
	$\begin{vmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 5 & -3 & -5 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} 5 & -3 & 5 \\ 4 & -3 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix}$
	$\begin{vmatrix} 5 & -1 & -2 \\ 3 & -3 & -4 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} 5 & -4 & -3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \end{vmatrix}$
	$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -2 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & -4 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & -5 \\ -1 & 5 & 2 \end{vmatrix}$
	$\begin{vmatrix} 1 & -3 & -3 \\ -4 & 4 & 5 \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 5 & -2 & 1 \\ -3 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

	$\begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 \\ -2 & -3 & 4 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & -3 & -3 \\ -1 & 5 & 5 \end{vmatrix}$
	$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ -4 & 3 & -2 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & -4 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix}$
	$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -1 \\ 3 & -4 & -2 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 5 & -2 & 3 \\ 2 & -5 & 1 \end{vmatrix}$
	$\begin{vmatrix} -2 & -4 & 1 \\ 3 & 4 & -3 \\ 2 & 5 & -3 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} -3 & 5 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$
	$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -5 & -3 & 5 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 5 & -3 & 4 \\ 5 & -3 & 5 \end{vmatrix}$
	$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -4 & -3 & 3 \\ -2 & -1 & 5 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ -3 & -4 & 5 \end{vmatrix}$
	$\begin{vmatrix} -4 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -5 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$
	$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 5 & 4 & -4 \\ -3 & -3 & 1 \end{vmatrix}$		

Задание 3. Вычислить определитель разложением по любой строке.

	$\begin{vmatrix} -2 & -4 & 3 \\ -1 & -3 & 1 \\ 5 & 3 & -2 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 4 \\ -4 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix}$
	$\begin{vmatrix} -2 & 3 & -4 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \\ -1 & 4 & -1 \end{vmatrix}$
	$\begin{vmatrix} -3 & 5 & 2 \\ -3 & 4 & 3 \\ 1 & -4 & -2 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & -3 \end{vmatrix}$
	$\begin{vmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 5 & -3 & -5 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} 5 & -3 & 5 \\ 4 & -3 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix}$
	$\begin{vmatrix} 5 & -1 & -2 \\ 3 & -3 & -4 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} 5 & -4 & -3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \end{vmatrix}$
	$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -2 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & -4 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & -5 \\ -1 & 5 & 2 \end{vmatrix}$
	$\begin{vmatrix} 1 & -3 & -3 \\ -4 & 4 & 5 \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 5 & -2 & 1 \\ -3 & 3 & 2 \end{vmatrix}$
	$\begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 \\ -2 & -3 & 4 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & -3 & -3 \\ -1 & 5 & 5 \end{vmatrix}$
	$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -1 \\ 3 & -4 & -2 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & -4 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix}$

	$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ -4 & 3 & -2 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 5 & -2 & 3 \\ 2 & -5 & 1 \end{vmatrix}$
	$\begin{vmatrix} -2 & -4 & 1 \\ 3 & 4 & -3 \\ 2 & 5 & -3 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} -3 & 5 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$
	$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -5 & -3 & 5 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 5 & -3 & 4 \\ 5 & -3 & 5 \end{vmatrix}$
	$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -4 & -3 & 3 \\ -2 & -1 & 5 \end{vmatrix}$		

Задание 4. Вычислить определитель разложением по любому столбцу.

	$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 5 & 4 & -4 \\ -3 & -3 & 1 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 5 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}$
	$\begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 4 & -3 & -2 \\ -1 & 5 & -2 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} 5 & 5 & -1 \\ -3 & -3 & 4 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix}$
	$\begin{vmatrix} -2 & -4 & 3 \\ -1 & -3 & 1 \\ 5 & 3 & -2 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 4 \\ -4 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix}$
	$\begin{vmatrix} -2 & 3 & -4 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \\ -1 & 4 & -1 \end{vmatrix}$

	$\begin{vmatrix} -3 & 5 & 2 \\ -3 & 4 & 3 \\ 1 & -4 & -2 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & -3 \end{vmatrix}$
	$\begin{vmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 5 & -3 & -5 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} 5 & -3 & 5 \\ 4 & -3 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix}$
	$\begin{vmatrix} 5 & -1 & -2 \\ 3 & -3 & -4 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} 5 & -4 & -3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \end{vmatrix}$
	$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -2 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & -4 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & -5 \\ -1 & 5 & 2 \end{vmatrix}$
	$\begin{vmatrix} 1 & -3 & -3 \\ -4 & 4 & 5 \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 5 & -2 & 1 \\ -3 & 3 & 2 \end{vmatrix}$
	$\begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 \\ -2 & -3 & 4 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & -3 & -3 \\ -1 & 5 & 5 \end{vmatrix}$
	$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -1 \\ 3 & -4 & -2 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & -4 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix}$
	$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ -4 & 3 & -2 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 5 & -2 & 3 \\ 2 & -5 & 1 \end{vmatrix}$
	$\begin{vmatrix} -2 & -4 & 1 \\ 3 & 4 & -3 \\ 2 & 5 & -3 \end{vmatrix}$		

Задание 5. Вычислить определитель.

	$\begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 & 5 \\ 3 & -2 & -2 & 5 \\ 4 & 3 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & -5 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 & 3 \\ 5 & -3 & 1 & 4 \\ 7 & -2 & 2 & -4 \\ 3 & 4 & -2 & 5 \end{vmatrix}$
	$\begin{vmatrix} -4 & 4 & -3 & 5 \\ -1 & 5 & 5 & -2 \\ 4 & -3 & -1 & -2 \\ -6 & 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 5 & -4 \\ 2 & 5 & 6 & 2 \\ -4 & -1 & -4 & 6 \end{vmatrix}$
	$\begin{vmatrix} 4 & 4 & 3 & 6 \\ -1 & -5 & 5 & -3 \\ -4 & -1 & 4 & -2 \\ 6 & 3 & -2 & 5 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & -3 & 4 \end{vmatrix}$
	$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 3 & -3 & 4 & 5 \\ -2 & -4 & 3 & -4 \\ 4 & 1 & 3 & 7 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 5 \\ -3 & -4 & -2 & -1 \\ 4 & 3 & 4 & 3 \\ -1 & 6 & 4 & -3 \end{vmatrix}$
	$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & -2 & -1 \\ 5 & 4 & -2 & -1 \\ -5 & -1 & 5 & 5 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} 3 & 7 & 5 & 3 \\ 4 & -2 & -3 & 5 \\ -2 & 2 & 1 & -2 \\ 5 & -4 & 4 & 3 \end{vmatrix}$
	$\begin{vmatrix} -6 & 4 & -1 & -4 \\ 5 & -3 & 5 & 4 \\ 2 & -1 & 5 & -3 \\ 3 & -2 & -2 & 5 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} -4 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & 5 & -1 & 2 \\ -4 & 6 & 5 & 4 \\ 6 & 2 & -4 & -1 \end{vmatrix}$

	$\begin{vmatrix} 6 & -4 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & -5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 & 3 \\ 5 & -2 & -3 & 6 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & -3 & 4 \\ 4 & -1 & 2 & 6 \end{vmatrix}$
	$\begin{vmatrix} 6 & -3 & -2 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & -2 \\ 4 & -5 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & -4 & 6 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} 6 & 2 & -1 & 4 \\ 4 & -3 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$
	$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -4 & 7 \\ 5 & 4 & 3 & 3 \\ 4 & -3 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 4 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 & -3 \\ 4 & -2 & 4 & 4 \\ -3 & -4 & 3 & 6 \\ 2 & -3 & 4 & -1 \end{vmatrix}$
	$\begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 & 5 \\ 3 & -2 & -2 & 5 \\ 4 & 3 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & -5 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 & 3 \\ 5 & -3 & 1 & 4 \\ 7 & -2 & 2 & -4 \\ 3 & 4 & -2 & 5 \end{vmatrix}$
	$\begin{vmatrix} -4 & 4 & -3 & 5 \\ -1 & 5 & 5 & -2 \\ 4 & -3 & -1 & -2 \\ -6 & 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 5 & -4 \\ 2 & 5 & 6 & 2 \\ -4 & -1 & -4 & 6 \end{vmatrix}$
	$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & -3 & 4 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 3 & -3 & 4 & 5 \\ -2 & -4 & 3 & -4 \\ 4 & 1 & 3 & 7 \end{vmatrix}$

	$\begin{vmatrix} 4 & 4 & 3 & 6 \\ -1 & -5 & 5 & -3 \\ -4 & -1 & 4 & -2 \\ 6 & 3 & -2 & 5 \end{vmatrix}$		

Задание 6. Вычислить определитель.

	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & -3 & 2 & 3 \\ -2 & -2 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & -3 & -2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$
	$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 & -3 & -1 \\ -2 & -1 & 3 & -4 & 3 \\ -1 & 3 & -2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -2 & -4 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & -2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$
	$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & -3 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & -2 & -2 \\ 3 & 2 & -3 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & -2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 2 & -3 & -2 \\ -2 & -1 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -2 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & 2 & -2 & -1 \end{vmatrix}$

	$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & -2 & -3 \\ -1 & -3 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & -2 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & -1 & -4 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 3 & -2 & 4 \end{vmatrix}$
	$\begin{vmatrix} -2 & -4 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -3 & -3 & 2 \end{vmatrix}$
	$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 & 1 & 3 \\ -3 & -4 & 3 & -4 & -2 \\ 2 & 3 & -2 & -2 & 1 \\ -3 & -1 & 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & -2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$
	$\begin{vmatrix} -1 & -2 & 2 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & -2 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & -1 & -2 \\ -2 & -3 & 2 & -2 & 2 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & -2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & -3 & -1 \\ -3 & -2 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$
	$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 3 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 & -3 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -4 & -1 & 3 & -3 \\ 2 & 2 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & -2 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & -3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & -4 & -2 \end{vmatrix}$

	$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 & -3 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 3 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & -2 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & 3 & -4 & -3 \\ 3 & 1 & 3 & 3 & -1 \end{vmatrix}$
	$\begin{vmatrix} 2 & -3 & -3 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & -2 & -3 & 3 \\ -2 & -3 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$
	$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -3 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & -3 & 2 \\ -2 & -1 & -2 & 1 & -3 \\ -1 & 4 & 3 & -1 & -2 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -3 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & -3 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & -3 & 1 \end{vmatrix}$
	$\begin{vmatrix} -2 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ -2 & -3 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 4 & -4 & 2 \\ 4 & -2 & 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 & -2 \\ -2 & 3 & 2 & 1 & -4 \\ 3 & -2 & -1 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$
	$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & 4 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 3 & -3 & 1 \\ -3 & -2 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$		

Задание 7. Решить систему линейных уравнений методом Крамера.

	$\begin{cases}-x+y-2z=-3\\3x+2y-z=-2,\\x+2y-2z=-3.\end{cases}$		$\begin{cases}x-3y-z=6\\-2x+2y+3z=2,\\-x+y+2z=2.\end{cases}$
	$\begin{cases}x-y-z=-4\\-x+4y+3z=7,\\-3x+3y+2z=9.\end{cases}$		$\begin{cases}3x+y+2z=-7\\-x+y-z=-2,\\2x-2y+z=3.\end{cases}$
	$\begin{cases}x+2y+3z=-4\\-3x+4y-2z=-1,\\2x-y+2z=-2.\end{cases}$		$\begin{cases}-3x+y-2z=-6\\-x-2y+3z=-7,\\2x-y+z=5.\end{cases}$
	$\begin{cases}-3x-y+z=8\\-2x+4y+3z=3,\\2x-y-z=-3.\end{cases}$		$\begin{cases}-5x-y+2z=2\\-3x+4y+3z=-9,\\2x-y-z=3.\end{cases}$
	$\begin{cases}-2x+3y+2z=1\\-x+2y+z=1,\\x+4y-2z=8.\end{cases}$		$\begin{cases}2x-y-3z=-4\\2x+3y-z=6,\\x-2y-2z=-6.\end{cases}$
	$\begin{cases}x+y-z=-2\\-x+2y+2z=-3,\\2x+2y-z=-6.\end{cases}$		$\begin{cases}2x+y+3z=-5\\-x-3y-z=8,\\2x-3y+3z=3.\end{cases}$
	$\begin{cases}2x+y-2z=-6\\x-2y-2z=-1,\\-x+2y+z=-2.\end{cases}$		$\begin{cases}-3x+y+z=8\\2x-2y+3z=-2,\\x-y+3z=2.\end{cases}$
	$\begin{cases}x+3y+z=8\\-x+4y-z=6,\\2x+3y+3z=9.\end{cases}$		$\begin{cases}-x+y+2z=2\\2x-3y-z=1,\\2x+y-5z=-3.\end{cases}$
	$\begin{cases}-2x-y-2z=-2\\x+2y+2z=1,\\-x+3y+z=-2.\end{cases}$		$\begin{cases}-x+3y+2z=-4\\-3x+2y+z=-1,\\x-2y-z=3.\end{cases}$

	$\begin{cases}-x+3y+2z=1\\-x+4y+3z=3,\\x-y-3z=-6.\end{cases}$		$\begin{cases}2x-y+z=6\\x+y-2z=1,\\3x-y+2z=7.\end{cases}$
	$\begin{cases}3x-2y+2z=11\\2x+4y-z=-1,\\x-3y+2z=7.\end{cases}$		$\begin{cases}-2x+3y+z=-1\\x-2y-z=-1,\\-3x-y+2z=-6.\end{cases}$
	$\begin{cases}x+3y-z=4\\-x+4y-z=4,\\-3x-2y+2z=-1.\end{cases}$		$\begin{cases}2x+3y-z=-9\\-x+4y-z=-9,\\-5x-3y+2z=10.\end{cases}$
	$\begin{cases}2x+y-2z=-9\\3x+2y+4z=8,\\-2x-y+z=6.\end{cases}$		

Задание 8. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

	$\begin{cases}x+2y+3z=-4\\-3x+4y-2z=-1,\\2x-y+2z=-2.\end{cases}$		$\begin{cases}-3x+y-2z=-6\\-x-2y+3z=-7,\\2x-y+z=5.\end{cases}$
	$\begin{cases}-3x-y+z=8\\-2x+4y+3z=3,\\2x-y-z=-3.\end{cases}$		$\begin{cases}-5x-y+2z=2\\-3x+4y+3z=-9,\\2x-y-z=3.\end{cases}$
	$\begin{cases}-2x+3y+2z=1\\-x+2y+z=1,\\x+4y-2z=8.\end{cases}$		$\begin{cases}2x-y-3z=-4\\2x+3y-z=6,\\x-2y-2z=-6.\end{cases}$
	$\begin{cases}x+y-z=-2\\-x+2y+2z=-3,\\2x+2y-z=-6.\end{cases}$		$\begin{cases}2x+y+3z=-5\\-x-3y-z=8,\\2x-3y+3z=3.\end{cases}$

	$\begin{cases} 2x + y - 2z = -6 \\ x - 2y - 2z = -1, \\ -x + 2y + z = -2. \end{cases}$		$\begin{cases} -3x + y + z = 8 \\ 2x - 2y + 3z = -2, \\ x - y + 3z = 2. \end{cases}$
	$\begin{cases} x + 3y + z = 8 \\ -x + 4y - z = 6, \\ 2x + 3y + 3z = 9. \end{cases}$		$\begin{cases} -x + y + 2z = 2 \\ 2x - 3y - z = 1, \\ 2x + y - 5z = -3. \end{cases}$
	$\begin{cases} -2x - y - 2z = -2 \\ x + 2y + 2z = 1, \\ -x + 3y + z = -2. \end{cases}$		$\begin{cases} -x + 3y + 2z = -4 \\ -3x + 2y + z = -1, \\ x - 2y - z = 3. \end{cases}$
	$\begin{cases} -x + 3y + 2z = 1 \\ -x + 4y + 3z = 3, \\ x - y - 3z = -6. \end{cases}$		$\begin{cases} 2x - y + z = 6 \\ x + y - 2z = 1, \\ 3x - y + 2z = 7. \end{cases}$
	$\begin{cases} 3x - 2y + 2z = 11 \\ 2x + 4y - z = -1, \\ x - 3y + 2z = 7. \end{cases}$		$\begin{cases} -2x + 3y + z = -1 \\ x - 2y - z = -1, \\ -3x - y + 2z = -6. \end{cases}$
	$\begin{cases} x + 3y - z = 4 \\ -x + 4y - z = 4, \\ -3x - 2y + 2z = -1. \end{cases}$		$\begin{cases} 2x + 3y - z = -9 \\ -x + 4y - z = -9, \\ -5x - 3y + 2z = 10. \end{cases}$
	$\begin{cases} 2x + y - 2z = -9 \\ 3x + 2y + 4z = 8, \\ -2x - y + z = 6. \end{cases}$		$\begin{cases} -3x - y - 2z = -7 \\ -x + 3y - 2z = 9, \\ 2x + 2y + z = 9. \end{cases}$
	$\begin{cases} -x + 2y - z = 3 \\ x + 2y + 2z = -9, \\ x - y + 2z = -6. \end{cases}$		$\begin{cases} 3x - y + 3z = 10 \\ x - 3y - 3z = -6, \\ 2x - y + 2z = 6. \end{cases}$
	$\begin{cases} -2x - 2y + z = 9 \\ x - 2y + 2z = 9, \\ 2x + y - z = -7. \end{cases}$		

Задание 9. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -7 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 2x_4 = -3 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 11 \\ -3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = -10 \end{cases}.$		$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 14 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 14 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 = -7 \end{cases}.$
	$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = -13 \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = -1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 - 3_4 = 15 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + 2x_4 = -15 \end{cases}.$		$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 11 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = -1 \\ -x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}.$
	$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -17 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 11 \\ -2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \end{cases}.$		$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 - 3x_4 = 1 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -17 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \end{cases}.$
	$\begin{cases} -3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -10 \\ -3x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 9 \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = -4 \end{cases}.$		$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 2 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 5 \\ -2x_1 - 4x_2 + 3x_3 - x_4 = -7 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 8 \end{cases}.$
	$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -5 \\ -3x_1 - 4x_2 + 2x_3 + x_4 = -8 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 9 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 = 8 \end{cases}.$		$\begin{cases} -3x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -6 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 9 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 7 \end{cases}.$
	$\begin{cases} 4x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 6 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 4x_4 = -13 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = -2 \end{cases}.$		$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 9 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = -8 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 4 \\ -3x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -25 \end{cases}.$

	$\begin{cases} 4x_1-3x_2+x_3-2x_4=-9 \\ -3x_1+x_2-2x_3+3x_4=5 \\ -2x_1+2x_2-3x_3+4x_4=13 \\ x_1-3x_2-2x_3+x_4=-9 \end{cases}$.		$\begin{cases} -3x_1+2x_2+2x_3-x_4=-7 \\ x_1+x_2+3x_3+2x_4=5 \\ 4x_1+3x_2-2x_3+4x_4=-14 \\ x_1-2x_2+3x_3+x_4=18 \end{cases}$.
	$\begin{cases} 3x_1-2x_2-x_3+3x_4=3 \\ -2x_1+x_2+2x_3-x_4=5 \\ 3x_1-2x_2-x_3+2x_4=-1 \\ -3x_1-3x_2+4x_3-3x_4=8 \end{cases}$.		$\begin{cases} -2x_1+x_2-x_3+3x_4=-3 \\ -x_1-2x_2+3x_3-x_4=5 \\ 2x_1+3x_2-4x_3+2x_4=-3 \\ -x_1+3x_2-2x_3+3x_4=-2 \end{cases}$.
	$\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3-3x_4=-6 \\ -3x_1+2x_2-3x_3+x_4=-7 \\ 2x_1-4x_2+2x_3+3x_4=21 \\ 4x_1-3x_2-x_3+2x_4=25 \end{cases}$.		$\begin{cases} 3x_1+3x_2-3x_3+2x_4=5 \\ -2x_1+x_2+2x_3-x_4=3 \\ x_1+2x_2+x_3-3x_4=8 \\ -3x_1-x_2+2x_3+x_4=-2 \end{cases}$.
	$\begin{cases} 2x_1+x_2-4x_3+x_4=-8 \\ -3x_1-x_2+2x_3-x_4=9 \\ -x_1+2x_2-3x_3+3x_4=2 \\ 4x_1-x_2+2x_3-x_4=-12 \end{cases}$.		$\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3-x_4=-3 \\ -3x_1-x_2+2x_3+3x_4=6 \\ 3x_1+3x_2-3x_3+2x_4=-5 \\ 2x_1-2x_2+2x_3-3x_4=-7 \end{cases}$.
	$\begin{cases} -2x_1+3x_2+4x_3+x_4=-16 \\ x_1-2x_2-3x_3-2x_4=14 \\ -3x_1+x_2+2x_3-3x_4=-6 \\ 4x_1-3x_2-2x_3+x_4=14 \end{cases}$.		$\begin{cases} -x_1+2x_2+4x_3+x_4=8 \\ 2x_1+3x_2-2x_3+3x_4=5 \\ 2x_1+x_2+3x_3-2x_4=12 \\ -3x_1+x_2+4x_3+x_4=1 \end{cases}$.
	$\begin{cases} 3x_1-x_2+2x_3-3x_4=-3 \\ -x_1+2x_2-x_3+4x_4=-11 \\ -2x_1+x_2-2x_3-3x_4=17 \\ 3x_1-2x_2+3x_3-3x_4=-2 \end{cases}$.		$\begin{cases} 3x_1-x_2+2x_3+3x_4=-5 \\ -x_1+3x_2-4x_3-2x_4=-4 \\ x_1-2x_2+3x_3+3x_4=4 \\ -2x_1+3x_2-2x_3+3x_4=11 \end{cases}$.

	$\begin{cases} -3x_1+x_2+3x_3+2x_4=8 \\ x_1-3x_2+2x_3-x_4=9 \\ x_1+2x_2-4x_3-3x_4=-8 \\ 2x_1-3x_2+2x_3+4x_4=-5 \end{cases}$.		

Задание 10. Вычислить обратную матрицу.

	$\begin{Vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -4 & -3 & 3 \\ -2 & -1 & 5 \end{Vmatrix}$		$\begin{Vmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ -3 & -4 & 5 \end{Vmatrix}$
	$\begin{Vmatrix} -4 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \end{Vmatrix}$		$\begin{Vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -5 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \end{Vmatrix}$
	$\begin{Vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 5 & 4 & -4 \\ -3 & -3 & 1 \end{Vmatrix}$		$\begin{Vmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 5 \\ 5 & 3 & 1 \end{Vmatrix}$
	$\begin{Vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 4 & -3 & -2 \\ -1 & 5 & -2 \end{Vmatrix}$		$\begin{Vmatrix} 5 & 5 & -1 \\ -3 & -3 & 4 \\ 5 & 4 & 1 \end{Vmatrix}$
	$\begin{Vmatrix} -2 & -4 & 3 \\ -1 & -3 & 1 \\ 5 & 3 & -2 \end{Vmatrix}$		$\begin{Vmatrix} -3 & 2 & 4 \\ -4 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 2 \end{Vmatrix}$

	$\begin{Vmatrix} -2 & 3 & -4 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{Vmatrix}$		$\begin{Vmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \\ -1 & 4 & -1 \end{Vmatrix}$
	$\begin{Vmatrix} -3 & 5 & 2 \\ -3 & 4 & 3 \\ 1 & -4 & -2 \end{Vmatrix}$		$\begin{Vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & -3 \end{Vmatrix}$
	$\begin{Vmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 5 & -3 & -5 \\ -2 & -2 & 1 \end{Vmatrix}$		$\begin{Vmatrix} 5 & -3 & 5 \\ 4 & -3 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \end{Vmatrix}$
	$\begin{Vmatrix} 5 & -1 & -2 \\ 3 & -3 & -4 \\ -2 & 1 & 3 \end{Vmatrix}$		$\begin{Vmatrix} 5 & -4 & -3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \end{Vmatrix}$
	$\begin{Vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -2 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & -4 \end{Vmatrix}$		$\begin{Vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & -5 \\ -1 & 5 & 2 \end{Vmatrix}$
	$\begin{Vmatrix} 1 & -3 & -3 \\ -4 & 4 & 5 \\ -2 & 3 & 2 \end{Vmatrix}$		$\begin{Vmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 5 & -2 & 1 \\ -3 & 3 & 2 \end{Vmatrix}$
	$\begin{Vmatrix} -2 & 5 & -1 \\ -2 & -3 & 4 \\ 1 & -5 & 3 \end{Vmatrix}$		$\begin{Vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & -3 & -3 \\ -1 & 5 & 5 \end{Vmatrix}$
	$\begin{Vmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -1 \\ 3 & -4 & -2 \end{Vmatrix}$		

Задание 11. Вычислить обратную матрицу.

	$\begin{Vmatrix} 5 & 5 & -1 & -5 \\ -1 & -2 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & 3 & 3 \\ 5 & 3 & 4 & 2 \end{Vmatrix}$		$\begin{Vmatrix} 3 & 4 & -4 & 5 \\ -2 & 1 & 2 & -2 \\ 5 & -3 & -2 & 4 \\ 3 & 5 & 7 & 3 \end{Vmatrix}$
	$\begin{Vmatrix} 5 & -2 & -2 & 3 \\ -3 & 5 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & -3 & 5 \\ -4 & -1 & 4 & -6 \end{Vmatrix}$		$\begin{Vmatrix} -1 & -4 & 2 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & -4 \\ 2 & -1 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & -4 \end{Vmatrix}$
	$\begin{Vmatrix} 6 & -3 & -2 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & -2 \\ 4 & -5 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & -4 & 6 \end{Vmatrix}$		$\begin{Vmatrix} 6 & 2 & -1 & 4 \\ 4 & -3 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & -1 & 3 \end{Vmatrix}$
	$\begin{Vmatrix} 2 & 5 & -4 & 7 \\ 5 & 4 & 3 & 3 \\ 4 & -3 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 4 \end{Vmatrix}$		$\begin{Vmatrix} 5 & -1 & 3 & -3 \\ 4 & -2 & 4 & 4 \\ -3 & -4 & 3 & 6 \\ 2 & -3 & 4 & -1 \end{Vmatrix}$
	$\begin{Vmatrix} 5 & -1 & -1 & 5 \\ 3 & -2 & -2 & 5 \\ 4 & 3 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & -5 \end{Vmatrix}$		$\begin{Vmatrix} 3 & 5 & -2 & 3 \\ 5 & -3 & 1 & 4 \\ 7 & -2 & 2 & -4 \\ 3 & 4 & -2 & 5 \end{Vmatrix}$
	$\begin{Vmatrix} -4 & 4 & -3 & 5 \\ -1 & 5 & 5 & -2 \\ 4 & -3 & -1 & -2 \\ -6 & 5 & 2 & 3 \end{Vmatrix}$		$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 5 & -4 \\ 2 & 5 & 6 & 2 \\ -4 & -1 & -4 & 6 \end{Vmatrix}$

	$\begin{Vmatrix} 4 & 4 & 3 & 6 \\ -1 & -5 & 5 & -3 \\ -4 & -1 & 4 & -2 \\ 6 & 3 & -2 & 5 \end{Vmatrix}$		$\begin{Vmatrix} 5 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & -3 & 4 \end{Vmatrix}$
	$\begin{Vmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 3 & -3 & 4 & 5 \\ -2 & -4 & 3 & -4 \\ 4 & 1 & 3 & 7 \end{Vmatrix}$		$\begin{Vmatrix} 2 & -3 & 4 & 5 \\ -3 & -4 & -2 & -1 \\ 4 & 3 & 4 & 3 \\ -1 & 6 & 4 & -3 \end{Vmatrix}$
	$\begin{Vmatrix} 2 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & -2 & -1 \\ 5 & 4 & -2 & -1 \\ -5 & -1 & 5 & 5 \end{Vmatrix}$		$\begin{Vmatrix} 3 & 7 & 5 & 3 \\ 4 & -2 & -3 & 5 \\ -2 & 2 & 1 & -2 \\ 5 & -4 & 4 & 3 \end{Vmatrix}$
	$\begin{Vmatrix} -6 & 4 & -1 & -4 \\ 5 & -3 & 5 & 4 \\ 2 & -1 & 5 & -3 \\ 3 & -2 & -2 & 5 \end{Vmatrix}$		$\begin{Vmatrix} -4 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & 5 & -1 & 2 \\ -4 & 6 & 5 & 4 \\ 6 & 2 & -4 & -1 \end{Vmatrix}$
	$\begin{Vmatrix} 6 & -4 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & -5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 & 3 \\ 5 & -2 & -3 & 6 \end{Vmatrix}$		$\begin{Vmatrix} 3 & -1 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & -3 & 4 \\ 4 & -1 & 2 & 6 \end{Vmatrix}$
	$\begin{Vmatrix} 4 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & -3 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & -4 & 5 & 2 \end{Vmatrix}$		$\begin{Vmatrix} -1 & 4 & -3 & 2 \\ 6 & 3 & -4 & -3 \\ 4 & 4 & -2 & 4 \\ -3 & 3 & -1 & 5 \end{Vmatrix}$

	$\begin{Vmatrix} -5 & 5 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -2 & 3 \\ 5 & -1 & -1 & 5 \end{Vmatrix}$		

Задание 12. Найти фундаментальную систему уравнений.

	$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0. \end{cases}$
	$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$
	$\begin{cases} x_1 + x_2 + 10x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 5x_1 - x_2 + 8x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 - 12x_3 - 4x_4 + 4x_5 = 0. \end{cases}$
	$\begin{cases} 6x_1 - 9x_2 + 21x_3 - 3x_4 - 12x_5 = 0, \\ -4x_1 + 6x_2 - 14x_3 + 2x_4 + 8x_5 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 - x_4 - 4x_5 = 0. \end{cases}$
	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 10x_2 - 3x_3 - 2x_4 - x_5 = 0, \\ 4x_1 + 19x_2 - 4x_3 - 5x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$
	$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 5x_5 = 0, \\ 6x_1 + 2x_2 \qquad - 2x_4 - 6x_5 = 0. \end{cases}$

	$\begin{cases} 12x_1 - x_2 + 7x_3 + 11x_4 - x_5 = 0, \\ 24x_1 - 2x_2 + 14x_3 + 22x_4 - 2x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$
	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - 6x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$
	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 16x_2 - 6x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 0. \end{cases}$
	$\begin{cases} \frac{3}{2}x_1 + \frac{5}{4}x_2 + \frac{5}{7}x_3 + x_4 = 0, \\ \frac{3}{5}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{2}{7}x_3 + \frac{2}{5}x_4 = 0, \\ \frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{6}x_2 + \frac{2}{21}x_3 + \frac{2}{15}x_4 = 0. \end{cases}$
	$\begin{cases} 8x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$
	$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 12x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 10x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 \qquad + 2x_4 \qquad = 0. \end{cases}$
	$\begin{cases} 7x_1 - 14x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 + 7x_5 = 0, \\ 5x_1 - 10x_2 + x_3 + 5x_4 - 13x_5 = 0. \end{cases}$
	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 3x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$

	$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 - 2x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$
	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$
	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 10x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 10x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 30x_4 - 3x_5 = 0. \end{cases}$
	$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ 5x_1 - 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 0. \end{cases}$
	$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$
	$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$
	$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 9x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$
	$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0, \\ 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 0. \end{cases}$
	$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 + 4x_5 = 0, \\ 7x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 \qquad - 7x_5 = 0. \end{cases}$

	$\begin{cases} 6x_1+3x_2-2x_3+4x_4+7x_5=0, \\ 7x_1+4x_2-3x_3+2x_4+4x_5=0, \\ x_1+x_2-x_3-2x_4-3x_5=0. \end{cases}$
	$\begin{cases} 3x_1-5x_2+2x_3+4x_4=0, \\ 7x_1-4x_2+x_3+3x_4=0, \\ 5x_1+7x_2-4x_3-6x_4=0. \end{cases}$

Задание 13. Найти фундаментальную систему уравнений и частное решение линейной системы уравнений.

	$\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3-3x_4=4, \\ 2x_1+5x_2-x_3-4x_4=9, \\ x_1+3x_2+x_3-x_4=5. \end{cases}$
	$\begin{cases} x_1-4x_2+2x_3+3x_5=5, \\ 2x_1-7x_2+4x_3+x_4=9, \\ x_1-3x_2+2x_3+x_4-3x_5=4. \end{cases}$
	$\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3-4x_4=1, \\ 3x_1+7x_2-2x_3-x_4=4, \\ 2x_1+5x_2+x_3+3x_4=3. \end{cases}$
	$\begin{cases} x_1-5x_2+3x_3+4x_4=4, \\ 2x_1-9x_2+2x_3+x_5=7, \\ x_1-4x_2-x_3-4x_4+x_5=3. \end{cases}$
	$\begin{cases} x_1+3x_2-x_3-2x_4=1, \\ 2x_1+7x_2-4x_3-3x_4=3, \\ x_1+4x_2-3x_3-x_4=2. \end{cases}$

	$\begin{cases} x_1+x_2+4x_3+2x_5=0, \\ 3x_1+4x_2+x_3+3x_4=1, \\ 2x_1+3x_2-3x_3+3x_4-2x_5=1. \end{cases}$
	$\begin{cases} x_1-2x_2+2x_3+3x_4=0, \\ 2x_1-3x_2+x_3+4x_4=1, \\ 3x_1-5x_2+3x_3+7x_4=1. \end{cases}$
	$\begin{cases} x_1-x_2+4x_3+3x_4=0, \\ 3x_1-2x_2+x_3+2x_5=1, \\ 2x_1-x_2-3x_3-3x_4+2x_5=1. \end{cases}$
	$\begin{cases} x_1-2x_2+2x_3+3x_4=0, \\ 3x_1-5x_2+x_3+4x_4=1, \\ 2x_1-3x_2-x_3+x_4=1. \end{cases}$
	$\begin{cases} x_1-3x_2+4x_3+3x_5=2, \\ 3x_1-8x_2+x_3+2x_4=5, \\ 2x_1-5x_2-3x_3+2x_4-3x_5=3. \end{cases}$
	$\begin{cases} x_1-3x_2+x_3+2x_4=4, \\ 2x_1-5x_2+4x_3+3x_4=7, \\ x_1-2x_2+3x_3+x_4=3. \end{cases}$
	$\begin{cases} x_1-x_2+3x_3+4x_4=0, \\ 4x_1-3x_2+x_3+2x_5=1, \\ 3x_1-2x_2-2x_3-4x_4+2x_5=1. \end{cases}$
	$\begin{cases} x_1+4x_2-2x_3-3x_4=2, \\ 2x_1+9x_2-x_3-4x_4=5, \\ x_1+5x_2+x_3-x_4=3. \end{cases}$
	$\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3+4x_5=1, \\ 4x_1-7x_2+2x_3+x_4=3, \\ 3x_1-5x_2-x_3+x_4-4x_4=2. \end{cases}$

	$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1, \\ 4x_1 - 3x_2 + 8x_3 + 9x_4 = 1. \end{cases}$
	$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 1, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 - x_5 = 3, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 4x_4 - x_5 = 2. \end{cases}$
	$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 5, \\ 2x_1 - 7x_2 + 4x_3 + x_4 = 9, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 4. \end{cases}$
	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 3x_5 = 4, \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 - 4x_4 = 9, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 5. \end{cases}$
	$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 4, \\ 2x_1 - 9x_2 + 2x_3 + x_4 = 7, \\ x_1 - 4x_2 - x_3 - 3x_4 = 3. \end{cases}$
	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 1, \\ 3x_1 + 7x_2 - 2x_3 + x_5 = 4, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = 3. \end{cases}$
	$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$
	$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_5 = 1, \\ 2x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 3, \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 2. \end{cases}$
	$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$

	$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_5 = 1, \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 1. \end{cases}$
	$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 2, \\ 3x_1 - 8x_2 + x_3 + 2x_4 = 5, \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 - x_4 = 3. \end{cases}$

БИБЛИОГРАФИЯ

1.*Бурмистрова. Е.Б., Лобанов С.Г.*Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии– М.: Высшая школа, 1998.

2. *Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я.* Высшая математика в упражнениях и задачах. Учебное пособие для студентов втузов в двух частях – М.: Высшая школа, 1986.

3. Сборник задач по математике для ВТУЗов под редакцией *Ефимова А.В., Демидовича Б.П.* – М.: Наука, 1986.

4. Сборник задач по алгебре под редакцией *Кострикина А.И.* - Изд.-во Факториал, 1995.

5. *Феденко А.С.* Сборник задач по алгебре и аналитической геометрии.- Минск, 1999.

6. *Шевцов Г.С.* Линейная Алгебра – М. Гардарики, 1999.

СОДЕРЖАНИЕ

Ермилова Нелли Александровна,
доцент кафедры ОМиИ АмГУ;

Павельчук Анна Владимировна,
ассистент кафедры ОМиИ АмГУ

Матрицы, определители, системы линейных уравнений. *Учебно-методическое пособие.*

Усл. печ. л. 5,12. Заказ 413.