Министерство образования и науки Российской Федерации

Амурский государственный университет

Т.А. Луганцева, Т.В. Труфанова

ДИНАМИКА В ВОПРОСАХ И ОТВЕТАХ

Учебное пособие

Благовещенск

Издательство АмГУ

2013

ББК 22.21

Л75

Рекомендовано
учебно-методическим советом университета
Рецензент:

Ларченко Н.М., доцент кафедры общетехнических дисциплин Амурского филиала Морского государственного университета им. Г.И. Невельского, канд. техн. наук

Луганцева Т.А., Труфанова Т.В.

Л75 Динамика в вопросах и ответах: Учебное пособие / Т.А. Луганцева, Т.В.Труфанова. – Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2013. – 154 с.

Учебно-методическое пособие предназначено для самостоятельной работы студентов, в соответствии с ФГОС дисциплины «Теоретическая механика» (раздел «Динамика»). Пособие включает выписку из ФГОС с указанием дидактических единиц в вопросах и ответах, тесты по разделу с примерами их выполнения, рекомендациями, обеспечивающими самостоятельное изучение дисциплины.

Пособие предназначено для студентов всех специальностей и форм обучения университета, изучающих курс теоретической механики.

ВВЕДЕНИЕ

Целью теоретической механики как научной дисциплины является изучение тех общих законов, которым подчиняются движение и равновесие материальных тел и возникающие при этом взаимодействия между телами, а также овладение основными алгоритмами исследования равновесия и движения механических систем. На данной основе становится возможным построение и исследование механико-математических моделей, адекватно описывающих разнообразные механические явления. Помимо этого, при изучении теоретической механики вырабатываются навыки практического использования методов, предназначенных для математического моделирования движения систем твёрдых тел.

Отсюда следует, что изучение курса теоретической механики при подготовке инженера имеет две основные цели – создание научной базы для изучения последующих дисциплин и реализация практической направленности курса – решение задач.

“Теоретическая механика” – дисциплина, лежащая в основе современной техники. Теоретическая механика обеспечивает логическую связь, во-первых, между физикой и математикой, применяя математический аппарат к изучению физических явлений, и, во-вторых, между естественнонаучными дисциплинами и общетехническими и специальными дисциплинами. Дисциплина «Теоретическая механика» является предшествующей для всех дисциплин профессионального цикла ООП. Исторически теоретическая механика стала первой из естественных наук, оформившейся в аксиоматизированную теорию, и до сих пор остаётся эталоном, по образу и подобию которого строятся другие естественные науки, достигшие этапа аксиоматизации.

В ходе изучения курса студент должен получить представление о предмете теоретической механики, возможностях её аппарата и границах применимости её моделей, а также о междисциплинарных связях теоретической механики с другими естественнонаучными, общепрофессиональными и специальными дисциплинами. Он должен приобрести навыки решения типовых задач по статике, кинематике и динамике, а также опыт компьютерного моделирования механических систем.

Именно в рамках теоретической механики студенты впервые получают возможность практически применить арсенал математических и физических понятий к исследованию реальных систем, осваивают важнейшие алгоритмы такого исследования. Изучение теоретической механики дает тот минимум фундаментальных знаний, на базе которых будущий специалист сможет самостоятельно овладевать новой информацией, с которой ему придется столкнуться в производственной и научной деятельности.

Предлагаемое учебное пособие имеет практическую направленность, приобретения навыков решения задач и тестов по разделу «Динамика».

Источником изложенного в пособии материала является классическая литература по теоретической механике и собственный опыт авторов преподавания дисциплины.

Пособие предназначено для проведения самоконтроля перед текущим и промежуточным тестированием по разделу «Динамика».

Организация тестового контроля по теоретической механике имеет свою особенность в связи с большим количеством теорем и законов, записанных в математической форме.

В первой части пособия рассматриваются вопросы самоконтроля из учебника [3].

Во второй части пособия рассматриваются тесты авторов, приводятся различные варианты их решения.

Перед использованием пособия рекомендуется изучить раздел «Динамика» дисциплины «Теоретическая механика» по одному из учебников, приведенных в библиографическом списке.

Пособие предназначено для студентов всех форм обучения, изучающих дисциплину.

1. ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

Выписка из ФГОС ВПО (раздел «Динамика») направление подготовки: 220700 "Автоматизация технологических процессов и производств (по отраслям)"

Федеральный компонент ЕН.Ф.05.

Предмет динамики; законы механики Галилея-Ньютона; задачи динамики; относительное движение материальной точки; механическая система; масса системы; дифференциальные уравнения движения механической системы; количество движения материальной точки и механической системы, момент количества движения материальной точки относительно центра и оси; кинетическая энергия материальной точки и механической системы; принцип Даламбера для материальной точки; дифференциальные уравнения поступательного движения твердого тела; связи и их уравнения; принцип возможных перемещений; обобщенные координаты системы; дифференциальные уравнения движения механической системы в обобщенных координатах или уравнения Лагранжа второго рода.

Перечень контролируемых учебных элементов отражает требования к знаниям и умениям, которые студент должен приобрести в результате освоения дисциплины.

Тема 1: Динамика как раздел теоретической механики. Основные понятия и аксиомы динамики.

Цель:

- усвоение основополагающих законов механики позволяющее исследовать движение свободной материальной точки.

Учебные вопросы:

Законы Галилея - Ньютона. Инерциальная и неинерциальная системы отсчета. Дифференциальные уравнения движения свободной и несвободной материальной точки: в векторном виде, в проекциях на оси декартовой и естественной систем координат. Первая и вторая задачи динамики точки, методы их решения. Прямолинейное и криволинейное движение материальной точки. Динамика относительного движения материальной точки, относительный покой.

В результате освоения данной темы студент должен:

иметь представление:

- о разделе «Динамика» дисциплины теоретическая механика;

- о массе тела и ускорении свободного падения, о связи между силовыми и кинематическими параметрами движения, о двух основных задачах динамики;

знать:

- основные законы динамики и границы их применимости, формулы основных величин;

- определения относительного движения и сил инерции материальной точки, вид дифференциального уравнения относительного движения;

уметь:

- вычислять равнодействующую сил, действующих на точку, по заданному закону движения;

- составлять дифференциальные уравнения движения материальной точки при различных способах задания ее движения;

- решать дифференциальные уравнения движения материальной точки и определять постоянные интегрирования по заданным начальным условиям ее движения;

- исследовать закон движения точки;

- определять ускорение и направление силы инерции материальной точки, записывать уравнение относительного движения точки;

владеть:

- практическими навыками решения задач по теме.

Тема 2: Введение в динамику механической системы. Общие теоремы динамики материальной точки и механической системы. Теорема о движении центра масс. Теорема об изменении количества движения.

Цель:

- усвоение основных понятий и законов, используемых для описания движения материальной точки и механической системы с помощью теоремы о движении центра масс и теорем об изменении количества движения.

Учебные вопросы:

Свойства внутренних сил механической системы. Общие теоремы динамики механической системы. Центр масс и методы его нахождения. Центр масс однородных тел. Теорема о движении центра масс. Закон сохранения движения центра масс. Количество движения материальной точки и механической системы. Теорема об изменении количества движения (дифференциальный вид). Понятие элементарного импульса и импульса силы за какой-либо промежуток времени. Импульс равнодействующей силы. Теорема импульсов (интегральный вид теоремы об изменении количества движения). Закон сохранения количества движения в дифференциальном и интегральном виде.

В результате освоения данной темы студент должен:

иметь представление:

- о внешних и внутренних силах, действующих на механическую систему;

- свойствах главного вектора и главного момента всех внутренних сил системы;

- о понятии «центр масс», «количество движения», «импульс силы»;

- об исследовании динамики материальной точки и механической системы с помошью теоремы о движении центра масс и теорем об изменении количества движения;

знать:

- основные законы и теоремы динамики точки и механической системы и их следствия;

-. определение центра масс механической системы;

- определение количества движения, импульса силы материальной точки и механической системы;

уметь:

- уметь определять положение центра масс простых геометрических фигур, составленных из стандартных профилей;

- находить импульс равнодействующей силы и проекции импульса на координатные оси;

- определять параметры движения с помощью теоремы о движении центра масс;

- применять закон сохранения движения центра масс к решению практических задач;

- определять параметры движения с помощью теоремы об изменении количества движения;

- применять закон сохранения количества движения к решению практических задач;

владеть:

- практическими навыками решения задач по теме.

Тема 3: Геометрия масс. Инерционные характеристики механической системы.

Цель:

- получить представление о геометрии сечений, уяснить физический смысл моментов инерции.

Учебные вопросы:

Моменты инерции материальной точки относительно полюса, оси и плоскости. Моменты инерции системы материальных точек, относительно полюса, оси и плоскости. Моменты инерции абсолютно твердого тела относительно полюса, оси и плоскости. Моменты инерции однородных тел. Радиус инерции. Физический смысл моментов инерции. Осевые моменты инерции в декартовых координатах. Полярный момент инерции в декартовых координатах. Связь между осевыми и полярным моментами инерции. Центробежные моменты инерции. Главные оси инерции. Теорема Гюйгенса – Штейнера (теорема о моментах инерции относительно параллельных осей). Момент инерции относительно оси любого направления. Тензор инерции. Эллипсоид инерции и его физический смысл.

В результате освоения данной темы студент должен:

иметь представление:

- о моментах инерции твердого тела и радиусе инерции;

знать:

- теорему о моментах инерции относительно параллельных осей;
- моменты инерции однородных тел относительно осей, проходящих через их центры масс и являющихся осями симметрии;

уметь:

- вычислять моменты инерции материальной точки и твердого тела относительно полюса, оси и плоскости;
- вычислять моменты инерции однородных тел относительно произвольной оси;
- вычислять моменты инерции относительно осей симметрии и центра симметрии, применять теорему Гюйгенса-Штейнера

владеть:

- практическими навыками решения задач по теме.

Тема 4: Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки и механической системы.

Цель:

- усвоение основных понятий и законов, используемых для описания движения материальной точки и механической системы с помощью теоремы об изменении кинетической энергии материальной точки и механической системы.

Учебные вопросы:

Две меры механического движения. Кинетическая энергия материальной точки, механической системы и твердого тела при поступательном, вращательном и плоском движении абсолютно твердого тела. Теорема Кёнига. Работа силы: элементарная, на конечном перемещении, силы тяжести, силы трения скольжения, силы упругости. Элементарная работа момента силы. Мощность силы. Мощность момента силы. Теоремы об изменении кинетической энергии точки и механической системы (дифференциальный и интегральный вид). Изменяемые и неизменяемые механические системы.

Понятие о силовом поле. Силовая функция. Потенциальное силовое поле и его свойства. Эквипотенциальные поверхности (поверхности уровня). Потенциальная энергия. Закон сохранения полной механической энергии материальной точки в потенциальном силовом поле. Силовое потенциальное поле и потенциальная энергия механической системы.

В результате освоения данной темы студент должен:

иметь представление:

- о кинетической энергии материальной точки, системы материальных точек, абсолютно твердого тела;

- о способах вычисления работы силы при прямолинейном и криволинейном движении, о мощности полезной и затраченной;

- о потенциальном силовом поле;

знать:

- формулы для вычисления кинетической энергии материальной точки и механической системы;

- определение элементарной работы и ее аналитическое выражение;

- определение работы силы на конечном перемещении;

- понятие мощности силы и мощности момента силы;

- теорему об изменении кинетической энергии в дифференциальном и интегральном виде;

- понятие потенциальной силовой функции и потенциальной энергии;

уметь:

- вычислять кинетическую энергию твердого тела при поступательном, вращательном вокруг неподвижной оси и плоском движении;

- вычислять работу силы тяжести, силы трения, упругой силы, момента силы;

- определять параметры движения с помощью теоремы об изменении кинетической энергии в дифференциальном и интегральном виде;

владеть:

- практическими навыками решения задач по теме.

Тема 5: Теорема об изменении момента количества движения материальной точки и об изменении кинетического момента и механической системы.

Цель:

- усвоение основных понятий и законов, используемых для описания движения материальной точки и механической системы с помощью теоремы об изменении кинетического момента материальной точки и механической системы.

Учебные вопросы:

Векторный момент количества движения материальной точки относительно полюса: алгебраическое значение, направление вектора. Момент количества движения материальной точки относительно оси. Момент количества движения относительно начала координат. Кинетический момент механической системы относительно точки. Кинетический момент механической системы относительно оси. Кинетический момент вращающегося тела относительно оси вращения. Основное дифференциальное уравнение вращательного движения абсолютно твердого тела. Теорема об изменении кинетического момента. Закон сохранения кинетического момента. Дифференциальное уравнение вращательного движения твердого тела,

В результате освоения данной темы студент должен:

иметь представление:

- о моменте количества движения и о кинетическом моменте механической системы относительно точки и оси, их связи с действующими на материальную точку или механическую систему силами;

знать:

- формулы для определения момента количества движения относительно центра и оси;

- формулы для определения кинетического момента механической системы относительно центра и оси;

- математическую запись теоремы об изменении количества движения материальной точки относительно точки и оси;

- математическую запись теоремы об изменении кинетического момента механической системы относительно точки и оси;

уметь:

- находить значение момента количества движения материальной точки для различных случаев ее движения;

- находить значение кинетического момента механической системы и исследовать сохранение значения этого момента отнсительно центра и оси;

- определять параметры движения с помощью теоремы об изменении кинетического момента;

- применять закон сохранения кинетического момента;

владеть:

- практическими навыками решения задач по теме.

Тема 6. Принцип Даламбера для материальной точки и механической системы.

Цель:

- усвоение основных понятий и определений для описания динамики материальной точки, тела и механической системы методом кинетостатики.

Учебные вопросы:

Принцип Даламбера для материальной точки. Силы инерции. Принцип Даламбера для механической системы. Метод кинетостатики в решении задач динамики точки и механической системы. Главный вектор сил инерции. Главный момент сил инерции. Частные случаи приведения сил инерции: при поступательном движении, при вращательном движении вокруг центра масс, при вращении вокруг произвольной оси, при плоском движении, при равномерном вращении однородного стержня.

В результате освоения данной темы студент должен:

иметь представление:

- о силах инерции и моментах сил инерции;
- о применении этого принципа для несвободной механической системы;
- о достоинствах и недостатках этого метода;

знать:

- сущность принципа Даламбера;
- силы инерции для различных форм движения твердого тела;

уметь:

- применять принцип Даламбера для решения практических задач;
- находить силы инерции при поступательном, вращательном и плоском движении твердого тела;
- определять параметры движения, используя метод кинетостатики;
- определять динамические реакции подшипников при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси;

владеть:

- практическими навыками решения задач на равновесие материальной точки и механической системы при помощи принципа Даламбера.

Тема 7: Аналитическая механика. Принцип Лагранжа (Принцип возможных перемещений). Общее уравнение динамики.

Цель:

- усвоение основных понятий и определений позволяющих применять для описания динамики материальной точки, тела и механической системы принцип Лагранжа;

- усвоение основных понятий и определений позволяющих применять для описания динамики материальной точки, тела и механической системы общее уравнение динамики.

Учебные вопросы:

Аналитические связи: односторонние и двухсторонние, кинематические и геометрические, стационарные и нестационарные, голономные и неголономные, идеальные и неидеальные. Вариация и дифференциал. Перемещения возможные и действительные. Виртуальная работа силы. Постулат идеальных связей. Принципы Лагранжа: принцип возможных перемещений, принцип возможных скоростей. Принцип Даламбера-Лагранжа и общее уравнение динамики.

В результате освоения данной темы студент должен:

иметь представление:

- об аналитических связях, перемещениях возможных и действительных;

- о принципе возможных перемещей, принципе возможных скоростей и общем уравнении динамики;

знать:

- особенности аналитических связей;

- перемещения возможные и действительные;

- сущность принципа возможных перемещений и его формулировку;

- формулировку общего уравнения динамики и его математическую запись;

уметь:

- применять ПВП к определению реакций связей;

- решать задачи на общее уравнение динамики материальных систем.

владеть:

- практическими навыками решения задач методами аналитической механики.

Тема 8: Дифференциальные уравнения движения механической системы в обобщенных координатах. Уравнения Лагранжа II рода.

Цель:

- усвоение основных понятий и определений позволяющих применять для описания динамики механической системы уравнения Лагранжа второго рода.

Учебные вопросы:

Обобщенные координаты, скорости, ускорения и возможные перемещения. Обобщенные силы и методы их вычисления. Принцип обобщенных возможных перемещений. Условия равновесия системы в обобщенных координатах. Вывод уравнений Лагранжа второго рода из общего уравнения динамики. Уравнения Лагранжа второго рода в потенциальном поле. Функция Лагранжа. Дифференциальные уравнения движения механической системы в обобщенных координатах. Алгоритм решения задач.

В результате освоения данной темы студент должен:

иметь представление:

- об обобщенных координатах и обобщенных силах;

- о дифференциальных уравнениях второго порядка в обобщенных координатах;

знать:

- физический смысл и математическую запись уравнений Лагранжа второго рода;

- физический смысл функции Лагранжа;

уметь:

- записывать уравнения движения механической системы в обобщенных координатах;

- определять параметры движения, используя уравнения Лагранжа второго рода;

владеть:

- практическими навыками решения задач с применением уравнений Лагранжа второго рода.

ОСНОВНЫЕ ТЕРМИНЫ, ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ФОРМУЛЫ

1.1. Динамика как раздел механики

Вопрос.

Исторические сведения о развитии динамики, как раздела механики.

Ответ.

Динамика – раздел теоретической механики, в котором изучается движение твердых тел под действием сил, вызывающих это движение.

Динамика представляет собой наиболее общий раздел механики, имеющий особое значение для решения многих практических задач в различных областях техники.

Сила считается в механике основным понятием. Силы не являются в механике какими-либо самостоятельными сущностями, независимыми от материальных тел, они создаются материальными телами и полями. Посредством сил материальные тела взаимодействуют друг с другом. Сила при этом выступает как векторная количественная мера интенсивности взаимодействия. Силы не только изменяют скорость движения материальных тел, но и вызывают их деформации.

При этом в динамике (в отличие от кинематики) существенным являются массы материальных точек и при описании движения кроме кинематических характеристик, вводятся также динамические характеристики (или меры) движения: количество движения, кинетический момент и кинетическая энергия. В динамике при изучении движения тел, учитываются как действующие силы, так и инертность самих материальных тел. Инертность представляет собой свойство материальных тел быстрее или медленнее изменять скорость своего движения под действием приложенных сил. Количественной мерой инертности тела является его масса.

Научные основы динамики как науки заложены в XVII веке в трудах Галилео Галилея (1564 - 1642), Рене Декарта (1596 - 1656), Христиана Гюйгенса (1629 - 1695) и другими учеными. Так Г.Галилей более 350 лет тому назад сформулировал принцип инертности. Первой теорией о движении тела под действием силы были тезисы Аристотеля, господствовавшие в науке свыше тысячи лет. Он считал, что если тело движется, то к нему обязательно должна быть приложена сила извне. Без такого приложения сил движение тела невозможно. Закон инерции Г.Галилея полностью опровергает тезисы Аристотеля. Окончательные законы классической механики были сформулированы Исааком Ньютоном (1642-1727). В 1687 г. была опубликована работа Ньютона «Математические начала натуральной философии», в которой были сформулированы три основных закона классической механики: закон инерции (который был известен еще Галилею), закон пропорциональности приложенной к телу силы и вызванного действием силы ускорения и закон равенства действия и противодействия.

В этой работе был высказан ньютонов закон всемирного тяготения, и было доказано, что из этого закона вытекают законы Кеплера о движении планет. Здесь же Ньютон разработал динамику солнечной системы, чем заложил основы небесной механики.

Как и все научные работы того времени, работа Ньютона была написана и опубликована на латыни. На русский язык работу Ньютона перевел известный механик и математик академик А.Н. Крылов. При переводе он снабдил работу Ньютона обширными примечаниями, которые оказались вполне весомым вкладом в дело развития механики. На русском языке эта интересная и важная работа Ньютона так и издана с примечаниями академика Крылова.

С этой работы Ньютона и начинается буквально триумфальное шествие и бурное развитие механики как науки. Вся динамика по существу является математическим развитием законов Ньютона.

Период развития механики после Ньютона в значительной мере связан с именем Леонарда Эйлера (1707-1783), который большую часть своей деятельности отдал основанной в 1724 г. Петром Великим Петербургской академии наук, членом которой он стал в 1727 г.

Эйлер развил динамику точки, заложил основы динамики твердого тела, имеющего одну неподвижную точку (динамические уравнения Эйлера), нашел решение этих уравнений при движении тела по инерции, являлся основателем гидродинамики, теории корабля и других важных результатов. Ему принадлежит заслуга создания первого курса механики в аналитическом изложении.

К этому же периоду относится разработка механики свободных и несвободных систем материальных точек (работы Ж.Л.Даламбера (1717–1783 г.) «Трактат по динамике», Ж.Л.Лагранжа (1736–1813 г.) «Аналитическая механика»).

Дальнейшее развитие механики характеризуется углубленным изучением ранее сформулированных разделов и появлением ряда новых ее частей (работы П.С.Лапласа, М.В.Остроградского, К.Ф.Гаусса, К.Г.Якоби, У.Р.Гамильтона, Л.Фуко, А.Н.Крылова, Н.Е.Жуковского, И.В.Мещерского, К.Э.Циолковского и других).

Только в XX веке с созданием теории относительности и квантовой механики, были четко определены границы применимости законов механики. Было установлено, что законы теоретической механики с достаточной точностью описывают лишь движения макротел или макрочастиц, происходящих со скоростями малыми по сравнению со скоростью света. Для описания движений макрочастиц, происходящих со скоростями близкими к скорости света, законы классической (или теоретической) механики не применимы. Там действуют законы теории относительности и квантовой механики.

Механика прошла огромный путь развития, но и после создания теории относительности и квантовой механики теоретическая механика продолжает развиваться, оставаясь, как и раньше основной научной базой всей современной техники.

1.2. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Вопрос.

Сформулируйте законы (аксиомы) динамики.

Ответ.

Основные законы (аксиомы) динамики – это законы Галилея-Ньютона.

Первый закон динамики – закон инерции Галилея – Ньютона.

Существуют такие системы отчета, относительно которых изолированная от внешних воздействий материальная точка сохраняет своё механическое состояние (т.е. свою скорость) неизменным по величине и направлению до тех пор, пока на материальную точку не подействует какая-либо сила и не выведет её из этого состояния. Такие системы отсчета называются инерциальными (ИСО).

Первый закон Ньютона еще называется законом инерции. Под инерцией понимают способность тела сохранять свое движение или состояние покоя при отсутствии сил или изменять это состояние под действием силы.

Изолированная материальная точка – это точка, на которую не действуют никакие силы (или главный вектор силы равен нулю).

Следовательно, изолированная материальная точка в инерциальной системе отсчета движется равномерно и прямолинейно или находится в состоянии покоя.

Второй закон Ньютона – закон пропорциональности силы и ускорения.

Изменение количества движения материальной точки в каждый момент времени пропорционально силе, действующей на материальную точку:

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F} \qquad (1)$$

Количеством движения материальной точки называется векторная величина $\vec{q}$, равная произведению массы точки на вектор ее скорости:

$$\vec{q} = m \cdot \vec{\upsilon} \tag{2}$$

Считая массу материальной точки величиной постоянной, второй закон Ньютона Л.Эйлер в своем трактате «Механика» преобразовал к форме:

$$m\vec{a} = \vec{F} \tag{3}$$

В инерциальных системах отсчета произведение массы материальной точки на её ускорение, полученное под действием приложенной силы равно этой силе по величине и направлению.

Второй закон Ньютона позволяет установить связь между массой m тела, находящегося вблизи земной поверхности, и его весом

Третий закон Ньютона – закон равенства действия и противодействия, справедлив как для материальных точек, так и для тел конечных размеров:

В инерциальных системах отсчета силы взаимодействия между двумя материальными точками равны по модулю, направлены в противоположную сторону вдоль прямой, соединяющей эти точки и приложены к различным материальным точкам.

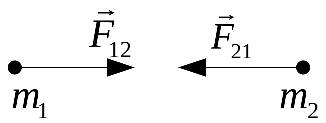


Рисунок 1

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \tag{4}$$

Третий закон динамики проявляется при рассмотрении движения тел в любой системе отсчета.

Четвертый закон Ньютона – закон независимого действия сил - не был сформулирован им как отдельный закон динамики, но он содержится в сделанном им обобщении правила параллелограмма сил.

При одновременном действии на материальную точку нескольких сил ускорение точки, относительно инерциальной системы отсчета, от действия каждой отдельной силы, не зависит от наличия других приложенных к точке сил и равно векторной сумме ускорений от действия отдельных сил.

Действие силы на тело не зависит от того, находится тело в покое или в движении и не зависит от числа действующих сил.

Вопрос.

Какую систему отсчета называют инерциальной?

В различных системах отсчета математическая форма законов природы различна, однако существуют так называемые инерциальные системы отсчета, в которых эти законы имеют наиболее простой вид.

Инерциальными системами отсчета называются такие системы отсчета, в которых выполняются принцип инерции. Это все те системы отсчета, в которых материальная точка при отсутствии действующих на нее сил взаимодействия, движется равномерно и прямолинейно.

Установлено, что гелиоцентрическая система координат (т.е. система координат с началом в уентре Солнца и осями, направленными на «неподвижные» звезды) весьма близка к инерциальной системе при движении внутри Солнечной системы.

Если движение некоторой системы отсчета происходит с относительно малыми ускорениями относительно инерциальной системы отсчета, то при решении практических задач иногда можно пренебречь малой неинерциальностью (например, неинерциальностью геоцентрической системы координат, связанной с Землей).

Вопрос.

Какова мера инертности твердых тел при поступательном движении?

Ответ.

В классической механике количественной мерой инертности тела является масса. Масса движущегося тела принимается равной массе покоящегося тела, т.е. она рассматривается как постоянная величина.

Вопрос.

Зависит ли вес тела от местонахождения тела на Земле?

Вес тела определяется по формуле: $P=mg$, а так как ускорение свободного падения g зависит от географической широты места и его высоты над уровнем моря, то в отличие от массы тела его вес не является постоянной величиной.

Вопрос.

Какое уравнение называется основным уравнением динамики?

Ответ.

Основным уравнением динамики для материальной точки является соотношение, устанавливающее связь между силой, массой и ускорением материальной точки:

$$m\vec{a} = \vec{F} \tag{5}$$

Основным уравнением динамики для материальной точки, на которую действуют одновременно несколько сил, является:

$$m\vec{a} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \tag{6}$$

Вопрос.

Запишите дифференциальные уравнения движения точки в векторном виде, в проекциях на оси координат (декартовы, естественные).

Ответ.

Дифференциальные уравнения движения точки охватывают различные способы задания ее движения: векторный, координатный и естественный.

Векторный способ.

Через радиус-вектор дифференциальное уравнение движения материальной точки имеет вид:

$$m\ddot{\vec{r}} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \tag{7}$$

Проецируя уравнение (6) на оси декартовой системы координат получаем три скалярных дифференциальных уравнения движения точки:

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= \sum_{k=1}^{n} F_{kx} \\ m\ddot{y} &= \sum_{k=1}^{n} F_{ky} \\ m\ddot{z} &= \sum_{k=1}^{n} F_{kz} \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

В проекциях на оси координат естественного трехгранника касательную $\vec{\tau}$, нормаль $\vec{n}$ и бинормаль $\vec{b}$ получим три скалярных дифференциальных уравнения движения точки:

$$\left.\begin{aligned} m_k\vec{a}_\tau &= \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_{k\tau} \\ m_k\vec{a}_n &= \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_{kn} \\ m_k\vec{a}_b &= \sum_{k=1}^{n} F_{kb} \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Ускорения, в проекциях на оси естественной системы координат определяются по формулам:

$$\left. a_\tau = \dot{\upsilon} = \ddot{s};\ \ a_n = \frac{\upsilon^2}{\rho} = \frac{\dot{s}^2}{\rho};\ \ a_b = 0 \right\} \qquad (10)$$

Подставив (10) в (9), получим дифференциальные уравнения в естественной системе координат (для свободной материальной точки):

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{s} &= \sum_{k=1}^{n} F_{k\tau} \\ m\frac{\dot{s}^2}{\rho} &= \sum_{k=1}^{n} F_{kn} \\ 0 &= \sum_{k=1}^{n} F_{kb} \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Последнее уравнение никак не связано с движением точечной массы и по существу носит статический характер, оно чаще всего служит для определения реакции связей.

Вопрос.

Сформулируйте две основные задачи динамики точки, которые решаются при помощи дифференциальных уравнений движения точки.

Ответ.

Первая задача динамики или прямая задача динамики.

Зная массу точки m и уравнения ее движения, определить модуль и направление равнодействующей сил, приложенных к точке

Вторая задача динамики или обратная задача динамики.

Зная силы, действующие на материальную точку, ее массу m, а также начальное положение точки и ее начальную скорость, определить уравнения движения точки.

Вопрос.

Объясните алгоритм решения первой задачи динамики.

Ответ.

Задан закон движения точки (уравнения движения точки как функции времени) и, следовательно, три скалярные функции от времени. Необходимо найти суммарную силу, действующую на точку.

Последовательность решения:

Используя заданные уравнения движения, найти путем двойного дифференцирования проекции ускорения на координатные оси.

Записать дифференциальные уравнения движения точки в скалярном виде и определить из них проекции на координатные оси равнодействующей всех сил, приложенных к точке, как функции времени.

$$\left.\begin{aligned} F_x &= ma_x = m\ddot{x} \\ F_y &= ma_y = m\ddot{y} \\ F_z &= ma_z = m\ddot{z} \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Определить модуль равнодействующей и ее направляющие косинусы.

$$\left|F\right| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \tag{13}$$

Направление силы определяется направляющими косинусами:

$$\left.\begin{aligned} \cos(\vec{F},\wedge Ox) = \frac{F_x}{\left|F\right|} \\ \cos(\vec{F},\wedge Oy) = \frac{F_y}{\left|F\right|} \\ \cos(\vec{F},\wedge Oz) = \frac{F_z}{\left|F\right|} \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Вопрос.

Объясните алгоритм решения второй задачи динамики.

Ответ.

Вторая задача является обратной по отношению к первой задаче динамики, поэтому решается интегрированием дифференциальных уравнений движения.

Вторая задача динамики решается по следующему алгоритму:

- выбрать и изобразить на чертеже систему координат;
- изобразить на рисунке точку в текущем положении и действующие на точку силы;
- записать дифференциальные уравнения движения точки в векторном виде;
- спроектировать эти векторные равенства на координатные оси;
- в зависимости от условий задачи найти решения дифференциальных уравнений;
- определить начальные условия движения точки;
- определить постоянные интегрирования исходя из начальных условий;
- определить требуемые по условиям задачи величины.

Вопрос.

Как определяются произвольные постоянные при интегрировании дифференциальных уравнений движения материальной точки?

Ответ.

При интегрировании каждого дифференциального уравнения движения точки появляются две постоянные, которые определяются из начальных условий.

В качестве начальных условий берут начальное положение точки (значениям трех координат точки) и проекций ее скорости на три оси в некоторый момент времени, обычно в начальный момент времени.

Начальные условия для материальной точки:

$$x\big|_{t=0} = x_0;\;\; y\big|_{t=0} = y_0;\;\; z\big|_{t=0} = z_0;$$

$$\dot{x}\big|_{t=0} = \dot{x}_0 = \upsilon_{ox};\;\; \dot{y}\big|_{t=0} = \dot{y}_0 = \upsilon_{oy};\;\; \dot{z}\big|_{t=0} = \dot{z}_0 = \upsilon_{oz}; \qquad (15)$$

Вопрос.

К какому телу приложена сила инерции материальной точки и каковы ее модуль и направление?

Ответ.

Сила инерции материальной точки представляет собой противодействие материальной точки изменению ее скорости и приложена к телу, сообщающему этой точке ускорение. Сила инерции равна по модулю произведению массы материальной точки на модуль ее ускорения и направлена в сторону, противоположную ускорению.

$$\vec{\tilde{O}} = -m\vec{a} \qquad (16)$$

Вопрос.

Каковы модули и направления касательной и нормальной сил инерции материальной точки?

Ответ.

При неравномерном криволинейном движении точки силу инерции раскладывают на две составляющие, направленные по касательной к траектории и по главной нормали (рисунок 2).

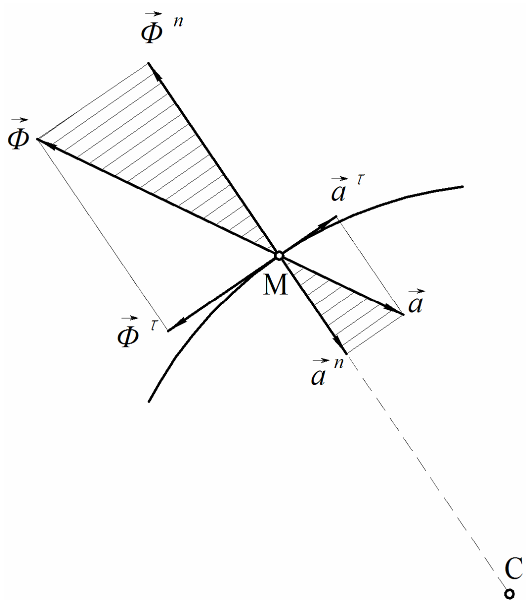


Рисунок 2

Полученные составляющие называются касательной и нормальной силами инерции. Эти силы инерции направлены противоположно касательному и нормальному ускорениям. Поэтому

$$\vec{\Phi}^{\tau} = -m\vec{a}^{\tau} \tag{17}$$

$$\vec{\Phi}^{n} = -m\vec{a}^{n} \tag{18}$$

Подставив значения ускорений, получим модули сил инерции:

$$\Phi^{\tau} = m\frac{d\upsilon}{dt} \tag{19}$$

$$\Phi^{n} = m\frac{\upsilon^{2}}{\rho} \tag{20}$$

Вопрос.

При каком движении материальной точки равна нулю ее касательная сила инерции и при каком – нормальная?

Ответ.

В случае равномерного прямолинейного движения точки ускорение равно нулю, поэтому, и сила инерции будет равна нулю.

Если точка совершает неравномерное прямолинейное движение, то нормальное ускорение равно нулю, а, следовательно, нормальная сила инерции будет равна нулю и точка имеет лишь касательную составляющую и ее модуль определяется по формуле (19).

Если точка совершает равномерное криволинейное движение, то ее касательное ускорение равно нулю, а, следовательно, касательная сила инерции будет равна нулю и точка имеет лишь нормальную составляющую, модуль которой определяется по формуле (20).

Вопрос.

По каким формулам вычисляются модули вращательной и центробежной сил инерции точки, принадлежащей твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси?

Ответ.

Если точка принадлежит твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси, то модуль ее вращательной и центробежной сил инерции определяются по формулам:

$$\hat{O}^{\tau} = mR\varepsilon \qquad (21)$$

$$\hat{O}^{n} = mR\omega^2 \qquad (22)$$

Вопрос.

В каких случаях материальную точку называют несвободной, и, каковы уравнения движения этой точки?

Ответ.

Несвободной материальной точкой называется точка, движение которой ограничено связями. Дифференциальные уравнения движения этой точки имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x + N_x \\ m\ddot{y} &= F_y + N_y \\ m\ddot{z} &= F_z + N_z \end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

где N_x , N_y, N_z – проекции нормальной реакции на координатные оси.

Вопрос.

Какой модуль и какое направление имеют переносная и кориолисова силы инерции материальной точки?

Ответ.

Переносная сила инерции численно равна произведению массы точки на ее переносное ускорение.

$$\vec{\hat{O}}_e = -m\vec{a}_e \qquad (24)$$

Переносная сила инерции направлена противоположно переносному ускорению точки.

Кориолисова сила инерции численно равна произведению массы точки на ее кориолисово ускорение.

$$\vec{\hat{O}}_c = -m\vec{a}_c \qquad (25)$$

Подставив значение модуля кориолисова ускорения. получим:

$$\hat{O}_c = 2m\left|\vec{\omega}_e\right| \cdot \left|\vec{v}_r\right| \cdot \sin(\vec{\omega}_e \wedge \vec{v}_r) \qquad (26)$$

Кориолисова сила инерции направлена противоположно ускорению Кориолиса.

Вопрос.

Запишите основное уравнение динамики относительного движения материальной точки.

Ответ.

Два первых закона механики и все полученные на их основе уравнения справедливы для движения материальной точки относительно инерциальной системы отсчета.

Рассмотрим движение материальной точки относительно неинерциальной системы. Предположим, что система координат $o_1x_1y_1z_1$ является инерциальной системой отсчета, а не связанная с ней система координат $oxyz$ – неинерциальной (Рисунок 3). Примем инерциальную систему координат за условно-неподвижную, а неинерциальную систему отсчета за подвижную.

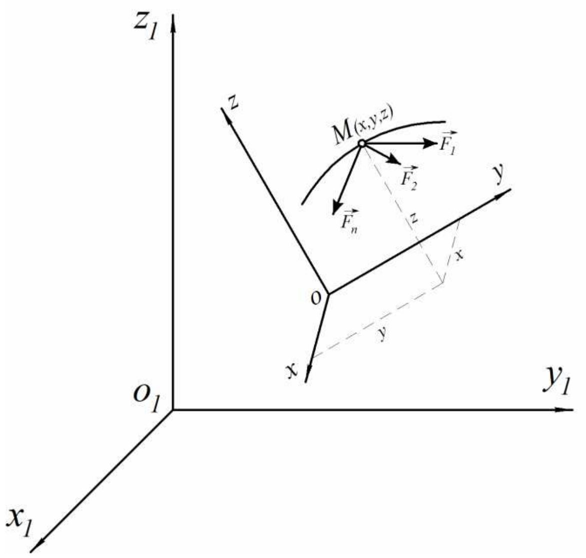


Рисунок 3

Рассмотрим движение точки, движущейся относительно подвижной системы отсчета. Движение точки *M* относительно неподвижной системы отсчета называется абсолютным движением, движение точки относительно подвижной системы отсчета называется относительным движением, а движение подвижной системы отсчета относительно неподвижной называется переносным движением.

Основное уравнение динамики для абсолютного движения точки имеет вид (7):

$$m\vec{a} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \qquad (27)$$

где $\vec{a}$ - абсолютное ускорение материальной точки, а $\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k$ - геометрическая сумма приложенных к точке сил.

Из кинематики известно, что абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме трех ускорений - относительного $\vec{a}_r$, переносного $\vec{a}_e$ и кориолисова $\vec{a}_c$:

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c \tag{28}$$

Подставив (25) в (24), получим:

$$m(\vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c) = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \tag{29}$$

Преобразовав, получим:

$$m\vec{a}_r = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k - m\vec{a}_e - m\vec{a}_c) \tag{30}$$

Учитывая равенства (24), (25), получим:

$$m\vec{a}_r = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k + \vec{\tilde{O}}_e + \vec{\tilde{O}}_c \tag{31}$$

Таким образом, для записи основного уравнения динамики относительного движения свободной материальной точки в случае непоступательного переносного движения в неинерциальной системе отсчета, необходимо, к действующим на точку силам добавить две силы инерции - переносную и кориолисову.

Вопрос.

Как определяется переносная сила инерции в различных случаях переносного движения?

Ответ.

1. Если переносное движение представляет собой неравномерное вращение вокруг неподвижной оси, то переносная сила инерции имеет две составляющие: вращательную и центробежную.

$$\vec{\tilde{O}}_e = \vec{\tilde{O}}_{\text{å}}^{\text{âð.}} + \vec{\tilde{O}}_{\text{å}}^{\text{ö.}} \tag{32}$$

Переносная вращательная сила инерции направлена противоположно вращательному ускорению.

$$\vec{\text{Ф}}_e^{\text{вр.}} = -m \cdot \vec{a}_{\text{е}}^{\text{вр.}} \qquad (33)$$

Модуль вращательной силы инерции определяется по формуле:

$$\text{Ф}_e^{\text{вр.}} = m \cdot \rho_{\text{к}} \cdot \left|\varepsilon\right| \qquad (34)$$

где $\rho_к$ - расстояние от точки до оси вращения в данный момент времени; ε - модуль углового ускорения переносного вращения.

Переносная центробежная сила инерции направлена противоположно центростремительному ускорению, то есть, направлена по радиусу от оси вращения.

$$\vec{\text{Ф}}_e^{\text{ц.}} = -m \cdot \vec{a}_{\text{е}}^{\text{ц.}} \qquad (35)$$

Модуль центробежной силы инерции определяется по формуле:

$$\text{Ф}_e^{\text{ц.}} = m \cdot \rho_{\text{к}} \cdot \omega_{\text{е}}^2 \qquad (36)$$

2. Если переносное движение представляет собой равномерное вращение вокруг неподвижной оси, то в этом случае угловое ускорение равно нулю и, соответственно, равна нулю вращательная сила инерции.

3. Если переносное движение представляет собой поступательное неравномерное криволинейное движение, то в этом случае угловая скорость равна нулю и, следовательно, правая часть уравнения (31) будет содержать только переносную силу инерции, направленную противоположно ускорению поступательного движения неинерциальной системы отсчета.

4. Если переносное движение представляет собой поступательное равномерное прямолинейное движение, то в этом случае все силы инерции будут равны нулю. В этом случае относительное движение материальной точки в неинерциальной системе отсчета не отличается от абсолютного движения точки в инерциальной системе отсчета.

5. В случае, когда материальная точка неподвижна в неинерциальной системе отсчета, тогда в нуль обращаются относительная скорость и относительное ускорение ($a_r = 0; \upsilon_r = 0$).

Уравнение (31) принимает вид:

$$\vec{F} + \vec{\Phi}_e = 0 \tag{37}$$

Это уравнение есть условие относительного покоя материальной точки.

Вопрос.

Сформулируйте принцип относительности классической механики.

Ответ.

Принцип относительности классической механики был сформулирован еще Г.Галилеем. «Никакими физическими экспериментами нельзя обнаружить поступательное равномерное и прямолинейное движение подвижной среды».

1.3. ДИНАМИКА МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

1.3.1. Система материальных точек

Вопрос.

Что называют материальной системой, неизменяемой материальной системой?

Ответ.

Система материальных точек (или механическая система) – это совокупность материальных точек, в которой состояние равновесия или движения отдельных точек зависит от состояния остальных точек.

Система материальных точек, расстояния между которыми остаются неизменными, называется неизменяемой.

Вопрос.

Как классифицируются в динамике силы, действующие на точки механической системы?

Ответ.

Силы, действующие на систему несвободных точек подразделяются на активные силы и реакции связей, внешние и внутренние.

Вопрос.

Какие силы называют активными силами?

Ответ.

Активной называют силу, которая, начав действовать на покоящееся тело, может привести его в движение.

Вопрос.

Какие силы называют внешними силами, а какие внутренними силами?

Ответ.

Внешними называются силы**,** возникающие в процессе взаимодействия точек системы с другими телами. Внешние силы обозначают индексом «*e*».

Внутренними называются силы, возникающие благодаря взаимодействиям материальных точек, входящих в состав данной системы. Внутренние силы попарно равны и противоположно направлены, например силы взаимодействия механической системы Земля – Луна. Внутренние силы обозначают индексом «*i*».

Вопрос.

Чему равен главный вектор внутренних сил механической системы?

Ответ.

Главный вектор всех внутренних сил системы и сумма их проекций на координатные оси равны нулю.

Вопрос.

Из какого физического закона вытекает, что равнодействующая внутренних сил системы равна нулю?

Ответ.

На основании закона равенства действия и противодействия каждой внутренней силе соответствует другая внутренняя сила, равная ей по модулю и противоположная по направлению.

Вопрос.

Чему равен главный момент внутренних сил механической системы?

Ответ.

Главный момент всех внутренних сил системы относительно любого центра и координатных осей равен нулю.

Вопрос.

Что называют центром масс механической системы?

Ответ.

Если механическая система состоит из конечного числа материальных точек с массами $m_1, m_2, \ldots m_n$, радиус – векторы которых проведены из одной и той же точки, то **центром масс** (центром инерции) механической системы называется геометрическая точка пространства ***C*** (может быть и вне системы), радиус – вектор которой определяется выражением:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k \cdot \vec{r}_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k} = \frac{1}{M} \cdot \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot \vec{r}_k \quad (\mathrm{k}=1,2,\ldots\mathrm{n}) \tag{38}$$

где $M = \sum_{k=1}^{n} m_k$ - масса механической системы.

Вопрос.

Как определяются координаты центра масс механической системы?

Ответ.

Обозначая декартовы координаты материальных точек (x_1,y_1,z_1), (x_2,y_2,z_2). …, (x_n,y_n,z_n), из (38) проецированием на декартовы оси координат получим следующие формулы для координат центра масс:

$$
\left.
\begin{aligned}
x_c &= \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k \cdot x_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k} = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k \cdot x_k}{M} \\
y_c &= \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k \cdot y_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k} = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k \cdot y_k}{M} \\
z_c &= \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k \cdot z_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k} = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k \cdot z_k}{M}
\end{aligned}
\right\}
\qquad (39)
$$

Вопрос.

Приведите примеры нахождения центра масс однородных тел.

Ответ.

Определение положения центра масс однородных тел:

Центр масс параллелограмма (квадрата, ромба, прямоугольника) находится на пересечении его диагоналей (рисунок 4):

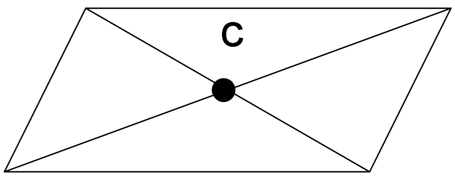


Рисунок 4

Центр масс треугольника - на пересечении медиан (рисунок 5):

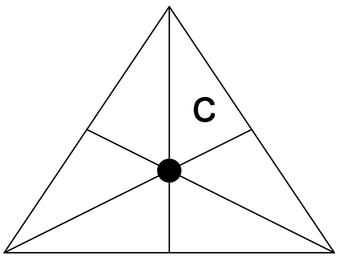


Рисунок 5

Центр масс дуги (рисунок 6):

$$x_c = R\frac{\sin\alpha}{\alpha} \tag{40}$$

α – в радианах

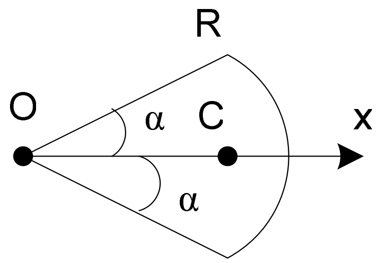


Рисунок 6

Центр масс сектора (рисунок 7):

$$x_c = OC = \frac{2}{3}R\frac{\sin\alpha}{\alpha} \tag{41}$$

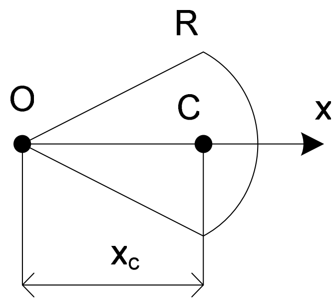


Рисунок 7

1.3.2. Теорема о движении центра масс

Вопрос.

Как формулируется теорема о движении центра масс системы.

Ответ.

Центр масс механической системы движется как материальная точка, масса которой равна массе всей системы под действием всех внешних сил механической системы.

Математическая запись теоремы:

$$M\ddot{\vec{r}}_c = \sum_{\nu=1}^{n} \vec{F}_\nu^e \qquad (42)$$

Произведение массы механической системы на ускорение её центра масс равно векторной сумме всех внешних сил, действующих на систему, т.е. равно главному вектору внешних сил системы.

С помощью этой теоремы движение механической системы сводится к изучению движения одной точки – центра масс, т.е. полученное выражение это второй закон Ньютона для центра масс.

Вопрос.

Какое движение твердого тела можно рассматривать как движение материальной точки, имеющей массу данного тела, и почему?

Ответ.

Поступательное движение твердого тела полностью определяется движением одной из его точек, поэтому, решив задачу о движении центра масс тела как материальной точки с массой, равной массе тела, определим поступательное движение всего тела.

Вопрос.

Сформулируйте закон сохранения движения центра масс механической системы.

Ответ.

Если векторная сумма всех внешних сил системы равна нулю, то скорость центра масс остается постоянной по величине и направлению.

Если, в начальный момент центр масс находится в покое, то он покоится в течение всего времени, пока главный вектор внешних сил равен нулю.

Если, главный вектор внешних сил равен нулю, а начальная скорость центра масс не равна нулю, то центр масс движется равномерно и прямолинейно.

Вопрос.

При каких условиях центр масс системы не перемещается вдоль какой-либо оси?

Ответ.

Записав закон сохранения движения центра масс, в проекциях на оси декартовой системы координат, например, на ось *x*, получим:

$$\sum F_{kx}^{e} = 0\,, \tag{43}$$

Тогда:

$M\ddot{x}_c = 0$, т.к. $M \neq 0$; то $\ddot{x}_c = 0$; т.е. $\upsilon_{cx} = const$

Если алгебраическая сумма проекций всех внешних сил системы на какую-нибудь ось равна нулю, то соответствующая проекция скорости центра масс остается постоянной**.**

Вопрос.

Могут ли внутренние силы изменить характер движения центра масс?

Ответ.

Из уравнения (42) следует, что внутренние силы непосредственно не влияют на движение центра масс, однако, в ряде случаев, внутренние силы являются причиной появления внешних сил, приложенных к механической системе. Так, внутренние силы, приводящие во вращение ведущие колеса автомобиля, вызывают действие на него внешней силы сцепления, приложенной к ободу колеса.

Вопрос.

Может ли пара сил, приложенная к твердому телу, изменить движение его центра масс?

Ответ.

Пара сил, приложенная к твердому телу, не может изменить движение его центра масс (она может вызвать только вращение тела вокруг центра масс).

1.3.3. Теорема об изменении количества движения

Вопрос.

Что называется количеством движения материальной точки?

Ответ.

Количеством движения q материальной точки называется векторная величина, имеющая направление вектора скорости, по модулю равная произведению массы точки на модуль скорости ее движения:

$$\vec{q} = m \cdot \vec{v} \tag{44}$$

Вопрос.

Что называется элементарным импульсом силы?

Ответ.

Элементарным импульсом силы называется векторная величина, равная произведению этой силы на дифференциал времени:

$$d\vec{S} = \vec{F}dt \tag{45}$$

Вопрос.

Как определяется импульс силы за конечный промежуток времени? Что он собой характеризует?

Ответ.

Импульсом силы за какой-либо промежуток времени называется интеграл вида:

$$\vec{S} = \int_{t_1}^{t_2} Fdt \tag{46}$$

Импульс силы характеризует передачу материальной точке механического движения со стороны действующих тел за данный промежуток времени.

Вопрос.

Чему равны проекции импульса переменной силы на оси декартовой системы координат?

Ответ.

Проекции импульса переменной силы на оси декартовой системы координат равны:

$$S_x = \int_{t_1}^{t_2} F_x dt, \quad S_y = \int_{t_1}^{t_2} F_y dt, \quad S_z = \int_{t_1}^{t_2} F_z dt \tag{47}$$

Вопрос.

Чему равнее импульс равнодействующей силы?

Ответ.

Импульс равнодействующей системы сил за некоторый промежуток времени равен геометрической сумме импульсов составляющих сил за этот же промежуток времени.

Вопрос.

Как формулируется теорема об изменении количества движения точки в дифференциальной форме?

Ответ.

Производная по времени от количества движения материальной точки геометрически равна равнодействующей сил, приложенных к этой точке.

Вопрос.

Как формулируется теорема об изменении количества движения материальной точки в конечной форме (теорема импульсов)?

Ответ.

Изменение количества движения материальной точки, за какой – либо промежуток времени равно векторной сумме импульсов сил, приложенных к точке за тот же промежуток времени.

Вопрос.

Что называется количеством движения механической системы?

Ответ.

Количеством движения системы материальных точек называется векторная сумма количеств движения всех материальных точек, входящих в механическую систему.

$$\vec{Q} = \sum_{k=1}^{n} m_k \vec{\upsilon}_k \tag{48}$$

Количество движения механической системы можно выразить через скорость центра масс:

$$\vec{Q} = M\vec{\upsilon}_C \tag{49}$$

Количество движения механической системы равно произведению массы системы на вектор скорости ее центра масс.

Вопрос.

Сформулируйте теорему об изменении количества движения механической системы в дифференциальной форме.

Ответ.

Теорема об изменении количества движения механической системы в дифференциальной форме:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^e \tag{50}$$

Первая производная по времени от количества движения механической системы равна векторной сумме всех внешних сил, действующих на систему, т.е. равна главному вектору всех внешних сил механической системы.

Вопрос.

Как формулируется теорема об изменении количества движения системы в конечной форме (теорема импульсов)?

Ответ.

Изменение количества движения за какой – либо конечный промежуток времени равно векторной сумме импульсов всех внешних сил (импульсу главного вектора внешних сил), приложенных к системе в этот промежуток времени.

$$\vec{Q}_2 - \vec{Q}_1 = \sum_{k=1}^{n} \vec{S}_k^e \,. \tag{51}$$

Вопрос.

Как формулируются и как записываются теорема об изменении количества движения и теорема импульсов в проекциях на координатные оси?

Ответ.

Теорема об изменении количества движения:

$$\frac{dQ_x}{dt} = R_x^e \qquad \frac{dQ_y}{dt} = R_y^e \qquad \frac{dQ_z}{dt} = R_z^e \tag{52}$$

Производная по времени от проекции количества движения механической системы на любую ось равна проекции главного вектора внешних сил на ту же ось.

Теорема импульсов:

$$Q_{2x} - Q_{1x} = \sum_{k=1}^{n} S_{kx}^e \qquad Q_{2y} - Q_{1y} = \sum_{k=1}^{n} S_{ky}^e \qquad Q_{2z} - Q_{1z} = \sum_{k=1}^{n} S_{kz}^e \tag{53}$$

Изменение количества движения относительно некоторой оси равно сумме проекций импульсов всех внешних сил, действующих на систему, на ту же ось.

Вопрос.

Сформулируйте закон сохранения количества движения системы.

Ответ.

Если векторная сумма всех внешних сил системы равна нулю, то количество движения системы остается постоянным по величине и направлению.

Если алгебраическая сумма проекций всех внешних сил системы, на какую – либо ось равна нулю, то проекция количества движения на эту ось остается постоянной.

Вопрос.

В каком случае количество движения механической системы не изменяется? При каких условиях не изменяется его проекция на какую-либо ось?

Ответ.

Если главный вектор внешних сил за рассматриваемый промежуток времени равен нулю, то количество движения системы постоянно.

Если проекция главного вектора внешних сил на какую-либо ось равна нулю, то проекция количества движения на эту ось постоянна.

Вопрос.

Чему равно количество движения механической системы, если колеса вращаются с угловыми скоростями ω_1 и ω_2, а радиусы колес соответственно равны r_1 и r_2 (рисунок 8)?

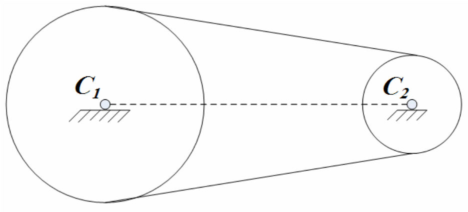


Рисунок 8

Ответ.

Количество движения механической системы будет равно нулю, так как колеса вращаются вокруг неподвижных осей C_1 и C_2 и скорость центра масс системы будет равна нулю.

Вопрос.

Как изменяется количество движения точки, движущейся равномерно по окружности?

Ответ.

При равномерном движении точки по окружности изменяется направление количества движения, а его модуль остается неизменным.

1.3.4. Теорема об изменении кинетического момента.

Вопрос.

Что называется моментом количества движения точки?

Ответ.

Моментом количества движения материальной точки относительно какого-либо центра называется векторное произведение радиус – вектора этой точки на её количества движения.

$$\vec{M}_0\left(m\vec{v}\right)=\left[\vec{r}m\vec{v}\right] \qquad (54)$$

Вопрос.

Как направлен момент количества движения материальной точки?

Ответ.

Момент количества движения материальной точки направлен перпендикулярно плоскости траектории движения точки таким образом, чтобы с конца векторного момента можно было видеть направление скорости по отношению к моментной точке против часовой стрелки (рисунок 9).

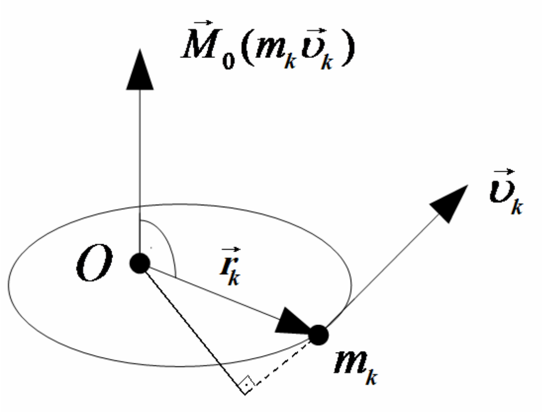


Рисунок 9

Вопрос.

Как определяется модуль (алгебраическое значение) момента количества движения точки?

Ответ.

Модуль момента количества движения материальной точки определяется как модуль векторного произведения:

$$\left|\vec{M}_0\left(m\vec{\upsilon}\right)\right| = \left|\vec{r}\right| m \left|\vec{\upsilon}\right| \sin\left(\vec{r}\,\hat{}\,\vec{\upsilon}\right) = m\upsilon h \tag{55}$$

Алгебраическое значение – это произведение количества движения материальной точки на плечо, взятое со знаком плюс или минус.

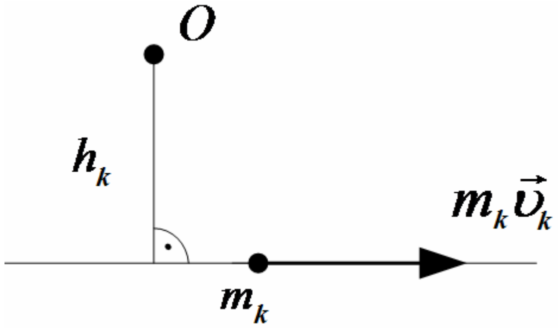


Рисунок 10

$$M_0\left(m_k\upsilon_k\right)=m_k\upsilon_k h_k \qquad (56)$$

Значение момента количества движения положительное, если он направлен относительно моментной точки против часовой стрелки.

Значение момента количества движения отрицательное, если он направлен относительно моментной точки по часовой стрелке.

Значение момента количества движения равно нулю, если моментная точка лежит на линии скорости.

Вопрос.

Что называется главным моментом количеств движения системы (кинетическим моментом системы)?

Ответ.

Кинетическим моментом (или главным моментом количеств движения механической системы относительно данного центра) называют вектор, равный геометрической сумме моментов количеств движения всех точек системы относительно этого центра:

$$\vec{K}_0=\sum_{k=1}^{n}\vec{M}_{ok}=\sum_{k=1}^{n}\left[\vec{r}_k\times m_k\vec{\upsilon}_k\right] \qquad (57)$$

Таким образом - кинетический момент механической системы это главный момент количеств движения системы.

Вопрос.

Как определяется кинетический момент системы относительно неподвижной оси?

Ответ.

Кинетическим моментом механической системы относительно оси называется алгебраическая сумма моментов количеств движения всех его точек относительно этой же оси:

Кинетический момент механической системы относительно оси *Z:*

$$K_{0Z}=\sum_{k=1}^{n}\left[\vec{r}_k\times m_k\vec{\upsilon}_k\right]_Z \qquad (58)$$

Вопрос.

При каком расположении вектора количества движения материальной точки его момент относительно оси равен нулю?

Ответ.

Если вектор количества движения материальной точки параллелен или пересекает ось, то его момент относительно этой оси равен нулю.

Вопрос.

Сформулируйте и запишите теорему об изменении кинетического момента относительно полюса.

Ответ.

Первая производная от кинетического момента по времени, относительно какого – либо центра равна векторной сумме моментов всех внешних сил (главному моменту), действующих на систему относительно этого же центра.

$$\frac{d\vec{K}_0}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_0^e \qquad (59)$$

Вопрос.

Сформулируйте и запишите теорему об изменении кинетического момента относительно оси.

Ответ.

Первая производная по времени от кинетического момента, относительно какой – либо оси равна алгебраической сумме моментов всех внешних сил системы (главному моменту) относительно этой же оси.

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum_{k=1}^{n} M_z^e \qquad (60)$$

Вопрос.

При каких условиях остается постоянным кинетический момент механической системы относительно центра? Сформулируйте закон сохранения кинетического момента механической системы.

Ответ.

Если векторная сумма моментов всех внешних сил системы, относительно какого – либо центра равна нулю, то кинетический момент относительно этого центра остается постоянным по величине и направлению.

$\sum_{\nu=1}^{n} \vec{M}_0(\vec{F}^e) = 0$, то: $\dfrac{d\vec{K}_0}{dt} = 0$, а, следовательно $\vec{K}_0 = const$.

Вопрос.

При каких условиях остается постоянным кинетический момент механической системы относительно оси? Сформулируйте закон сохранения кинетического момента механической системы.

Ответ.

Если алгебраическая сумма моментов всех внешних сил системы, относительно какой – либо оси равна нулю, то кинетический момент относительно этой оси остается постоянным.

Вопрос.

Чему равен кинетический момент твёрдого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси?

Ответ.

Кинетический момент вращающегося тела относительно оси вращения равен произведению момента инерции тела относительно этой оси на угловую скорость тела.

Определяется по формуле:

$$K_z = I_z \omega \tag{61}$$

1.3.5. Геометрия масс.

Вопрос.

В чем физический смысл моментов инерции.

Ответ.

Момент инерции это мера инертности тела по отношению к вращательному движению, т.е. он характеризует способность тела сохранять угловую скорость неизменной. Таким образом, инерция вращающейся системы зависит не только от масс ее точек, но и от того, как они расположены по отношению к оси вращения.

Вопрос.

Что называется моментом инерции материальной точки относительно оси?

Ответ.

Момент инерции материальной точки относительно оси – это произведение массы точки на квадрат ее расстояния от данной оси.

Вопрос.

По каким формулам определяются полярные и осевые моменты инерции механической системы?

Ответ.

Моментом инерции механической системы относительно полюса (полярным моментом инерции) называется скалярная величина, равная сумме произведений массы каждой точки тела на квадрат расстояния от точки до этого полюса.

$$I_0 = \sum_{k=1}^{n} m_k r_k^2 \tag{62}$$

$$I_0 = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2) \tag{63}$$

Моментом инерции механической системы относительно оси называется скалярная величина, равная сумме произведений массы каждой точки тела на квадрат расстояния от этой точки до оси.

$$\left.\begin{aligned} I_x &= \sum_{k=1}^{n} m_k (y_k^2 + z_k^2) \\ I_y &= \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k^2 + z_k^2) \\ I_z &= \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k^2 + y_k^2) \end{aligned}\right\} \qquad (64)$$

Вопрос.

По каким формулам определяются полярные и осевые моменты инерции твердого тела?

Ответ.

Для абсолютно твердого тела суммы в формулах (63) и (64) заменяются соответствующими интегралами.

Осевыми моментами инерции тела в декартовых координатах называются интегралы вида:

$$\left.\begin{aligned} I_x &= \int (y^2 + z^2) dm \\ I_y &= \int (x^2 + z^2) dm \\ I_z &= \int (x^2 + y^2) dm \end{aligned}\right\} \qquad (65)$$

Полярным моментом инерции тела в декартовых координатах называется интеграл вида:

$$I_0 = \int (x^2 + y^2 + z^2) dm \qquad (66)$$

Вопрос.

Запишите формулу взаимосвязи между полярным и осевыми моментами инерции.

Ответ.

Сложив почленно осевые моменты инерции, получим:

$$I_x + I_y + I_z = 2\int (x^2 + y^2 + z^2)dm \qquad (67)$$

Учитывая, что полярный момент инерции определяется по формуле (66) получим формулу взаимосвязи между моментами инерции:

$$I_0 = \frac{I_x + I_y + I_z}{2} \qquad (68)$$

Полярный момент инерции равен полусумме осевых моментов инерции.

Вопрос.

Относительно какого полюса момент инерции данного тела имеет наименьшее значение?

Ответ.

Центр масс является полюсом, относительно которого полярный момент инерции тела имеет наименьшее возможное значение.

Вопрос

Какие характеристики учитывают несимметричность в распределении масс в теле?

Ответ.

В механике в качестве характеристик, учитывающих несимметричность в распределении масс, вводят центробежные моменты инерции.

Центробежными моментами инерции тела называются моменты инерции, вычисляемые по формулам:

$$\left.\begin{aligned} I_{xy} &= \int xydm \\ I_{yz} &= \int yzdm \\ I_{xz} &= \int xzdm \end{aligned}\right\} \qquad (69)$$

Центробежные моменты инерции могут иметь не только положительные и нулевые значения, но и отрицательные. В этом их отличие от осевых моментов инерции.

Вопрос.

Какие оси называются главными осями инерции?

Ответ.

Если центробежные моменты инерции будут равны нулю, то соответствующие оси координат называются главными осями инерции механической системы.

Вопрос.

Какие оси называются главными центральными осями инерции?

Ответ.

Главными центральными осями инерции называются такие главные оси инерции, которые проходят через центр масс.

Вопрос.

Какими свойствами обладают главные и главные центральные оси инерции?

Ответ.

Главная центральная ось инерции является главной осью инерции для всех своих точек.

Главная ось инерции, не проходящая через цент масс твердого тела, является главной осью инерции лишь в одной своей точке.

Если в однородном теле есть ось симметрии, то эта ось всегда является главной центральной осью инерции, так как центр масс лежит на этой оси.

Если в однородном теле есть плоскость симметрии, то во всех точках этой плоскости одна из главных осей всегда направлена по перпендикуляру к этой плоскости.

Понятие о главных осях инерции играет важную роль в динамике твердого тела. Если главные оси инерции выбрать в качестве декартовых осей координат, то все центробежные моменты инерции обращаются в нули и соответствующие уравнения или формулы оказываются значительно проще, чем в других системах координат.

Вопрос.

Чему равен момент инерции твердого тела относительно произвольной оси, проходящей через данную точку?

Ответ.

Моментом инерции тела относительно произвольной оси «*L*» называется момент инерции, вычисляемый по формуле:

$$I_L = I_x \cos^2\alpha + I_y \cos^2\beta + I_z \cos^2\gamma - 2I_{xy}\cos\alpha\cos\beta -$$

$$-2I_{yz}\cos\beta\cos\gamma - 2I_{xz}\cos\alpha\cos\gamma \qquad (70)$$

Если оси «*X, Y, Z*» являются главными осями инерции, то $I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$ и формула будет иметь вид:

$$I_L = I_x \cos^2\alpha + I_y \cos^2\beta + I_z \cos^2\gamma \qquad (71)$$

Вопрос.

Что называется радиусом инерции?

Ответ.

Характеристикой, не зависящей от массы тела, является радиус инерции. Радиус инерции измеряется в метрах и геометрически равен расстоянию от оси до точки, в которой надо сосредоточить массу всего тела, чтобы момент инерции одной этой точки был равен моменту инерции всего тела.

Зная радиус инерции тела можно определить момент инерции тела по формуле.

$$I_x = m\rho_{è}^2 = mi_x^2 \qquad (72)$$

где $\rho_{è} = i_x$ - радиус инерции.

Радиус инерции используется обычно в задачах для неоднородных тел.

Вопрос.

Как формулируется теорема о моментах инерции относительно параллельных осей (теорема Гюйгенса-Штейнера)?

Ответ.

Момент инерции механической системы (тела) относительно произвольной оси z' равен моменту инерции этого тела относительно параллельной оси, проходящей через центр масс, сложенному с произведением массы этой системы (тела) на квадрат расстояния (d) между осями.

Таким образом, теорема Гюйгенса – Штейнера имеет вид:

$$I'_z = I_{cz} + Md^2 \tag{73}$$

Вопрос.

Что называется тензором инерции тела? Как он записывается? Что он характеризует?

Ответ.

Моменты инерции твердого тела относительно координатных осей, проходящих через некоторую точку *O*, и центробежные моменты инерции относительно этих осей представляют собой шесть величин, зависящих от положения точки *O* и от направления осей, так как с их изменением изменяются координаты точек тела $x_к$, $y_к$, $z_к$. Эти величины можно расположить в виде симметричной таблицы – матрицы, которая называется тензором инерции тела в данной точке.

Тензором инерции называется матрица, элементами которого являются моменты инерции (осевые и центробежные).

$$I_O = \begin{pmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_z \end{pmatrix} \tag{74}$$

Тензор инерции характеризует распределение массы тела относительно данной точки О.

Вопрос.

Запишите канонический вид эллипсоида инерции. В чем физический смысл эллипсоида инерции?

Ответ.

Канонический (простейший) вид эллипсоида инерции.

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1 \tag{75}$$

где полуоси эллипсоида инерции (рисунок 11):

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{1}{\sqrt{I_x}} \\ b &= \frac{1}{\sqrt{I_y}} \\ c &= \frac{1}{\sqrt{I_z}} \end{aligned}\right\} \tag{76}$$

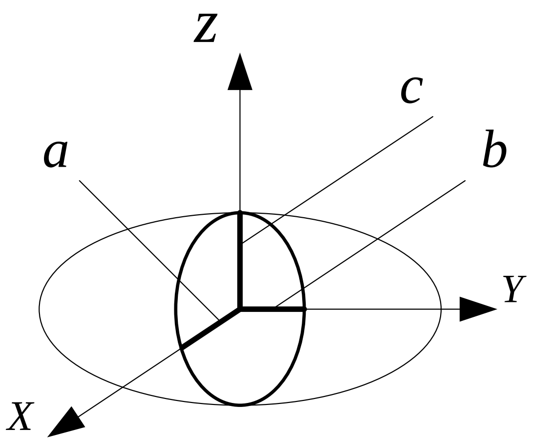


Рисунок 11

Физический смысл эллипсоида инерции в том, что он характеризует распределение масс в теле.

Эллипсоид инерции, соответствующий центру тяжести тела, называется центральным эллипсоидом инерции, а его оси симметрии - главными центральными осями инерции.

Вопрос.

Запишите формулу для момента инерции однородного тонкого стержня относительно оси, проходящей через центр масс стержня.

Ответ.

Момент инерции однородного стержня относительно оси перпендикулярной к стержню, и проходящей через центр масс стержня, вычисляется по формуле:

$$I_{cz} = \frac{ml^2}{12} \tag{77}$$

Вопрос.

Запишите формулу для момента инерции однородного тонкого стержня относительно оси *z'*, проходящей через конец стержня.

Ответ.

Момент инерции стержня относительно оси *z'*, проходящей через конец стержня можно определить по теореме Гюйгенса – Штейнера (рисунок 12):

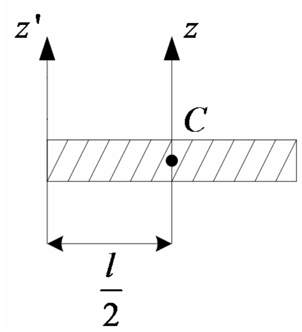


Рисунок 12

$$I'_z = I_{cz} + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ml^2}{12} + \frac{ml^2}{4} = \frac{ml^2}{3} \tag{78}$$

Таким образом, момент инерции относительно оси, проходящей через конец стержня в четыре раза больше, чем момент инерции стержня относительно оси, проходящей через его центр масс.

Вопрос.

Запишите моменты инерции некоторых однородных тел: кольцо (полый цилиндр, обод), диск (однородный цилиндр), относительно оси, проходящей через центр масс.

Ответ.

Вычислим момент инерции цилиндра, масса которого распределена по ободу (т.е. полый цилиндр, кольцо) относительно оси C_Z, проходящей через центр масс цилиндра (рисунок 13)

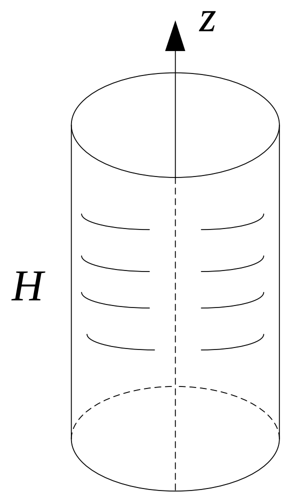


Рисунок 13

$$I_{cz} = \int h^2 dm = R^2 \int dm = mR^2 \tag{79}$$

Сплошной однородный цилиндр (диск или шкив):

$$I_{cz} = \frac{mR^2}{2} \tag{80}$$

1.3.6. Теорема об изменении кинетической энергии

Вопрос.

Каковы две меры механического движения и соответствующие им измерители действия силы?

Ответ.

В механике рассматриваются два случая преобразования механического движения материальной точки или механической системы.

1. Механическое движение переносится с одной механической системы на другую в качестве механического движения.

Когда рассматривается преобразование механического движения без перехода его в другую форму движения, мерой механического движения в этом случае является вектор количества движения материальной точки или механической системы.

Мерой действия силы в этом случае является вектор импульса силы *S*.

2. Механическое движение превращается в другую форму движения материи (потенциальной энергии, теплоты и т.п.). В качестве меры механического движения выступает кинетическая энергия. Мерой действия силы в этом случае является работа.

Вопрос.

Что называется кинетической энергией материальной точки?

Ответ.

Кинетической энергией материальной точки называется половина произведения массы этой точки на квадрат её скорости:

$$T = \frac{m\upsilon^2}{2} \tag{81}$$

Кинетическая энергия является скалярной положительной величиной.

В системе СИ, единицей измерения энергии является джоуль:

1 дж = 1 Н·м.

Вопрос.

Что называется кинетической энергией механической системы?

Ответ.

Кинетическая энергия системы материальных точек это сумма кинетических энергий всех точек системы:

$$T = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k \upsilon_k^2}{2} \tag{82}$$

Вопрос.

Как определить кинетическую энергию абсолютно твердого тела при поступательном движении?

Ответ.

При поступательном движении скорости всех точек одинаковы и равны скорости центра масс, т.е. $\vec{\upsilon}_k = \vec{\upsilon}_c$, тогда:

$$T = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k \upsilon_k^2}{2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k \upsilon_c^2}{2} = M\,\frac{\upsilon_c^2}{2} \qquad (83)$$

где M – масса тела.

Вопрос.

Как определить кинетическую энергию абсолютно твердого тела при вращении вокруг неподвижной оси?

Ответ.

При вращательном движении линейные скорости точек определяются по формуле Эйлера:

$$\vec{\upsilon}_k = \left[\vec{r}_k \vec{\omega}\right] \qquad (84)$$

Модуль скорости:

$$\upsilon_k = \left|\vec{\omega}\right|\left|\vec{r}_k\right| \sin\alpha = \omega h_k \qquad (85)$$

Тогда:

$$T = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k \upsilon_r^2}{2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k}{2}\omega^2 h_k^2 = \frac{\omega}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k h_k^2 = I_z\,\frac{\omega^2}{2} \qquad (86)$$

где z – ось вращения.

Кинетическая энергия твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равна половине произведения момента инерции этого тела относительно оси вращения на квадрат угловой скорости тела.

Вопрос.

Как определить кинетическую энергию абсолютно твердого тела при плоском движении?

Ответ.

Плоское движение состоит из поступательного движения со скоростью полюса и вращательного движения вокруг этого полюса, тогда кинетическая энергия складывается из энергии поступательного движения и энергии вращательного движения.

Удобнее всего за полюс брать центр масс, тогда:

$$T = \frac{M\upsilon_c^2}{2} + \frac{I_c\omega^2}{2} \tag{87}$$

Это удобно потому, что моменты инерции простейших тел относительно центра масс известны.

Кинетическая энергия твердого тела при плоском движении складывается из кинетической энергии поступательного движения вместе с центром масс и кинетической энергии от вращения вокруг неподвижной оси, проходящей через центр масс и перпендикулярной плоскости движения.

Часто бывает удобным брать за полюс мгновенный центр скоростей. Тогда:

$$T = \frac{1}{2} I_{\mathrm{P}}\omega^2 + \frac{1}{2} M\upsilon_{\mathrm{P}}^2 \tag{88}$$

Учитывая, что по определению мгновенного центра скоростей его скорость равна нулю, то кинетическая энергия в этом случае будет определяться по формуле:

$$T = \frac{1}{2} I_{\mathrm{P}}\omega^2 \tag{89}$$

Необходимо помнить, что для определения момента инерции относительно мгновенного центра скоростей необходимо применять формулу Гюйгенса – Штейнера:

$$I_{\mathrm{P}} = I_c + Md^2 \tag{90}$$

Вопрос.

Как определяется работа постоянной по модулю и направлению силы на прямолинейном перемещении?

Ответ.

Работа постоянной по модулю и направлению силы на прямолинейном перемещении определяется скалярным произведением вектора силы на вектор перемещения точки ее приложения.

$$A(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{S} = \left|\vec{F}\right| \cdot \left|\vec{S}\right| \cdot \cos(\vec{F} \wedge \vec{S}) \qquad (91)$$

Вопрос.

Чему равна работа равнодействующей силы на некотором перемещении?

Ответ.

Работа равнодействующей силы на некотором перемещении равна алгебраической сумме работ на этом же перемещении.

$$A = \sum_{k=1}^{n} \int_{S_1}^{S_2} \vec{F}_k \cdot d\vec{S} \qquad (92)$$

Работа может быть вычислена умножением проекции силы на перемещение.

Вопрос.

Как определяется знак работы силы?

Ответ.

Определение работы показывает, что она может быть положительной, отрицательной или равной нулю.

Работа положительная, если сила помогает перемещению, т.е. угол между направлением силы и перемещением равен нулю или острый.

Работа отрицательная, если сила мешает перемещению, т.е. угол между направлением силы и перемещением тупой или равен 180°.

Работа равна нулю, если угол между направлением силы и перемещением равен 90°, или отсутствует перемещение у точки приложения силы.

Вопрос.

Чему равна работа внутренних сил твердого тела на любом перемещении тела?

Ответ.

Каждой внутренней силе соответствует другая, равная ей по модулю и противоположная по направлению, поэтому сумма работ внутренних сил твердого тела на любом перемещении равна нулю.

Вопрос.

Чему равна работа внутренних сил неизменяемых систем при любом перемещении?

Для неизменяемой системы сумма работ всех внутренних сил равна нулю.

Вопрос.

Дайте определение элементарной работы силы.

Ответ.

Элементарная работа силы $\vec{F}$, действующей на движущуюся материальную точку – это скалярное произведение вектора силы на вектор бесконечно малого (элементарного) перемещения точки ее приложения за бесконечно малый промежуток времени, т.е. произведение модуля силы на элементарное перемещение и на косинус угла между ними.

$$\delta A(\vec{F}) = |\vec{F}|\underbrace{|d\vec{r}|\cos(\vec{F}\,\hat{}\,d\vec{r})}_{\substack{\text{ï ðî åêöèÿ ï åðåì åù åí èÿ} \\ \text{í à í àï ðàâ. ñèëû}}} = |d\vec{r}|\underbrace{|\vec{F}|\cos(\vec{F}\,\hat{}\,d\vec{r})}_{\substack{\text{ï ðî êöèÿ ñèëû í à} \\ \text{í àï ðàâë. ï åðåì åù åí èÿ}}} \qquad (93)$$

где δA - элементарная работа силы (элементарную работу обозначают δA, а не dA, так как в общем случае она не является полным дифференциалом функции); $d\vec{r}$ - вектор бесконечно малого перемещения точки приложения силы, направленный по касательной к траектории в сторону движения материальной точки.

Вопрос.

Как записывается выражение элементарной работы силы через проекции силы на оси декартовой системы координат?

Ответ.

Будем считать, что сила задана своими проекциями на оси декартовой системы координат (F_x, F_y, F_z), а вектор $d\vec{r}$ бесконечно малого перемещения точки задается координатами dx, dy, dz. Тогда работа может быть представлена в виде:

$$\delta A = F_x dx + F_y dy + F_z dz \qquad (94)$$

Вопрос.

Чему равна работа силы на конечном перемещении?

Ответ.

Работа силы на конечном перемещении определяется интегрированием по траектории (криволинейным интегралом первого рода):

$$A(\vec{F}) = \int \vec{F} d\vec{r} = \int\limits_{\overset{\cup}{\grave{A}\hat{A}}} (F_x dx + F_y dy + F_z dz) \qquad (95)$$

Вопрос.

Как определяется элементарная работа сил, приложенных к твердому телу, движущемуся поступательно?

Ответ.

Элементарная работа сил, приложенных к твердому телу, движущемуся поступательно равна элементарной работе главного вектора внешних сил, приложенного в любой точке тела.

Вопрос.

Как вычисляется работа силы упругости?

Ответ.

Сила упругости определяется законом Гука:

$$F_{упр} = -c\lambda \qquad (96)$$

где c – коэффициент жесткости пружины; λ – деформация пружины.

Знак минус означает, что сила упругости всегда противоположна деформации.

Сила упругости равна нулю, когда нет деформации, т.е. пружина не нагружена.

Работа силы упругости:

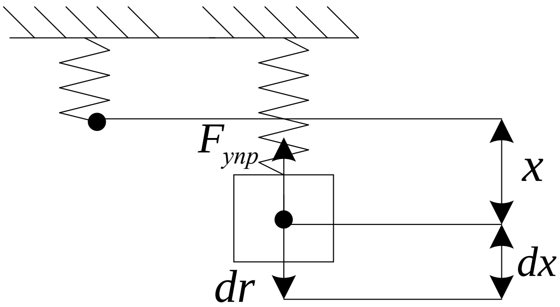


Рисунок 14

$$A(F_{упр}) = \int F_{упр} dr = -\int_{\lambda_0}^{\lambda} cx dx = \frac{cx^2}{2}\Bigg|_{\lambda}^{\lambda_0} = \frac{c}{2}(\lambda_0^2 - \lambda^2) \qquad (97)$$

Работа силы упругости равна половине произведения коэффициента жесткости на разность квадратов начального и конечного удлинения (или сжатия) пружины.

Работа не зависит от вида деформации (сжатие или растяжение).

Работа положительная – если деформация уменьшается, т.е. сила упругости направлена в сторону перемещения ее точки приложения.

Работа отрицательная – если деформация увеличивается, т.е. сила упругости направлена противоположно перемещению ее точки приложения. Работа равна нулю – если $|\lambda_0| = |\lambda|$.

Эти формулы справедливы во всех случаях, когда справедлив закон Гука.

Вопрос.

Как определяется работа силы тяжести?

Ответ.

Пусть точка движется в декартовой системе координат, перемещаясь из положения 1 в положение 2 (рисунок 15).

По определению работы:

$$A(G) = \int \vec{G} d\vec{r} = \int (G_x dx + G_y dy + G_z dz) \qquad (98)$$

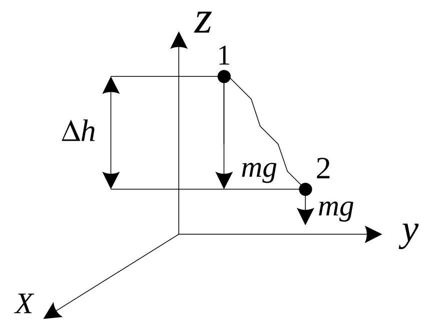


Рисунок 15

Учитывая, что проекции силы тяжести на координатные оси x и y равны нулю, получим:

$$A(G) = -mg\int_{z_1}^{z_2} dz = mg(z_1 - z_2) \qquad (99)$$

или:

$$A(G) = \pm mg\Delta h \qquad (100)$$

где $\Delta h = z_1 - z_2$ -высота опускания точки. При подъеме точки h<0, и, следовательно, A<0.

Работа силы тяжести равна взятому со знаком плюс или минус произведению силы тяжести на вертикальное перемещение точки ее приложения. Работа силы тяжести не зависит от вида траектории, по которой перемещается точка, а зависит лишь от расстояния между горизонтальными плоскостями, проходящими через начальное и конечное положение точки.

Вопрос.

На каких перемещениях работа силы тяжести имеет положительное, отрицательное, равное нулю значение?

Ответ.

Работа силы тяжести положительная, если $z_1 > z_2$, т.е. начальная высота точки приложения силы выше, чем в конечный момент, т.е. происходит движение в сторону направления действия силы.

Работа силы тяжести отрицательная, если $z_1 < z_2$, т.е. начальное положение точки приложения силы тяжести ниже конечного, т.е. происходит движение противоположно направлению действия силы.

Работа силы тяжести равна нулю, если в начальный момент и в конечный момент времени точка приложения силы тяжести находится на одинаковой высоте.

Вопрос.

Как определяется работа силы трения скольжения?

Ответ.

Сила трения определяется по закону Амонтона – Кулона:

$$F_{\text{òð.ñê.}} = fN \qquad (101)$$

Для определения нормальной составляющей реакции N определим, записав второй закон Ньютона в проекциях на ось *Y* (рисунок 16):

$$ma_y = -G\cos\alpha + N \qquad (102)$$

Движение вдоль оси *Y* отсутствует, поэтому $a_y = 0$, т.е.

$$N = G\cos\alpha \qquad (103)$$

Работа постоянной по модулю силы трения скольжения будет отрицательной, т.к. сила трения направлена всегда против скорости:

$$A(\vec{F}_{\text{òð.ñê}}) = \vec{F}_{\text{òð.}} \cdot d\vec{r} = -fmg\cos\alpha dr \qquad (104)$$

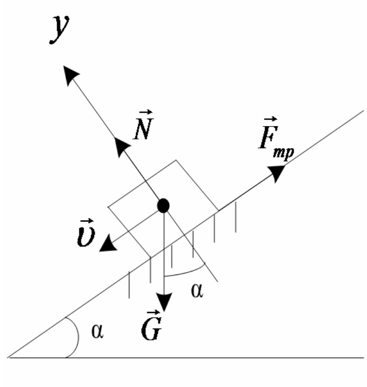


Рисунок 16

Вопрос.

Чему равна элементарная работа момента силы и как определяется его направление?

Ответ.

Элементарная работа сил, приложенных к твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси, равна произведению главного момента внешних сил относительно оси вращения на приращение угла поворота:

$$\delta A(M) = \pm M^{e} d\varphi \tag{105}$$

Работа момента силы положительная, если момент направлен в сторону угла поворота.

Работа момента силы отрицательная, если момент направлен против угла поворота.

Работа момента силы равна нулю, если вращательное движение отсутствует.

Вопрос.

Как определяется момент сопротивления качению? Как определяется работа момента сопротивления качению?

Ответ.

При качении цилиндрического катка по не абсолютно твердой поверхности происходит деформация соприкасающихся поверхностей, и линия действия нормальной реакции оказывается сдвинутой на некоторое расстояние δ от линии действия силы веса *P*. Реакция плоскости и вес тела образуют пару сил сопротивления с плечом δ, называемым коэффициентом трения качения и имеющего размерность длины. Момент этой пары называется моментом сопротивления качению и определяется по формуле:

$$M_{\text{òð.}} = N \cdot \delta \tag{106}$$

Работа момента определяется по формуле:

$$\delta A(M_{\text{òð.}}) = -\delta \cdot N \cdot d\varphi \tag{107}$$

Работа этого момента всегда отрицательна.

Вопрос.

Что называется средней мощностью силы?

Ответ.

Средней мощностью силы называется отношение работы этой силы к тому промежутку времени, за которое она совершена:

$$N_{cp} = \frac{A}{t} \tag{108}$$

Вопрос.

Что называется мгновенной мощностью силы? Как она определяется?

Ответ.

Мгновенной мощностью силы называется первая производная по времени от работы этой силы:

$$N = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{\upsilon} \tag{109}$$

То есть, мощность определяется скалярным произведением силы на скорость точки приложения этой силы.

Вопрос.

Как определяется мощность в случае вращательного движения тела?

Ответ.

Если твердое тело вращается вокруг неподвижной оси с угловой скоростью ω, то мощность сил определяется по формуле:

$$N = M_z^e \cdot \omega \tag{110}$$

Вопрос.

Сформулируйте и запишите теорему об изменении кинетической энергии точки в дифференциальной форме и в конечной форме (интегральном виде).

Ответ.

Дифференциальная форма:

Дифференциал кинетической энергии материальной точки равен сумме элементарных работ сил, приложенных к точке.

$$d\left(\frac{m\upsilon^2}{2}\right) = \sum_{k=1}^{n} \delta A_k \tag{111}$$

Конечная форма:

Изменение кинетической энергии материальной точки на некотором перемещении равно алгебраической сумме работ всех действующих на эту точку сил на этом же перемещении.

$$\frac{m\upsilon_2^{\,2}}{2} - \frac{m\upsilon_1^{\,2}}{2} = \sum_{k=1}^{n} A_k \tag{112}$$

Вопрос.

Запишите теорему об изменении кинетической энергии механической системы в дифференциальной форме.

Ответ.

$$dT = \sum_{k=1}^{n} dA(\vec{F}_k^{\,e}) + \sum_{k=1}^{n} dA(\vec{F}_k^{\,i}) \tag{113}$$

Полный дифференциал кинетической энергии механической системы равен алгебраической сумме элементарных работ всех внешних и внутренних сил действующих на механическую систему.

Вопрос.

Сформулируйте и запишите теорему об изменении кинетической энергии механической системы в конечной форме.

Ответ.

Проинтегрируем выражение (113), записанное для теоремы об изменении кинетической энергии в дифференциальном виде:

$$\int_{T_1}^{T_2} dT = \sum_{k=1}^{n} \int_{S_1}^{S_2} dA(\vec{F}_k^{\,e}) + \sum_{k=1}^{n} \int_{S_1}^{S_2} dA(\vec{F}_k^{\,i}) \tag{114}$$

Получаем интегральный вид теоремы об изменении кинетической энергии:

$$T_2 - T_1 = \sum_{k=1}^{n} A(\vec{F}_k^{\,e}) + \sum_{k=1}^{n} A(\vec{F}_k^{\,i}) \tag{115}$$

Изменение кинетической энергии при перемещении механической системы из одного положения в другое равно алгебраической сумме работ всех внешних и внутренних сил, действующих на систему на этом перемещении.

Вопрос.

Для каких механических систем изменения кинетической энергии не зависят от внутренних сил?

Ответ.

Для неизменяемых механических систем, а так же для твердого тела сумма работ внутренних сил на любом перемещении равна нулю и внутренние силы в теорему не входят, поэтому, изменения кинетической энергии не зависят от внутренних сил.

Учитывая, что сумма работ внутренних сил для неизменяемых систем на любом его перемещении равна нулю выражения (114) и (115) принимают вид:

$$dT = \sum_{k=1}^{n} dA(\vec{F}_k^{\,e}) \tag{116}$$

$$T_2 - T_1 = \sum_{k=1}^{n} A(\vec{F}_k^{\,e}) \tag{117}$$

Вопрос.

Что называется силовым полем?

Ответ.

Силовым полем называется область пространства, в каждой точке которой на помещенную туда материальную точку действует сила однозначно определенная по величине и направлению в любой момент времени.

Вопрос.

Какое силовое поле называется стационарным?

Ответ.

Силовое поле называется стационарным, если действующая в нем сила не зависит явно от времени.

Вопрос.

Какое силовое поле называется потенциальным?

Ответ.

Потенциальным силовым полем называется область пространства, в каждой точке которой задана потенциальная функция, однозначно зависящая от координат $U = U(x_k, y_k, z_k)\ (k = 1, \ldots n)$, полный дифференциал которой равен элементарной работе силы.

Вопрос.

Что называется силовой или потенциальной функцией?

Ответ.

Силовая (потенциальная) функция - это функция, описывающая полную работу сил, действующих на материальную точку в потенциальном силовом поле.

$$U = U(x_k, y_k, z_k)\ (k = 1, \ldots n) \tag{118}$$

Вопрос.

Перечислите основные свойства потенциального поля.

Ответ.

1. Элементарная работа сил в потенциальном поле является полным дифференциалом.

$$dU = dA \tag{119}$$

2. Работа сил в потенциальном поле на конечном перемещении не зависит от траектории, от пути, а зависит только от координат начальной и конечной точек движения.

По определению:

$$A = \int dA = \int_{u_1}^{u_2} dU = U_2 - U_1 = U(x_2, y_2, z_2) - U(x_1, y_1, z_1) \tag{120}$$

3. Работа в потенциальном поле по замкнутой траектории равна нулю, т.к. начальное и конечное положение совпадают: $U_1 = U_2$.

4. Сила, в потенциальном поле является градиентом потенциальной функции.

$$\vec{F} = gradU \tag{121}$$

Вопрос.

Как определить элементарную работу сил потенциального поля и работу этих сил на конечном перемещении системы, если известна силовая функция?

Ответ.

Если силовое поле является потенциальным, элементарная работа сил в этом поле равна полному дифференциалу силовой функции.

$$dU = dA$$

Вопрос.

Какие поверхности называются эквипотенциальными?

Ответ.

Эквипотенциальной поверхностью или поверхностью уровня называется такая поверхность, в каждой точке которой значение потенциальной функции одно и то же.

Вопрос.

Что называется потенциальной энергией механической системы?

Ответ.

Потенциальной энергией механической системы называется тот запас работы, которую совершают силы потенциального поля при переходе механической системы с заданного потенциального уровня на уровень, условно принятый за нулевой.

$$\Pi = A = \int dA = \int_u^0 du = 0 - u = -u \qquad (122)$$

$$\Pi = -u(x, y, z) \qquad (123)$$

Потенциальная энергия равна потенциальной функции с обратным знаком, значит, является функцией только координат и не зависит от скоростей и ускорений.

Вопрос.

Чему равно изменение потенциальной энергии механической системы при перемещении ее из одного положения в другое?

Ответ.

Изменение потенциальной энергии механической системы при перемещении ее из одного положения в другое равно работе сил, приложенных к точкам системы, на том же перемещении.

Вопрос.

Сформулируйте и запишите закон сохранения полной механической энергии.

Ответ.

Если все силы системы потенциальны и потенциал не зависит от времени, то при движении механической системы ее полная механическая энергия остается величиной постоянной.

Это означает, что механическая энергия сохраняется не только в замкнутых системах, но и при воздействии внешних сил, если они потенциальны. Силы и системы сил, для которых выполняется закон сохранения энергии, называются консервативными.

$$E = T + \Pi = const \tag{124}$$

Это равенство называется интегралом движения.

1.3.7. Динамика твердого тела

Вопрос.

Из каких условий выводятся дифференциальные уравнения поступательного движения твёрдого тела?

Ответ.

Для того чтобы твердое тело двигалось поступательно, линия действия главного вектора внешних сил механической системы должна проходить через центр масс тела.

Так как, по определению, при поступательном движении все точки тела движутся одинаково (т.е. имеют равные скорости, ускорения и совпадающие при наложении траектории), то для изучения поступательного движения твёрдого тела достаточно знать движение какой-либо одной точки тела. За эту точку принимают центр масс.

Спроецировав теорему о движении центра масс на координатные оси x, y, z получим три скалярных уравнения:

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x}_c &= \sum F_{\nu x} \\ m\ddot{y}_c &= \sum F_{\nu y} \\ m\ddot{z}_c &= \sum F_{\nu z} \end{aligned}\right\}. \tag{125}$$

Дифференциальные уравнения движения точки в пространстве (или на плоскости) в общем случае позволяют решить две основные задачи динамики.

Вопрос.

Как записывается дифференциальное уравнение вращательного движения твёрдого тела?

Ответ.

Дифференциальное уравнение вращательного движения твёрдого тела имеет вид:

$$I_z\ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^{n} M_z^e(\vec{F}_k) \qquad (126)$$

где I_z – момент инерции тела относительно оси вращения z; $\ddot{\varphi}$ – угловое ускорение тела; $\sum M_z^e$ – сумма моментов внешних сил относительно оси вращения.

Реакции подшипников считаем внешними силами, которые не создают моменты относительно оси вращения, т.к. линии их действия пересекают эту ось.

Вопрос.

Каковы основные типы задач, которые можно решать с помощью дифференциального уравнения вращения тела вокруг неподвижной оси?

Ответ.

Дифференциальное уравнение вращательного движения тела при известном моменте инерции относительно оси вращения I_z позволяет решать следующие задачи:

1. Зная закон движения тела $\varphi = \varphi(t)$, и его момент инерции можно определить главный момент внешних сил, действующих на тело, или силу, создающую этот момент.

2. Зная момент внешних сил, приложенных к телу, и начальные условия $\varphi(0) = \varphi_0$, $\omega(0) = \omega_0$, определить закон вращательного движения тела.

3. Определять момент инерции тела относительно оси вращения, зная угловое ускорение $\ddot{\varphi}$ и главный момент внешних сил.

Вопрос.

При каких условиях тело вращается вокруг неподвижной оси:

- ускоренно;
- замедленно;
- равномерно.

Ответ.

Тело вращается ускоренно, если $\sum_{k=1}^{n} M_z^e(\vec{F}_k) > 0$

Тело вращается замедленно, если $\sum_{k=1}^{n} M_z^e(\vec{F}_k) < 0$

Тело вращается равномерно, если $\sum_{k=1}^{n} M_z^e(\vec{F}_k) = 0$

Вопрос.

Как записываются дифференциальные уравнения плоскопараллельного движения твёрдого тела.

Ответ.

При плоском движении все точки твердого тела движутся в параллельных плоскостях. Поэтому достаточно рассмотреть движение какого-либо сечения тела в одной плоскости.

Дифференциальные уравнения плоского движения твёрдого тела имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x}_C &= \sum_{k=1}^{n} F_{kx}^e \\ m\ddot{y}_C &= \sum_{k=1}^{n} F_{ky}^e \\ I_z\ddot{\varphi} &= \sum_{k=1}^{n} M_z^e(\vec{F}_k) \end{aligned}\right\} \qquad (127)$$

где: m – масса тела; $\ddot{x}_C, \ddot{y}_C$ – проекции ускорения центра масс на оси координат; $\ddot{\varphi}$ – угловое ускорение тела; $\sum_{k=1}^{n} F_{kx}^e, \sum_{k=1}^{n} F_{ky}^e$ – сумма проекций внешних сил на соответствующие оси координат; I_z – момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс и перпендикулярной плоскости движения тела; $\sum_{k=1}^{n} M_z^e(\vec{F}_k)$ – сумма моментов внешних сил относительно той же оси.

Интегрируя эти уравнения, можно определить X_C, Y_C и φ как функции времени. Для определения постоянных интегрирования используются начальные условия движения: координаты центра масс и угол поворота тела в начальный момент времени, а также проекции начальной скорости центра масс на оси координат и начальная угловая скорость тела.

Если тело совершает несвободное движение, то в число внешних сил следует включить реакции связей.

Вопрос.

На основании каких теорем получены дифференциальные уравнения плоского движения твердого тела?

Ответ.

Дифференциальные уравнения плоского движения твердого тела получаются из теоремы о движении центра масс и теоремы об изменении кинетического момента в относительном движении по отношению к центру масс.

Вопрос.

Каким видом дифференциальных уравнений плоского движения твердого тела удобно пользоваться, если задана траектория центра масс системы?

Ответ.

Если траектории центра масс задана, удобно воспользоваться дифференциальными уравнениями движения центра масс – точки C в проекциях на касательную и нормаль к этой траектории:

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{S}_C &= \sum_{k=1}^{n} F_{k\tau}^{e} \\ m\frac{\upsilon_C^2}{\rho} &= \sum_{k=1}^{n} F_{kn}^{e} \\ I_{Cz}\ddot{\varphi} &= \sum_{k=1}^{n} M_{Cz}^{e}(\vec{F}_k) \end{aligned}\right\} \tag{128}$$

1.4. Принципы механики.

1.4.1. Аналитические связи

Вопрос.

Какие материальные системы называют свободными, какие несвободными?

Ответ.

Система материальных точек называется свободной**,** если положение отдельных ее точек и их скорости могут принимать произвольное значение. Движение системы при этом определяется лишь действующими на эти точки силами.

Система материальных точек**,** движение которых ограничивается наложенными на точки ограничениями геометрического или кинематического характера, называется системой несвободных точек.

Вопрос.

Какие связи называются аналитическими?

Ответ.

Связями называют любого вида ограничения, налагаемые на положения (координаты) и скорости точек механической системы**.**

Обычно это – поверхность, стержень, шарнир и т.п.

Аналитическими связями называются связи, которые можно выразить аналитически в виде уравнения, устанавливающего зависимость между координатами (x, y, z), проекциями скоростей $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$, и временем t.

Такое уравнение называется уравнением аналитической связи. Общий вид уравнения связи:

$$f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) = 0 \tag{129}$$

Вопрос.

Какие связи называют геометрическими и кинематическими?

Ответ.

Геометрическими (или конечными) связями называются связи, зависящие только от положения механической системы и не зависящие от её движения, т.е. от скоростей и ускорений.

Если в системе «n» материальных точек, то уравнение связи имеет вид:

$$f(x_1, y_1, z_1, ..., x_n, y_n, z_n) = 0 \tag{130}$$

Кинематическими (или дифференциальными) называются связи, зависящие не только от координат, но и от их производных. Общий вид уравнения связи:

$$f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = 0 \tag{131}$$

Вопрос.

Какие связи называют стационарными и нестационарными?

Ответ.

Стационарными называются связи явно не зависящие от времени, т.е. это постоянные связи, не изменяющиеся с течением времени.

Нестационарными называются связи в уравнения, которых входит время в явном виде, она меняется с течением времени. Общий вид уравнения связи:

$$f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) = 0 \tag{132}$$

Примером стационарной связи может служить нить математического маятника. (Длина нити не меняется).

Примером нестационарной связи является маятник, длина которого меняется с течением времени.

Вопрос.

Какая механическая система называется склерономной?

Ответ.

Система называется склерономной, если на нее наложены только стационарные связи. В противном случае система называется реономной.

Вопрос.

Какие связи называют удерживающими (двухсторонними) и неудерживающими (односторонними)?

Ответ.

Связь называется удерживающей или двусторонней, если накладываемые ею ограничения на координаты точки выражаются в виде равенств, определяющих поверхности, на которых должна находиться эта точка. Удерживающие это связи, которые запрещают движение в некотором направлении и в направлении обратном этому, они сохраняют свое действие во все время движения точек системы.

Примером является маятник, подвешенный на жестком стержне.

Общий вид уравнения связи:

$$f(x, y, z) = 0 \tag{133}$$

Связи называются неудерживающими или односторонними, если они ограничивают движение в некотором направлении, но разрешают движение в обратном направлении, они могут в некоторые промежутки времени меняться.

Стержень (рисунок 17) заменим нерастяжимой нитью, ограничивающей движение от точки подвеса, но позволяющей движение к точке подвеса.

Уравнение односторонней связи описываются неравенствами:

$$f(x, y, z) \leq 0 \tag{134}$$

Вопрос.

Какие связи называют голономными и неголономными?

Ответ.

Голономными или интегрируемыми связями называются такие связи, для которых существует интегрирующий множитель, позволяющий интегрировать уравнения связи, поэтому голономные связи часто называют геометрическими.

Неголономными связями называются связи для уравнений, которых не существует интегрирующего множителя, позволяющего интегрировать эту связь, и они остаются кинематическими.

1.4.2. Принцип возможных перемещений

Вопрос.

Что называется действительным перемещением материальной точки?

Ответ.

Действительные перемещения это перемещения, происходящие в пространстве и во времени, т.е. действительным перемещением точки называется бесконечно малое перемещение под действием внешних сил в соответствии с законом движения и уравнением связи, происходящие по траекториям при постоянном изменении времени.

Если рассматриваем бесконечно малые действительные перемещения, то они являются дифференциалом, т.к. меняется аргумент время и за счет этого меняется функция $\vec{r}(t)$.

Вопрос.

Что называется возможным (виртуальным) перемещением механической системы?

Ответ.

Возможным перемещением несвободной механической системы называется любое бесконечно малое, воображаемое перемещение, допускаемое наложенными в данный момент связями.

Время (аргумент) фиксированное (остановленное) поэтому возможное перемещение является вариацией $\delta\vec{r}$.

Вариацией является изменение вида функции при постоянном значении аргумента.

Вопрос.

Что называется виртуальной работой силы?

Ответ.

Виртуальной работой силы, приложенной к какой-либо точке тела, движущегося поступательно, называется скалярное произведение вектора силы на вектор возможного перемещения точки, в которой приложена эта сила:

$$\delta A(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \delta\vec{r} = \left|\vec{F}\right|\left|\delta\vec{r}\right|\cos(F, \wedge\delta\vec{r}) = F_x\delta x + F_y\delta y + F_z\delta z \quad (135)$$

Виртуальная работа силы, приложенной к какой-либо точке тела, вращающегося вокруг неподвижного центра в плоскости, равна произведению момента силы относительно оси вращения на виртуальный угол поворота тела.

Вопрос.

Зависят ли виртуальные перемещения от действующих на материальную систему сил?

Ответ.

Виртуальные перемещения от действующих на материальную систему сил не зависят.

Вопрос.

При каких связях одно из виртуальных перемещений материальной точки совпадает с ее действительным перемещением?

Ответ.

При идеальных связях одно из виртуальных перемещений материальной точки совпадает с ее действительным перемещением.

Вопрос.

Какие связи называют идеальными?

Ответ.

Идеальная связь – это такая связь, сумма работ реакций связей которой на любом возможном перемещении системы равна нулю.

Примеры идеальных связей: абсолютно гладкая поверхность, абсолютно не растяжимая нить, абсолютно твердое тело и т.п.

Примеры неидеальных связей: шероховатая поверхность, упругая нить, упругий стержень, упругое тело и т.д.

Вопрос.

Почему связь, осуществленная с трением, не является идеальной связью?

Ответ.

Так как возможное перемещение точки приложения силы трения лежит в плоскости, касательной к опорной поверхности, и сила трения лежит в этой же плоскости, работа силы трения не равна нулю и условие идеальности связей не выполняется.

Вопрос.

Сформулируйте принцип возможных перемещений (принцип Лагранжа).

Ответ.

Для равновесия механической системы, на которую наложены стационарные, голономные, идеальные связи необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма виртуальных работ всех активных сил и моментов активных сил на любом возможном перемещении была равна нулю.

$$\sum_{k=1}^{n} \delta A(\vec{F}_k^{\text{àêò}\cdot}) = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^{\text{àêò}\cdot} \cdot \delta \vec{r}_k = 0 \qquad (136)$$

Вопрос.

Сформулируйте принцип возможных скоростей (принцип Лагранжа).

Ответ.

Для равновесия механической системы, на которую наложены стационарные, голономные, идеальные связи необходимо и достаточно, чтобы возможная мощность всех активных сил и моментов активных сил на любом возможном перемещении была равна нулю.

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^{\,\text{àêò}} \cdot \vec{\upsilon}_k = 0 \qquad (137)$$

Отметим, что уравнение ПВП часто называют *общим уравнением статики,* поскольку из него могут быть получены все уравнения статики.

Вопрос.

Почему принцип возможных перемещений упрощает вывод условий равновесия сил, приложенных к несвободным системам, состоящим из большого числа тел?

Ответ.

Если система, состоящая из большого числа тел, имеет одну степень свободы, то принцип возможных перемещений устанавливает сразу условие равновесия задаваемых сил, приложенных к системе.

Вопрос.

Каким образом определяют реакции связей с помощью принципа возможных перемещений?

Ответ.

Отбрасывают ту связь, реакцию которой требуется определить. Действие отброшенной связи заменяют реакцией, которая переходит в число задаваемых сил. Системе сообщают возможное перемещение, соответствующее полученной степени свободы. Составляют уравнение работ, в которое входят задаваемые силы и реакция отброшенной связи. Из этого уравнения определяют искомую реакцию.

Вопрос.

Как составляют уравнения работ для сил, действующих на механическую систему с несколькими степенями свободы?

Ответ.

Если механическая система имеет несколько степеней свободы, то уравнения работ составляются для каждого независимого перемещения системы в отдельности и получается столько уравнений равновесия, сколько степеней свободы имеет механическая система.

Вопрос.

Возможно ли применение принципа возможных перемещений к системам с неидеальными связями?

Ответ.

Применение принципа возможных перемещений к системам с неидеальными связями возможно, если реакции неидеальных связей включить в задаваемые силы.

1.4.3.Принцип Даламбера и общее уравнение динамики

Вопрос.

В чём заключается принцип Даламбера для материальной точки?

Ответ.

Если к фактически действующим на материальную точку активным силам $\vec{\mathrm{F}}$ и силам реакции связей $\vec{\mathrm{N}}$ добавить фиктивную силу инерции $\vec{\Phi}$, то полученная система сил будет уравновешенной и к ней можно применить уравнения статики:

$$\vec{F}^e + \vec{N}^i + \vec{\Phi} = 0 \qquad (138)$$

Вопрос.

В чём заключается принцип Даламбера для механической системы?

Ответ.

Если в любой момент времени к действующим на механическую систему внешним силам и моментам внешних сил добавить фиктивные силы инерции и моменты сил инерции, получим формально уравновешенную систему сил, для которой можно записать условия и уравнения равновесия.

Учитывая, что сумма всех внутренних сил и сумма моментов внутренних сил равна нулю, получаем принцип Даламбера для механической системы в виде:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}\vec{F}_k^e+\sum_{k=1}^{n}\vec{\Phi}_k=0\\
&\sum_{k=1}^{n}\vec{\grave{I}}_0(\vec{F}_k^e)+\sum_{k=1}^{n}\vec{\grave{I}}_0(\vec{\tilde{O}}_k)=0
\end{aligned}\right\} \tag{139}$$

Вопрос.

Как определяется главный вектор сил инерции?

Ответ.

Главный вектор сил инерции – это векторная сумма всех сил инерции, приложенных к телу.

$$\vec{R}^{\grave{e}\acute{\imath}\cdot}=\sum_{k=1}^{n}\vec{\hat{O}}_k=\sum_{k=1}^{n}m_k\cdot\vec{a}_k=-M\cdot\vec{a}_c \tag{140}$$

Главный вектор сил инерции равен произведению массы механической системы на ускорение ее центра масс и направлен в сторону противоположную ускорению центра масс.

Модуль главного вектора сил инерции:

$$R^{\grave{e}\acute{\imath}\cdot}=M\cdot a_c \tag{141}$$

Вопрос.

Как определяется главный момент сил инерции?

Ответ.

Главный момент сил инерции - это векторная сумма моментов всех сил инерции, приложенных к некоторой точке, которую называют центром приведения.

$$\vec{M}_0^{\grave{e}\acute{\imath}\cdot}=\sum_{k=1}^{n}\vec{M}_0(\vec{\hat{O}}_k); \tag{142}$$

Главный момент сил инерции обычно вычисляют при вращательном движении, поэтому его вычисляют относительно оси вращения.

По определению главный момент сил инерции относительно оси вращения:

$$M_z^{\hat{o}} = \sum_{k=1}^{n} M_z(\vec{\hat{O}}_k) = \sum_{k=1}^{n} M_z(\vec{\hat{O}}_k^{n}) + \sum_{k=1}^{n} M_z(\vec{\hat{O}}_k^{\tau}) \qquad (143)$$

Нормальное ускорение пересекает ось вращения, а это значит, что момент от нормальной силы инерции относительно оси будет равен нулю. Подставив в (143) значение касательной силы инерции (21), и, опуская промежуточные выкладки, получим:

$$M_z^{\hat{o}} = -\sum_{k=1}^{n} \left[\vec{r}_k \cdot m_k \cdot \left[\vec{\varepsilon} \cdot \vec{r}_k \right] \right] = -\sum_{k=1}^{n} m_k \cdot h_k^{\ 2} \cdot \varepsilon = -I_z \cdot \varepsilon; \qquad (144)$$

Главный момент сил инерции равен произведению момента инерции тела относительно оси вращения проходящей через центр масс механической системы, на угловое ускорение. Знак минус говорит о том, что главный момент сил инерции направлен противоположно угловому ускорению.

Вопрос.

К чему приводятся силы инерции тела при поступательном движении?

Ответ.

При поступательном движении силы инерции приводятся к равнодействующей силе инерции, приложенной в центре масс тела, равной по модулю произведению массы тела на модуль ускорения его центра масс и направлены противоположно этому ускорению.

Вопрос.

К чему приводятся силы инерции тела при вращательном движении вокруг оси, проходящей через центр масс механической системы?

Ответ.

При вращательном движении вокруг оси, проходящей через центр масс механической системы, силы инерции приводятся к паре сил, момент которой определяется по формуле (144).

Вопрос.

К чему приводятся силы инерции тела при вращательном движении тела вокруг оси, не проходящей через центр масс механической системы?

Ответ.

При вращении тела вокруг произвольной оси (рисунок 17) силы инерции приводятся к касательной и нормальной силам инерции и паре сил.

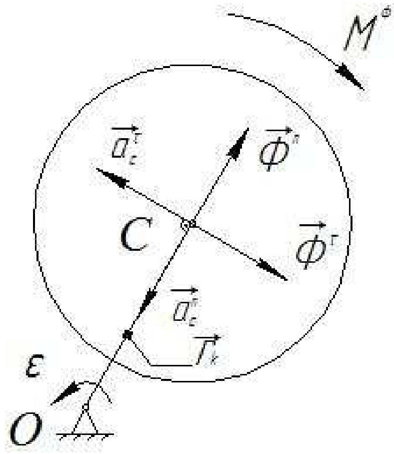


Рисунок 17

$$\vec{R}^{\grave{e}\acute{i}\cdot} = -M\cdot\vec{a}_c = -M(\vec{a}_c^{\tau} + \vec{a}_c^{n}) = -M\vec{a}_c^{\tau} - M\vec{a}_c^{n} = \vec{\hat{O}}^{\tau} + \vec{\hat{O}}^{n} \qquad (145)$$

$$M_z^{\hat{O}} = -I_{zc}\cdot\varepsilon \neq 0; \qquad (146)$$

Вопрос.

К чему приводятся силы инерции тела при плоском движении?

Ответ.

В соответствии с теоремой о разложении плоское движение можно представить как поступательное со скоростью полюса и вращательное вокруг этого полюса. За полюс удобно брать центр масс, тогда силы инерции приводятся к силе, приложенной в центре масс и равной главному вектору сил инерции, и к паре сил, момент которой равен главному моменту сил инерции.

$$\vec{R}^{ин.} = -M\cdot\vec{a}_c \neq 0\,, \quad M_z^{\grave{e}\acute{i}\cdot} = -I_{zc}\cdot\varepsilon. \neq 0 \qquad (147)$$

Вопрос.

К чему приводятся силы инерции тела при равномерном вращении однородного стержня вокруг неподвижной оси?

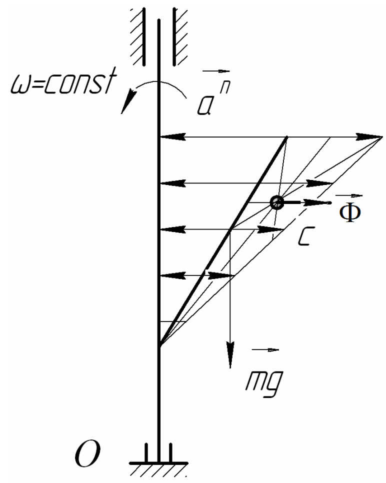


Рисунок 18

Ответ.

Касательная сила инерции будет равна нулю, т.к. стержень вращается с постоянной угловой скоростью. Нормальное ускорение тем больше, чем дальше стержень от оси вращения, а поэтому силы инерции нормальные будут также не одинаковыми.

Очевидно, что вектор суммарной силы инерции, оказывающей такое же действие как вся система сил в целом, не будет приложен в центре масс. Суммарный вектор сил инерции будет иметь равнодействующую, которая будет проходить через центр масс эпюры сил инерции, а поэтому $\vec{R}^{ин.}$ отсекает на стержне $\frac{1}{3}$ длины от удаленного от оси вращения конца стержня (рисунок 18).

$$M_z^{\hat{O}} = -I_{zc} \cdot \varepsilon = 0 \tag{148}$$

$$\vec{R}^{ин.} = -M \cdot \vec{a}_c = -M(\vec{a}_c^{\tau} + \vec{a}_c^{n}) = -M\vec{a}_c^{n.} \tag{149}$$

Вопрос.

В каком случае динамические составляющие подшипника и подпятника обращаются в нуль?

Ответ.

Динамические составляющие реакций подпятника и подшипника равны нулю в том случае, если ось вращения тела является главной центральной осью инерции тела.

Вопрос.

Какие принципы используются при получении общего уравнения динамики?

Ответ.

Общее уравнение динамики получается объединением принципов Лагранжа и Даламбера.

Принцип Лагранжа применяется в случае, когда механическая система находится в равновесии, т.е. является необходимым и достаточным условием равновесия.

Принцип Даламбера применяется, когда механическая система движется с ускорением, в этом случае добавляя к действующим силам фиктивные силы инерции и их моменты, получают формальное равновесие системы. При равновесии можно использовать не только условия равновесия, но и использовать принцип возможных перемещений. В этом и заключается принцип Лагранжа - Даламбера.

Вопрос.

Как формулируется принцип Даламбера – Лагранжа?

Ответ.

Если механическая система, на которую наложены голономные, стационарные, идеальные связи, движется с ускорением, то добавляя к действующим на нее активным силам и их моментам фиктивные силы и моменты сил инерции, получим формально уравновешенную систему сил, для которой можно применить принцип возможных перемещений.

Вопрос.

Как формулируется и записывается общее уравнение динамики?

Ответ.

При движении системы, подчинённой удерживающим идеальным связям, сумма элементарных работ всех приложенных активных сил и всех сил инерции на любом возможном перемещении системы будет равна нулю.

$$\sum_{k=1}^{n} \delta A_k^{\text{àêò.}} + \sum_{k=1}^{n} \delta A_k^{\text{èí åðö.}} = 0 \qquad (150)$$

В аналитической форме общее уравнение динамики имеет вид:

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\vec{F}_k^{a} - m_k \cdot \ddot{\vec{r}}_k \right) \cdot \delta \vec{r}_k = 0 \qquad (151)$$

1.4.4. Уравнения Лагранжа второго рода

Вопрос.

Что называется обобщенными координатами?

Ответ.

Обобщенными координатами называются любые независимые параметры, однозначно определяющие положение механической системы в пространстве $q_1, q_2, \ldots, q_s$ - их число равно числу степеней свободы.

Вопрос.

Что называется обобщенной скоростью?

Ответ.

Обобщенными скоростями называются первые производные по времени от обобщенных координат:

$\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_s$ (их число равно числу степеней свободы).

Вопрос.

Что называется обобщенной силой, соответствующей некоторой обобщенной координате механической системы. Как она вычисляется и какую она имеет размерность?

Ответ.

Обобщенной силой Q_S, соответствующей обобщенной координате q_S называют коэффициент при обобщенном возможном перемещении в формуле виртуальной работы. Обобщенная сила это скалярная величина, определяемая отношением элементарной работы действующих сил на перемещение механической системы, вызванное элементарным приращением координаты q_S к величине этого приращения.

Число обобщенных сил равно числу степеней свободы S. Обобщённые силы векторами не являются, это проекции сил, проекции моментов сил и другие силовые характеристики. Размерность обобщенной силы зависит от размерности обобщенной координаты.

Общая формула для вычисления обобщенных сил:

$$Q_\alpha = \sum_{k=1}^{s} \vec{F}_k^{a} \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_\alpha} = \frac{\delta A_{q_k}}{\delta q_\alpha} \quad (\alpha = 1, \ldots, s) \tag{152}$$

где α – число степеней свободы.

Вопрос.

Чему равны обобщенные реакции идеальных связей?

Ответ.

В случае стационарных связей обобщенные реакции равны нулю.

Вопрос.

Как определяются обобщенные силы в потенциальном поле?

Ответ.

По определению потенциального поля:

$$du = dA \tag{153}$$

По определению потенциальной энергии:

$$du = -d\Pi \tag{154}$$

отсюда:

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \delta A = -\sum_{\alpha=1}^{n} \delta \ddot{I} \tag{155}$$

Потенциальная энергия это функция от координат, поэтому обобщенные силы в потенциальном поле определяются по формуле:

$$Q_\alpha = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_\alpha} \text{ - } (\alpha = 1, \ldots, s) \tag{156}$$

Вопрос.

Функцией каких аргументов является вектор скорости точки, принадлежащей механической системе, имеющей S степеней свободы?

Ответ.

В случае стационарных связей вектор скорости точки является функцией обобщенных скоростей и обобщенных координат.

$$\vec{v}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_\alpha} \cdot \dot{q}_\alpha \tag{157}$$

Вопрос.

Какой вид имеют уравнения Лагранжа второго рода? Чему равно число этих уравнений для каждой механической системы?

Ответ.

Уравнение Лагранжа второго рода имеет вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha \text{ - } \left(\alpha = 1, \ldots, s\right) \tag{158}$$

Разность полной производной по времени от частной производной от кинетической энергии механической системы по обобщенной скорости и частной производной от кинетической энергии механической системы по обобщенной координате равна обобщенной силе.

Число уравнений Лагранжа второго рода равно числу степеней свободы.

Вопрос.

Какой физический смысл имеют уравнения Лагранжа второго рода.

Ответ.

Физический смысл уравнений Лагранжа второго рода это обобщенный вид второго закона Ньютона. Поясним на примере.

Пример:

Точка движется по горизонтальной плоскости по закону $x=x(t)$ (рисунок 20):

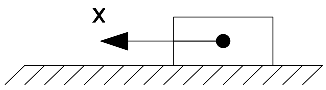


Рисунок 19

Число степеней свободы механической системы равно единице. Введем обобщенную координату $q=x$. Тогда: $\dot{q} = \dot{x}.$

Кинетическая энергия механической системы:

$$T = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{m\dot{x}^2}{2} \tag{159}$$

Уравнение Лагранжа второго рода имеет вид (164).

Так как кинетическая энергия является функцией скорости, то:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \tag{160}$$

Получили:

$$m\ddot{x} = Q \tag{161}$$

Уравнение (161) представляет собой второй закон Ньютона. Таким образом, уравнения Лагранжа второго рода это обобщенный вид второго закона Ньютона.

Вопрос.

Что представляет собой функцией Лагранжа или кинетический потенциал?

Ответ.

Функции Лагранжа называется разность между кинетической и потенциальной энергией:

$$L = T - \varPi \tag{162}$$

Кинетический потенциал является функцией обобщенных координат, обобщенных скоростей и времени.

$$L = L(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t) \tag{163}$$

т.е. в общем случае это функция $(2S+1)$ переменных.

Вопрос.

Какой физический смысл имеет функция Лагранжа?

Ответ.

Физический смысл функции Лагранжа в том, что она выражает физическое состояние механической системы в данный момент времени и поэтому её называют функцией состояния механической системы или кинетическим потенциалом.

Вопрос.

Запишите уравнения Лагранжа второго рода для потенциальных систем.

Ответ.

Подставив формулу обобщенной силы в потенциальном поле (156) в уравнения Лагранжа второго рода (158), получим:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_\alpha} = 0 \tag{164}$$

Учитывая, что потенциальная энергия является функцией только координат и обобщенные скорости в формулу потенциальной энергии не входят, получим уравнения Лагранжа второго рода в потенциальном поле:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \tag{165}$$

Вопрос.

В чем достоинства уравнений Лагранжа второго рода.

Ответ.

1.Уравнение Лагранжа второго рода это дифференциальные уравнения второго порядка в обобщенных координатах.

2. Число уравнений Лагранжа второго рода равно числу степеней свободы.

3. Уравнения Лагранжа второго рода носят интегральный характер, т.к. эти уравнения содержат только характеристики всей системы и не содержат характеристик отдельных материальных точек.

4. В эти уравнения не входят силы реакции, которые всегда неизвестны, их можно не обозначать на чертеже.

2. ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

Механическая система состоит из груза 1, идеального блока 2 и катка 3, масса которого равномерно распределена по его ободу (Рисунок 1). Груз 1 весом *P* посредством невесомой нерастяжимой нити, перекинутой через блок, приводит в движение каток 2, весом *2P* радиуса *R*, катящийся без скольжения по неподвижной горизонтальной поверхности. Коэффициент трения качения катка о поверхность равен δ. Массой блока пренебречь. В начальный момент система находилась в покое.

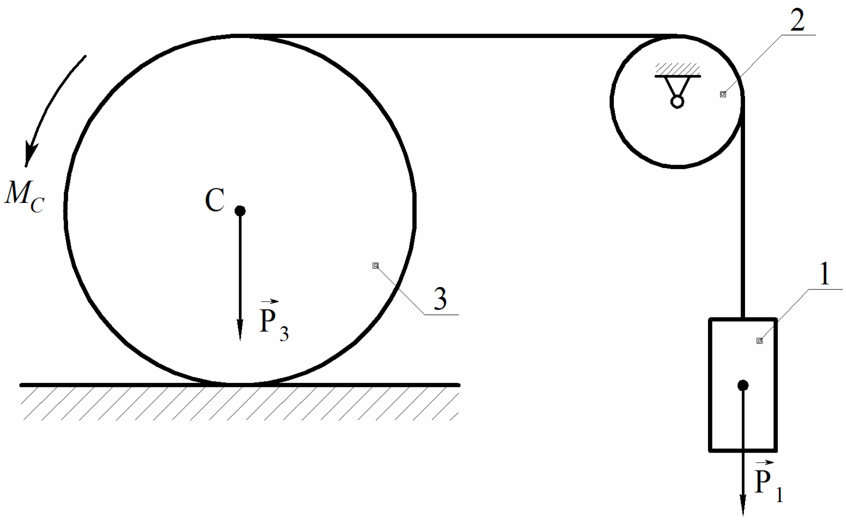


Рисунок 1

Определить:

1. Ускорение груза 1 – a_1.

Варианты ответов:

1. $a_1 = \dfrac{g(R-\delta)}{3R}$.
2. $a_1 = \dfrac{2g(R-\delta)}{3R}$.
3. $a_1 = \dfrac{g(R-\delta)}{2R}$.
4. $a_1 = \dfrac{g(R+\delta)}{2R}$.

2. Ускорение центра масс катка – a_{C3}.

Варианты ответов:

1. $a_{\tilde{N}_3} = \dfrac{g(R-\delta)}{2R}$
2. $a_{\tilde{N}_3} = \dfrac{g(R+\delta)}{4R}$.

3. $a_{\tilde{N}_3} = \dfrac{g(R-\delta)}{4R}$. 4. $a_{\tilde{N}_3} = \dfrac{g(R-\delta)}{3R}$.

3. Угловое ускорение катка.

Варианты ответов:

1. $\varepsilon_3 = \dfrac{g(R-\delta)}{3R^2}$ 2. $\varepsilon_3 = \dfrac{g(R-\delta)}{4R^2}$

3. $\varepsilon_3 = \dfrac{g(R-\delta)}{2R^2}$ 4. $\varepsilon_3 = \dfrac{g(R+\delta)}{4R^2}$

Задачу можно решить различными методами, рассмотрим некоторые из них.

2.1. ПРИМЕНЕНИЕ ОБЩЕГО УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ К ИССЛЕДОВАНИЮ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ.

Общее уравнение динамики, не содержащее неизвестных реакций в случае идеальных связей, может быть использовано для определения искомого ускорения.

«При движении системы, подчинённой удерживающим идеальным связям, сумма элементарных работ всех приложенных активных сил и всех сил инерции на любом возможном перемещении системы будет равна нулю».

$$\sum_{k=1}^{n} \delta A_k^{\grave{a}\hat{e}\grave{o}} + \sum_{k=1}^{n} \delta A_k^{\grave{e}\acute{i}} = 0; \qquad (1)$$

Учитываем, что виртуальной работой силы, приложенной к какой-либо точке тела, движущегося поступательно, называется скалярное произведение вектора силы на вектор возможного перемещения точки, в которой приложена эта сила. Получим:

$$\sum_{\hat{e}=1}^{n} \vec{F}_{\hat{e}}^{\grave{a}\hat{e}\grave{o}} \cdot \delta\vec{r}_{\hat{e}} + \sum_{\hat{e}=1}^{n} \vec{\tilde{O}}_{\hat{e}} \cdot \delta\vec{r}_{\hat{e}} = 0 \qquad (2)$$

где $\vec{F}_{\hat{e}}^{e}$ - активные силы, действующие на механическую систему;

$\vec{\tilde{O}}_{\hat{e}}$ - силы инерции, действующие на механическую систему;

$\delta\vec{r}_{\hat{e}}$ - возможное перемещение.

Решение:

1. Изображаем систему, состоящую из трех тел в текущий момент времени.

2. Прикладывает к механической системе все активные силы: силы тяжести $\vec{P}_1, \vec{P}_2$, момент трения качения катка $M_{\tilde{N}}$, показываем их на рисунке 2. Реакции связей совершают работу, равную нулю на любом возможном перемещении при идеальных связях. Момент трения качения катка 3 определяется по формуле:

$$M_{\tilde{N}} = \delta \cdot N; \qquad (3)$$

где N – нормальное давление катка

$$N = P_3 = 2P \qquad (4)$$

3. Определим и приложим к механической системе силы инерции. Пусть груз движется вниз с искомым ускорением $\vec{a}_1$, направленным вниз. Обозначим $\vec{a}_{C3}$ - ускорение центра масс катка, □3 - угловое ускорение катка 3.

К грузу 1, движущемуся поступательно с ускорением $\vec{a}_1$ приложим силу инерции $\vec{\hat{O}}_1$, направив ее противоположно ускорению $\vec{a}_1$. По модулю сила инерции груза 1 вычисляется по формуле:

$$\hat{O}_1 = m_1 a_1 = \frac{P}{g} a_1; \qquad (5)$$

Силы инерции катка 3, совершающего плоскопараллельное движение, приводятся к силе инерции $\vec{\hat{O}}_3$:

$$\hat{O}_3 = m_3 \cdot a_{\tilde{N}_3} = \frac{2Ð}{g} \cdot a_{\tilde{N}_3}; \qquad (6)$$

и паре сил, момент которой равен моменту сил инерции

$$M_3^{\hat{O}} = I_{\tilde{N}_3} \cdot \varepsilon_3; \qquad (7)$$

где I_{C3} – момент инерции катка относительно оси, проходящей через центр масс. Так как масса катка равномерно распределена по его ободу, то его момент инерции вычисляется по формуле:

$$I_{C_3} = m_3 R_3^2 = \frac{2P}{g} R^2; \tag{8}$$

Силу $\vec{Ô}_3$ прикладываем в точке C_3 противоположно направлению $\vec{a}_{Ñ_3}$, направление $M_3^{Ô}$ противоположно направлению углового ускорения $\square_3$.

4. Сообщаем системе возможное перемещение в направлении ее действительного перемещения:

δS_1 - возможное перемещение груза 1; δS_{C_3} - возможное перемещение центра масс катка 3; $\delta\varphi_3$ - возможный угол поворота катка 3.

5. Расчетная схема показана на рисунке 2.

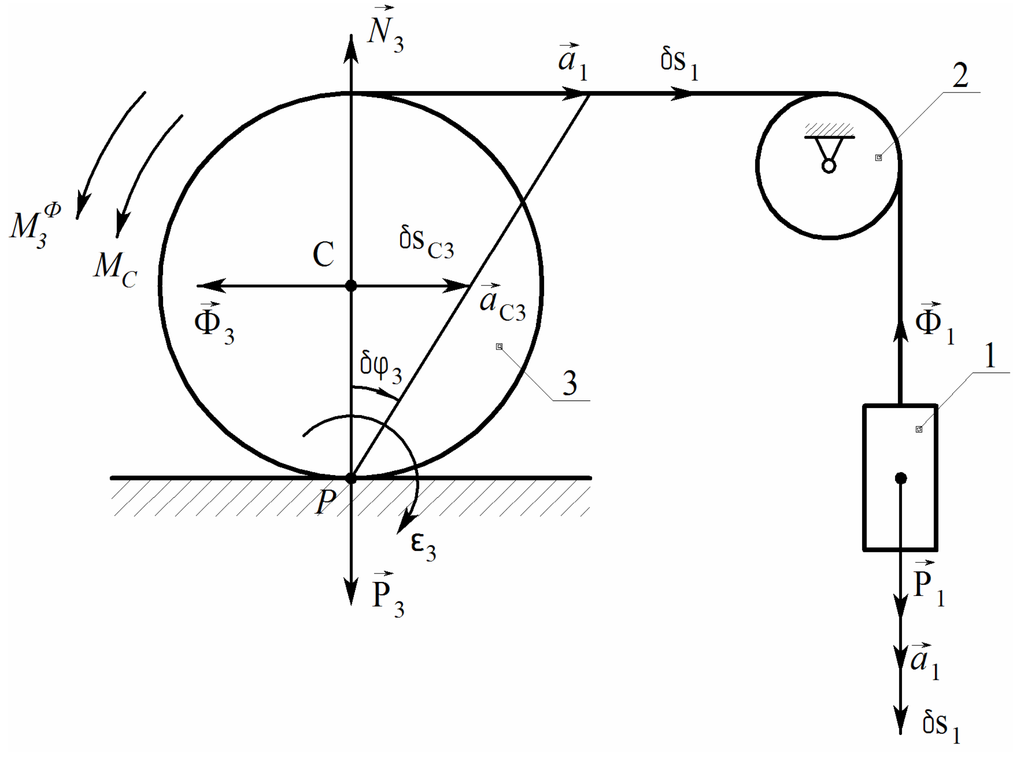


Рисунок 2

6. Записываем общее уравнение динамики в общем виде:

$$\delta A(P_1) + \delta A(\hat{O}_1) + \delta A(P_3) + \delta A(\grave{I}_{\tilde{N}}) + \delta A(\hat{O}_3) + \delta A(\grave{I}_3^{\hat{O}}) = 0 \tag{9}$$

или в явном виде:

$$(P-\hat{O}_1)\delta S_1 - M_c\delta\varphi_3 - M_3^{\hat{O}}\delta\varphi_3 - \hat{O}_3\delta S_{3c} = 0; \tag{10}$$

Работа веса катка равна нулю, так как между направлением силы и направлением возможного перемещения центра катка угол прямой и косинус 90^0 равен нулю.

7. Записываем зависимость между ускорением груза 1, ускорением центра катка 3 и угловым ускорением катка 3, выражая все параметры через ускорение груза 1. При определении углового ускорения катка 3 учитываем, что каток совершает плоскопараллельное движение, и мгновенный центр скоростей катка находится в точке соприкосновения катка с неподвижной плоскостью (в точке *P*). Получим:

$$\varepsilon_3 = \frac{a_1}{2R}; \tag{11}$$

$$a_{\tilde{N}_3} = \varepsilon_3 \cdot R = \frac{a_1}{2R} \cdot R = \frac{a_1}{2}; \tag{12}$$

Зависимости между возможными перемещениями такие же как и между соответствующими ускорениями:

$$\delta\varphi_3 = \frac{\delta S_1}{2R}; \tag{13}$$

$$\delta S_{\tilde{N}_3} = \delta\varphi_3 \cdot R = \frac{\delta S_1}{2R} \cdot R = \frac{\delta S_1}{2}. \tag{14}$$

Учтем, что масса груза 1 $m_1 = \dfrac{P}{g}$, а масса катка 3 $m_3 = \dfrac{2P}{g}$.

Сила инерции катка 3 с учетом (12):

$$\hat{O}_3 = \frac{2P}{g} \cdot \frac{a_1}{2} = \frac{P}{g} a_1; \tag{15}$$

Момент сил инерции катка 3:

$$M_3^{\hat{o}} = \frac{m_3 R^2 \cdot a_1}{2R} = \frac{2 \cdot P \cdot a_1 \cdot R}{2g} = \frac{P \cdot a_1 \cdot R}{g}; \tag{16}$$

Уравнение (10) с учетом (11 - 16) принимает вид:

$$(P - \frac{P}{g} a_1)\delta S_1 - \frac{\delta \cdot 2 \cdot P \cdot \delta S_1}{2 \cdot R} - \frac{P \cdot a_1 \cdot R}{g} \cdot \frac{\delta S_1}{2R} - \frac{P}{g} a_1 \cdot \frac{\delta S_1}{2} = 0 \tag{17}$$

Преобразовав, получим:

$$(P - \frac{P}{g} a_1) \cdot \delta S_1 - \frac{\delta P}{R} \cdot \delta S_1 - \frac{P}{2g} a_1 \cdot \delta S_1 - \frac{P}{g} a_1 \cdot \frac{\delta S_1}{2} = 0; \tag{18}$$

Разделим это уравнение на $\delta S_1 \neq 0$. Преобразовав, получим:

$$(P - \frac{\delta P}{R}) = (\frac{P}{g} + \frac{P}{2g} + \frac{P}{2g}) \cdot a_1; \tag{19}$$

Приведя подобные члены в уравнении, получим ускорение груза 1:

$$a_1 = \frac{g(R - \delta)}{2R}. \tag{20}$$

Таким образом, правильный ответ 3.

Ускорение центра катка и угловое ускорение катка получим, используя уравнение (11) и (12).

$$a_{C_3} = \frac{a_1}{2} = \frac{g(R - \delta)}{4R}. \tag{21}$$

Таким образом, правильный ответ 3.

$$\varepsilon_3 = \frac{a_1}{2R} = \frac{g(R - \delta)}{4R^2} \tag{22}$$

Таким образом, правильный ответ 2.

2.2. ПРИМЕНЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ЛАГРАНЖА ВТОРОГО РОДА К ИССЛЕДОВАНИЮ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Уравнения Лагранжа второго рода – дифференциальные уравнения второго порядка в обобщенных координатах. Они дают единый и достаточно простой метод решения задач динамики для любых как угодно движущихся голономных и стационарных систем. Число уравнений не зависит от числа входящих в механическую систему точек или тел, а зависит от числа степеней свободы.

Силы, действующие на систему, представлены в виде обобщенных сил, куда входят только активные силы, а все реакции идеальных связей автоматически исключаются и их можно не показывать на чертеже. Также, если на систему действуют силы трения, то их включают в число внешних сил.

Механическая система имеет одну степень свободы, поэтому для определения ускорения груза 1 достаточно одного уравнения Лагранжа второго рода, которое имеет вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = Q \tag{23}$$

где – T кинетическая энергия механической системы; q – обобщенная координата; Q – обобщенная сила.

Расчетная схема приведена на рисунке 3.

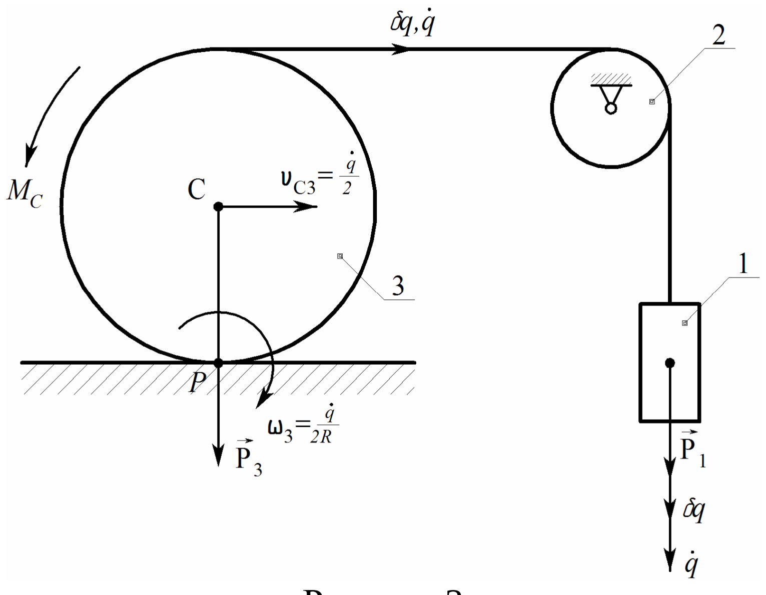


Рисунок 3

1. Определение кинетической энергии механической системы.

Кинетическая энергия рассматриваемой системы Т в конечном ее положении равна сумме кинетических энергий груза 1 и катка 3, поскольку нить невесома, а блок 2 – идеальный (масса блока равна нулю):

$$T = T_1 + T_3. \tag{24}$$

В качестве обобщенной координаты примем перемещение груза 1: $x=q$, тогда обобщенная скорость груза 1 - $\dot{q} = \upsilon_1$; обобщенное ускорение груза 1 - $\ddot{q} = a_1$

Кинетическая энергия механической системы будет определяться как сумма кинетических энергий груза 1, который движется поступательно и кинетической энергии катка, совершающего плоскопараллельное движение.

Кинетическая энергия твердого тела, движущегося поступательно, равна половине произведения массы тела m на квадрат его скорости, поэтому, для определения кинетической энергии груза, используем формулу:

$$T_1 = \frac{m \cdot \upsilon_1^2}{2} = \frac{P \cdot \dot{q}^2}{2g};; \tag{25}$$

Кинетическая энергия твердого тела при плоскопараллельном движении складывается из кинетической энергии поступательного движения вместе с центром масс и кинетической энергии от вращения вокруг неподвижной оси, проходящей через центр масс и перпендикулярной плоскости движения.

Потому, кинетическая энергия катка будет определяться по формуле:

$$T_3 = T_3^{\text{âð.}} + T_3^{\text{ïîñò.}} \tag{26}$$

$$T_3^{\text{ïîñò.}} = \frac{m_3 \cdot \upsilon_{\text{Ñ}_3}^2}{2} \tag{27}$$

$$T_3^{\text{âð.}} = \frac{I_{C_3} \cdot \omega_3^2}{2} \tag{28}$$

Выразим угловую скорость катка 3 - ω_3 через обобщенную скорость $\dot{q}$:

$$\omega_3 = \frac{\upsilon_1}{2R} = \frac{\dot{q}}{2R} \tag{29}$$

Выразим скорость центра катка 3 - υ_{C_3} через обобщенную скорость $\dot{q}$:

$$\upsilon_{C_3} = \frac{\upsilon_1}{2} = \frac{\dot{q}}{2} \tag{30}$$

Получаем кинетическую энергию катка:

$$T_3 = T_3^{\text{âð.}} + T_3^{\text{ïîñò.}} = \frac{m_3 \cdot \upsilon_{\tilde{N}_3}^2}{2} + \frac{I_{C_3} \cdot \omega_3^2}{2} \tag{31}$$

Подставив соотношения в формулу (31) соотношения (8), (29), (30), получим:

$$T_3 = \frac{2P \cdot \dot{q}_1^2}{2g \cdot 4} + \frac{2P \cdot R^2 \cdot \dot{q}_1^2}{2g \cdot 4 \cdot R^2} = \frac{P \cdot \dot{q}_1^2}{2g} \tag{32}$$

Подставив в (24) соотношения (25), и (32) и, учитывая массы груза и катка, получим:

$$T = \frac{P \cdot \dot{q}^2}{2g} + \frac{P \cdot \dot{q}^2}{2g} = \frac{P \cdot \dot{q}^2}{g} \tag{33}$$

2. Определение обобщенной силы Q.

Для определения обобщенной силы Q найдем виртуальную работу всех активных сил на виртуальном перемещении δq.

Зададим приращение обобщенной координате $\delta q = \delta x$.

Сообщаем системе возможное перемещение в направлении ее действительного перемещения.

Обозначим:

- возможное перемещение груза 1 - $\delta q = \delta x$;

- возможное перемещение центра масс катка 3 - $\delta S_{C_3} = \frac{\delta q}{2}$;

- возможный угол поворота катка 3 - $\delta\varphi_3 = \dfrac{\delta q}{2R}$.

Действующие на механическую систему активные силы - силы тяжести $\vec{P}_1,\ \vec{P}_2, \vec{P}_3$, момент трения качения катка M_C, показаны на рисунке 3.

Вычислим виртуальную работу всех сил на перемещении δq.

Виртуальной работой силы, приложенной к какой-либо точке тела, движущегося поступательно, называется скалярное произведение вектора силы на вектор возможного перемещения точки, в которой приложена эта сила.

$$\delta A(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \delta\vec{r} = \left|\vec{F}\right|\left|\delta\vec{r}\right|\cos(F, \wedge\delta\vec{r}) \qquad (34)$$

Знак работы (положительная, отрицательная или ноль) зависит от знака косинуса угла между силой и возможным перемещением.

Виртуальная работа силы, приложенной к какой-либо точке тела, вращающегося вокруг неподвижного центра в плоскости, равна произведению момента силы относительно оси вращения на виртуальный угол поворота тела.

Виртуальная работа сил, действующих в механической системе, запишется в виде:

$$\sum_{k=1}^{n} \delta A\left(\vec{F}_k^e\right) = \delta A(P_1) + \delta A(P_3) + \delta A(M_C) \qquad (35)$$

Работа силы веса катка 3 равна нулю, так как между направлением возможного перемещения центра масс катка и направлением силы угол прямой ($\cos 90^0=0$).

Получаем:

$$\sum_{k=1}^{n} \delta A\left(\vec{F}_k^e\right) = P_1\delta q - M_c\delta\varphi_3 \qquad (36)$$

Подставив соотношения между возможными перемещениями и значение момента трения качения – формулы (3) и (4), получим:

$$\sum_{k=1}^{n} \delta A\left(\vec{F}_k^e\right) = \left(P - \frac{\delta \cdot 2P}{2R}\right) \cdot \delta q \qquad (37)$$

Обобщенная сила Q определяется по формуле:

$$Q = \frac{\sum_{k=1}^{n} \delta A(\vec{F}_k^e)}{\delta q} \qquad (38)$$

Подставив значения и преобразовав, получим:

$$Q = \frac{\left(P - \frac{\delta \cdot 2P}{2R}\right) \cdot \delta q}{\delta q} = \left(P - \frac{\delta \cdot 2P}{2R}\right) = \frac{P(R-\delta)}{R} \qquad (39)$$

Определим производные от кинетической энергии необходимые для составления уравнения Лагранжа второго рода.

Так как кинетическая энергия является функцией от обобщенной скорости, то

$$\frac{\partial T}{\partial q} = 0 \qquad (40)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = \frac{2P \cdot \dot{q}}{g} \qquad (41)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = \frac{2P \cdot \ddot{q}}{g} \qquad (42)$$

Левая часть уравнений Лагранжа второго рода будет иметь вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = \frac{2P \cdot \ddot{q}}{g} \qquad (43)$$

Приравнивая, левую и правую части получим:

$$\frac{2P \cdot \ddot{q}}{g} = \left(P - \frac{\delta \cdot 2P}{2R}\right) \qquad (44)$$

После преобразования получим значение ускорения груза 1, такое же, как и определенное по первому методу:

$$a_1 = \frac{g(R-\delta)}{2R}. \tag{45}$$

Ускорение груза можно также определить, используя теорему об изменении кинетической энергии механической системы в дифференциальной форме, дифференциальные уравнения движения механической системы.

2.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Определить:

3.1. Скорость груза 1 – υ_1.

Варианты ответов:

1. $\upsilon_1 = \frac{g(R-\delta)\cdot t}{3R}$.
2. $\upsilon_1 = \frac{2g\cdot(R-\delta)\cdot t}{3R}$.
3. $\upsilon_1 = \frac{g\cdot(R-\delta)\cdot t}{2R}$.
4. $\upsilon_1 = \frac{g\cdot(R+\delta)\cdot t}{2R}$.

3.2. Скорость центра масс катка – υ_{C_3}

Варианты ответов:

1. $\upsilon_{C_3} = \frac{g(R-\delta)\cdot t}{2R}$.
2. $\upsilon_{C_3} = \frac{g\cdot(R+\delta)\cdot t}{4R}$.
3. $\upsilon_{C_3} = \frac{g\cdot(R-2\delta)\cdot t}{6R}$.
4. $\upsilon_{C_3} = \frac{g\cdot(R-\delta)\cdot t}{4R}$.

3.3. Угловую скорость катка в функции от времени.

Варианты ответов:

1. $\omega_3 = \frac{g(R-\delta)\cdot t}{2R^2}$.
2. $\omega_3 = \frac{g\cdot(R+\delta)\cdot t}{2R^2}$.
3. $\omega_3 = \frac{g\cdot(R+\delta)\cdot t}{4R^2}$.
4. $\omega_3 = \frac{g\cdot(R-\delta)\cdot t}{4R^2}$.

3.4. Кинематическое уравнение движения груза:

Варианты ответов:

1. $S=\dfrac{g(R-\delta)\cdot t^2}{2R}$.

2. $S=\dfrac{g\cdot(R+\delta)\cdot t^2}{4R}$.

3. $S=\dfrac{g\cdot(R-2\delta)\cdot t^2}{6R}$.

4. $S=\dfrac{g\cdot(R-\delta)\cdot t^2}{4R}$.

3.5. Кинематическое уравнение движения центра катка:

Варианты ответов:

1. $S_{C_3}=\dfrac{g(R-\delta)\cdot t^2}{4R}$.

2. $S_{C_3}=\dfrac{g\cdot(R+\delta)\cdot t^2}{8R}$.

3. $S_{C_3}=\dfrac{g\cdot(R-2\delta)\cdot t^2}{6R}$.

4. $S_{C_3}=\dfrac{g\cdot(R-\delta)\cdot t^2}{8R}$.

3.6. Угол поворота катка в функции от времени:

Варианты ответов:

1. $\varphi=\dfrac{g(R-\delta)\cdot t^2}{4R^2}$.

2. $\varphi=\dfrac{g\cdot(R-\delta)\cdot t^2}{8R^2}$.

3. $\varphi=\dfrac{g\cdot(R+\delta)\cdot t^2}{8R^2}$.

4. $\varphi=\dfrac{g(R-\delta)\cdot t^2}{4R^2}$.

3.7. Угол поворота катка в функции от перемещения *S* груза 1.

Варианты ответов:

1. $\varphi=\dfrac{S}{R}$

2. $\varphi=\dfrac{S}{2R}$

3. $\varphi=\dfrac{S}{2\pi R}$

4. $\varphi=\dfrac{S}{\pi R}$

Решение:

3.1. Определение скорости груза 1.

Согласно определению ускорения – ускорением называется первая производная по времени от вектора скорости $\vec{\upsilon}$, т.е.

$$\vec{a}_1=\frac{d\vec{\upsilon}_1}{dt}. \tag{46}$$

Разделяя переменные, получим:

$$d\vec{\upsilon}_1 = \vec{a}_1 \cdot dt \tag{47}$$

Проинтегрируем левую и правую часть последнего уравнения с учетом заданных начальных условий. Нижние пределы интегрирования левой и правой частей уравнения соответствуют значениям интегрируемых величин при *t=0*, верхние пределы интегрирования – соответствуют значениям интегрируемых величин при текущем моменте времени *t*, т.е.

$$\int_{\upsilon_0}^{\upsilon} d\upsilon_1 = \int_0^t a_1 \cdot dt \tag{48}$$

Вычислив интегралы, получим:

$$\upsilon_1 = a_1 \cdot t + C. \tag{49}$$

Учитывая начальные условия $t = 0,\ \dot{x} = \upsilon_0 = 0$, так как система движется из состояния покоя, получим C=0.

Скорость груза 1:

$$\upsilon_1 = \frac{g(R-\delta)\cdot t}{2R}. \tag{50}$$

Таким образом, правильный ответ 3.

3.2. Аналогично определяем скорость центра катка υ_{C_3} и угловую скорость катка ω_3.

Скорость центра катка:

$$\upsilon_{C_3} = a_{C_3} \cdot t \tag{51}$$

$$\upsilon_{C_3} = \frac{g\cdot(R-\delta)\cdot t}{4R}. \tag{52}$$

Правильный ответ 4.

3.3. Угловая скорость катка:

$$\omega_3 = \varepsilon_3 \cdot t \tag{53}$$

$$\omega_3 = \frac{g\cdot(R-\delta)\cdot t}{4R^2}. \tag{54}$$

Правильный ответ 4.

3.4. Для определения кинематического уравнения движения груза используем подстановку:

$$\upsilon_1 = \frac{dS}{dt} \tag{55}$$

Разделяя переменные, получим:

$$dS = \upsilon_1 \cdot dt \tag{56}$$

Проинтегрируем левую и правую часть последнего уравнения с учетом заданных начальных условий (*t=0*, *x=0*):

$$\int_0^S dS = \int_0^t \upsilon_1 \cdot dt \tag{57}$$

Вычисляя интегралы, получим:

$$S = \int \frac{g}{2R}(R-\delta)t \cdot dt = \frac{g}{2R}(R-\delta) \cdot \frac{t^2}{2} + C_1 \tag{58}$$

Так как система движется из состояния покоя, то $C_1 = 0$.

$$S = \frac{g \cdot (R-\delta) \cdot t^2}{4R}. \tag{59}$$

Таким образом, правильный ответ 4.

3.5.Аналогично определяем кинематическое уравнение движения центра катка и угол поворота катка в функции от времени:

Кинематическое уравнение движения центра катка:

$$S_{C_3} = \frac{g \cdot (R-\delta) \cdot t^2}{8R}. \tag{60}$$

Таким образом, правильный ответ 4.

3.6. Угол поворота катка в функции от времени:

$$\varphi = \int_0^t \omega dt = \int_0^t \frac{g}{4R^2}(R-\delta) \cdot tdt = \frac{g}{8R^2}(R-\delta) \cdot t^2 \tag{61}$$

Таким образом, правильный ответ 2.

$$\varphi = \frac{g \cdot (R-\delta) \cdot t^2}{8R^2}.$$

3.7. Угол поворота катка в функции от перемещения груза 1 (рисунок 2) определяется в соответствии с плоским движением, которое совершает каток:

$$\varphi = \frac{S}{2R}. \qquad (62)$$

Правильный ответ 2.

2.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МЕРЫ МЕХАНИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ.

Определить:

4.1. Кинетическую энергию груза как функцию от времени.

Варианты ответов:

1. $T_1^{\text{nî ñò .}} = \dfrac{P \cdot g(R-\delta)^2}{16R^2} \cdot t^2$
2. $T_1^{\text{nî ñò .}} = \dfrac{P \cdot g(R-\delta)^2}{8R^2} \cdot t^2$
3. $T_1^{\text{nî ñò .}} = \dfrac{P \cdot g(R-\delta)^2}{4R^2} \cdot t^2$
4. $T_1^{\text{nî ñò .}} = \dfrac{P \cdot g(R+\delta)^2}{8R^2} \cdot t^2$

4.2. Кинетическую энергию катка как функцию от времени.

Варианты ответов:

1. $T_3 = \dfrac{P \cdot g}{8R^2}(R-\delta)^2 \cdot t^2$
2. $T_3 = \dfrac{3P \cdot g}{32R^2}(R-\delta)^2 \cdot t^2$
3. $T_3 = \dfrac{P \cdot g}{4R^2}(R-\delta)^2 \cdot t^2$
4. $T_3 = \dfrac{P \cdot g}{8R^2}(R+\delta)^2 \cdot t^2$

4.3. Кинетическую энергию механической системы как функцию от времени.

Варианты ответов:

1. $T = \dfrac{P \cdot g}{8R^2}(R-\delta)^2 \cdot t^2$
2. $T = \dfrac{P \cdot g}{4R^2}(R-\delta)^2 \cdot t^2$
3. $T = \dfrac{P \cdot g}{16R^2}(R-\delta)^2 \cdot t^2$
4. $T = \dfrac{P \cdot g}{8R^2}(R+\delta)^2 \cdot t^2$

4.4. Количество движения груза

Варианты ответов:

1. $Q_1 = \dfrac{P \cdot (R+\delta)}{2R} \cdot t$

2. $Q_1 = \dfrac{P \cdot (R-\delta)}{2R} \cdot t$

3. $Q_1 = \dfrac{P \cdot (R-2\delta)}{3R} \cdot t$

4. $Q_1 = \dfrac{P \cdot (R-2\delta)}{2R} \cdot t$

4.5. Количество движения катка

1. $Q_3 = \dfrac{P \cdot (R+\delta)}{2R} \cdot t$

2. $Q_3 = \dfrac{P \cdot (R-2\delta)}{4R} \cdot t$

3. $Q_3 = \dfrac{P \cdot (R-\delta)}{4R} \cdot t$

4. $Q_3 = \dfrac{P \cdot (R-\delta)}{2R} \cdot t$

4.6. Количество движения механической системы

1. $Q = \dfrac{P \cdot (R-\delta) \cdot t}{R}$

2. $Q = \dfrac{P\sqrt{2} \cdot (R+\delta) \cdot t}{4R}$

3. $Q = \dfrac{P\sqrt{2} \cdot (R-\delta) \cdot t}{2R}$

4. $Q = \dfrac{P \cdot (R-\delta) \cdot t}{2R}$

Решение:

4.1. Определяем кинетическую энергию груза.

$$T_1^{\text{ïîñò.}} = \frac{m_1 \upsilon_1^2}{2} \tag{63}$$

Подставив значения массы m_1 и полученной скорости груза (50), получим:

$$T_1^{\text{nîñò.}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{g} \left[\frac{g(R-\delta)}{2R} \cdot t \right]^2 = \frac{P \cdot g(R-\delta)^2}{8R^2} \cdot t^2 \tag{64}$$

Правильный ответ 2.

$$T_1^{\text{nîñò.}} = \frac{P \cdot g(R-\delta)^2}{8R^2} \cdot t^2$$

4.2. Определяем кинетическую энергию катка, совершающего плоскопараллельное движение.

$$T_3 = \frac{m\upsilon_{C_3}^2}{2} + \frac{I_c \omega_3^2}{2}. \tag{65}$$

Подставив значения скорости центра масс катка, угловой скорости катка и момента инерции, определенные ранее получим:

$$T_3^{\text{nî ñò .}} = \frac{1}{2} m_3 \upsilon_{\tilde{N}_3}^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2P}{g} \left[\frac{g}{4R} (R-\delta) t \right]^2 = \frac{P \cdot g}{16R^2} (R-\delta)^2 t^2; \qquad (66)$$

$$T_3^{\text{âð}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2P}{g} R^2 \cdot [\frac{g}{4R^2} (R-\delta) t]^2 = \frac{P \cdot g}{16R^2} (R-\delta)^2 t^2. \qquad (67)$$

$$T_3 = \frac{P \cdot g}{16R^2} (R-\delta)^2 t^2 + \frac{P \cdot g}{16R^2} (R-\delta)^2 t^2 = \frac{P \cdot g}{8R^2} (R-\delta)^2 t^2 \qquad (68)$$

Правильный ответ 1:

$$T_3 = \frac{P \cdot g}{8R^2} (R-\delta)^2 \cdot t^2$$

4.3. Определяем кинетическую энергию механической системы как функцию от времени, равную сумме кинетических энергий груза и катка:

$$T = T_1 + T_3 = \frac{Pg}{8R^2} (R-\delta)^2 t^2 + \frac{Pg}{8R^2} (R-\delta)^2 t^2 = \frac{Pg}{4R^2} (R-\delta)^2 t^2 \qquad (69)$$

Правильный ответ 2.

$$T = \frac{Pg}{4R^2} (R-\delta)^2 t^2$$

4.4. Определяем количество движения груза.

Количеством движения Q_1 груза называется произведение массы груза на вектор его скорости**.**

$$Q_1 = m_1 \cdot \upsilon_1 = \frac{P}{g} \cdot \frac{g(R-\delta)}{2R} \cdot t = \frac{P \cdot (R-\delta)}{2R} \cdot t \qquad (70)$$

Правильный ответ 2.

$$Q_1 = \frac{P \cdot (R-\delta)}{2R} \cdot t$$

4.5. Определяем количество движения катка.

Количеством движения Q_3 катка называется произведение массы катка на вектор скорости его центра масс.

$$Q_3 = m_3 \cdot \upsilon_{C_3} = \frac{2P}{g} \cdot \frac{g(R-\delta)}{4R} \cdot t = \frac{P \cdot (R-\delta)}{2R} \cdot t \tag{71}$$

Правильный ответ 2:

$$Q_3 = \frac{P \cdot (R-\delta)}{2R} \cdot t$$

4.6. Определяем количество движения механической системы.

Количество движения механической системы равно векторной сумме количеств движения груза и катка.

$$\vec{Q} = \vec{Q}_1 + \vec{Q}_3 \tag{72}$$

Для определения количества движения механической системы запишем проекции на две взаимно перпендикулярные оси.

Проекции количества движения механической системы на ось x:

$$Q_x = Q_{1_x} + Q_{3x} \tag{73}$$

$$Q_x = Q_3 = \frac{P \cdot (R-\delta)}{2R} \cdot t \tag{74}$$

Проекции количества движения механической системы на ось y:

$$Q_y = Q_1 = \frac{P \cdot (R-\delta)}{2R} \cdot t \tag{75}$$

Количество движения механической системы:

$$Q = \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2} \tag{76}$$

Подставив значения, получим:

$$Q = \sqrt{\left[\frac{P \cdot (R-\delta)}{2R} \cdot t\right]^2 + \left[\frac{P \cdot (R-\delta)}{2R} \cdot t\right]^2} \tag{77}$$

Преобразовав, получим:

$$Q=\sqrt{\frac{2P^2\cdot(R-\delta)^2}{4R^2}\cdot t^2}=\frac{P\sqrt{2}\cdot(R-\delta)\cdot t}{2R} \qquad (78)$$

Правильный ответ 3:

$$Q=\frac{P\sqrt{2}\cdot(R-\delta)\cdot t}{2R}$$

2.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МЕРЫ ДЕЙСТВИЯ СИЛ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Определить:

5.1. Величину главного вектора внешних сил, приложенных к грузу.

Варианты ответов:

1. $R_1=\frac{P\cdot(3R+\delta)}{2R}$
2. $R_1=\frac{P\cdot(R-\delta)}{2R}$
3. $R_1=\frac{P\cdot(R-2\delta)}{3R}$
4. $R_1=P$

5.2. Величину главного вектора внешних сил, приложенных к катку.

Варианты ответов:

1. $R_3=P\cdot\frac{(R-\delta)}{2R}$
2. $R_3=P\cdot\frac{(R+3\delta)}{2R}$
3. $R_3=P\cdot\frac{(R+\delta)}{2R}$
4. $R_3=P\cdot\frac{(R-\delta)}{R}$

5.3. Величину главного вектора внешних сил, приложенных к механической системе.

Варианты ответов:

1. $R^*=\sqrt{2}\cdot\frac{P}{2R}\cdot(R-\delta)$
2. $R^*=\frac{P}{R}\cdot(R+\delta)$
3. $R^*=\sqrt{2}\cdot\frac{P}{2R}\cdot(R-\delta)\cdot t$
4. $R^*=\frac{P}{2R}\cdot(R-\delta)$

5.4. Импульс сил, приложенных к грузу за время *t*.

Варианты ответов:

1. $S_1 = \dfrac{P}{2R}(R+\delta)\cdot t$

2. $S_1 = \dfrac{P}{3R}(R-\delta)\cdot t$

3. $S_1 = \dfrac{P}{R}(R-\delta)\cdot t$

4. $S_1 = \dfrac{P}{2R}(R-\delta)\cdot t$

5.5. Импульс сил, приложенных к катку за время *t*.

Варианты ответов:

1. $S_3 = \dfrac{P}{2R}(R+\delta)\cdot t$

2. $S_3 = \dfrac{P}{3R}(R-2\delta)\cdot t$

3. $S_3 = \dfrac{P}{2R}(R-\delta)\cdot t$

4. $S_3 = \dfrac{P}{R}(R-\delta)\cdot t$

5.6. Импульс сил, действующих на механическую систему за время *t*.

Варианты ответов:

1. $S = 0$

2. $S = \dfrac{P\cdot(R-\delta)\cdot t}{R}$

3. $S = \dfrac{P\cdot\sqrt{(R^2-\delta^2)}\cdot t}{R}$

4. $S = \dfrac{\sqrt{2}\cdot P\cdot(R-\delta)\cdot t}{2R}$

5.7. Натяжение нити на участке между грузом 1 и блоком 2.

Варианты ответов:

1. $T_{1-2} = \dfrac{P}{4R}(3R+\delta)$

2. $T_{1-2} = \dfrac{P}{2R}(R+\delta)$

3. $T_{1-2} = \dfrac{P}{4R}(R+\delta)$

4. $T_{1-2} = \dfrac{P}{2R}(R-\delta)$

5.8. Силу сцепления катка 3 с неподвижной поверхностью.

Варианты ответов:

1. $F_{\text{ñö.}} = \dfrac{P}{2R}(R-\delta)$

2. $F_{\text{ñö.}} = \dfrac{P}{R}(R+\delta)$

3. $F_{\text{ñö.}} = \dfrac{2P}{R}\cdot\delta$

4. $F_{\text{ñö.}} = \dfrac{P}{R}\cdot\delta$

5.9. Работу сил, приложенных к грузу при его перемещении на величину S.

Варианты ответов:

1. $A_1 = P \cdot S$ 2. $A_1 = \dfrac{P(3R+\delta)}{2R} \cdot S$

3. $A_1 = \dfrac{P(R-\delta)}{R} \cdot S$ 4. $A_1 = \dfrac{P(R-\delta)}{2R} \cdot S$

5.10. Работу, затраченную на качение катка 2 при перемещении S груза 1.

Варианты ответов:

1. $A_3 = \dfrac{P(R-3\delta)}{2R} \cdot S$ 2. $A_3 = \dfrac{P(R-\delta)}{R} \cdot S$

3. $A_3 = \dfrac{P(R+\delta)}{2R} \cdot S$ 4. $A_3 = \dfrac{P(R-\delta)}{2R} S$

5.11. Работу сил, приложенных к механической системе, при перемещении S груза 1.

Варианты ответов:

1. $A = \dfrac{P}{R}(2R-\delta) \cdot S$ 2. $A = \dfrac{P}{R}(R+\delta) \cdot S$

3. $A = \dfrac{P}{R}(R-\delta) \cdot S$ 4. $A = \dfrac{2P}{R}(R-\delta) \cdot S$

5.12. Работу сил, приложенных к грузу, за время t.

Варианты ответов:

1. $A_1 = \dfrac{P \cdot g(R-\delta)^2}{4R^2} \cdot t^2$ 2. $A_1 = \dfrac{P \cdot g(R-\delta)^2}{8R^2} \cdot t^2$

3. $A_1 = \dfrac{P \cdot g(R-\delta)^2}{2R^2} \cdot t^2$ 4. $A_1 = \dfrac{P \cdot g(R+\delta)^2}{4R^2} \cdot t^2$

5.13. Работу сил, приложенных к катку, за время t.

Варианты ответов:

1. $A_3 = \dfrac{P \cdot g}{4R^2}(R-\delta)^2 \cdot t^2$ 2. $A_3 = \dfrac{P \cdot g}{8R^2}(R-\delta)^2 \cdot t^2$

3. $A_3 = \dfrac{P \cdot g}{2R^2}(R-\delta)^2 \cdot t^2$ 4. $A_3 = \dfrac{P \cdot g}{4R^2}(R+\delta)^2 \cdot t^2$

5.14. Работу сил, приложенных к механической системе, за время *t*.

Варианты ответов:

1. $A = \dfrac{Pg}{4R^2}(R-\delta)^2 t^2$ 2. $A = \dfrac{Pg}{8R^2}(R-\delta)^2 t^2$

3. $A = \dfrac{Pg}{2R^2}(R-\delta)^2 t^2$ 4. $A = \dfrac{Pg}{4R^2}(R+\delta)^2 t^2$

5.15. Главный момент сил, приложенных к катку, относительно центра масс катка.

Варианты ответов:

1. $M_{C_3.} = \dfrac{P(R-\delta)}{2}$ 2. $M_{C_3} = \dfrac{P(R-\delta)}{4}$

3. $M_{C_3.} = \dfrac{P(R-3\delta)}{2}$ 4. $M_{C_3.} = \dfrac{P(R+\delta)}{2}$

5.16. Главный момент сил, приложенных к катку, относительно точки *P* сцепления катка с неподвижной поверхностью.

Варианты ответов:

1. $M_P = \dfrac{P(R-\delta)}{2}$ 2. $M_P = P(R-\delta)$

3. $M_P = P(R+\delta)$ 4. $M_P = P(R+3\delta)$

5.17. Мощность сил, приложенных к грузу 1.

Варианты ответов:

1. $N_1 = \dfrac{P \cdot g(R-\delta)^2}{4R} \cdot t$ 2. $N_1 = \dfrac{P \cdot g(R+\delta)^2}{4R} \cdot t$

3. $N_1 = \dfrac{P \cdot g(R-\delta)^2}{4R^2} \cdot t$ 4. $N_1 = \dfrac{P \cdot g(R-\delta)^2}{2R^2} \cdot t$

5.18. Мощность сил, приложенных к катку 3.

Варианты ответов:

1. $N_3 = \dfrac{P \cdot g \cdot (R-\delta)^2}{8R^2} \cdot t$ 2. $N_3 = \dfrac{P \cdot g \cdot (R-\delta)}{4R} \cdot t$

3. $N_3 = \dfrac{P \cdot g \cdot (R+\delta)}{4R} \cdot t$ 4. $N_3 = \dfrac{P \cdot g \cdot (R-\delta)^2}{4R^2} \cdot t$

5.19. Мощность сил, действующих на механическую систему.

Варианты ответов:

1. $N_3 = \dfrac{P \cdot g \cdot (R-\delta)^2}{4R^2} \cdot t$ 2. $N_3 = \dfrac{P \cdot g \cdot (R+\delta)^2}{4R^2} \cdot t$

3. $N_3 = \dfrac{P \cdot g \cdot (R-\delta)^2}{2R^2} \cdot t$ 4. $N_3 = \dfrac{P \cdot g \cdot (R+\delta)^2}{2R^2} \cdot t$

Решение:

5.1. Для определения главного вектора внешних сил, приложенных к грузу, катку или механической системе воспользуемся теоремой о движении центра масс.

Произведение массы механической системы на ускорение её центра масс равно векторной сумме всех внешних сил, действующих на систему, т.е. равно главному вектору внешних сил системы:

$$M\vec{a}_c = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^e \tag{79}$$

где – M масса механической системы; a_C – ускорение центра масс механической системы; $\sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^e$ - сумма всех внешних сил, действующих на механическую систему (главный вектор сил, действующих на механическую систему).

Величина главного вектора внешних сил, приложенных к грузу:

$$m_1 \cdot a_1 = R_1 \tag{80}$$

Подставив значения, получим:

$$R_1 = \frac{P}{g} \cdot \frac{g \cdot (R-\delta)}{2R} = \frac{P \cdot (R-\delta)}{2R} \tag{81}$$

Правильный ответ 2.

$$R_1 = \frac{P \cdot (R-\delta)}{2R}$$

5.2. Величина главного вектора внешних сил, приложенных к катку 3:

$$m_3 \cdot a_{C_3} = R_3 \tag{82}$$

Подставив значения, получим:

$$R_3 = \frac{2P}{g} \cdot \frac{g(R-\delta)}{4R} \tag{83}$$

Правильный ответ 1.

$$R_3 = P \cdot \frac{(R-\delta)}{2R}$$

5.3. Величину главного вектора внешних сил, приложенных к механической системе, определим через его проекции на оси координат:

$$R^* = \sqrt{R_x^{*2} + R_y^{*2}} \tag{84}$$

Проекция главного вектора внешних сил на координатную ось x:

$$R_x^* = R_3^* = P \cdot \frac{(R-\delta)}{2R} \tag{85}$$

Проекция главного вектора внешних сил на координатную ось y:

$$R_y^* = R_1^* = P \cdot \frac{(R-\delta)}{2R} \tag{86}$$

Величина главного вектора внешних сил, приложенных к механической системе:

$$R^* = \sqrt{\left(\frac{P}{2R}\cdot\left(R-\delta\right)\right)^2 + \left(\frac{P}{2R}\cdot\left(R-\delta\right)\right)^2} = \sqrt{2}\cdot\frac{P}{2R}\cdot(R-\delta) \tag{87}$$

Правильный ответ 1.

$$R^* = \sqrt{2}\cdot\frac{P}{2R}\cdot(R-\delta)$$

5.4 Импульсом силы за какой-либо промежуток времени называется интеграл вида:

$$\vec{S} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt \tag{88}$$

Определяем импульс сил, приложенных к грузу 1 за время *t* при нулевых начальных условиях:

$$S_1 = \int_0^t R_1^* dt = R_1^* \cdot t \Big|_0^t = \frac{P}{2R}(R-\delta)\cdot t \tag{89}$$

Правильный ответ 4.

$$S_1 = \frac{P}{2R}(R-\delta)\cdot t$$

5.5. Определяем импульс сил, приложенных к катку 3 за время *t* при нулевых начальных условиях:

$$S_3 = \int_0^t R_3^* dt = R_3^* \cdot t \Big|_0^t = \frac{P}{2R}(R-\delta)\cdot t \tag{90}$$

Правильный ответ 3.

$$S_3 = \frac{P}{2R}(R-\delta)\cdot t$$

5.6. Определяем импульс сил, действующих на механическую систему за время *t* при нулевых начальных условиях:

$$S = \int_0^t R^* \cdot dt = R^* \cdot t \qquad (91)$$

Подставив значения (формула 87), получим ответ 4:

$$S = \frac{\sqrt{2}\cdot P \cdot (R-\delta)\cdot t}{2R} \qquad (92)$$

5.7. Натяжение нити можно определить, воспользовавшись принципом Даламбера. «Если к фактически действующим на материальную точку активным силам $\vec{\mathrm{F}}$ и силам реакции связей $\vec{\mathrm{N}}$ добавить фиктивную силу инерции $\vec{\Phi}$, то полученная система сил будет уравновешенной и к ней можно применить уравнения статики»

$$\vec{F}^{\text{àêò.}} + \vec{N} + \vec{\Phi} = 0 \qquad (93)$$

где $\vec{F}^{\text{àêò.}}$ - активные силы (вес груза 1); $\vec{\Phi}_1$ - силы инерции груза 1, $\vec{N}$ - реакции связей (натяжение нити T_1).

Расчетная схема будет иметь вид, представленный на рисунке 4.

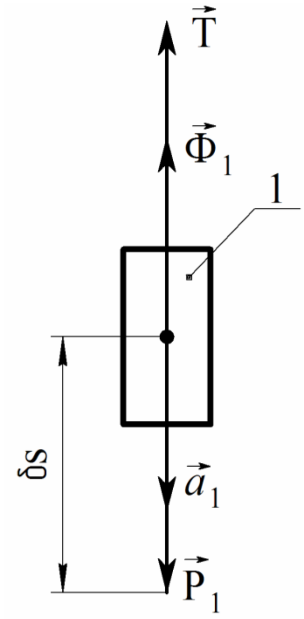


Рисунок 4

Получаем:

$$\vec{P}_1 - \vec{T}_{1-2} - \vec{\hat{O}}_1 = 0 \tag{94}$$

Силой инерции материальной точки называется векторная величина, равная по модулю произведению массы точки на её ускорение, и направленная противоположно вектору ускорения, $\vec{\Phi} = -m\vec{a}$.

Сила натяжения нити на участке между грузом и блоком:

$$T_{1-2} = P_1 - \hat{O}_1 \tag{95}$$

Подставим значения:

$$T_{1-2} = P_1 - m_1 a_1 = P - \frac{P}{g} a_1 \tag{96}$$

Учтем ранее определенное значение ускорения груза 1 (формула 20):

$$a_1 = \frac{g(R-\delta)}{2R}.$$

Получим:

$$T_{1-2} = P \cdot \left[1 - \frac{g \cdot (R-\delta)}{2Rg}\right] = \frac{P}{2R}(R+\delta) \tag{97}$$

Правильный ответ 2.

$$T_{1-2} = \frac{P}{2R}(R+\delta)$$

5.8. Определяем силу сцепления катка с неподвижной поверхностью.

На каток действуют силы: вес катка $\vec{P}_3$, нормальная реакция $\vec{N}_3$, сила натяжения нити $\vec{T}_{1-2}$, момент пары сил сопротивления качению и сила сцепления $\vec{F}_{ñö.}$

Силу сцепления направляем предположительно, как показано на рисунке 5.

Действительное направление этой силы установим в процессе решения задачи. Ось координат направляем по движению колеса.

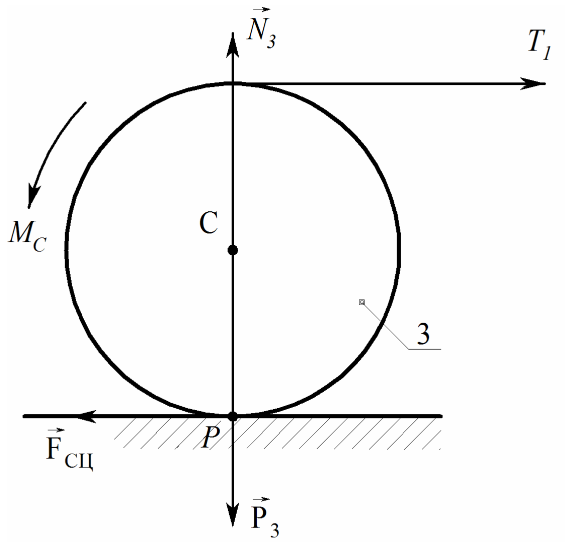


Рисунок 5.

Силу сцепления катка с неподвижной поверхностью определим, записав дифференциальное уравнение движения центра катка в проекции на ось x:

$$m_3 \cdot \ddot{x}_{C_3} = T_{1-2} - F_{ñö.} \tag{98}$$

Отсюда:

$$F_{ñö.} = T_{1-2} - m_3 \cdot \ddot{x}_{C_3} \tag{99}$$

Учитываем параметры системы (массу катка, ускорение центра катка, силу натяжения нити), определенные выше (формулы 21, 97):

$$a_{C_3} = \frac{g(R-\delta)}{4R}.$$

$$T_{1-2} = \frac{P}{2R}(R+\delta)$$

$$m_3 = 2\frac{P}{g}$$

Получаем:

$$F_{ñö.} = \frac{P}{2R}(R+\delta) - \frac{2P}{g} \cdot \frac{g(R-\delta)}{4R}. \tag{100}$$

Преобразовав, получим:

$$F_{\tilde{n}\ddot{o}.} = \frac{P}{R} \cdot \delta \qquad (101)$$

Правильный ответ 4.

5.9. Определяем работу внешних сил, затраченную на перемещение *S* груза 1.

Элементарная работа силы – это скалярное произведение силы на элементарное перемещение, т.е. произведение модуля силы на элементарное перемещение и на косинус угла между ними, т.е.

$$dA(\vec{F}) = \left|\vec{F}\right| \left|d\vec{r}\right| \cos(\vec{F} \wedge d\vec{r}) \qquad (102)$$

Работа силы на конечном перемещении определяется интегрированием по траектории:

$$A(\vec{F}) = \int_0^S \vec{F} \cdot d\vec{r} \qquad (103)$$

Определяем работу сил, приложенных к грузу при его перемещении на величину S, учитывая, что работа силы тяжести положительная при перемещении груза вниз (направление силы тяжести и перемещения совпадают).

Работу сил, приложенных к грузу, определим через главный вектор внешних сил, действующих на груз.

$$A_1 = R \cdot S \qquad (104)$$

Используя формулу (81), получим:

$$A_1 = \frac{P \cdot (R - \delta)}{2R} \cdot S \qquad (105)$$

Правильный ответ 4.

$$A_1 = \frac{P(R - \delta)}{2R} \cdot S$$

Работу сил, приложенных к грузу, можно также определить как работу силы веса груза и работу натяжения нити T_1 (рисунок 4).

$$A_1 = A(P_1) + A(T_1) \tag{106}$$

$$A_1 = P_1 \cdot S - T_1 \cdot S \tag{107}$$

Подставив значения, получим тот же результат:

$$A_1 = P \cdot S - \frac{P}{2R}(R+\delta) \cdot S = \frac{P(R-\delta)}{2R} \cdot S \tag{108}$$

5.10. Определяем работу, затраченную на качение катка 2 при перемещении *S* груза 1.

Работу, затраченную на качение катка при перемещении *S*, груза 1, определим через главный вектор внешних сил, приложенных к катку.

$$A_3 = R_3 \cdot S \tag{109}$$

Используя формулу (83), получим:

$$A_3 = P \cdot \frac{(R-\delta)}{2R} \cdot S \tag{110}$$

Правильный ответ 3.

Работу сил, приложенных к катку, можно также определить как работу силы веса катка, работу натяжения нити T_1, работу момента трения качения и работу силы сцепления катка с неподвижной плоскостью (рисунок 5).

$$A_3 = A(P_3) + A(M_3) + A(T_1) + A(F_{ñö.}) \tag{111}$$

Используем расчетную схему, представленную на рисунке 5.

Работа силы веса катка 3 равна нулю, т.к. между направлением силы тяжести и перемещением центра масс катка угол 90^0.

$$A(P_3) = 0 \tag{112}$$

Работа момента трения качения катка 3 определяется по формуле:

$$A(M_3) = N \cdot \delta \cdot \delta\varphi_3 \tag{113}$$

учитывая, что:

$$\delta\varphi_3 = \frac{\delta S}{2R} \tag{114}$$

$$N = 2P \qquad (115)$$

получим:

$$A(M_3) = \frac{\delta \cdot 2P \cdot \delta S}{2R} = \frac{\delta \cdot P}{R} S \qquad (116)$$

Работа, сил натяжения нити, определяется по формуле:

$$A(T_{1-2}) = T_{1-2} \cdot 2R \cdot \delta\varphi_3 \qquad (117)$$

Подставив (96) и (113) в (110), получим:

$$A(T_{1-2}) = \frac{P}{2R}(R+\delta) \cdot 2R \cdot \frac{S}{2R} = \frac{P}{2R}(R+\delta) \cdot S \qquad (118)$$

Работа силы сцепления катка с неподвижной плоскостью будет равна нулю, так как момент всех сил записываем относительно точки касания катка с неподвижной плоскостью *P*.

Подставив значения (116) и (118) в уравнение (111), получим:

$$A_3 = \frac{P}{2R}(R+\delta) \cdot S - \frac{P \cdot \delta}{R} \cdot S = P \cdot \frac{(R-\delta)}{2R} \cdot S \qquad (119)$$

Получили тот же результат:

$$A_3 = P \cdot \frac{(R-\delta)}{2R} \cdot S$$

5.11. Определяем работу внешних сил, приложенных к механической системе, при перемещении *S* груза 1.

Работа будет складываться из работы силы тяжести груза 1 и работы момента сил трения качения 3.

$$\sum A = A(\vec{P}_1) + A(M_3) \qquad (120)$$

$$A = P \cdot S - \frac{\delta \cdot P}{R} \cdot S = S \cdot (P - \frac{\delta \cdot P}{R}) = \frac{P}{R}(R-\delta) \cdot S \qquad (121)$$

Правильный ответ 3.

$$A = \frac{P}{R}(R-\delta) \cdot S$$

5.12. Определяем работу сил, приложенных к грузу, за время *t*.

Для определения работы сил, приложенных к грузу, катку и механической системе за время *t* воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии в интегральной форме, учитывая, что система неизменяемая. Для неизменяемых систем сумма работ внутренних сил равна нулю и внутренние силы в теорему не входят.

Изменение кинетической энергии при перемещении механической системы из одного положения в другое равно алгебраической сумме работ всех внешних сил, действующих на систему на этом перемещении.

$$T - T_0 = \sum_{k=1}^{n} A(\vec{F}_k^e) \tag{122}$$

Так как система движется из состояния покоя, то T_0=0.

Кинетическая энергия груза определяется по формуле (64), а это значит, что работа сил, приложенных к грузу за время *t*, будет равна кинетической энергии груза и будет определяться по формуле:

$$A_1 = \frac{P \cdot g(R-\delta)^2}{8R^2} \cdot t^2 \tag{123}$$

Правильный ответ 2.

5.13. Определяем работу сил, приложенных к катку, за время *t*.

Рассуждаем аналогично пункту 5.12., получаем, что работа сил, приложенных к катку за время *t*, будет равна кинетической энергии катка и будет определяться по формуле (68):

$$A_3 = \frac{P \cdot g}{8R^2}(R-\delta)^2 \cdot t^2 \tag{124}$$

Правильный ответ 2.

5.14. Определяем работу сил, приложенных к механической системе, за время *t*, которая будет равна кинетической энергии механической системы, определяемой формулой (69). Получаем:

$$A = \frac{Pg}{4R^2}(R-\delta)^2 t^2 \tag{125}$$

Правильный ответ 1.

5.15. Для определения главного момента сил, приложенных к катку, относительно центра масс катка записываем дифференциальное уравнение вращательного движения катка:

$$I_{C_3} \cdot \ddot{\varphi}_3 = \sum_{\nu=1}^{n} M_C(\vec{F}_\nu) \tag{126}$$

Момент инерции катка относительно его центра масс определяется формулой (7):

$$I_{C_3} = \frac{2P}{g} R^2;$$

Угловое ускорение катка в соответствии с формулой (19):

$$\varepsilon_3 = \frac{g(R-\delta)}{4R^2}$$

Учитывая, что левая часть уравнения известна, получим:

$$M_{C_3.} = \sum_{\nu=1}^{n} M_C(\vec{F}_\nu) = \frac{2P \cdot R^2}{g} \cdot \frac{g(R-\delta)}{4R^2} = \frac{P(R-\delta)}{2} \tag{127}$$

Таким образом, правильный ответ 1.

$$M_{C_3} = \frac{P(R-\delta)}{2}$$

Рассуждаем аналогично пункту 4. Учитываем, что момент инерции катка относительно точки соприкосновения катка и плоскости необходимо вычислять по теореме Гюйгенса – Штейнера.

«Момент инерции механической системы (тела) относительно произвольной оси z' равен моменту инерции этого тела относительно параллельной оси, проходящей через центр масс, и величины, равной произведению массы этой системы (тела) на квадрат расстояния (d) между осями».

Момент инерции катка относительно точки *P*:

$$I_{C_3} = \frac{2P}{g}R^2 + \frac{2P}{g}R^2 = \frac{4P}{g}R^2 \qquad (128)$$

Тогда:

$$I_P \cdot \ddot{\varphi}_3 = \sum_{\nu=1}^{n} M_P(\vec{F}_\nu) \qquad (129)$$

или:

$$M_P = \frac{4P \cdot R^2}{g} \cdot \frac{g(R-\delta)}{4R^2} = P(R-\delta) \qquad (130)$$

Правильный ответ 2.

$$M_P = P(R-\delta)$$

5.17. Мощностью силы при поступательном движении называется скалярное произведение вектора силы на вектор скорости точки приложения силы:

$$N = \vec{F} \cdot \vec{\upsilon} = F \cdot \upsilon \cdot \cos(\vec{F} \hat{\ } \vec{\upsilon}) \qquad (131)$$

Мощность силы при вращательном движении равна произведению вращающего момента на угловую скорость:

$$N = M \cdot \omega \qquad (132)$$

Определяем мощность сил, приложенных к грузу:

$$N_1 = R_1 \cdot \upsilon_1 \qquad (133)$$

Подставив значения, получим:

$$N_1 = \frac{P \cdot (R-\delta)}{2R} \cdot \frac{g \cdot (R-\delta)}{2R} t \qquad (134)$$

Правильный ответ 3.

$$N_1 = \frac{P \cdot g(R-\delta)^2}{4R^2} \cdot t$$

5.18. Определяем мощность сил приложенных к катку. Каток совершает плоскопараллельное движение, поэтому его мощность будет складываться из мощности, затраченной на перемещение центра масс катка, и мощности, затраченной на качение катка относительно неподвижной плоскости, то есть:

$$N_3 = N_3^{\text{ïîñò.}} + N_3^{\text{âð.}} = R_3 \cdot \upsilon_{C_3} + M_{C_3} \cdot \omega \tag{135}$$

где R_3 главный вектор внешних сил, приложенных к катку; M_{C_3} - главный момент внешних сил, вычисленный относительно центра масс катка.

Подставив значения, получим:

$$N_3^{\text{ïîñò.}} = \frac{P}{2R}(R-\delta) \cdot \frac{g \cdot (R-\delta)}{4R} t \tag{136}$$

Преобразовав, получим:

$$N_3^{\text{ïîñò.}} = \frac{P \cdot g(R-\delta)^2}{8R^2} t \tag{137}$$

$$N_3^{\text{âð.}} = \frac{P}{2}(R-\delta) \cdot \frac{g \cdot (R-\delta)}{4R^2} t \tag{138}$$

Преобразовав, последнее выражение получим:

$$N_3^{\text{âð.}} = \frac{P \cdot g(R-\delta)^2}{8R^2} t \tag{139}$$

Таким образом, подставив формулы (136) и (139) в формулу (135) определим мощность сил приложенных к катку:

$$N_3 = \frac{P \cdot g(R-\delta)^2}{8R^2} \cdot t + \frac{P \cdot g(R-\delta)^2}{8R^2} \cdot t = \frac{P \cdot g(R-\delta)^2}{4R^2} \cdot t \tag{140}$$

Правильный ответ 4.

5.19. Определяем мощность сил, приложенных к механической системе.

$$N = N_1 + N_3 \tag{141}$$

Подставив (134) и (140) в формулу (141), получим:

$$N = \frac{P \cdot g \cdot (R-\delta)^2}{4R^2} \cdot t + \frac{P \cdot g \cdot (R-\delta)^2}{4R^2} \cdot t = \frac{P \cdot g \cdot (R-\delta)^2}{2R^2} \cdot t \tag{142}$$

Правильный ответ 3.

Мощность можно также определить как скорость изменения работы.

$$N = \frac{dA}{dt} \tag{143}$$

где - A рассматривается как функция времени, которая представляет собой работу силы F за единицу времени.

Работа сил, приложенных к грузу 1, катку 3 и механической системе за время t определяется формулами (123), (124), (125). Продифференцировав эти выражения по времени, получим:

$$N_1 = \frac{dA_1}{dt} = \frac{d(\frac{P \cdot g(R-\delta)^2}{8R^2} \cdot t^2)}{dt} = \frac{P \cdot g(R-\delta)^2}{4R^2} \cdot t \tag{144}$$

$$N_3 = \frac{dA_3}{dt} = \frac{d(\frac{P \cdot g(R-\delta)^2}{8R^2} \cdot t^2)}{dt} = \frac{P \cdot g(R-\delta)^2}{4R^2} \cdot t \tag{145}$$

$$N = \frac{dA}{dt} = \frac{d(\frac{P \cdot g(R-\delta)^2}{4R^2} \cdot t^2)}{dt} = \frac{P \cdot g(R-\delta)^2}{2R^2} \cdot t \tag{146}$$

Получили такие же выражения, как и рассмотренные выше.

2.6. Определение кинематических характеристик центра масс механической системы

Определить:

6.1. Скорость центра масс системы.

Варианты ответов:

1. $|\upsilon_c| = \frac{\sqrt{2} \cdot g \cdot (R-\delta)}{4R} \cdot t$

2. $|\upsilon_c| = \frac{\sqrt{2} \cdot g \cdot (R-\delta)}{6R} \cdot t$

3. $|\upsilon_c| = \frac{3g \cdot (R-\delta)}{4R} \cdot t$

4. $|\upsilon_c| = \frac{g \cdot (R-\delta)}{6R} \cdot t$

Решение:

Количество движения механической системы равно произведению массы механической системы на вектор скорости ее центра масс.

Модуль количества движения механической системы:

$$Q = M \cdot \upsilon_{\tilde{N}} \tag{147}$$

Отсюда:

$$|\upsilon_c| = \frac{|Q|}{M} \tag{148}$$

где M – масса механической системы.

$$M = \frac{P}{g} + \frac{2P}{g} = \frac{3P}{g} \tag{149}$$

Подставив вышеопределенное количество механической системы (78), получим скорость центра масс механической системы:

$$|\upsilon_c| = \frac{P\sqrt{2} \cdot g \cdot (R-\delta)}{2R \cdot 3P} \cdot t = \frac{\sqrt{2} \cdot g \cdot (R-\delta)}{6R} \cdot t \tag{150}$$

$$|\upsilon_c| = \frac{\sqrt{2} \cdot g \cdot (R-\delta)}{6R} \cdot t \tag{151}$$

Правильный ответ 2.

6.2. Ускорение центра масс механической системы.

Варианты ответов:

1. $a_c = \dfrac{g \cdot (R-\delta)}{3R}$
2. $a_c = \dfrac{g \cdot (R-\delta)}{6R}$
3. $a_c = \dfrac{\sqrt{2} \cdot g \cdot (R-\delta)}{6R}$
4. $a_c = \dfrac{g \cdot (R+\delta)}{2R}$

Решение:

По определению ускорения – первая производная по времени от вектора скорости, получим:

$$a_c = \frac{d\upsilon_c}{dt} \tag{152}$$

Скорость центра масс системы определяется формулой 151, поэтому, дифференцируя, получим:

$$a_c = \frac{\sqrt{2} \cdot g \cdot (R - \delta)}{6R} \tag{153}$$

Ускорение центра масс механической системы можно также определить, воспользовавшись теоремой о движении центра масс и формулой (70).

$$M\vec{a}_c = \sum_{\nu=1}^{n} \vec{F}_\nu^e \tag{154}$$

где справа стоит главный вектор внешних сил, который был определен выше (формула 87); M – масса механической системы. Получим:

$$a_C = \frac{R}{M} = \sqrt{2} \cdot \frac{P \cdot g}{2R \cdot 3P} \cdot (R - \delta) = \frac{\sqrt{2} \cdot g \cdot (R - \delta)}{6R} \tag{155}$$

Правильный ответ 3.

6.3. Угловую скорость катка в функции от перемещения S груза 1.

Варианты ответов:

1. $\omega = \frac{\sqrt{2g \cdot S}}{2R}$
2. $\omega = \frac{1}{2R}\sqrt{\frac{g \cdot (R - \delta) \cdot S}{R}}$
3. $\omega = \frac{\sqrt{2gS}}{R}$
4. $\omega = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{g \cdot (R - \delta) \cdot S}{R}}$

Решение:

Для определения угловой скорости катка воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии в интегральной форме, учитывая, что система неизменяемая.

Кинетическую энергию механической системы определяем в соответствии с формулой (33). Получим:

$$T = \frac{P \cdot \upsilon^2}{g} \tag{156}$$

Угловая скорость катка и линейная скорость груза связаны соотношением (29), откуда:

$$\upsilon = 2\omega \cdot R \tag{157}$$

Подставив (157) в (156) получаем кинетическую энергию механической системы:

$$T = \frac{4P}{g} \cdot R^2 \cdot \omega^2 \tag{158}$$

Работа всех внешних сил, приложенных к механической системе, определяется формулой (121):

$$A = \frac{P}{R}(R - \delta) \cdot S$$

Приравнивая, получим:

$$\frac{4P}{g} \cdot R^2 \cdot \omega^2 = \frac{P}{R}(R - \delta) \cdot S \tag{159}$$

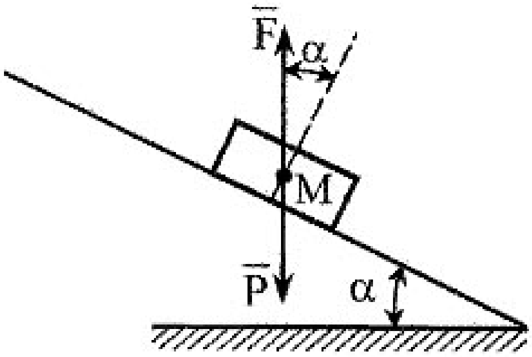
Отсюда:

$$\omega = \frac{1}{2R}\sqrt{\frac{g \cdot (R - \delta) \cdot S}{R}} \tag{160}$$

Правильный ответ 2.

ТЕСТЫ ПО ТЕМЕ «ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ»

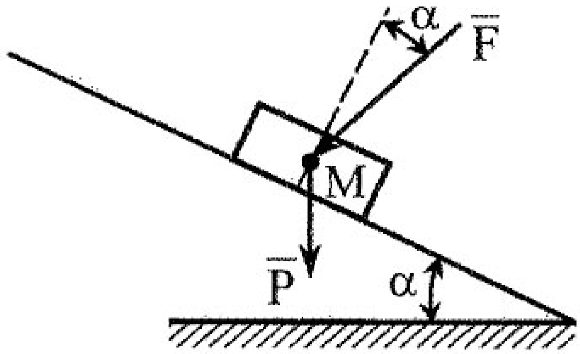
КАРТА 1



Материальная точка M весом P = mg движется вниз по наклонной плоскости из состояния покоя. На точку действует сила F = 0,5mg. Коэффициент трения скольжения равен *f*.

№ п/п	ОПРЕДЕЛИТЬ:		ВАРИАНТЫ ОТВЕТА:
1	УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ	1	$\ddot{x}$ = g(sinα + fcosα)/2
		2	$\ddot{x}$ = g(sinα - fcosα)/2
		3	$\ddot{x}$ = g(fcosα - sinα)/4
		4	$\ddot{x}$ = g(sinα - fcosα)
2	ЗАКОН ИЗМЕНЕНИЯ СКОРОСТИ ТОЧКИ	1	$\dot{x}$ = gt(sinα + fcosα)/2
		2	$\dot{x}$ = gt(sinα - fcosα)
		3	$\dot{x}$ = gt(sinα - fcosα)/2
		4	$\dot{x}$ = gt(fcosα - sinα)/2
3	ЗАКОН ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ВРЕМЕНИ	1	x = gt^2(sinα - fcosα)/4
		2	x = gt^2(fcosα - sinα)/4
		3	x = gt^2(sinα - fcosα)/2
		4	x = gt^2(sinα + fcosα)/4
4	КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ ТОЧКИ В ФУНКЦИИ ОТ ВРЕМЕНИ	1	T= Pgt^2(sinα - fcosα)^2/8
		2	T= Pgt^2(fcosα - sinα)^2/4
		3	T= Pgt^2(sinα + fcosα)^2/8
		4	T= Pgt^2(sinα - fcosα)/4
5	КОЛИЧЕСТВО ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ	1	Q = Pt(sinα + fcosα)/2
		2	Q = Pt(sinα - fcosα)/2
		3	Q = Pt(fcosα - sinα)/2
		4	Q = Pt(sinα - fcosα)/4
6	ГЛАВНЫЙ ВЕКТОР СИЛ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА ТОЧКУ	1	R= P(fcosα - sinα)/2
		2	R= P(sinα - fcosα)
		3	R= P(sinα + fcosα)/2
		4	R= P(sinα - fcosα)/2

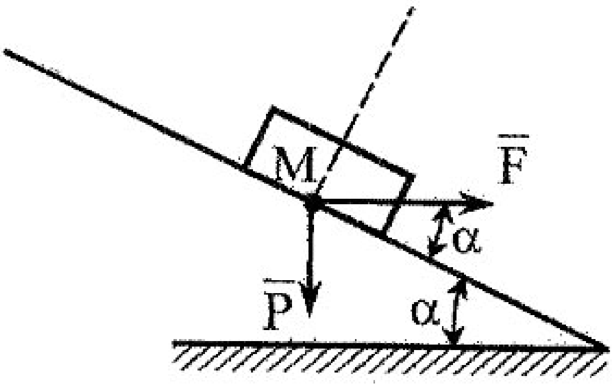
КАРТА 2



Материальная точка M весом P = mg движется вниз по наклонной плоскости из состояния покоя. На точку действует сила F = 0,5mg. Коэффициент трения скольжения равен *f*.

№ п/п	ОПРЕДЕЛИТЬ:		ВАРИАНТЫ ОТВЕТА:
1	УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ	1	$\ddot{x}$ = g(sinα + 3fcosα)
		2	$\ddot{x}$ = 0,5g(3sinα - fcosα)
		3	$\ddot{x}$ = 0,5g(sinα - 3fcosα)
		4	$\ddot{x}$ = g(3sinα + fcosα)
2	ЗАКОН ИЗМЕНЕНИЯ СКОРОСТИ ТОЧКИ	1	$\dot{x}$ = 0,5gt(sinα - 3fcosα)
		2	$\dot{x}$ = gt(3sinα + fcosα)
		3	$\dot{x}$ = 0,5gt(3sinα - fcosα)
		4	$\dot{x}$ = gt(sinα + fcosα)
3	ЗАКОН ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ	1	x = 0,5gt^2(3sinα + fcosα)
		2	x = 0,25gt^2(3sinα - fcosα)
		3	x = 0,25gt^2(sinα - 3fcosα)
		4	x = 0,5gt^2(sinα + 3fcosα)
4	КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ ТОЧКИ В ФУНКЦИИ ОТ ВРЕМЕНИ	1	T= Pgt^2(sinα - 3fcosα)^2/8
		2	T= Pgt^2(3sinα + fcosα)^2/4
		3	T= Pgt^2(3sinα - fcosα)^2/8
		4	T= Pgt^2(sinα + 3fcosα)^2/2
5	КОЛИЧЕСТВО ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ	1	Q = Pt(sinα – 3fcosα)/2
		2	Q = Pt(3sinα + fcosα)
		3	Q = Pt(3sinα - fcosα)/2
		4	Q = Pt(sinα + 3fcosα)
6	ГЛАВНЫЙ ВЕКТОР СИЛ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА ТОЧКУ	1	R= P(sinα + 3fcosα)
		2	R= P(3sinα - fcosα)/2
		3	R= P(sinα - 3fcosα)/2
		4	R= P(3sinα + fcosα)

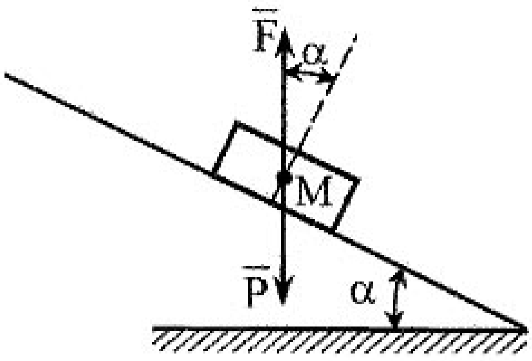
КАРТА 3



Материальная точка М весом P = mg движется вниз по наклонной плоскости из состояния покоя. На точку действует сила F = mg. Коэффициент трения скольжения равен *f*.

№ п/п	ОПРЕДЕЛИТЬ:		ВАРИАНТЫ ОТВЕТА:
1	УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ	1	$\ddot{x}$ = g[(cosα + sinα) - f(cosα - sinα)]
		2	$\ddot{x}$ = g[(cosα + sinα) + f(cosα - sinα)]
		3	$\ddot{x}$ = g[(cosα - sinα) - f(cosα + sinα)]
		4	$\ddot{x}$ = g[(cosα - sinα) + f(cosα + sinα)]
2	ЗАКОН ИЗМЕНЕНИЯ СКОРОСТИ ТОЧКИ	1	$\dot{x}$ = gt[(cosα + sinα) + f(cosα - sinα)]
		2	$\dot{x}$ = gt[(cosα - sinα) - f(cosα + sinα)]
		3	$\dot{x}$ = gt[(cosα - sinα) + f(cosα + sinα)]
		4	$\dot{x}$ = gt[(cosα + sinα) - f(cosα - sinα)]
3	ЗАКОН ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ	1	x = 0,5gt^2[(cosα + sinα) - f(cosα - sinα)]
		2	x = 0,25gt^2[(cosα - sinα) + f(cosα + sinα)]
		3	x = 0,5gt^2[(cosα - sinα) + f(cosα + sinα)]
		4	x = gt^2[(cosα - sinα) - f(cosα + sinα)]
4	КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ ТОЧКИ В ФУНКЦИИ ОТ ВРЕМЕНИ	1	T= Pgt^2[(cosα + sinα) - f(cosα - sinα)]^2/2
		2	T= Pgt^2[(cosα - sinα) - f(cosα + sinα)]^2/2
		3	T= Pgt^2[(cosα - sinα) + f(cosα + sinα)]^2/2
		4	T= Pgt^2[(cosα + sinα) + f(cosα - sinα)]^2/2
5	КОЛИЧЕСТВО ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ	1	Q = Pt[(cosα + sinα) - f(cosα - sinα)]
		2	Q = Pt[(cosα + sinα) + f(cosα - sinα)]
		3	Q = Pt[(cosα - sinα) - f(cosα + sinα)]
		4	Q = Pt[(cosα - sinα) + f(cosα + sinα)]
6	ГЛАВНЫЙ ВЕКТОР СИЛ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА ТОЧКУ	1	R= P[(cosα + sinα) + f(cosα - sinα)]
		2	R= P[(cosα + sinα) - f(cosα - sinα)]
		3	R= P[(cosα - sinα) + f(cosα + sinα)]
		4	R= P[(cosα - sinα) - f(cosα + sinα)]

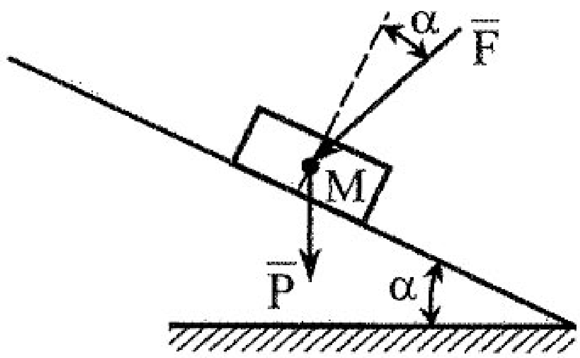
КАРТА 4



Материальная точка М весом Р = 5mg движется вниз по наклонной плоскости из состояния покоя. На точку действует сила F = 4mg. Коэффициент трения скольжения равен *f*.

№ п/п	ОПРЕДЕЛИТЬ:		ВАРИАНТЫ ОТВЕТА:
1	УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ	1	$\ddot{x}$ = g(sinα - fcosα)/5
		2	$\ddot{x}$ = g(fcosα - sinα)/5
		3	$\ddot{x}$ = g(sinα + fcosα)
		4	$\ddot{x}$ = g(fcosα - sinα) /2
2	ЗАКОН ИЗМЕНЕНИЯ СКОРОСТИ ТОЧКИ	1	$\dot{x}$ = gt(fcosα - sinα)/5
		2	$\dot{x}$ = gt(sinα - fcosα)/5
		3	$\dot{x}$ = 0,5gt(sinα + fcosα)
		4	$\dot{x}$ = gt(fcosα + sinα)
3	ЗАКОН ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ	1	x = gt^2(sinα - fcosα)/10
		2	x = gt^2(sinα + fcosα)/10
		3	x = 1,5gt^2(fcosα - sinα)
		4	x = gt^2(fcosα + sinα)
4	КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ ТОЧКИ В ФУНКЦИИ ОТ ВРЕМЕНИ	1	T= Pgt^2(sinα + fcosα)^2/10
		2	T= 5Pgt^2(fcosα - sinα)^2
		3	T= 5Pgt^2(fcosα - sinα)^2/2
		4	T= Pgt^2(sinα - fcosα)/10
5	КОЛИЧЕСТВО ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ	1	Q = Pt(fcosα - sinα)/2
		2	Q = Pt(sinα - fcosα)
		3	Q = 5Pt(sinα + fcosα)/2
		4	Q = 5Pt(fcosα + sinα)/4
6	ГЛАВНЫЙ ВЕКТОР СИЛ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА ТОЧКУ	1	R= P(sinα - fcosα)
		2	R= 3P(sinα + fcosα)
		3	R= 5P(fcosα + sinα)
		4	R= 5P(fcosα - sinα)

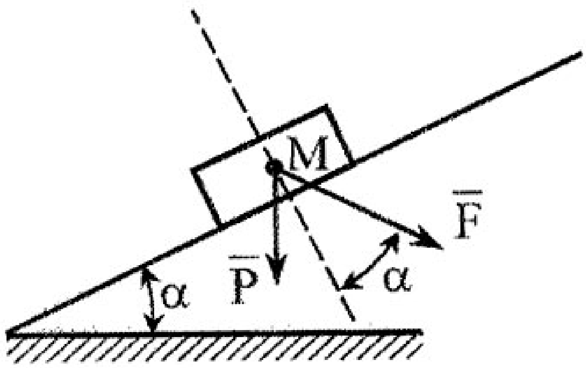
КАРТА 5



Материальная точка М весом Р = 2mg движется вниз по наклонной плоскости из состояния покоя. На точку действует сила F = mg. Коэффициент трения скольжения равен *f*.

№ п/п	ОПРЕДЕЛИТЬ:		ВАРИАНТЫ ОТВЕТА:
1	УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ	1	$\ddot{x}$ = 0,5g(3sinα - fcosα)
		2	$\ddot{x}$ = g(sinα - fcosα)
		3	$\ddot{x}$ = 0,5g(fcosα - 3sinα)
		4	$\ddot{x}$ = g(sinα - 3fcosα)/2
2	ЗАКОН ИЗМЕНЕНИЯ СКОРОСТИ ТОЧКИ	1	$\dot{x}$ = 0,5gt(sinα – fcosα)
		2	$\dot{x}$ = 0,5gt (3sinα - fcosα)
		3	$\dot{x}$ = gt(3sinα + fcosα)
		4	$\dot{x}$ = gt(sinα - 3fcosα)/2
3	ЗАКОН ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ	1	x = 0,25gt^2(sinα - fcosα)
		2	x = 0,25gt^2(3sinα + fcosα)
		3	x = 0,25gt^2(3sinα - fcosα)
		4	x = gt^2(sinα - 3fcosα)/4
4	КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ ТОЧКИ В ФУНКЦИИ ОТ ВРЕМЕНИ	1	T= 0,5Pgt^2(3sinα - fcosα)^2/2
		2	T= Pgt^2(sinα - fcosα)^2/2
		3	T= 0,25Pgt^2(fcosα - 3sinα)^2/2
		4	T= Pgt^2(sinα - 3fcosα)^2/4
5	КОЛИЧЕСТВО ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ	1	Q = Pt(sinα – fcosα)/2
		2	Q = 0,5Pt(3sinα - fcosα)
		3	Q = Pt(3sinα + fcosα)/2
		4	Q = Pt(sinα - 3fcosα)
6	ГЛАВНЫЙ ВЕКТОР СИЛ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА ТОЧКУ	1	R= P(sinα - fcosα)
		2	R= 0,5P(fcosα - 3sinα)
		3	R= 0,5P(3sinα - fcosα)
		4	R= P(sinα – 3fcosα)

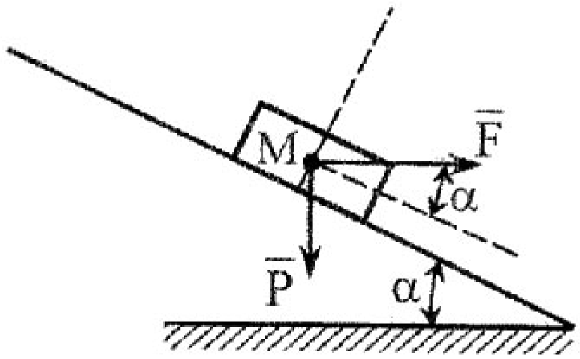
КАРТА 6



Материальная точка M весом P = mg движется вниз по наклонной плоскости из состояния покоя. На точку действует сила F = 0,5mg. Коэффициент трения скольжения равен *f*.

№ п/п	ОПРЕДЕЛИТЬ:		ВАРИАНТЫ ОТВЕТА:
1	УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ	1	$\ddot{x}$ = 0,5g(sinα - 3fcosα)
		2	$\ddot{x}$ = 0,5g(sinα + fcosα)
		3	$\ddot{x}$ = 0,5g(3sinα - fcosα)
		4	$\ddot{x}$ = 0,5g(3sinα + 3fcosα)
2	ЗАКОН ИЗМЕНЕНИЯ СКОРОСТИ ТОЧКИ	1	$\dot{x}$ = 0,5gt(sinα + 3fcosα)
		2	$\dot{x}$ = 0,5gt(sinα – 3fcosα)
		3	$\dot{x}$ = 0,5gt(3sinα + fcosα)
		4	$\dot{x}$ = 0,5gt(3sinα - fcosα)
3	ЗАКОН ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ	1	x = 0,5gt^2(3sinα - fcosα)
		2	x = 0,25gt^2(3sinα + fcosα)
		3	x = 0,25gt^2(sinα + 3fcosα)
		4	x = 0,25gt^2(sinα - 3fcosα)
4	КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ ТОЧКИ В ФУНКЦИИ ОТ ВРЕМЕНИ	1	T= Pgt^2(sinα - 3fcosα)^2/8
		2	T= Pgt^2(sinα + 3fcosα)^2/8
		3	T= Pgt^2(3sinα + fcosα)^2/4
		4	T= Pgt^2(3sinα - fcosα)^2/4
5	КОЛИЧЕСТВО ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ	1	Q = 0,5Pt(sinα – 3acosα)
		2	Q = 0,5Pt(sinα – 3fcosα)
		3	Q = 0,5Pt(sinα + 3fcosα)
		4	Q = 0,5Pt(3sinα – fcosα)
6	ГЛАВНЫЙ ВЕКТОР СИЛ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА ТОЧКУ	1	R= 0,5P(sinα – 3fcosα)
		2	R= 0,5P(sinα + 3fcosα)
		3	R= 0,5P(3sinα - fcosα)
		4	R= P(3sinα + fcosα)

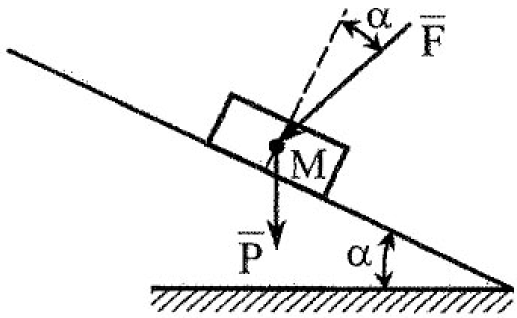
КАРТА 7



Материальная точка М весом Р = mg движется вниз по наклонной плоскости из состояния покоя. На точку действует сила F = 0,5mg. Коэффициент трения скольжения равен *f*.

№ п/п	ОПРЕДЕЛИТЬ:		ВАРИАНТЫ ОТВЕТА:
1	УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ	1	$\ddot{x}$ = 0,5g[f(sinα - 2cosα) - (2sinα - cosα)]
		2	$\ddot{x}$ = 0,5g[f(sinα + 2cosα) - (2sinα - cosα)]
		3	$\ddot{x}$ = 0,5g[f(sinα - 2cosα) + (2sinα + cosα)]
		4	$\ddot{x}$ = 0,5g[f(sinα + 2cosα) + (2sinα - cosα)]
2	ЗАКОН ИЗМЕНЕНИЯ СКОРОСТИ ТОЧКИ	1	$\dot{x}$ = 0,5gt[f(sinα + 2cosα) + (2sinα - cosα)]
		2	$\dot{x}$ = 0,5gt[f(sinα - 2cosα) - (2sinα - cosα)]
		3	$\dot{x}$ = 0,5gt[f(sinα + 2cosα) + (2sinα + cosα)]
		4	$\dot{x}$ = 0,5gt[f(sinα - 2cosα) + (2sinα + cosα)]
3	ЗАКОН ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ	1	x = 0,25gt^2[f(sinα - 2cosα) + (2sinα + cosα)]
		2	x = 0,25gt^2[f(sinα + 2cosα) + (2sinα + cosα)]
		3	x = 0,25gt^2[f(sinα + 2cosα) + (2sinα - cosα)]
		4	x = 0,25gt^2[f(sinα - 2cosα) - (2sinα - cosα)]
4	КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ ТОЧКИ В ФУНКЦИИ ОТ ВРЕМЕНИ	1	T= Pgt^2[f(sinα - 2cosα) + (2sinα + cosα)]^2/8
		2	T= Pgt^2[f(sinα + 2cosα) + (2sinα + cosα)]^2/8
		3	T= Pgt^2[f(sinα - 2cosα) - (2sinα + cosα)]^2/4
		4	T= Pgt^2[f(sinα - 2cosα) + (2sinα - cosα)]^2/4
5	КОЛИЧЕСТВО ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ	1	Q = 0,5Pt[f(sinα - 2cosα) + (2sinα - cosα)]
		2	Q = 0,5Pt[f(sinα + 2cosα) + (2sinα - cosα)]
		3	Q = 0,5Pt[f(sinα - 2cosα) + (2sinα + cosα)]
		4	Q = 0,5Pt[f(sinα - 2cosα) - (2sinα - cosα)]
6	ГЛАВНЫЙ ВЕКТОР СИЛ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА ТОЧКУ	1	R= 0,5P[f(sinα - 2cosα) + (2sinα + cosα)]
		2	R= 0,5P[f(sinα - 2cosα) - (2sinα - cosα)]
		3	R= 0,5P[f(sinα + 2cosα) + (2sinα - cosα)]
		4	R= 0,5P[f(sinα - 2cosα) + (2sinα - cosα)]

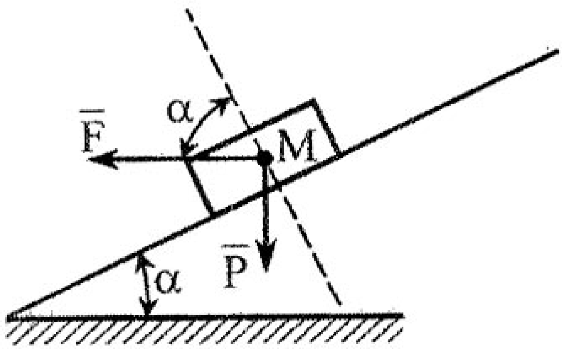
КАРТА 8



Материальная точка М весом Р = 3mg движется вниз по наклонной плоскости из состояния покоя. На точку действует сила F = mg. Коэффициент трения скольжения равен *f*.

№ п/п	ОПРЕДЕЛИТЬ:		ВАРИАНТЫ ОТВЕТА:
1	УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ	1	$\ddot{x}$ = 2g(sinα + 2fcosα)
		2	$\ddot{x}$ = 2g(sinα – 2fcosα)/3
		3	$\ddot{x}$ = 2g(sinα - fcosα)/3
		4	$\ddot{x}$ = 2g(sinα + fcosα)
2	ЗАКОН ИЗМЕНЕНИЯ СКОРОСТИ ТОЧКИ	1	$\dot{x}$ = 2gt(sinα + 2fcosα)/3
		2	$\dot{x}$ = 2gt(sinα - 2fcosα)/3
		3	$\dot{x}$ = 2gt(sinα – fcosα)
		4	$\dot{x}$ = 2gt(sinα + fcosα)
3	ЗАКОН ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ	1	x = 0,5gt^2(sinα – fcosα)
		2	x = gt^2(sinα -2fcosα)/3
		3	x = 0,5gt^2(sinα + 2fcosα)
		4	x = 0,5gt^2(sinα - 2fcosα)
4	КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ ТОЧКИ В ФУНКЦИИ ОТ ВРЕМЕНИ	1	T= 2Pgt^2(sinα - 2fcosα)^2/3
		2	T= 6Pgt^2(sinα - 2fcosα)^2
		3	T= Pgt^2(sinα - 2fcosα)^2/2
		4	T= Pgt^2(sinα +2fcosα)^2/2
5	КОЛИЧЕСТВО ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ	1	Q = Pt(sinα + 2fcosα)
		2	Q = 2Pt(sinα - 2fcosα)
		3	Q = 3Pt(sinα - fcosα)
		4	Q = 6Pt(sinα + 2fcosα)
6	ГЛАВНЫЙ ВЕКТОР СИЛ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА ТОЧКУ	1	R= P(sinα+ 2fcosα)
		2	R= 2P(sinα - 2fcosα)
		3	R= P(sinα - 3fcosα)
		4	R= P(sinα + 3fcosα)

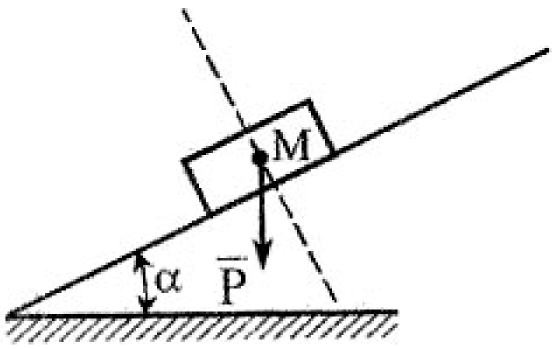
КАРТА 9



Материальная точка М весом P = mg движется вниз по наклонной плоскости из состояния покоя. На точку действует сила F = 0,5mg. Коэффициент трения скольжения равен *f*.

№ п/п	ОПРЕДЕЛИТЬ:		ВАРИАНТЫ ОТВЕТА:
1	УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ	1	$\ddot{x}$ = 0,5g(3sinα + fcosα)
		2	$\ddot{x}$ = 0,5g(sinα + 3fcosα)
		3	$\ddot{x}$ = 0,5g(3sinα - fcosα)
		4	$\ddot{x}$ = 0,5g(sinα – 3fcosα)
2	ЗАКОН ИЗМЕНЕНИЯ СКОРОСТИ ТОЧКИ	1	$\dot{x}$ = 0,5gt(sinα - 3fcosα)
		2	$\dot{x}$ = 0,5gt(3sinα - fcosα)
		3	$\dot{x}$ = 0,5gt(3sinα + fcosα)
		4	$\dot{x}$ = 0,5gt(sinα + 3fcosα)
3	ЗАКОН ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ	1	x = 0,25gt^2(3sinα - fcosα)
		2	x = 0,25gt^2(sinα + 3fcosα)
		3	x = 0,25gt^2(sinα - fcosα)
		4	x = 0,25gt^2(3sinα + fcosα)
4	КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ ТОЧКИ В ФУНКЦИИ ОТ ВРЕМЕНИ	1	T= Pgt^2(sinα - 3fcosα)^2/8
		2	T= Pgt^2(3sinα + fcosα)^2/8
		3	T= Pgt^2(3sinα - fcosα)^2/8
		4	T= Pgt^2(sinα + 3fcosα)^2/8
5	КОЛИЧЕСТВО ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ	1	Q = 0,5Pt(sinα + fcosα)
		2	Q = Pt(sinα + 3fcosα)
		3	Q = 0,5Pt(3sinα - fcosα)
		4	Q = Pt(sinα - 3fcosα)
6	ГЛАВНЫЙ ВЕКТОР СИЛ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА ТОЧКУ	1	R= 0,5P(3sinα - fcosα)
		2	R= 0,5P(sinα - 3fcosα)
		3	R= P(3sinα - fcosα)
		4	R= P(3sinα + fcosα)

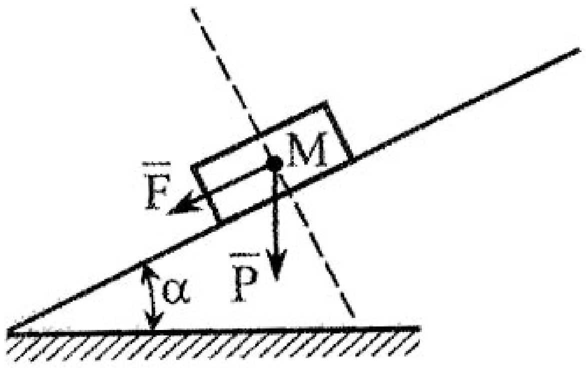
КАРТА 10



Материальная точка М весом P = mg движется вниз по наклонной плоскости из состояния покоя. Коэффициент трения скольжения равен *f*.

№ п/п	ОПРЕДЕЛИТЬ:		ВАРИАНТЫ ОТВЕТА:
1	УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ	1	$\ddot{x}$ = g(sinα + fcosα)
		2	$\ddot{x}$ = g(sinα - fcosα)
		3	$\ddot{x}$ = g(fsinα + cosα)
		4	$\ddot{x}$ = 0,5g(sinα – fcosα)
2	ЗАКОН ИЗМЕНЕНИЯ СКОРОСТИ ТОЧКИ	1	$\dot{x}$ = gt(fsinα + fcosα)
		2	$\dot{x}$ = gt(sinα - fcosα)
		3	$\dot{x}$ = gt(sinα + fcosα)
		4	$\dot{x}$ = 0,5gt(sinα - fcosα)
3	ЗАКОН ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ	1	x = 0,5gt^2(sinα - fcosα)
		2	x = 0,25gt^2(sinα - fcosα)
		3	x = 0,5gt^2(fsinα - cosα)
		4	x = 0,5gt^2(sinα + fcosα)
4	КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ ТОЧКИ В ФУНКЦИИ ОТ ВРЕМЕНИ	1	T= Pgt^2(cosα + fsinα)
		2	T= Pgt^2(cosα - fsinα)
		3	T= 0,5Pgt^2(sinα - fcosα)
		4	T= 0,5Pgt^2(sinα + fcosα)
5	КОЛИЧЕСТВО ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ	1	Q = Pt(sinα - fcosα)
		2	Q = Pt(fsinα + cosα)
		3	Q = Pt(sinα + fcosα)
		4	Q = Pt(fsinα – fcosα)
6	ГЛАВНЫЙ ВЕКТОР СИЛ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА ТОЧКУ	1	R= P(sinα + fcosα)
		2	R= P(sinα - fcosα)
		3	R= P(cosα – fsinα)
		4	R= P(fsinα + cosα)

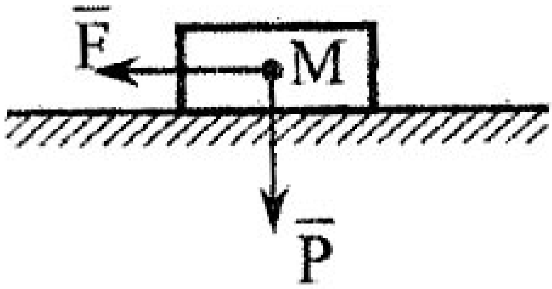
КАРТА 11



Материальная точка М весом Р = mg движется вниз по наклонной плоскости из состояния покоя. На точку действует сила F = mg. Коэффициент трения скольжения равен *f*.

№ п/п	ОПРЕДЕЛИТЬ:		ВАРИАНТЫ ОТВЕТА:
1	УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ	1	$\ddot{x}$ = g + g(sinα - fcosα)
		2	$\ddot{x}$ = g - g(sinα - fcosα)
		3	$\ddot{x}$ = g + g(sinα + fcosα)
		4	$\ddot{x}$ = g(sinα - fcosα)
2	ЗАКОН ИЗМЕНЕНИЯ СКОРОСТИ ТОЧКИ	1	$\dot{x}$ = gt + gt(sinα - fcosα)
		2	$\dot{x}$ = gt(sinα - fcosα)
		3	$\dot{x}$ = gt - gt(sinα – fcosα)
		4	$\dot{x}$ = gt + gt(sinα + fcosα)
3	ЗАКОН ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ	1	x = 0,5gt^2 - 0,5gt^2(sinα – fcosα)
		2	x = 0,5gt^2 + 0,5gt^2(sinα + fcosα)
		3	x = 0,5gt^2(sinα - fcosα)
		4	x = 0,5gt^2 + 0,5gt^2(sinα - fcosα)
4	КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ ТОЧКИ В ФУНКЦИИ ОТ ВРЕМЕНИ	1	T= 0,5P$[gt + gt(\sin\alpha - f\cos\alpha)]^2$/g
		2	T= 0,5Pg$t^2$$(\sin\alpha - f\cos\alpha)^2$
		3	T= 0,5Pg$[gt - gt(\sin\alpha - f\cos\alpha)]^2$/g
		4	T= 0,25P$[gt + gt(\sin\alpha - f\cos\alpha)]^2$/g
5	КОЛИЧЕСТВО ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ	1	Q = P[gt + gt(sinα - fcosα)]/g
		2	Q = 0,5Pt(sinα - fcosα)/g
		3	Q = P[gt - gt(sinα - fcosα)]/g
		4	Q = P[gt + gt(sinα + fcosα)]/g
6	ГЛАВНЫЙ ВЕКТОР СИЛ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА ТОЧКУ	1	R= P[1 + (sinα - fcosα)]
		2	R= P[1 - (sinα - fcosα)]
		3	R= P[1 + (sinα + fcosα)]
		4	R= P(sinα - fcosα)

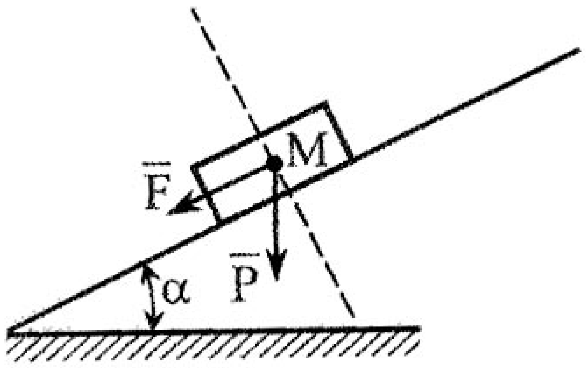
КАРТА 12



Материальная точка М весом P = mg движется по горизонтальной плоскости из состояния покоя. На точку действует сила F = mg. Коэффициент трения скольжения равен *f*.

№ п/п	ОПРЕДЕЛИТЬ:		ВАРИАНТЫ ОТВЕТА:
1	УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ	1	$\ddot{x}$ = g(1 + f)
		2	$\ddot{x}$ = g(f – 1)
		3	$\ddot{x}$ = -g(1 + f)
		4	$\ddot{x}$ = g(1 - f)
2	ЗАКОН ИЗМЕНЕНИЯ СКОРОСТИ ТОЧКИ	1	$\dot{x}$ = gt(1 + f)
		2	$\dot{x}$ = gt(f - 1)
		3	$\dot{x}$ = gt(1 - f)
		4	$\dot{x}$ = -g(1 + f)
3	ЗАКОН ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ	1	x = 0,5gt^2(1 - f)
		2	x = -0,5gt^2(1 - f)
		3	x = 0,5gt^2(g - f)
		4	x = 0,5gt^2(g + f)
4	КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ ТОЧКИ В ФУНКЦИИ ОТ ВРЕМЕНИ	1	T= 0,5Pgt^2(1 - f)^2
		2	T= 0,5Pgt^2(1 + f)^2
		3	T= Pgt^2(1 - f)^2
		4	T= Pgt^2(1 + f)^2
5	КОЛИЧЕСТВО ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ	1	Q = Pt(1 – f)
		2	Q = Pt(1 + f)
		3	Q = Pt(f – 1)
		4	Q = 0,5Pt(f – 1)
6	ГЛАВНЫЙ ВЕКТОР СИЛ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА ТОЧКУ	1	R= P(1 - f)
		2	R= P(f – 1)
		3	R= P(1 - f)
		4	R= 0,5P(f - 1)

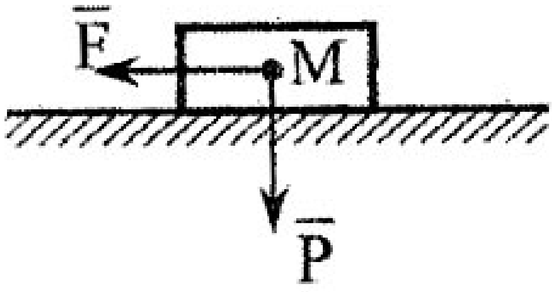
КАРТА 13



Материальная точка М весом Р = 2mg движется вниз по наклонной плоскости из состояния покоя. На точку действует сила F = mg. Коэффициент трения скольжения равен *f*.

№ п/п	ОПРЕДЕЛИТЬ:		ВАРИАНТЫ ОТВЕТА:
1	УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ	1	$\ddot{x}$ = 0,5g + g(sinα - fcosα)
		2	$\ddot{x}$ = g - 2g(sinα - fcosα)
		3	$\ddot{x}$ = g + g(sinα + fcosα)
		4	$\ddot{x}$ = g(sinα - fcosα)
2	ЗАКОН ИЗМЕНЕНИЯ СКОРОСТИ ТОЧКИ	1	$\dot{x}$ =0,5gt + gt(sinα - fcosα)
		2	$\dot{x}$ = gt(sinα - fcosα)
		3	$\dot{x}$ = gt -2 gt(sinα – fcosα)
		4	$\dot{x}$ = gt + gt(sinα + fcosα)
3	ЗАКОН ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ	1	x = 0,5gt^2 - 0,5gt^2(sinα – fcosα)
		2	x = 0,5gt^2 + gt^2(sinα + fcosα)
		3	x = 0,5gt^2(sinα - fcosα)
		4	x = 0,25gt^2 + 0,5gt^2(sinα - fcosα)
4	КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ ТОЧКИ В ФУНКЦИИ ОТ ВРЕМЕНИ	1	T= Pgt^2[0,5 + (sinα - fcosα)]^2
		2	T= 0,5Pgt^2(sinα - fcosα)^2
		3	T= 0,5Pg[t - t(sinα - fcosα)]^2
		4	T= 0,25Pg[t + t(sinα - fcosα)]^2
5	КОЛИЧЕСТВО ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ	1	Q = P[t + t(sinα - fcosα)]
		2	Q = 0,5Pt(sinα - fcosα)/g
		3	Q =2Pt[0,5+(sinα - fcosα)]
		4	Q = Pt[1 + (sinα + fcosα)]
6	ГЛАВНЫЙ ВЕКТОР СИЛ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА ТОЧКУ	1	R=2P[0,5 + (sinα - fcosα)]
		2	R= P[1 - (sinα - fcosα)]
		3	R= 2P[1 + (sinα + fcosα)]
		4	R= P(sinα - fcosα)

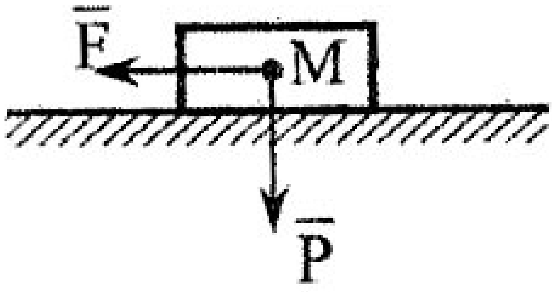
КАРТА 14



Материальная точка М весом Р = 2mg движется по горизонтальной плоскости из состояния покоя. На точку действует сила F = 2mg. Коэффициент трения скольжения равен *f*.

№ п/п	ОПРЕДЕЛИТЬ:		ВАРИАНТЫ ОТВЕТА:
1	УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ	1	$\ddot{x}$ = g(1 + f)
		2	$\ddot{x}$ = g(f – 1)
		3	$\ddot{x}$ = 2g(1 + f)
		4	$\ddot{x}$ = g(1 - f)
2	ЗАКОН ИЗМЕНЕНИЯ СКОРОСТИ ТОЧКИ	1	$\dot{x}$ = gt(1 + f)
		2	$\dot{x}$ = gt(f - 1)
		3	$\dot{x}$ = gt(1 - f)
		4	$\dot{x}$ = 2g(1 + f)
3	ЗАКОН ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ	1	x = gt^2(1 - f)
		2	x = 0,5gt^2(1 - f)
		3	x = 0,5gt^2(g - f)
		4	x = 0,5gt^2(g + f)
4	КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ ТОЧКИ В ФУНКЦИИ ОТ ВРЕМЕНИ	1	T= 4Pgt^2(1 - f)^2
		2	T= 4Pgt^2(1 + f)^2
		3	T= Pgt^2(1 - f)^2
		4	T= Pgt^2(1 + f)^2
5	КОЛИЧЕСТВО ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ	1	Q = 2Pt(1 – f)
		2	Q = 4Pt(1 + f)
		3	Q = Pt(f – 1)
		4	Q = 0,5Pt(f – 1)
6	ГЛАВНЫЙ ВЕКТОР СИЛ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА ТОЧКУ	1	R= 2P(1 - f)
		2	R= 4P(f – 1)
		3	R= P(1 - f)
		4	R= 0,5P(f - 1)

КАРТА 15

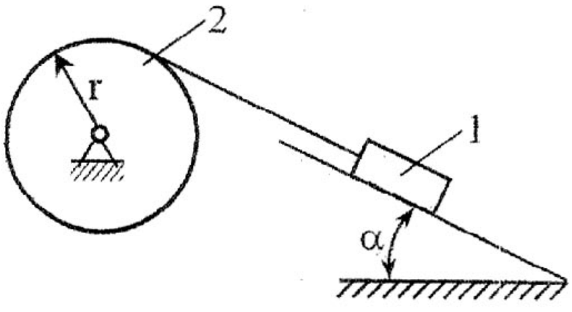


Материальная точка М весом Р = mg движется по горизонтальной плоскости из состояния покоя. На точку действует сила F = 2mg. Коэффициент трения скольжения равен *f*.

№ п/п	ОПРЕДЕЛИТЬ:		ВАРИАНТЫ ОТВЕТА:
1	УСКОРЕНИЕ ТОЧКИ	1	$\ddot{x}$ = g(1 + f)
		2	$\ddot{x}$ = g(f – 1)
		3	$\ddot{x}$ = -g(2 + f)
		4	$\ddot{x}$ = g(2 - f)
2	ЗАКОН ИЗМЕНЕНИЯ СКОРОСТИ ТОЧКИ	1	$\dot{x}$ = gt(1 + f)
		2	$\dot{x}$ = gt(f - 1)
		3	$\dot{x}$ = gt(2 - f)
		4	$\dot{x}$ = 2g(1 + f)
3	ЗАКОН ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ	1	$x = 0{,}5gt^2(2 - f)$
		2	$x = 0{,}25gt^2(2 - f)$
		3	$x = 0{,}5gt^2(g - f)$
		4	$x = 0{,}5gt^2(g + f)$
4	КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ ТОЧКИ В ФУНКЦИИ ОТ ВРЕМЕНИ	1	$T = 0{,}5Pgt^2(2 - f)^2$
		2	$T = 0{,}5Pgt^2(2 + f)^2$
		3	$T = Pgt^2(1 - f)^2$
		4	$T = Pgt^2(1 + f)^2$
5	КОЛИЧЕСТВО ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ	1	Q = Pt(2 – f)
		2	Q = Pt(2 + f)
		3	Q = Pt(f – 1)
		4	Q = 0,5Pt(f – 1)
6	ГЛАВНЫЙ ВЕКТОР СИЛ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА ТОЧКУ	1	R= P(2 - f)
		2	R= P(f – 2)
		3	R= P(1 - f)
		4	R= 0,5P(f - 1)

ТЕСТЫ ПО ТЕМЕ
«ДИНАМИКА МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ»

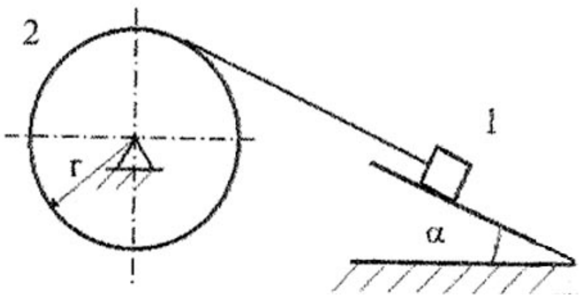
КАРТА 1



Груз 1 весом P посредством невесомой нерастяжимой нити приводит в движение блок 2 весом 2P радиуса r. Коэффициент трения скольжения груза 1 – f. Блок 2 - однородный цилиндр. Трением, на оси блока пренебречь. Угол наклона плоскости движения груза к горизонту - α. В начальный момент система находилась в состоянии покоя.

№ п/п	ОПРЕДЕЛИТЬ:		ВАРИАНТЫ ОТВЕТА:
1	УГЛОВУЮ СКОРОСТЬ БЛОКА	1	$\omega = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)/2rt$
		2	$\omega = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)t/2r$
		3	$\omega = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)t/r$
		4	$\omega = g(\cos\alpha - f\sin\alpha)t/2r$
2	КОЛИЧЕСТВО ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ	1	$Q = P(\cos\alpha - f\sin\alpha)t/2$
		2	$Q = 3P(\sin\alpha - f\cos\alpha)t/2$
		3	$Q = 3P(\sin\alpha - f\cos\alpha)t$
		4	$Q = P(\sin\alpha - f\cos\alpha)t/2$
3	ВЕРТИКАЛЬНУЮ СОСТАВЛЯЮЩУЮ ДАВЛЕНИЯ БЛОКА НА ОПОРУ О	1	$y_0 = 2P + P(\sin\alpha - f\cos\alpha)/2$
		2	$y_0 = 3P - P\cos^2\alpha$
		3	$y_0 = 2P + P(\sin\alpha - f\cos\alpha)\cos\alpha/2$
		4	$y_0 = 2P + P(\sin\alpha - f\cos\alpha)\sin\alpha/2$
4	ГЛАВНЫЙ МОМЕНТ СИЛ, ПРИЛОЖЕННЫХ К БЛОКУ ОТНОСИТЕЛЬНО ТОЧКИ О	1	$M_0 = Pr(\sin\alpha - f\cos\alpha)/2$
		2	$M_0 = Pr(\cos\alpha - f\sin\alpha)/2$
		3	$M_0 = 0$
		4	$M_0 = Pr(\sin\alpha - f\cos\alpha)$
5	КИНЕТИЧЕСКУЮ ЭНЕРГИЮ СИСТЕМЫ В ФУНКЦИИ ОТ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ S ГРУЗА ВДОЛЬ НАКЛОННОЙ ПЛОСКОСТИ	1	$T = PS(\cos\alpha - f\sin\alpha)$
		2	$T = PS(1 - f)$
		3	$T = PS(\sin\alpha - f\cos\alpha)$
		4	$T = 3PS(\sin\alpha - f\cos\alpha)/2$
6	РАБОТУ, ЗАТРАЧЕННУЮ НА ПЕРЕМЕЩЕНИЕ ГРУЗА S ВДОЛЬ НАКЛОННОЙ ПЛОСКОСТИ	1	$A_1 = PS(\sin\alpha - f\cos\alpha)$
		2	$A_1 = PS(\sin\alpha - f\cos\alpha)/2$
		3	$A_1 = PS\cos\alpha$
		4	$A_1 = PS(\cos\alpha - f\sin\alpha)/2$

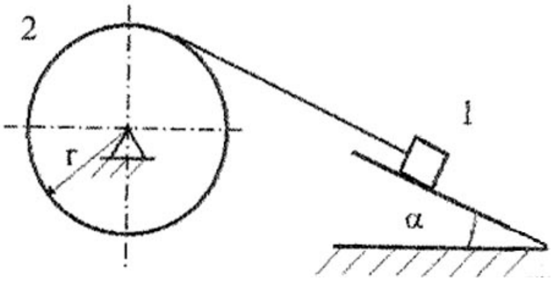
КАРТА 2



Груз 1 весом Р посредством невесомой нерастяжимой нити приводит в движение блок 2 весом 2Р радиуса r. Коэффициент трения скольжения груза 1 - f. Блок 2 - однородный цилиндр. Трением на оси блока пренебречь. Угол наклона плоскости, движения груза к горизонту - α. В начальный момент система находилась в состояния покоя.

№ п/п	ОПРЕДЕЛИТЬ:		ВАРИАНТЫ ОТВЕТА:
1	СКОРОСТЬ ГРУЗА	1	$v_1 = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)t/2$
		2	$v_1 = g(f\cos\alpha - \sin\alpha)t/2$
		3	$v_1 = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)t$
		4	$v_1 = g(\cos\alpha - f\sin\alpha)t/2$
2	УГЛОВОЕ УСКОРЕНИЕ БЛОКА	1	$\varepsilon = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)/r$
		2	$\varepsilon = g(\cos\alpha - f\sin\alpha)/2r$
		3	$\varepsilon = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)/2r$
		4	$\varepsilon = rg(\sin\alpha - f\cos\alpha)/2$
3	ГЛАВНЫЙ ВЕКТОР СИЛ, ПРИЛОЖЕННЫХ К ГРУЗУ	1	$R_1 = P(\sin\alpha - f\cos\alpha)/2$
		2	$R_1 = P(\cos\alpha - f\sin\alpha)/2$
		3	$R_1 = P(\sin\alpha - f\cos\alpha)$
		4	$R_1 = Pg(\sin\alpha - f\cos\alpha)/2$
4	НАТЯЖЕНИЕ НИТИ	1	$T_{1\text{-}2} = 2P(\sin\alpha - f\cos\alpha)$
		2	$T_{1\text{-}2} = P(\cos\alpha - f\sin\alpha)/2$
		3	$T_{1\text{-}2} = P(f\cos\alpha - in\alpha)$
		4	$T_{1\text{-}2} = P(\sin\alpha - f\cos\alpha)/2$
5	КИНЕТИЧЕСКИЙ МОМЕНТ СИСТЕМЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ ВРАЩЕНИЯ БЛОКА	1	$K_0 = Pr(\cos\alpha - f\sin\alpha)t$
		2	$K_0 = Pr(\sin\alpha - f\cos\alpha)t$
		3	$K_0 = Pr(\sin\alpha - f\cos\alpha)$
		4	$K_0 = 2Pr(\sin\alpha - f\cos\alpha)t$
6	КИНЕТИЧЕСКУЮ ЭНЕРГИЮ БЛОКА В ФУНКЦИИ ОТ ВРЕМЕНИ	1	$T_2 = Pg(\cos\alpha - f\sin\alpha)^2t^2/8$
		2	$T_2 = Pg(\sin\alpha - f\cos\alpha)^2t^2/4$
		3	$T_2 = Pg(\sin\alpha - f\cos\alpha)^2t^2/8$
		4	$T_2 = Pg(\sin\alpha - f)^2t^2/8$

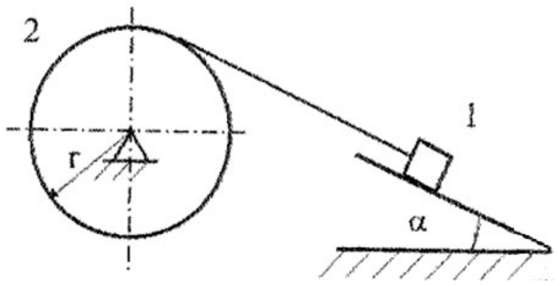
КАРТА 3



Груз 1 весом P посредством невесомой нерастяжимой нити приводит в движение блок 2 весом 2P радиуса r. Коэффициент трения скольжения груза 1 - f Блок 2 - однородный цилиндр. Трением на оси блока пренебречь. Угол наклона плоскости движения груза к горизонту - α. В начальный момент система находилась в состоянии покоя.

№ п/п	ОПРЕДЕЛИТЬ:		ВАРИАНТЫ ОТВЕТА:
1	УГЛОВОЕ УСКОРЕНИЕ БЛОКА	1	$\varepsilon = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)/r$
		2	$\varepsilon = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)/2r$
		3	$\varepsilon = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)/2$
		4	$\varepsilon = rg(\cos\alpha - f\sin\alpha)/2r$
2	УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ГРУЗА	1	$S = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)t^2/2$
		2	$S = g(\cos\alpha - f\sin\alpha)t^2/4$
		3	$S = g(f\cos\alpha - \sin\alpha)t/2$
		4	$S = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)t^2/4$
3	СКОРОСТЬ ЦЕНТРА МАСС СИСТЕМЫ	1	$v_c = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)t/6$
		2	$v_c = g(f\cos\alpha - \sin\alpha)t/2$
		3	$v_c = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)t$
		4	$v_c = g(\cos\alpha - f\sin\alpha)t/2$
4	ГЛАВНЫЙ ВЕКТОР СИЛ, ПРИЛОЖЕННЫХ К БЛОКУ	1	$R_2 = P(\cos\alpha - f\sin\alpha)$
		2	$R_2 = 0$
		3	$R_2 = P(\cos\alpha - f\sin\alpha)/2$
		4	$R_2 = 0{,}5P(\sin\alpha - f\cos\alpha)\cos\alpha$
5	ГЛАВНЫЙ МОМЕНТ СИЛ, ПРИЛОЖЕННЫХ К СИСТЕМЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ВРАЩЕНИЯ БЛОКА	1	$M_0 = Pr(\cos\alpha - f\sin\alpha)$
		2	$M_0 = Pr(\sin\alpha - f\cos\alpha)/2$
		3	$M_0 = 0$
		4	$M_0 = Pr(\sin\alpha - f\cos\alpha)$
6	РАБОТУ, ЗАТРАЧЕННУЮ НА ВРАЩЕНИЕ БЛОКА ПРИ ПЕРЕМЕЩЕНИИ ГРУЗА ВДОЛЬ НАКЛОННОЙ ПЛОСКОСТИ	1	$A_1 = PS(\sin\alpha - f\cos\alpha)/2$
		2	$A_1 = PS(\sin\alpha - f\cos\alpha)$
		3	$A_1 = PS(\sin\alpha - f)$
		4	$A_1 = PS(\cos\alpha - f\sin\alpha)/2$

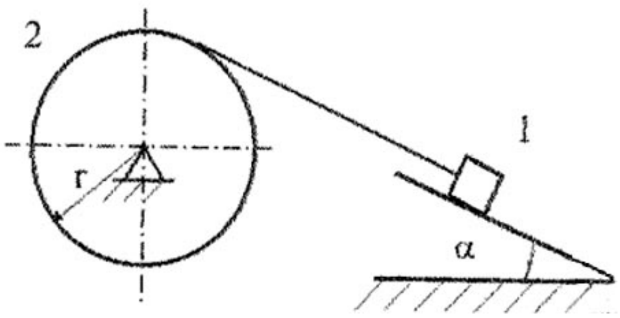
КАРТА 4



Груз 1 весом P посредством невесомой нерастяжимой нити приводит в движение блок 2 весом 2P радиуса r. Коэффициент трения скольжения груза 1 - f. Блок 2 - однородный цилиндр. Трением на оси блока пренебречь. Угол наклона плоскости движения груза к: горизонту - α. В начальный момент система находилась в состоянии покоя.

№ п/п	ОПРЕДЕЛИТЬ:		ВАРИАНТЫ ОТВЕТА:
1	УГЛОВУЮ СКОРОСТЬ БЛОКА	1	$\omega = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)/2rt$
		2	$\omega = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)t/r$
		3	$\omega = g(\cos\alpha - f\sin\alpha)t/2r$
		4	$\omega = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)t/2r$
2	НАТЯЖЕНИЕ НИТИ	1	$T_{1-2} = 2P(\sin\alpha - f\cos\alpha)$
		2	$T_{1-2} = P(\sin\alpha - f\cos\alpha)/2$
		3	$T_{1-2} = P(\cos\alpha - f\sin\alpha)/2$
		4	$T_{1-2} = P(f\cos\alpha - \sin\alpha)$
3	ГЛАВНЫЙ МОМЕНТ СИЛ, ПРИЛОЖЕННЫХ К БЛОКУ	1	$M_2 = Pr(\cos\alpha - f\sin\alpha)/2$
		2	$M_2 = Pr(\sin\alpha - f\cos\alpha)/2$
		3	$M_2 = 0$
		4	$M_2 = Pr(\sin\alpha - f\cos\alpha)$
4	РАБОТУ, ЗАТРАЧЕННУЮ НА ПЕРЕМЕЩЕНИЕ S ГРУЗА ВДОЛЬ НАКЛОННОЙ ПЛОСКОСТИ	1	$A_1 = PS(\sin\alpha - f\cos\alpha)/2$
		2	$A_1 = PS(\sin\alpha - f\cos\alpha)$
		3	$A_1 = PS\sin\alpha$
		4	$A_1 = PS(\cos\alpha - f\sin\alpha)/2$
5	ИМПУЛЬС СИЛ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА СИСТЕМУ, ЗА ВРЕМЯ t	1	$S = 2P(\sin\alpha - f\cos\alpha)t$
		2	$S = P(\sin\alpha - f\cos\alpha)t$
		3	$S = P(\cos\alpha - f\sin\alpha)t/2$
		4	$S = P(\sin\alpha - f\cos\alpha)t/2$
6	МОЩНОСТЬ СИЛ, ПРИЛОЖЕННЫХ К СИСТЕМЕ	1	$N = Pg(\sin\alpha - f\cos\alpha)^2 t/2$
		2	$N = Pg(\sin\alpha - f\cos\alpha)^2/4t$
		3	$N = Pg(\sin\alpha + f\cos\alpha)^2/2t$
		4	$N = Pg(\cos\alpha - f\sin\alpha)^2 t/2$

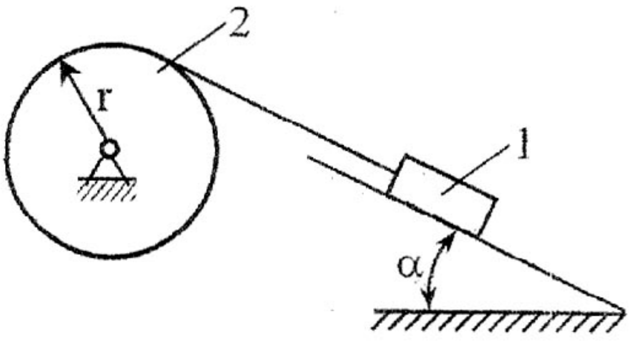
КАРТА 5



Груз 1 весом P посредством невесомой нерастяжимой нити приводит в движение блок 2 весом 2P радиуса r. Коэффициент трения скольжения груза 1 - f. Блок 2 - однородный цилиндр. Трением на оси блока пренебречь. Угол наклона плоскости движения груза к: горизонту - α. В начальный момент система находилась в состоянии покоя.

№ п/п	ОПРЕДЕЛИТЬ:		ВАРИАНТЫ ОТВЕТА:
1	УСКОРЕНИЕ ГРУЗА	1	$a_1 = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)$
		2	$a_1 = g(f\cos\alpha - \sin\alpha)/2$
		3	$a_1 = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)/2$
		4	$a_1 = g(\cos\alpha - f\sin\alpha)t/2$
2	УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ГРУЗА	1	$S = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)t^2/4$
		2	$S = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)t^2/2$
		3	$S = g(\cos\alpha - f\sin\alpha)t^2/4$
		4	$S = g(f\cos\alpha - \sin\alpha)t/2$
3	КОЛИЧЕСТВО ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ	1	$Q = P(\cos\alpha - f\sin\alpha)t/2$
		2	$Q = 3P(\sin\alpha - f\cos\alpha)t/2$
		3	$Q = P(\sin\alpha - f\cos\alpha)t/2$
		4	$Q = 3P(\sin\alpha - f\cos\alpha)t$
4	ГОРИЗОНТАЛЬНУЮ СОСТАВЛЯЮЩУЮ ДАВЛЕНИЯ БЛОКА НА ОПОРУ О	1	$x_0= P(\sin\alpha - f\cos\alpha)\cos\alpha$
		2	$x_0 = fP\cos^2\alpha$
		3	$x_0= 0$
		4	$x_0= 0,5P(\sin\alpha - f\cos\alpha)\cos\alpha$
5	СКОРОСТЬ ЦЕНТРА МАСС СИСТЕМЫ	1	$v_c = g(\cos\alpha - f\sin\alpha)t/6$
		2	$v_c = g(\sin\alpha-f\cos\alpha)t/6$
		3	$v_c = g(\sin\alpha-f\cos\alpha)t/2$
		4	$v_c = g(\cos\alpha - f\sin\alpha)t/2$
6	КИНЕТИЧЕСКИЙ МОМЕНТ БЛОКА ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ ВРАЩЕНИЯ	1	$K_O = Pr(\sin\alpha-f\cos\alpha)t/2$
		2	$K_O = Pr(\cos\alpha - f\sin\alpha)t/2$
		3	$K_O = Pr(\sin\alpha-f\cos\alpha)t$
		4	$K_O = Pr(\sin\alpha-f\cos\alpha)t/4$

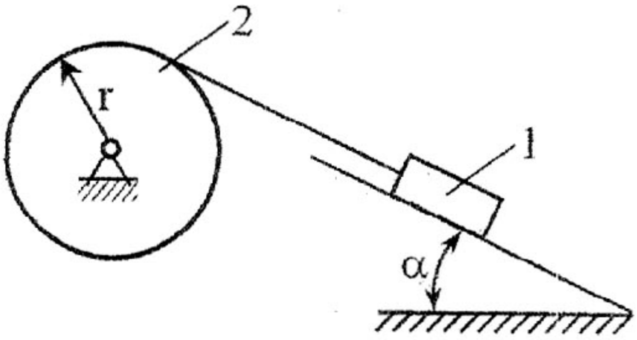
КАРТА 6



Груз 1 весом P посредством невесомой нерастяжимой нити приводит в движение блок 2 весом 2P радиуса r. Коэффициент трения скольжения груза 1 – f. Блок 2 -однородный цилиндр. Трением, на оси блока пренебречь. Угол наклона плоскости движения груза к горизонту - α. В начальный момент система находилась в состоянии покоя.

№ п/п	ОПРЕДЕЛИТЬ:		ВАРИАНТЫ ОТВЕТА:
1	УГЛОВОЕ УСКОРЕНИЕ БЛОКА	1	$\varepsilon = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)/2r$
		2	$\varepsilon = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)/r$
		3	$\varepsilon = gr(\sin\alpha - f\cos\alpha)/2$
		4	$\varepsilon = g(\cos\alpha - f\sin\alpha)/2r$
2	СКОРОСТЬ ГРУЗА	1	$v_1 = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)t$
		2	$v_1 = g(\cos\alpha - f\sin\alpha)t/2$
		3	$v_1 = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)t/2$
		4	$v_1 = g(f\cos\alpha - \sin\alpha)t/2$
3	НАТЯЖЕНИЕ НИТИ	1	$T_{1-2} = 2P(\sin\alpha - f\cos\alpha)$
		2	$T_{1-2} = P(\sin\alpha - f\cos\alpha)/2$
		3	$T_{1-2} = P(\cos\alpha - f\sin\alpha)/2$
		4	$T_{1-2} = P(\sin\alpha - f)$
4	ВЕРТИКАЛЬНУЮ СОСТАВЛЯЮЩУЮ ДАВЛЕНИЯ БЛОКА НА ОПОРУ О	1	$y_0 = Pr + P(\sin\alpha - f\cos\alpha)\sin\alpha /2$
		2	$y_0 = Pr + P(\sin\alpha - f\cos\alpha)/2$
		3	$y_0 = 3P - P\cos^2\alpha$
		4	$y_0 = 2P + P(\sin\alpha - f\cos\alpha)\sin\alpha/2$
5	КИНЕТИЧЕСКУЮ ЭНЕРГИЮ СИСТЕМЫ В ФУНКЦИИ ОТ ВРЕМЕНИ	1	$T = Pg(\cos\alpha - f\sin\alpha)^2t^2/4$
		2	$T = 3Pg(\cos\alpha - f\sin\alpha)^2t^2/2$
		3	$T = Pg(\sin\alpha - f\cos\alpha)^2t^2/2$
		4	$T = Pg(\sin\alpha - f\cos\alpha)^2t^2/4$
6	КОЛИЧЕСТВО ДВИЖЕНИЯ БЛОКА	1	$Q_2 = P(\sin\alpha - f\cos\alpha)t$
		2	$Q_2 = P(\sin\alpha - f\cos\alpha)t/2$
		3	$Q_2 = 0$
		4	$Q_2 = P(\cos\alpha - f\sin\alpha)t$

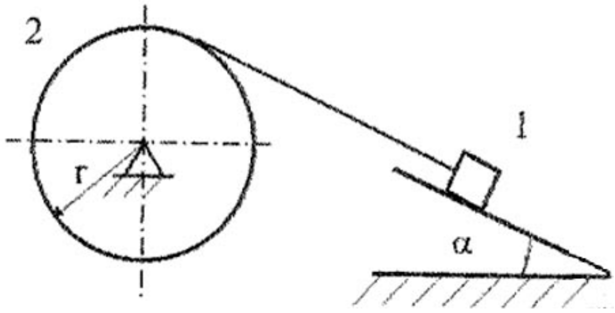
КАРТА 7



Груз 1 весом P посредством невесомой нерастяжимой нити приводит в движение блок 2 весом 2P радиуса r. Коэффициент трения скольжения груза 1 – f. Блок 2 -однородный цилиндр. Трением, на оси блока пренебречь. Угол наклона плоскости движения груза к горизонту - α. В начальный момент система находилась в состоянии покоя.

№ п/п	ОПРЕДЕЛИТЬ:		ВАРИАНТЫ ОТВЕТА:
1	УСКОРЕНИЕ ГРУЗА	1	$a_1 = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)$
		2	$a_1 = g(f\cos\alpha - \sin\alpha)/2$
		3	$a_1 = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)/2$
		4	$a_1 = g(\cos\alpha – f\sin\alpha)/2$
2	УГЛОВУЮ СКОРОСТЬ БЛОКА	1	$\omega_2 = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)/2rt$
		2	$\omega_2 = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)t/2r$
		3	$\omega_2 = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)t/r$
		4	$\omega_2 = g(\cos\alpha - f\sin\alpha)t/2r$
3	НАТЯЖЕНИЕ НИТИ	1	$T_{1-2} = P(\sin\alpha - f\cos\alpha)/2$
		2	$T_{1-2} = 2P(\sin\alpha - f\cos\alpha)$
		3	$T_{1-2} = P(\cos\alpha - f\sin\alpha)/2$
		4	$T_{1-2} = P(f\cos\alpha - \sin\alpha)$
4	ГЛАВНЫЙ ВЕКТОР СИЛ, ПРИЛОЖЕННЫХ К БЛОКУ	1	$R_2 = P(\sin\alpha - f\cos\alpha)/2$
		2	$R_2 = 0$
		3	$R_2 = P(\cos\alpha - f\sin\alpha)/2$
		4	$R_2 = P(\sin\alpha - f\cos\alpha)\cos\alpha/2$
5	МОЩНОСТЬ СИЛ, ПРИЛОЖЕННЫХ К СИСТЕМЕ	1	$N = Pg(\sin\alpha - f\cos\alpha)^2t/2$
		2	$N = Pg(\sin\alpha - f\cos\alpha)^2/4t$
		3	$N = Pg(\sin\alpha - f\cos\alpha)^2/2t$
		4	$N = 3Pg(\cos\alpha - f\sin\alpha)^2t/2$
6	ГОРИЗОНТАЛЬНУЮ СОСТАВЛЯЮЩУЮ ДАВЛЕНИЯ БЛОКА НА ОПОРУ О	1	$x_0 = 0$
		2	$x_0 = P(\sin\alpha - f\cos\alpha)\cos\alpha/2$
		3	$x_0 = P(\sin\alpha - f\cos\alpha)\cos\alpha$
		4	$x_0 = fP\cos^2\alpha$

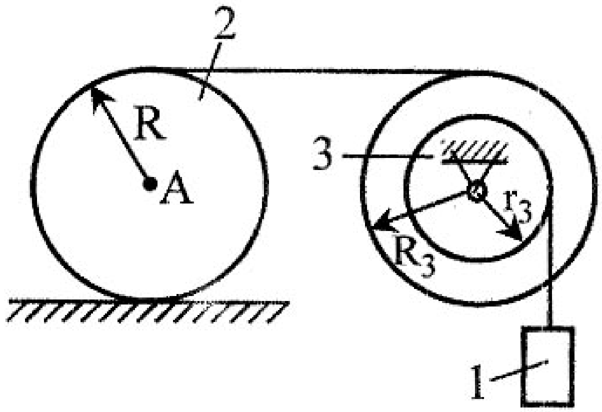
КАРТА 8



Груз 1 весом Р посредством невесомой нерастяжимой нити приводит в движение блок 2 весом 2Р радиуса r. Коэффициент трения скольжения груза 1 - f. Блок 2 - однородный цилиндр. Трением на оси блока пренебречь. Угол наклона плоскости, движения груза к горизонту - α. В начальный момент система находилась в состояния покоя.

№ п/п	ОПРЕДЕЛИТЬ:		ВАРИАНТЫ ОТВЕТА:
1	УСКОРЕНИЕ ГРУЗА	1	$a_1 = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)$
		2	$a_1 = g(f\cos\alpha - \sin\alpha)/2$
		3	$a_1 = g(\cos\alpha – f\sin\alpha)/2$
		4	$a_1 = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)/2$
2	УРАВНЕНИЕ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ БЛОКА	1	$\varphi = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)t^2/4r$
		2	$\varphi = g(\cos\alpha – f\sin\alpha)t^2/4r$
		3	$\varphi = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)t^2/2r$
		4	$\varphi = g(\sin\alpha + f\cos\alpha)t^2/4r$
3	КОЛИЧЕСТВО ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ	1	$Q = P(\cos\alpha - f\sin\alpha)t/2$
		2	$Q = 3P(\sin\alpha - f\cos\alpha)t/2$
		3	$Q = P(\sin\alpha - f\cos\alpha)t/2$
		4	$Q = 3P(\sin\alpha – f\cos\alpha)t$
4	УСКОРЕНИЕ ЦЕНТРА МАСС СИСТЕМЫ	1	$a_c = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)/2$
		2	$a_c = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)/6$
		3	$a_c = g(\cos\alpha-f\sin\alpha)/2$
		4	$a_c = 0$
5	ГЛАВНЫЙ МОМЕНТ СИЛ, ПРИЛОЖЕННЫХ К СИСТЕМЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ ВРАЩЕНИЯ БЛОКА	1	$M_0 = Pr(\sin\alpha - f\cos\alpha)$
		2	$M_0 = Pr(\cos\alpha - f\sin\alpha)$
		3	$M_0 = Pr(\sin\alpha - f\cos\alpha)/2$
		4	$M_0 = 0$
6	МОЩНОСТЬ СИЛ, ПРИЛОЖЕННЫХ К ГРУЗУ	1	$N_1 = Pg(\cos\alpha - f\sin\alpha)t/4$
		2	$N_1 = Pg(\sin\alpha - f\cos\alpha)t/2$
		3	$N_1 = Pg(\sin\alpha - f\cos\alpha)t/4$
		4	$N_1 = Pg(\sin\alpha + f\cos\alpha)t/4$

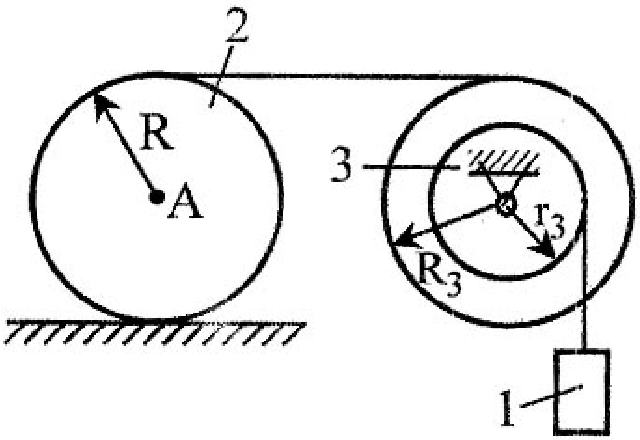
КАРТА 9



Груз 1 весом P посредством невесомой нерастяжимой нити, перекинутой через блок, приводит в движение каток 2, однородный цилиндр весом 2P радиуса R, катящийся без скольжения по неподвижной горизонтальной поверхности. Коэффициент трения качения катка равен δ. Массой блока пренебречь. Соотношение R_3/r_3 = 2. В начальный момент система находилась в покое.

№ п/п	ОПРЕДЕЛИТЬ:		ВАРИАНТЫ ОТВЕТА:
1	СКОРОСТЬ ЦЕНТРА КАТКА	1	$v_a = g(R - \delta)t/2R$
		2	$v_a = g(R + \delta)t/4R$
		3	$v_a = g(R - 2\delta)t/4R$
		4	$v_a = g(R - \delta)t/4R$
2	УСКОРЕНИЕ ГРУЗА 1	1	$a_1 = g(R - 2\delta)/4R$
		2	$a_1 = g(R - 2\delta)/3R$
		3	$a_1 = g(R - \delta)/2R$
		4	$a_1 = g(R + 2\delta)/2R$
3	КОЛИЧЕСТВО ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ	1	$Q = P\sqrt{5}(R - 2\delta)t/4R$
		2	$Q = P(R - \delta)t/R$
		3	$Q = P\sqrt{5}(R - \delta)t/4R$
		4	$Q = P(R - \delta)t/2R$
4	ВЕЛИЧИНУ ГЛАВНОГО ВЕКТОРА СИЛ, ПРИЛОЖЕННЫХ К КАТКУ	1	$R_2 = P(R - \delta)/R$
		2	$R_2 = P(R - \delta)/2R$
		3	$R_2 = P(R + \delta)/2R$
		4	$R_2 = P(R - 2\delta)/2R$
5	КИНЕТИЧЕСКУЮ ЭНЕРГИЮ ГРУЗА В ФУНКЦИИ ОТ ВРЕМЕНИ	1	$T_1 = Pg(R - 2\delta)^2t^2/32R^2$
		2	$T_1 = Pg(R - 2\delta)^2t^2/8R^2$
		3	$T_1 = Pg(R - 2\delta)^2t^2/4R^2$
		4	$T_1 = Pg(R + 2\delta)^2t^2/8R^2$
6	ИМПУЛЬС СИЛ, ПРИЛОЖЕННЫХ К КАТКУ 2 ЗА ВРЕМЯ t	1	$S_2 = P(R + \delta)t/2R$
		2	$S_2 = P(R - 2\delta)t/3R$
		3	$S_2 = P(R - 2\delta)t/2R$
		4	$S_2 = P(R - \delta)t/R$

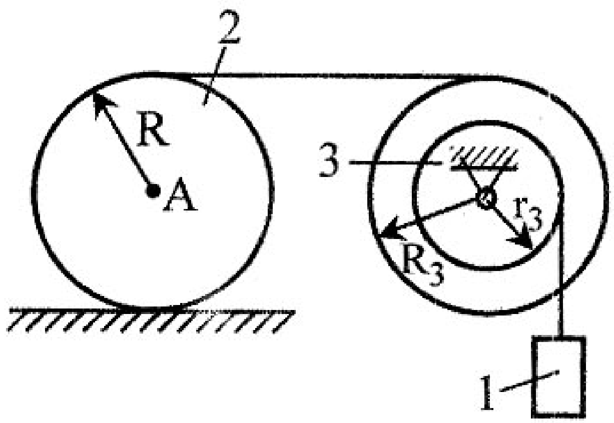
КАРТА 10



Груз 1 весом P посредством невесомой нерастяжимой нити, перекинутой через блок, приводит в движение каток 2, однородный цилиндр весом 2P радиуса R, катящийся без скольжения по неподвижной горизонтальной поверхности. Коэффициент трения качения катка равен δ. Массой блока пренебречь. Соотношение $R_3/r_3 = 2$. В начальный момент система находилась в покое.

№ п/п	ОПРЕДЕЛИТЬ:		ВАРИАНТЫ ОТВЕТА:
1	УСКОРЕНИЕ ЦЕНТРА КАТКА	1	$a_A = g(R - 2\delta)/2R$
		2	$a_A = g(R + 2\delta)/4R$
		3	$a_A = g(R - 2\delta)/4R$
		4	$a_A = g(R - \delta)/3R$
2	КИНЕМАТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ГРУЗА 1	1	$S = g(R - \delta)t^2/2R$
		2	$S = g(R + \delta)t^2/4R$
		3	$S = g(R - 2\delta)t^2/8R$
		4	$S = g(R - 2\delta)t^2/4R$
3	ИМПУЛЬС СИЛ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА СИСТЕМУ, В ТЕЧЕНИИ ВРЕМЕНИ t	1	$S = 0$
		2	$S = P\sqrt{5}\,(R - 2\delta)t/4R$
		3	$S = P(R - \delta)t/R$
		4	$S = P\sqrt{R^2 - \delta^2}\ t/R$
4	КИНЕМАТИЧЕСКУЮ ЭНЕРГИЮ СИСТЕМЫ В ФУНКЦИИ ОТ ПЕРЕМЕННОЙ S ГРУЗА 1	1	$T = P(R + \delta)S/R$
		2	$T = P(2R - \delta)S/R$
		3	$T = P(R – 2\delta)S/R$
		4	$T = 2P(R - \delta)S/R$
5	МОЩНОСТЬ СИЛ, ПРИЛОЖЕННЫХ К КАТКУ 2	1	$N_2 = Pg(R - 2\delta)^2t/8R^2$
		2	$N_2 = Pg(R - \delta)t/4R$
		3	$N_2 = Pg(R + \delta)t/2R$
		4	$N_2 = Pg(R - 2\delta)^2/4R^2$
6	ИМПУЛЬС СИЛ, ПРИЛОЖЕННЫХ К ГРУЗУ 1, ЗА ВРЕМЯ t	1	$S_1 = P(R + \delta)t/2R$
		2	$S_1 = P(R – 2\delta)t/4R$
		3	$S_1 = P(R – \delta)t/R$
		4	$S_1 = P(R – 2\delta)t/2R$

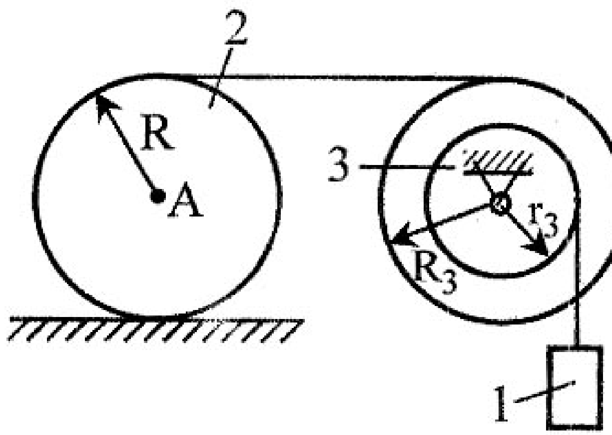
КАРТА 11



Груз 1 весом P посредством невесомой нерастяжимой нити, перекинутой через блок, приводит в движение каток 2, однородный цилиндр весом 2P радиуса R, катящийся без скольжения по неподвижной горизонтальной поверхности. Коэффициент трения качения катка равен δ. Массой блока пренебречь. Соотношение $R_3/r_3 = 2$. В начальный момент система находилась в покое.

№ п/п	ОПРЕДЕЛИТЬ:		ВАРИАНТЫ ОТВЕТА:
1	УСКОРЕНИЕ ГРУЗА 1	1	$a_1 = g(R - 2\delta)/2R$
		2	$a_1 = g(R - 2\delta)/4R$
		3	$a_1 = 2g(R - \delta)/3R$
		4	$a_1 = g(R + \delta)/2R$
2	УГОЛ ПОВОРОТА КАТКА В ФУНКЦИИ ОТ ВРЕМЕНИ	1	$\varphi = g(R - 2\delta)t^2/4R^2$
		2	$\varphi = g(R - 2\delta)t^2/8R^2$
		3	$\varphi = g(R - \delta)t^2/4R^2$
		4	$\varphi = g(R - \delta)t/4R^2$
3	ВЕЛИЧИНУ ГЛАВНОГО ВЕКТОРА СИЛ, ПРИЛОЖЕННЫХ К СИСТЕМЕ	1	$R = P\sqrt{5}(R - 2\delta)/4R$
		2	$R = P(R + \delta)/R$
		3	$R = P\sqrt{2}(R - \delta)t/2R$
		4	$R = P(R - 2\delta)/2R$
4	НАТЯЖЕНИЕ НИТИ	1	$T_{1\text{-}2} = P(3R + 2\delta)/4R$
		2	$T_{1\text{-}2} = P(R + 2\delta)/4R$
		3	$T_{1\text{-}2} = P(R + \delta)/2R$
		4	$T_{1\text{-}2} = P(3R - 2\delta)/2R$
5	СИЛУ СЦЕПЛЕНИЯ КАТКА 2 С НЕПОДВИЖНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ	1	$F_{сц.} = P(R + 6\delta)/4R$
		2	$F_{сц.} = P(R + 6\delta)/R$
		3	$F_{сц.} = 2P\delta/R$
		4	$F_{сц.} = P\delta/R$
6	РАБОТУ СИЛ, ПРИЛОЖЕННЫХ К СИСТЕМЕ, ЗА ВРЕМЯ t	1	$A = 3Pg(R - \delta)t^2/4R$
		2	$A = 3Pg(R - \delta)^2t^2/32R^2$
		3	$A = Pg(R - \delta)^2t^2/4R^2$
		4	$A = Pg(R + \delta)^2t^2/4R^2$

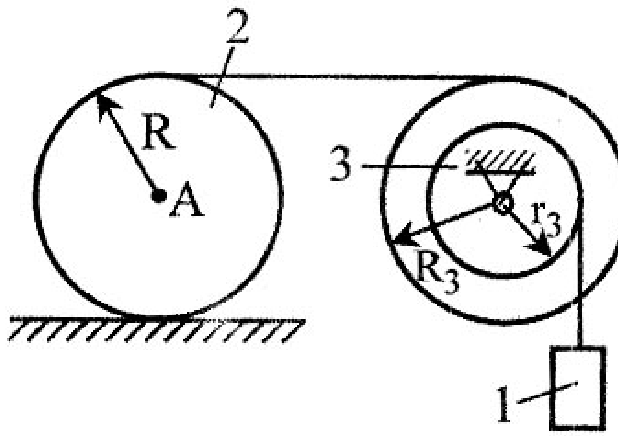
КАРТА 12



Груз 1 весом P посредством невесомой нерастяжимой нити, перекинутой через блок, приводит в движение каток 2, однородный цилиндр весом 2P радиуса R, катящийся без скольжения по неподвижной горизонтальной поверхности. Коэффициент трения качения катка равен δ. Массой блока пренебречь. Соотношение $R_3/r_3 = 2$. В начальный момент система находилась в покое.

№ п/п	ОПРЕДЕЛИТЬ:		ВАРИАНТЫ ОТВЕТА:
1	УСКОРЕНИЕ КАТКА	1	$a_A = g(R - \delta)/2R$
		2	$a_A = g(R - 2\delta)/4R$
		3	$a_A = g(R + \delta)/4R$
		4	$a_A = g(R - \delta)/3R$
2	УГОЛ ПОВОРОТА КАТКА В ФУНКЦИИ ОТ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ S ГРУЗА 1	1	$\varphi = S/R$
		2	$\varphi = 2S/R$
		3	$\varphi = S/2R$
		4	$\varphi = S/2\pi R$
3	ВЕЛИЧИНУ ГЛАВНОГО ВЕКТОРА СИЛ, ПРИЛОЖЕННЫХ К ГРУЗУ 1	1	$R_1 = P(3R + \delta)/2R$
		2	$R_1 = P(R - \delta)/2R$
		3	$R_1 = P(R - 2\delta)/3R$
		4	$R_1 = P$
4	КИНЕТИЧЕСКУЮ ЭНЕРГИЮ КАТКА 2 В ФУНКЦИИ ОТ ВРЕМЕНИ	1	$T_2 = Pg(R - \delta)^2t^2/8R^2$
		2	$T_2 = 3Pg(R - \delta)^2t^2/32R^2$
		3	$T_2 = Pg(R - \delta)^2t^2/4R^2$
		4	$T_2 = Pg(R + \delta)^2t^2/8R^2$
5	РАБОТУ, ЗАТРАЧЕННУЮ НА КАЧЕНИЕ КАТКА 2 ПРИ ПЕРЕМЕЩЕНИИ S ГРУЗА 1	1	$A_2 = P(R - 3\delta)S/2R$
		2	$A_2 = P(R - \delta)S/R$
		3	$A_2 = P(R + \delta)S/2R$
		4	$A_2 = P(R - \delta)S/2R$
6	МОЩНОСТЬ СИЛ, ПРИЛОЖЕННЫХ К ГРУЗУ	1	$N_1 = Pg(R - \delta)t/4R$
		2	$N_1 = Pg(R + \delta)t/2R$
		3	$N_1 = Pg(R - \delta)^2t/4R^2$
		4	$N_1 = Pg(R - \delta)^2/4R^2$

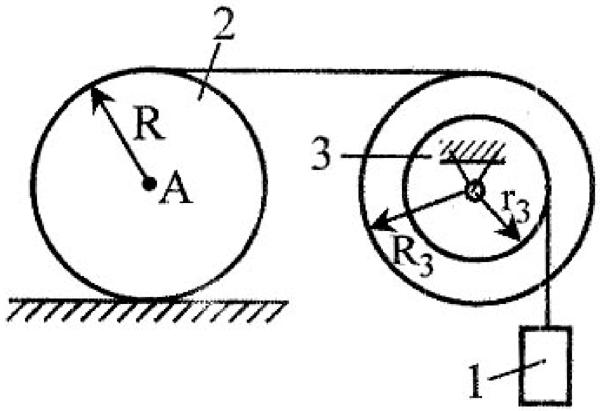
КАРТА 13



Груз 1 весом P посредством невесомой нерастяжимой нити, перекинутой через блок, приводит в движение каток 2, однородный цилиндр весом 2P радиуса R, катящийся без скольжения по неподвижной горизонтальной поверхности. Коэффициент трения качения катка равен δ. Массой блока пренебречь. Соотношение $R_3/r_3 = 2$. В начальный момент система находилась в покое.

№ п/п	ОПРЕДЕЛИТЬ:		ВАРИАНТЫ ОТВЕТА:
1	УГЛОВУЮ СКОРОСТЬ КАТКА В ФУНКЦИИ ОТ ВРЕМЕНИ	1	$\omega = g(R - 2\delta)t/2R^2$
		2	$\omega = g(R + \delta)t/2R^2$
		3	$\omega = g(R - 2\delta)t/4R^2$
		4	$\omega = g(R - 2\delta)t/8R^2$
2	УГОЛ ПОВОРОТА КАТКА В ФУНКЦИИ ОТ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ S ГРУЗА 1	1	$\varphi = S/R$
		2	$\varphi = S/2R$
		3	$\varphi = 2S/R$
		4	$\varphi = S/2\pi R$
3	ИМПУЛЬС СИЛ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА СИСТЕМУ В ТЕЧЕНИИ ВЕРМЕНИ t	1	$S = 0$
		2	$S = \sqrt{5}\,P(R - 2\delta)t/R$
		3	$S = P\sqrt{R^2 - \delta^2}\,t/R$
		4	$S = P\sqrt{5}\,(R - 2\delta)t/4R$
4	УСКОРЕНИЕ ЦЕНТРА МАСС СИСТЕМЫ	1	$a_C = g\sqrt{5}\,(R - 2\delta)/12R$
		2	$a_C = g\,(R - 2\delta)/12R$
		3	$a_C = g\,(R - \delta)/6R$
		4	$a_C = g\,(R + \delta)/2R$
5	КИНЕТИЧЕСКУЮ ЭНЕРГИЮ КАТКА 2 В ФУНКЦИИ ОТ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ S ГРУЗА 1	1	$T_2 = 3P(R - 2\delta)S/4R$
		2	$T_2 = P(R - 2\delta)S/2R$
		3	$T_2 = P(R + 2\delta)S/2R$
		4	$T_2 = P(R - 2\delta)S/R$
6	РАБОТУ СИЛ, ПРИЛОЖЕННЫХ К СИСТЕМЕ, ПРИ ПЕРЕМЕЩЕНИИ S ГРУЗА 1	1	$A = P(2R - \delta)S/R$
		2	$A = P(R + \delta)S/R$
		3	$A = P(R - 2\delta)S/R$
		4	$A = 2P(R - 2\delta)S/R$

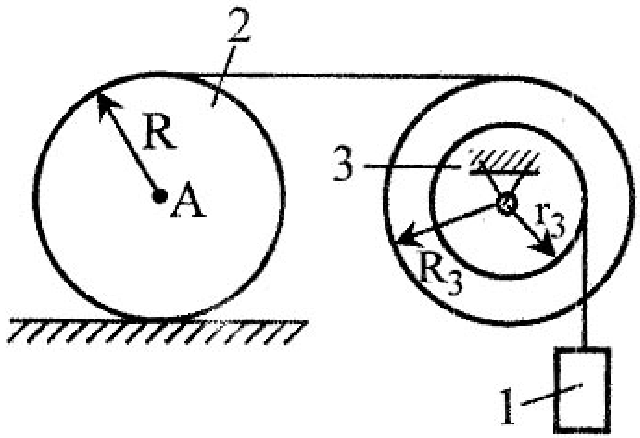
КАРТА 14



Груз 1 весом P посредством невесомой нерастяжимой нити, перекинутой через блок, приводит в движение каток 2, однородный цилиндр весом 2P радиуса R, катящийся без скольжения по неподвижной горизонтальной поверхности. Коэффициент трения качения катка равен δ. Массой блока пренебречь. Соотношение $R_3/r_3 = 2$. В начальный момент система находилась в покое.

№ п/п	ОПРЕДЕЛИТЬ:		ВАРИАНТЫ ОТВЕТА:
1	УГЛОВОЕ УСКОРЕНИЕ КАТКА	1	$\varepsilon = g(R - \delta)/3R^2$
		2	$\varepsilon = g(R - 2\delta)/4R^2$
		3	$\varepsilon = g(R - 2\delta)/2R^2$
		4	$\varepsilon = g(R + \delta)/4R^2$
2	КИНЕМАТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ГРУЗА 1	1	$S = g(R - \delta)t^2/4R$
		2	$S = g(R - 2\delta)t^2/2R$
		3	$S = g(R + 2\delta)t^2/4R$
		4	$S = g(R - 2\delta)t^2/8R$
3	НАТЯЖЕНИЕ НИТИ	1	$T_{1\text{-}2} = P(3R + 2\delta)/4R$
		2	$T_{1\text{-}2} = P(R + 2\delta)/2R$
		3	$T_{1\text{-}2} = P(R + \delta)/4R$
		4	$T_{1\text{-}2} = P(3R - 2\delta)/2R$
4	КОЛИЧЕСТВО ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ	1	$Q = P(R - \delta)t/R$
		2	$Q = P\sqrt{2}(R - 2\delta)t/4R$
		3	$Q = P(R - 2\delta)t/2R$
		4	$Q = P\sqrt{5}(R - 2\delta)t/4R$
5	ГЛАВНЫЙ МОМЕНТ СИЛ, ПРИЛОЖЕННЫХ К КАТКУ, ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРА МАСС КАТКА	1	$M_{2A} = P(R - 2\delta)/2$
		2	$M_{2A} = P(R - 2\delta)/4$
		3	$M_{2A} = P(R - 3\delta)/2$
		4	$M_{2A} = P(R + \delta)/2$
6	МОЩНОСТЬ СИЛ, ПРИЛОЖЕННЫХ К ГРУЗУ	1	$N_1 = Pg(R - 2\delta)t/6R^2$
		2	$N_1 = Pg(R + \delta)t/2R$
		3	$N_1 = Pg(R - 2\delta)^2t/4R^2$
		4	$N_1 = Pg(R - \delta)^2/4R^2$

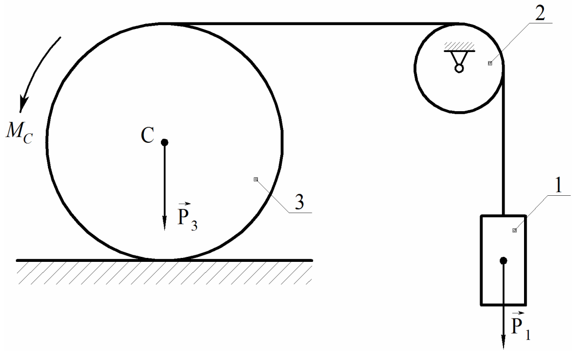
КАРТА 15



Груз 1 весом P посредством невесомой нерастяжимой нити, перекинутой через блок, приводит в движение каток 2, однородный цилиндр весом 2P радиуса R, катящийся без скольжения по неподвижной горизонтальной поверхности. Коэффициент трения качения катка равен δ. Массой блока пренебречь. Соотношение $R_3/r_3 = 2$. В начальный момент система находилась в покое.

№ п/п	ОПРЕДЕЛИТЬ:		ВАРИАНТЫ ОТВЕТА:
1	УГЛОВУЮ СКОРОСТЬ КАТКА В ФУНКЦИИ ОТ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ S ГРУЗА 1	1	$\omega = \sqrt{2gS}/2R$
		2	$\omega = \sqrt{g(R-\delta)S/R}/2R$
		3	$\omega = \sqrt{2gS}/R$
		4	$\omega = \sqrt{g(R-\delta)S/R}/R$
2	КИНЕМАТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЦЕНТРА КАТКА	1	$S_A = g(R - \delta)t^2/4R$
		2	$S_A = g(R + \delta)t^2/8R$
		3	$S_A = g(R - \delta)t/4R$
		4	$S_A = g(R - \delta)t^2/8R$
3	КОЛИЧЕСТВО ДВИЖЕНИЯ ГРУЗА 1	1	$Q_1 = P(R + \delta)t/2R$
		2	$Q_1 = P(R - \delta)t/2R$
		3	$Q_1 = P(R - 2\delta)t/3R$
		4	$Q_1 = P(R - \delta)t/2R$
4	УСКОРЕНИЕ ЦЕНТРА МАСС СИСТЕМЫ	1	$a_C = g(R - \delta)/3R$
		2	$a_C = g(R - \delta)/6R$
		3	$a_C = g\sqrt{2}(R - \delta)/6R$
		4	$a_C = g(R + \delta)/2R$
5	КИНЕТИЧЕСКУЮ ЭНЕРГИЮ ГРУЗА 1 В ФУНКЦИИ ОТ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ S ГРУЗА	1	$T_1 = P(R - \delta)S/2R$
		2	$T_1 = P(R + \delta)S/2R$
		3	$T_1 = P(3R + \delta)S/2R$
		4	$T_1 = PS$
6	РАБОТУ СИЛ, ПРИЛОЖЕННЫХ К СИСТЕМЕ, ПРИ ПЕРЕМЕЩЕНИИ S ГРУЗА 1	1	$A = P(2R - \delta)S/R$
		2	$A = P(R - \delta)S/R$
		3	$A = P(R + \delta)S/R$
		4	$A = 2P(R - \delta)S/R$

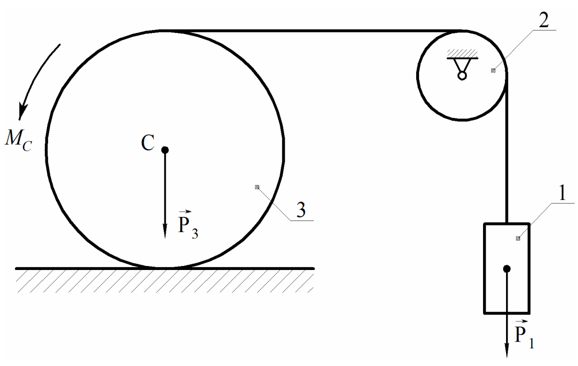
БИЛЕТ № 16



Механическая система состоит из груза 1, идеального блока 2 и катка 3, масса которого равномерно распределена по его ободу. Груз 1 весом *P* посредством невесомой нерастяжимой нити, перекинутой через блок, приводит в движение каток 2, весом *2P* радиуса *R*, катящийся без скольжения по неподвижной горизонтальной поверхности. Коэффициент трения качения катка о поверхность равен δ. Массой блока пренебречь. В начальный момент система находилась в покое.

№ п/п	ОПРЕДЕЛИТЬ:		ВАРИАНТЫ ОТВЕТА:
1	СКОРОСТЬ ЦЕНТРА КАТКА	1	$v_{C3} = g(R - \delta)t/2R$
		2	$v_{C3} = g(R + \delta)t/4R$
		3	$v_{C3} = g(R - 2\delta)t/6R$
		4	$v_{C3} = g(R - \delta)t/4R$
2	УСКОРЕНИЕ ГРУЗА 1	1	$a_1 = g(R - 2\delta)/3R$
		2	$a_1 = 2g(R - \delta)/3R$
		3	$a_1 = g(R - \delta)/2R$
		4	$a_1 = g(R + \delta)/2R$
3	КОЛИЧЕСТВО ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ	1	$Q = P\sqrt{2}\,(R - \delta)t/2R$
		2	$Q = P(R - \delta)t/R$
		3	$Q = P\sqrt{2}\,(R + \delta)t/4R$
		4	$Q = P(R - \delta)t/2R$
4	ВЕЛИЧИНУ ГЛАВНОГО ВЕКТОРА СИЛ, ПРИЛОЖЕННЫХ К КАТКУ 2	1	$R_3 = P(R - \delta)/R$
		2	$R_3 = P(R + 3\delta)/2R$
		3	$R_3 = P(R + \delta)/2R$
		4	$R_3 = P(R - \delta)/2R$
5	КИНЕТИЧЕСКУЮ ЭНЕРГИЮ ГРУЗА В ФУНКЦИИ ОТ ВРЕМЕНИ	1	$T_1 = Pg(R - \delta)^2t^2/16R^2$
		2	$T_1 = Pg(R - \delta)^2t^2/8R^2$
		3	$T_1 = Pg(R - \delta)^2t^2/4R^2$
		4	$T_1 = Pg(R + \delta)^2t^2/8R^2$
6	ИМПУЛЬС СИЛ, ПРИЛОЖЕННЫХ К КАТКУ 3, ЗА ВРЕМЯ t	1	$S_3 = P(R + \delta)t/2R$
		2	$S_3 = P(R - 2\delta)t/3R$
		3	$S_3 = P(R - \delta)t/2R$
		4	$S_3 = P(R - \delta)t/R$

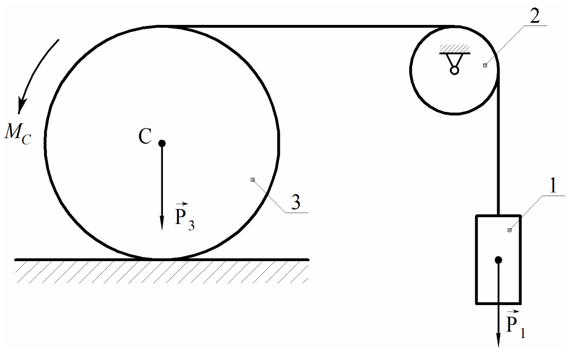
БИЛЕТ № 17



Механическая система состоит из груза 1, идеального блока 2 и катка 3, масса которого равномерно распределена по его ободу. Груз 1 весом *P* посредством невесомой нерастяжимой нити, перекинутой через блок, приводит в движение каток 2, весом *2P* радиуса *R*, катящийся без скольжения по неподвижной горизонтальной поверхности. Коэффициент трения качения катка о поверхность равен δ. Массой блока пренебречь. В начальный момент система находилась в покое.

№ п/п	ОПРЕДЕЛИТЬ:		ВАРИАНТЫ ОТВЕТА:
1	УСКОРЕНИЕ ЦЕНТРА КАТКА	1	$a_{C3} = g(R - \delta)/2R$
		2	$a_{C3} = g(R + \delta)/4R$
		3	$a_{C3} = g(R - \delta)/4R$
		4	$a_{C3} = g(R - \delta)/3R$
2	КИНЕМАТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ГРУЗА 1	1	$S_1 = g(R - \delta)t^2/2R$
		2	$S_1 = g(R + \delta)t^2/4R$
		3	$S_1 = g(R - 2\delta)t^2/6R$
		4	$S_1 = g(R - \delta)t^2/4R$
3	ИМПУЛЬС СИЛ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА СИСТЕМУ, В ТЕЧЕНИЕ ВРЕМЕНИ t	1	$S = 0$
		2	$S = P\sqrt{2}\,(R - \delta)t/2R$
		3	$S = P(R - \delta)t/R$
		4	$S = P\sqrt{R^2 - \delta^2}\;t/R$
4	КИНЕТИЧЕСКУЮ ЭНЕРГИЮ СИСТЕМЫ В ФУНКЦИИ ОТ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ S ГРУЗА 1	1	$T = P(R + \delta)S/R$
		2	$T = P(2R - \delta)S/R$
		3	$T = P(R - \delta)S/R$
		4	$T = 2P(R - \delta)S/R$
5	МОЩНОСТЬ СИЛ, ПРИЛОЖЕННЫХ К КАТКУ 3	1	$N_3 = Pg(R - \delta)^2t/4R^2$
		2	$N_3 = Pg(R - \delta)t/4R$
		3	$N_3 = Pg(R + \delta)t/4R$
		4	$N_3 = Pg(R - \delta)^2/4R^2$
6	ИМПУЛЬС СИЛ, ПРИЛОЖЕННЫХ К ГРУЗУ 1, ЗА ВРЕМЯ t	1	$S_1 = P(R + \delta)t/2R$
		2	$S_1 = P(R - 2\delta)t/3R$
		3	$S_1 = P(R - \delta)t/R$
		4	$S_1 = P(R - \delta)t/2R$

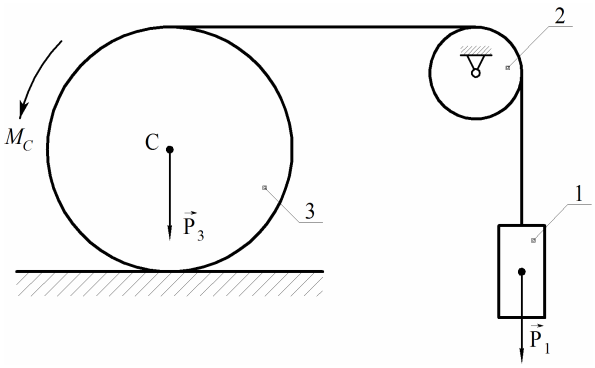
БИЛЕТ № 18



Механическая система состоит из груза 1, идеального блока 2 и катка 3, масса которого равномерно распределена по его ободу. Груз 1 весом *P* посредством невесомой нерастяжимой нити, перекинутой через блок, приводит в движение каток 2, весом *2P* радиуса *R*, катящийся без скольжения по неподвижной горизонтальной поверхности. Коэффициент трения качения катка о поверхность равен δ. Массой блока пренебречь. В начальный момент система находилась в покое.

№ п/п	ОПРЕДЕЛИТЬ:		ВАРИАНТЫ ОТВЕТА:
1	УСКОРЕНИЕ ГРУЗА 1	1	$a_1 = g(R-\delta)/3R$
		2	$a_1 = 2g(R-\delta)/3R$
		3	$a_1 = g(R-\delta)/2R$
		4	$a_1 = g(R+\delta)/2R$
2	УГОЛ ПОВОРОТА КАТКА В ФУНКЦИЙ ОТ ВРЕМЕНИ	1	$\varphi = g(R - \delta)t^2/4R^2$
		2	$\varphi = g(R - \delta)t^2/8R^2$
		3	$\varphi = g(R + \delta)t^2/9R^2$
		4	$\varphi = g(R - \delta)t/4R^2$
3	ВЕЛИЧИНУ ГЛАВНОГО ВЕКТОРА СИЛ, ПРИЛОЖЕННЫХ К СИСТЕМЕ	1	$R = P\sqrt{2}\,(R - \delta)/2R$
		2	$R = P(R + \delta)/R$
		3	$R = P\sqrt{2}\,(R - \delta)t/2R$
		4	$R = P(R - \delta)/2R$
4	НАТЯЖЕНИЕ НИТИ	1	$T_{1\text{-}2} = P(3R + \delta)/4R$
		2	$T_{1\text{-}2} = P(R + \delta)/4R$
		3	$T_{1\text{-}2} = P(R + \delta)/2R$
		4	$T_{1\text{-}2} = P(3R - \delta)/2R$
5	СИЛУ СЦЕПЛЕНИЯ КАТКА 3 С НЕПОДВИЖНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ	1	$F_{сц.} = P(R - \delta)/2R$
		2	$F_{сц.} = P(R + \delta)/R$
		3	$F_{сц.} = 2P\delta/R$
		4	$F_{сц.} = P\delta/R$
6	РАБОТУ СИЛ, ПРИЛОЖЕННЫХ К СИСТЕМЕ, ЗА ВРЕМЯ t	1	$A = Pg(R - \delta)t^2/4R$
		2	$A = Pg(R - \delta)^2t^2/8R^2$
		3	$A = Pg(R - \delta)^2t^2/4R^2$
		4	$A = Pg(R + \delta)^2t^2/4R^2$

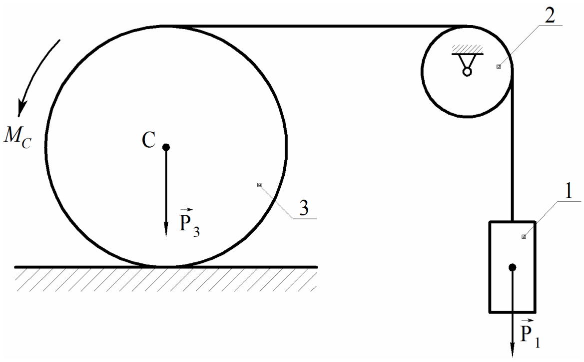
БИЛЕТ № 19



Механическая система состоит из груза 1, идеального блока 2 и катка 3, масса которого равномерно распределена по его ободу. Груз 1 весом *P* посредством невесомой нерастяжимой нити, перекинутой через блок, приводит в движение каток 2, весом *2P* радиуса *R*, катящийся без скольжения по неподвижной горизонтальной поверхности. Коэффициент трения качения катка о поверхность равен δ. Массой блока пренебречь. В начальный момент система находилась в покое.

<table>
<tr><th>№ п/п</th><th>ОПРЕДЕЛИТЬ:</th><th></th><th>ВАРИАНТЫ ОТВЕТА:</th></tr>
<tr><td rowspan="4">1</td><td rowspan="4">УСКОРЕНИЕ ЦЕНТРА КАТКА</td><td>1</td><td>$a_C = g(R - \delta)/2R$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$a_C = g(R - \delta)/4R$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>$a_C = g(R + \delta)/4R$</td></tr>
<tr><td>4</td><td>$a_C = g(R - \delta)/3R$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">2</td><td rowspan="4">УГОЛ ПОВОРОТА КАТКА В ФУНКЦИИ ОТ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ S ГРУЗА 1</td><td>1</td><td>$\varphi = S/R$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$\varphi = S/2R$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>$\varphi = S/2R$</td></tr>
<tr><td>4</td><td>$\varphi = S/2\pi R$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">3</td><td rowspan="4">ВЕЛИЧИНУ ГЛАВНОГО ВЕКТОРА СИЛ, ПРИЛОЖЕННЫХ К ГРУЗУ 1</td><td>1</td><td>$R_1 = P(3R + \delta)/2R$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$R_1 = P(R - \delta)/2R$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>$R_1 = P(R - 2\delta)/3R$</td></tr>
<tr><td>4</td><td>$R_1 = P$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">4</td><td rowspan="4">КИНЕТИЧЕСКУЮ ЭНЕРГИЮ КАТКА 3, В ФУНКЦИИ ОТ ВРЕМЕНИ</td><td>1</td><td>$T_3 = Pg(R - \delta)^2t^2/8R^2$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$T_3 = 3Pg(R - \delta)^2t^2/32R^2$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>$T_3 = Pg(R - \delta)^2t^2/4R^2$</td></tr>
<tr><td>4</td><td>$T_3 = Pg(R + \delta)^2t^2/8R^2$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">5</td><td rowspan="4">РАБОТУ, ЗАТРАЧЕННУЮ НА КАЧЕНИЕ КАТКА 3 ПРИ ПЕРЕМЕЩЕНИИ S ГРУЗА 1</td><td>1</td><td>$A_3 = P(R - 3\delta)S/2R$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$A_3 = P(R - \delta)S/R$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>$A_3 = P(R + \delta)S/2R$</td></tr>
<tr><td>4</td><td>$A_3 = P(R - \delta)S/2R$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">6</td><td rowspan="4">МОЩНОСТЬ СИЛ, ПРИЛОЖЕННЫХ К ГРУЗУ</td><td>1</td><td>$N_1 = Pg(R - \delta)t/4R$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$N_1 = Pg(R + \delta)t/2R$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>$N_1 = Pg(R - \delta)^2t/4R^2$</td></tr>
<tr><td>4</td><td>$N_1 = Pg(R - \delta)^2/4R^2$</td></tr>
</table>

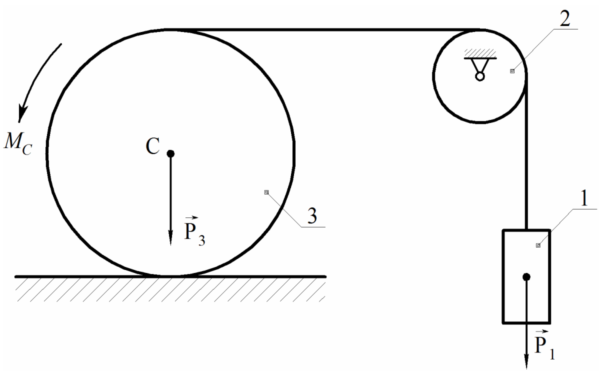
БИЛЕТ № 20



Механическая система состоит из груза 1, идеального блока 2 и катка 3, масса которого равномерно распределена по его ободу. Груз 1 весом *P* посредством невесомой нерастяжимой нити, перекинутой через блок, приводит в движение каток 2, весом *2P* радиуса *R*, катящийся без скольжения по неподвижной горизонтальной поверхности. Коэффициент трения качения катка о поверхность равен δ. Массой блока пренебречь. В начальный момент система находилась в покое.

№ п/п	ОПРЕДЕЛИТЬ:		ВАРИАНТЫ ОТВЕТА:
1	УГЛОВУЮ СКОРОСТЬ КАТКА В ФУНКЦИИ ОТ ВРЕМЕНИ	1	$\omega = g(R - \delta)t/2R^2$
		2	$\omega = g(R + \delta)t/2R^2$
		3	$\omega = g(R + \delta)t/4R^2$
		4	$\omega = g(R - \delta)t/4R^2$
2	УГОЛ ПОВОРОТА КАТКА В ФУНКЦИИ ОТ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ S ГРУЗА 1	1	$\varphi = S/R$
		2	$\varphi = S/2R$
		3	$\varphi = 2S/R$
		4	$\varphi = S/2\pi R$
3	ИМПУЛЬС СИЛ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА СИСТЕМУ, В ТЕЧЕНИЕ ВРЕМЕНИ t	1	$S = 0$
		2	$S = P(R - \delta)t/R$
		3	$S = P\sqrt{R^2 - \delta^2}\ t/R$
		4	$S = P\sqrt{2}\ (R - \delta)t/2R$
4	УСКОРЕНИЕ ЦЕНТРА МАСС СИСТЕМЫ	1	$a_C = g\sqrt{2}\ (R - \delta)/6R$
		2	$a_C = g(R - \delta)/3R$
		3	$a_C = g(R - \delta)/6R$
		4	$a_C = g(R + \delta)/2R$
5	КИНЕТИЧЕСКУЮ ЭНЕРГИЮ КАТКА 3 В ФУНКЦИИ ОТ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ S ГРУЗА 1.	1	$T_3 = 3P(R - \delta)S/4R$
		2	$T_3 = P(R - \delta)S/2R$
		3	$T_3 = P(R + \delta)S/2R$
		4	$T_3 = P(R - \delta)S/R$
6	РАБОТУ СИЛ, ПРИЛОЖЕННЫХ К СИСТЕМЕ, ПРИ ПЕРЕМЕЩЕНИИ S ГРУЗА 1	1	$A = P(2R - \delta)S/R$
		2	$A = P(R + \delta)S/R$
		3	$A = P(R - \delta)S/R$
		4	$A = 2P(R - \delta)S/R$

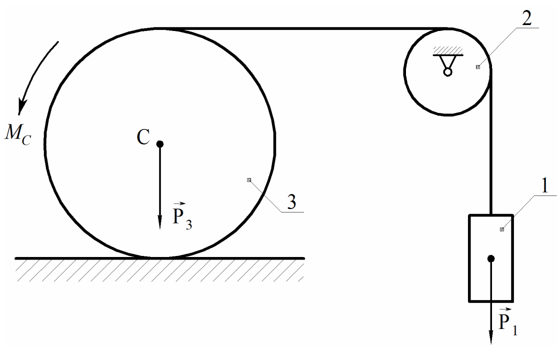
БИЛЕТ № 21



Механическая система состоит из груза 1, идеального блока 2 и катка 3, масса которого равномерно распределена по его ободу. Груз 1 весом *P* посредством невесомой нерастяжимой нити, перекинутой через блок, приводит в движение каток 2, весом *2P* радиуса *R*, катящийся без скольжения по неподвижной горизонтальной поверхности. Коэффициент трения качения катка о поверхность равен δ. Массой блока пренебречь. В начальный момент система находилась в покое.

№ п/п	ОПРЕДЕЛИТЬ:		ВАРИАНТЫ ОТВЕТА:
1	УГЛОВОЕ УСКОРЕНИЕ КАТКА	1	$\varepsilon = g(R - \delta)/3R^2$
		2	$\varepsilon = g(R - \delta)/4R^2$
		3	$\varepsilon = g(R - \delta)/2R^2$
		4	$\varepsilon = g(R + \delta)/4R^2$
2	КИНЕМАТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ГРУЗА 1	1	$S = g(R - \delta)t^2/4R$
		2	$S = g(R - \delta)t^2/2R$
		3	$S = g(R + \delta)t/4R$
		4	$S = g(R - 2\delta)t^2/6R$
3	НАТЯЖЕНИЕ НИТИ	1	$T_{1\text{-}2} = P(3R + \delta)/4R$
		2	$T_{1\text{-}2} = P(R + \delta)/2R$
		3	$T_{1\text{-}2} = P(R + \delta)/4R$
		4	$T_{1\text{-}2} = P(3R - \delta)/2R$
4	КОЛИЧЕСТВО ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ	1	$Q = P(R - \delta)t/R$
		2	$Q = P\sqrt{2}\,(R + \delta)t/2R$
		3	$Q = P(R - \delta)t/2R$
		4	$Q= P\sqrt{2}\,(R - \delta)t/2R$
5	ГЛАВНЫЙ МОМЕНТ СИЛ, ПРИЛОЖЕННЫХ К КАТКУ, ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРА МАСС КАТКА	1	$M_{3A} = P(R - \delta)/2$
		2	$M_{3A} = P(R - \delta)/4$
		3	$M_{3A} = P(R - 3\delta)/2$
		4	$M_{3A} = P(R + \delta)/2$
6	МОЩНОСТЬ СИЛ ПРИЛОЖЕННЫХ К ГРУЗУ	1	$N_1 = Pg(R - \delta)t/4R$
		2	$N_1 = Pg(R + \delta)t/2R$
		3	$N_1 = Pg(R - \delta)^2t/4R^2$
		4	$N_1 = Pg(R - \delta)^2/4R^2$

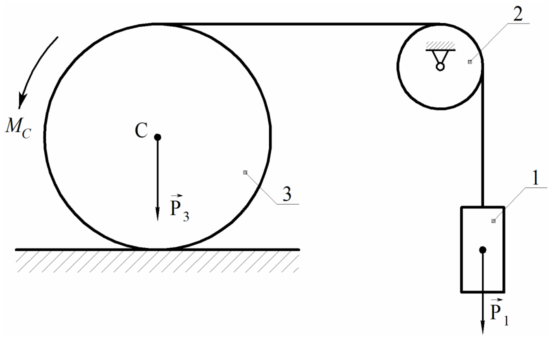
БИЛЕТ № 22



Механическая система состоит из груза 1, идеального блока 2 и катка 3, масса которого равномерно распределена по его ободу. Груз 1 весом *P* посредством невесомой нерастяжимой нити, перекинутой через блок, приводит в движение каток 2, весом *2P* радиуса *R*, катящийся без скольжения по неподвижной горизонтальной поверхности. Коэффициент трения качения катка о поверхность равен δ. Массой блока пренебречь. В начальный момент система находилась в покое.

№ п/п	ОПРЕДЕЛИТЬ:		ВАРИАНТЫ ОТВЕТА:
1	УСКОРЕНИЕ ЦЕНТРА КАТКА	1	$a_{C3} = g(R - \delta)/2R$
		2	$a_{C3} = g(R + \delta)/4R$
		3	$a_{C3} = g(R - \delta)/4R$
		4	$a_{C3} = g(R - \delta)/3R$
2	УГОЛ ПОВОРОТА КАТКА В ФУНКЦИИ ОТ ВРЕМЕНИ	1	$\varphi = g(R - \delta)t^2/4R^2$
		2	$\varphi = g(R - \delta)t^2/8R^2$
		3	$\varphi = g(R + 2\delta)t^2/8R^2$
		4	$\varphi = g(R - \delta)t/4R^2$
3	КОЛИЧЕСТВО ДВИЖЕНИЯ КАТКА	1	$Q_3 = P(R + \delta)t/2R$
		2	$Q_3 = P(R - 2\delta)t/4R$
		3	$Q_3 = P(R - \delta)t/4R$
		4	$Q_3 = P(R - 2\delta)t/2R$
4	КИНЕТИЧЕСКУЮ ЭНЕРГИЮ СИСТЕМЫ В ФУНКЦИИ ОТ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ S ГРУЗА 1	1	$T = P(R + \delta)S/R$
		2	$T = P(2R - \delta)S/R$
		3	$T = P(R - \delta)S/R$
		4	$T = 2P(R - \delta)S/R$
5	РАБОТУ СИЛ, ПРИЛОЖЕННЫХ К СИСТЕМЕ, ПРИ ПЕРЕМЕЩЕНИИ ГРУЗА 1	1	$A = P(2R - \delta)S/R$
		2	$A = P(R - \delta)S/R$
		3	$A = P(R + \delta)S/R$
		4	$A = 2P(R - \delta)S/R$
6	ГЛАВНЫЙ МОМЕНТ СИЛ, ПРИЛОЖЕННЫХ К КАТКУ, ОТНОСИТЕЛЬНО ТОЧКИ P СЦЕПЛЕНИЯ КАТКА С НЕПОДВИЖНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ	1	$M_{2P} = P(R - \delta)/2$
		2	$M_{2P} = P(R - \delta)$
		3	$M_{2P} = P(R + \delta)$
		4	$M_{2P} = P(R + 3\delta)$

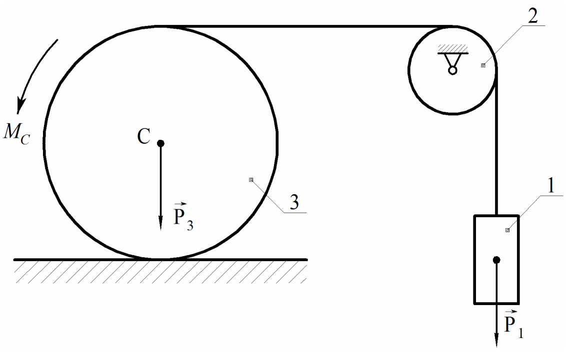
БИЛЕТ № 23



Механическая система состоит из груза 1, идеального блока 2 и катка 3, масса которого равномерно распределена по его ободу. Груз 1 весом *P* посредством невесомой нерастяжимой нити, перекинутой через блок, приводит в движение каток 2, весом *2P* радиуса *R*, катящийся без скольжения по неподвижной горизонтальной поверхности. Коэффициент трения качения катка о поверхность равен δ. Массой блока пренебречь. В начальный момент система находилась в покое.

№ п/п	ОПРЕДЕЛИТЬ:		ВАРИАНТЫ ОТВЕТА:
1	УГЛОВУЮ СКОРОСТЬ КАТКА В ФУНКЦИИ ОТ ВРЕМЕНИ	1	$\omega = g(R - \delta)t/4R^2$
		2	$\omega = g(R - \delta)t/2R^2$
		3	$\omega = g(R + \delta)t/2R^2$
		4	$\omega = g(R + \delta)t/4R^2$
2	УГОЛ ПОВОРОТАК КАТКА В ФУНКЦИИ ОТ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ S ГРУЗА 1	1	$\varphi = S/2R$
		2	$\varphi = S/R$
		3	$\varphi = 2S/R$
		4	$\varphi = S/2\pi R$
3	КОЛИЧЕСТВО ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ	1	$Q = P(R - \delta)t/R$
		2	$Q = P\sqrt{2}\ (R + \delta)t/4R$
		3	$Q = P\sqrt{2}\ (R - \delta)t/2R$
		4	$Q = P(R - \delta)t/2R$
4	СКОРОСТЬ ЦЕНТРА МАСС	1	$v_C = g\sqrt{5}\,(R - \delta)t/4R$
		2	$v_C = g\sqrt{2}\,(R - \delta)t/6R$
		3	$v_C = 3g(R - \delta)t/4R$
		4	$v_C = g(R - \delta)t/6R$
5	РАБОТУ, ЗАТРАЧЕННУЮ НА ПЕРЕМЕЩЕНИЕ S ГРУЗА 1	1	$A_1 = PS$
		2	$A_1 = P(3R + \delta)S/2R$
		3	$A_1 = P(R - \delta)S/R$
		4	$A_1 = P(R - \delta)S/2R$
6	ГЛАВНЫЙ МОМЕНТ СИЛ, ПРИЛОЖЕННЫХ К КАТКУ, ОТНОСИТЕЛЬНО ТОЧКИ P СЦЕПЛЕНИЯ КАТКА С НЕПОДВИЖНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ	1	$M_{3P} = P(R - \delta)/2$
		2	$M_{3P} = P(R - \delta)$
		3	$M_{3P} = P(R + \delta)$
		4	$M_{2P} = P(R + 3\delta)$

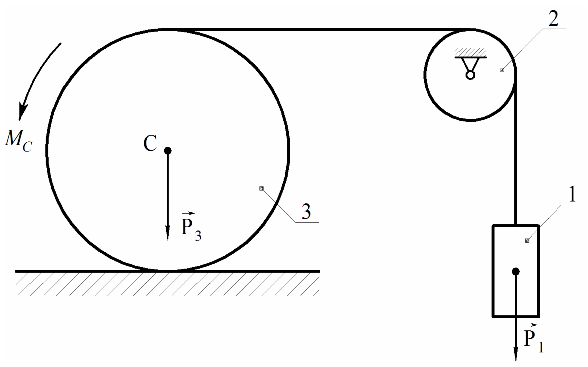
БИЛЕТ № 24



Механическая система состоит из груза 1, идеального блока 2 и катка 3, масса которого равномерно распределена по его ободу. Груз 1 весом *P* посредством невесомой нерастяжимой нити, перекинутой через блок, приводит в движение каток 2, весом *2P* радиуса *R*, катящийся без скольжения по неподвижной горизонтальной поверхности. Коэффициент трения качения катка о поверхность равен δ. Массой блока пренебречь. В начальный момент система находилась в покое.

№ п/п	ОПРЕДЕЛИТЬ:		ВАРИАНТЫ ОТВЕТА:
1	УГЛОВУЮ СКОРОСТЬ КАТКА В ФУНКЦИИ ОТ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ S ГРУЗА 1	1	$\omega = \sqrt{2gS}/2R$
		2	$\omega = \sqrt{g(R-\delta)S/R}/2R$
		3	$\omega = \sqrt{2gS}/R$
		4	$\omega = \sqrt{g(R-\delta)S/R}/R$
2	КИНЕМАТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЦЕНТРА КАТКА	1	$S_{C3} = g(R - \delta)t^2/4R$
		2	$S_{C3} = g(R + \delta)t^2/8R$
		3	$S_{C3} = g(R - \delta)t/4R$
		4	$S_{C3} = g(R - \delta)t^2/8R$
3	КОЛИЧЕСТВО ДВИЖЕНИЯ ГРУЗА 1	1	$Q_1 = P(R + \delta)t/2R$
		2	$Q_1 = P(R - \delta)t/2R$
		3	$Q_1 = P(R - 2\delta)t/3R$
		4	$Q_1 = P(R - 2\delta)t/2R$
4	УСКОРЕНИЕ ЦЕНТРА МАСС СИСТЕМЫ	1	$a_C = g(R - \delta)/3R$
		2	$a_C = g(R - \delta)/6R$
		3	$a_C = g\sqrt{2}(R - \delta)/6R$
		4	$a_C = g(R + \delta)/2R$
5	КИНЕТИЧЕСКУЮ ЭНЕРГИЮ ГРУЗА 1 В ФУНКЦИИ ОТ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ S ГРУЗА	1	$T_1 = P(R - \delta)S/2R$
		2	$T_1 = P(R + \delta)S/2R$
		3	$T_1 = P(3R + \delta)S/2R$
		4	$T_1 = PS$
6	РАБОТУ СИЛ, ПРИЛОЖЕННЫХ К СИСТЕМЕ, ПРИ ПЕРЕМЕЩЕНИИ ГРУЗА 1	1	$A = P(2R - \delta)S/R$
		2	$A = P(R - \delta)S/R$
		3	$A = P(R + \delta)S/R$
		4	$A = 2P(R - \delta)S/R$

БИЛЕТ № 25



Механическая система состоит из груза 1, идеального блока 2 и катка 3, масса которого равномерно распределена по его ободу. Груз 1 весом *P* посредством невесомой нерастяжимой нити, перекинутой через блок, приводит в движение каток 2, весом *2P* радиуса *R*, катящийся без скольжения по неподвижной горизонтальной поверхности. Коэффициент трения качения катка о поверхность равен δ. Массой блока пренебречь. В начальный момент система находилась в покое.

№ п/п	ОПРЕДЕЛИТЬ:		ВАРИАНТЫ ОТВЕТА:
1	СКОРОСТЬ ГРУЗА 1	1	$v_1 = g(R - \delta)t/2R$
		2	$v_1 = g(R + \delta)t/4R$
		3	$v_1 = g(R - 2\delta)t/6R$
		4	$v_1 = g(R - \delta)t/4R$
2	УГЛОВУЮ СКОРОСТЬ КАТКА В ФУНКЦИИ ОТ ВРЕМЕНИ	1	$\omega = g(R - \delta)t/2R^2$
		2	$\omega = g(R + \delta)t/2R^2$
		3	$\omega = g(R + \delta)t/4R^2$
		4	$\omega = g(R - \delta)t/4R^2$
3	КОЛИЧЕСТВО ДВИЖЕНИЯ ГРУЗА 1	1	$Q_1 = P(R + \delta)t/2R$
		2	$Q_1 = P(R - \delta)t/2R$
		3	$Q_1 = P(R - 2\delta)t/3R$
		4	$Q_1 = P(R - 2\delta)t/2R$
4	НАТЯЖЕНИЕ НИТИ	1	$T_{1\text{-}2} = P(3R + \delta)/4R$
		2	$T_{1\text{-}2} = P(R + \delta)/4R$
		3	$T_{1\text{-}2} = P(R + \delta)/2R$
		4	$T_{1\text{-}2} = P(3R + \delta)/2R$
5	КИНЕТИЧЕСКУЮ ЭНЕРГИЮ КАТКА 3 В ФУНКЦИИ ОТ ВРЕМЕНИ	1	$T_3 = Pg(R - \delta)^2t^2/8R^2$
		2	$T_3 = 2Pg(R - \delta)^2t^2/32R^2$
		3	$T_3 = Pg(R - \delta)^2t^2/4R^2$
		4	$T_3 = Pg(R + \delta)^2t^2/8R^2$
6	РАБОТУ СИЛ, ПРИЛОЖЕННЫХ К СИСТЕМЕ, ЗА ВРЕМЯ t	1	$A = Pg(R – \delta)t^2/4R$
		2	$A = Pg(R – \delta)^2t^2/8R^2$
		3	$A = Pg(R – \delta)^2t^2/4R^2$
		4	$A = Pg(R + \delta)^2t^2/4R^2$

Библиографический список

1. Бутенин Н.В. и др. Курс теоретической механики: учеб. пособие: В 2 т:. Рек. Мин. обр. РФ - СПб.: Лань,2004. -730 с.: (и предыдущие издания).

2. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики: Учебник. Рек. Мин. обр. РФ - М.: Высшая школа, 2003, 2006 – 416с. (и предыдущие издания).

3. Яблонский А.А. и др. Курс теоретической механики. учеб. пособие: Рек. Мин. обр. РФ - СПб.: Лань, 2004, -765 с.: (и предыдущие издания).

4. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: Учеб. пособие: Доп. Мин.обр. СССР / Ред. А.А. Яблонский/. - М.: Интеграл-Пресс, 2004. - 382 с. (и предыдущие издания).

5. Диевский В.А. Теоретическая механика: учеб. пособие: Рек. УМО/ - СПб.: Лань,2005. -320 с.

6. Аркуша А.И. Руководство к решению задач по теоретической механике: Учеб. пособие: рек.. Мин.обр.РФ/ М.: Высш. шк. 2002. – 336 с.

7. Цывильский В.Л. Теоретическая механика: Учеб. Рек. Мин. обр. РФ - М.: Высшая школа, 2001, 2008. – 319с.

8. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике: учеб. пособие. 44 изд., стер. Рек. Мин. обр. РФ – СПб. Лань, 2005. 448 с. (и предыдущие издания).

9. Луганцева Т.А., Труфанова Т.В. Динамика. учеб. пособие /Т.А.Луганцева, Т.В.Труфанова. - АмГУ, – Благовещенск: Изд-во АмГУ, 2011. – 144 с.

Режим доступа file://10.4.1.254/DigitalLibrary/AmurSU_Edition/3120.pdf.

СОДЕРЖАНИЕ

Луганцева Татьяна Анатольевна,

доцент кафедры АППиЭ (механика) АмГУ, канд. техн. наук

Труфанова Т.В.,

доцент кафедры МПиА АмГУ, канд. техн. наук

Динамика в вопросах и ответах. *Учебное пособие.*

Заказ 418.