Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Амурский государственный университет»

Кафедра математического анализа и моделирования

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС ДИСЦИПЛИНЫ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Направление подготовки 011200.62 Физика

Профиль подготовки: физика конденсированного состояния

Благовещенск 2012 г.

УМКД разработан канд. тех. наук, доцентом Труфановой Татьяной Вениаминовной

Рассмотрен и рекомендован на заседании кафедры
Протокол заседания кафедры от «___» ___________ 2012_ г. №_6__
Зав. кафедрой _______________ / В.В.Сельвинский /

УТВЕРЖДЕН
Протокол заседания учебно-методического совета направления _011200.62- Физика_
«____» _____________20___ г., протокол № _____
Председатель ____________ (Е.А. Ванина)

СОДЕРЖАНИЕ

1РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ
1.1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Показать, что такое обыкновенные дифференциальные уравнения, где и как они возникают, какие физические явления могут быть описаны с помощью обыкновенных дифференциальных уравнений. Научить студентов решать дифференциальные уравнения различных порядков и системы дифференциальных уравнений. Изучить основные методы решения дифференциальных уравнений. Изучить вопрос о влиянии применения начальных данных на решение систем дифференциальных уравнений.

1.2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ООП ВПО

Дисциплина «Дифференциальные уравнения» является базовой дисциплиной цикла общих математических и естественнонаучных дисциплин Федерального государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования (ФГОС ВПО) по направлению подготовки 011200.62 Физика.

Излагается на базе математического анализа, алгебры, теории функций комплексного переменного, физики.

1.3. КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Дисциплина " Дифференциальные уравнения " вырабатывает у студентов навыки построения математических моделей простейших физических явлений и решения (аналитического и численного) получающихся при этом математических задач. Студент должен свободно ориентироваться в основных разделах дисциплины, что включает:
дифференциальные уравнения первого порядка, дифференциальные уравнения высших порядков, системы дифференциальных уравнений. При изучении дисциплины студент приобретает практические навыки решения и исследования дифференциальных уравнений. Должен уметь подобрать соответствующий метод решения дифференциальных уравнений. Уметь применять дифференциальные уравнения на практике для исследования различных физических явлений.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен демонстрировать следующие результаты образования:

знать: основные теоремы обыкновенных дифференциальных уравнений, способы решения дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений;

уметь: решать обыкновенные дифференциальные уравнения различных видов, формулировать и доказывать теоремы, применять методы дифференциальных уравнений для решения математических задач, построения и анализа моделей механики, физики и естествознания, самостоятельно решать классические задачи;

владеть: методами решения обыкновенных дифференциальных уравнений первого и высших порядков, навыками практического использования современного математического инструментария для решения и анализа задач механики, физики и естествознания.

В процессе освоения данной дисциплины студент формирует и демонстрирует следующие профессиональные компетенции:

способность применять на практике базовые профессиональные навыки (ПК-2).

Выпускник должен обладать следующими общекультурными компетенциями:

способностью использовать в познавательной и профессиональной деятельности базовые знания в области математики и естественных наук (ОК-1);

способность использовать в познавательной и профессиональной деятельности навыки работы с информацией из различных источников (ОК-16).

1.4.СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ «Дифференциальные уравнения»

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3_ зачетных единиц, _108_ часов.

.

№ п/п	Раздел дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)			Формы текущего контроля успеваемости *(по неделям семестра)* Форма промежуточной аттестации *(по семестрам)*
				Лек.	Прак. зан.	Сам. раб.	
1	Дифференциальные уравнения 1-го порядка	4	1-6	6	6	12	Контрольная работа, устный опрос Индивидуальное задание №1
2	Дифференциальные уравнения n- порядка	4	6-12	6	6	12	Контрольная работа, устный опрос, рейтинговая оценка. Индивидуальное задание №2
3	Системы дифференциальных уравнений.	4	12 - 18	6	6	12	Контрольная работа, устный опрос, рейтинговая оценка, Индивидуальное задание №3, экзамен
				18	18	36	

1.5. СОДЕРЖАНИЕ РАЗДЕЛОВ И ТЕМ ДИСЦИПЛИНЫ

5.1. Лекции

Раздел 1. Дифференциальные уравнения 1-го порядка

Лекция 1. Введение. Теория дифференциальных, уравнений и ее приложения.
Основные понятия и определения теории дифференциальных уравнений

Дифференциальные уравнения 1-го порядка разрешенные относительно производной**.** Теорема существования и единственности решения уравнения $y' = f(x, y)$.

Лекция 2. Линейные уравнения первого порядка. Уравнения Бернулли, Риккати. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель.

Лекция 3. Дифференциальные уравнения 1-го порядка неразрешенные относительно производной. Частные виды уравнения $F(x, y, y')$, особые решения. Уравнения Лагранжа. Уравнения Клеро. Теорема существования и единственности для дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной. Особые решения.

Раздел 2. Дифференциальные уравнения n- порядка

Лекция 4. Дифференциальные уравнения n-го порядка. Простейшие случаи понижения порядка. Линейный дифференциальный оператор L и его свойства. Теоремы о решениях линейного однородного уравнения.

Лекция 5. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами. Уравнение Эйлера.

Лекция 6. Линейные неоднородные уравнения. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами.

Раздел3. Системы дифференциальных уравнений.

Лекция 7. Системы дифференциальных уравнений. Общие понятия. Интегрирование системы дифференциальных уравнений. Системы линейных дифференциальных уравнений.

Лекция 8. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Лекция 9 .Линейные неоднородные системы. Метод вариации произвольных постоянных. Решения линейных систем методами неопределенных коэффициентов.

5.2. Практические занятия.

Занятие 1. Уравнения с разделяющимися переменными. Однородные уравнения.

Занятие 2. Линейные уравнения первого порядка. Уравнения Бернулли, Риккати. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель.

Занятие3. Уравнения, не разрешенные относительно производной. Уравнение Лагранжа, Клеро.

Занятие 4.Уравнения, допускающие понижение порядка.

Занятие 5. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами.

Занятие 6. Линейные уравнения с переменными коэффициентами.

Занятие 7. Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами: метод исключения, метод Эйлера.

Занятие 8. Линейные неоднородные системы. Метод неопределенных коэффициентов, метод вариации постоянных.

Занятие 9. Контрольная работа.

1.6. САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

№ п/п	№ раздела (темы) дисциплины	Форма (вид) самостоятельной работы	Трудоёмкость в часах
1	1	Индивидуальное задание №1 Дифференциальные уравнения первого порядка.	8
2	2	Индивидуальное задание №2. Дифференциальные уравнения порядка выше первого.	8
3	3	Индивидуальное задание №3. Системы дифференциальных уравнений.	8
4	1-3	Выполнение домашних заданий.	6
5	1-3	Подготовка теоретического материала к каждому практическому занятию	6
6	1-3	Подготовка к экзамену.	36
			72

1.7. МАТРИЦА КОМПЕТЕНЦИЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Разделы	Компетенции			*Итого* общее количество компетенций
	ОК-1	*ОК-16*	*ПК-2*	

1	+	+	+	*З*
2	+	+	+	*З*
3	+	+	+	*З*
4	+	+	+	*З*

1.8.ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

Лекции: традиционное и проблемное изложение теоретического материала, текущий устный опрос, коллоквиумы, использование интерактивных обучающих мультимедиа средств; практические занятия: интерактивные методы решения задач, мозговой штурм, использование наглядных средств, контрольные работы; консультации, самостоятельная работа.

Не имитационные методы обучения: проблемная лекция.

Игровые имитационные методы обучения: мозговой штурм.

Неигровые имитационные методы обучения: метод группового решения задач.

Распределение образовательных технологий (не менее 30% от аудиторных занятий- 11 часов).

Занятия, проводимые в интерактивных формах, используются на лекциях и практических занятиях, темы которых приведены в таблице

Наименование тем:	Лек.	Прак.	Σ
1. Дифференциальные уравнения 1-го порядка разрешенные относительно производной**.** Основные положения теории дифференциальных уравнений разрешенных относительно производной. Задача Коши, поле направлений, изоклины, интегральные кривые. Уравнения, с разделяющимися переменными. Уравнения, приводящиеся, к уравнениям с разделяющимися переменными. (Проблемная лекция); (Метод группового решения задач).	2		2
2. Линейные уравнения первого порядка. Уравнения Бернулли, Риккати. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель. (Метод группового решения задач); (Мозговой штурм).		2	2
3. Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка. Уравнение Эйлера (различные случаи корней характеристического уравнения). (Проблемная лекция); (Метод группового решения задач).	2	2	4
4. Линейные неоднородные системы. Метод вариации произвольной постоянной. Периодические решения. Решения линейных систем методами неопределенных коэффициентов. (Метод группового решения задач); (Мозговой штурм).	1	2	3
Всего	5	6	11

1.9.ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ, ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО ИТОГАМ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ И УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

В течение семестра студенты разбирают и решают задачи, указанные преподавателем к каждому занятию, разбирают и повторяют основные понятия и теоремы, доказанные на лекциях. В течение семестра предусмотрены индивидуальные задания (3) и контрольная работа. По окончании курса предусмотрен экзамен.

Темы индивидуальных занятий:

№1. Дифференциальные уравнения первого порядка.

№2. Дифференциальные уравнения порядка выше первого.

№3. Системы дифференциальных уравнений.

Вопросы к экзамену

1. Дифференциальные уравнения. Основные понятия и определения.
2. Уравнения с разделяющимися переменными. Уравнения с разделенными переменными.
3. Уравнения, приводящиеся к уравнениям с разделяющимися переменными.
4. Линейные уравнения 1-го порядка.
5. Метод вариации постоянных.
6. Уравнение Бернулли и его сведение к линейному уравнению.
7. Уравнение Риккати и его сведение к линейному уравнению.
8. Уравнение в полных дифференциалах.
9. Интегрирующий множитель. Условие существования интегрирующего множителя, зависящего только от x и от y.
10. Метод Эйлера приближенного интегрирования Д.У.(ломаные Эйлера)
11. Теорема существования и единственности решения дифференциального уравнения первого порядка.
12. Особые точки, особые кривые (узел, село, фокус, центр).
13. Простейшие типы уравнений, неразрешенных относительно производной. Уравнения вида: $F(y')=0$ и $F(x,y')=0$.
14. Простейшие типы уравнений неразрешенных относительно производной. Уравнения вида: $F(y,y')=0$ и $F(x,y,y')=0$.
15. Уравнение Лагранжа.
16. Уравнение Клеро.
17. Теорема существования и единственности решения Д.У. n-го порядка.
18. Простейшие случаи понижения порядка. Уравнения вида: $F(x,y^{(k)}, y^{(k+1)},y^{(k+2)},\dots,y^{(n)})=0$ и $F(y, y',\dots,y^{(n)})=0$.
19. Простейшие случаи понижения порядка. Уравнения вида: $F(x,y,y',\dots,y^{(n)})=0$. (однородное относительно аргументов $y, y',\dots, y^{(n)}$).
20. Линейное однородное Д.У. n-го порядка.
21. Линейный дифференциальный оператор L и его свойства.
22. Теоремы о решениях линейного однородного уравнения
23. Линейно независимые функции на отрезке (линейно независимые). Определитель Вронского.
24. Общее решение линейного однородного Д.У., фундаментальная система решений.
25. Нахождение линейного однородного Д.У. по заданной фундаментальной системы решений. Пример.
26. Формула Остроградского - Лиувилля.
27. Линейные однородные Д.У. с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Случай различных действительных и мнимых корней.
28. Линейные однородные Д.У. с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Случай кратных действительных и мнимых корней.
29. Уравнение Эйлера (различные случаи корней характеристического уравнения).
30. Линейное неоднородное Д.У. Свойства частных решений.
31. Общее решение линейного неоднородного Д.У.(Теорема).

32.Метод вариации произвольных постоянных для уравнения n-го порядка.

33. Линейное неоднородное Д.У. с постоянными коэффициентами (правая часть является многочленом степени s).

34. Линейные неоднородные Д.У. с правой частью: $e^{sx}(A_0 x^{\delta}+\ldots+A_{\delta})$.

35. Линейные неоднородные Д.У с правой частью: $e^{px} Q_s(x) \cos \varphi x$.

35.Системы Д.У. Общие понятия.

36.Интегрирование систем Д.У. путем сведения к одному уравнению более высокого порядка.

37.Нахождение интегрируемых комбинаций для систем Д.У.

38.Ситемы линейных однородных Д.У. Линейный дифференциальный оператор и его свойства.

39.Основные теоремы о решениях линейных однородных систем. Общее решение линейных однородных систем.

40.Решение линейной неоднородной системы.

41.Системы линейных однородных Д.У. с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Решение систем Д.У.

42.Метод вариации постоянных для решения линейных неоднородных систем.

43.Общее решение систем линейных неоднородных Д.У. в зависимости от вида функции в правой части.

1.10.УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ « Дифференциальные уравнения»

Основная литература:

1.10.1. Егоров А.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями : [учеб.]/ А. И. Егоров. -М.: Физматлит, 2005. -384 с.:а-рис.

1.10.2. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений : Учеб. пособие/ Н. М. Матвеев. -5-е изд., доп.. -СПб.: Лань, 2003. -832 с.:а-ил

1.10.3. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения : [Учеб. пособие]/ М.В. Федорюк . -3-е изд., стер.. -СПб.: Лань, 2003, 2009. -448 с.

Дополнительная литература:

1.10.4. Боровских А.В. Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2004.-540 с.

1.10.5. Самойленко А.М. Дифференциальные уравнения : практ. курс: учеб. пособие: рек. Мин. обр. РФ/ А. М. Самойленко, С. А. Кривошея, Н. А. Перестюк. -3-е изд., перераб.. -М.: Высш. шк., 2006. -384 с.:а-рис.

1.10.6. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. -5-е изд., доп.-СПб.: Лань,2003.-832 с.

1.10.7. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям/ А.Ф. Филиппов . -М.; Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2005. -176 с

1.10.8. Труфанова Т.В. Дифференциальные уравнения в примерах и задачах : учеб. пособие: рек. ДВ РУМЦ/ Т. В. Труфанова, Е. М. Салмашова, В. А. Труфанов; АмГУ, ФМиМ. -Благовещенск: Изд-во Амур. гос. ун-та, 2006. -160 с.

1.10.9. Труфанова, Татьяна Вениаминовна. Дифференциальные уравнения в примерах и задачах : Учеб.- метод. пособие/ Т. В. Труфанова, В. В. Сельвинский ; АмГУ, ФМиИ Ч. III Системы дифференциальных уравнений и уравнения в частных производных 1-го порядка. – Благовещенск: Изд-во Амур. Гос. ун-та, 2002. -55 с. 50 экз.

1.10.10. Петровский, Иван Георгиевич. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений [Текст] : учеб. : доп. Мин. обр. РФ / И.Г. Петровский. - 7-е изд. - М. : ЛИБРОКОМ, 2009. - 237 с. : рис. - (Классический университетский учебник). - ISBN 978-5-

397-00007-9 (в пер.)

1.10.11. Эльсгольц, Л. Э.   Дифференциальные уравнения и вариационные исчисления [Текст] : учеб.: доп. Мин. обр. РФ / Эльсгольц Л.Э. - 4-е изд. - М. : Эдиториал УРСС, 2000. - 319 с.

1.10.12. Агафонов, Сергей Алексеевич. Дифференциальные уравнения [Текст] : учебник для вузов: доп. Мин. обр. РФ / С.А. Агафонов, А.Д. Герман, Т.В. Муратова; под. ред. В.С. Зарубина. - 2-е изд. - М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. - 348 с.

в) Периодические издания:

1) Дифференциальные уравнения.
2) Журнал вычислительной математики и математической физики.
3) Изв. РАН. Серия математическая.

г) программное обеспечение и Интернет-ресурсы:

№	Наименование ресурса	краткая характеристика
1	http://eqworld.ipmnet.ru/ru/methods/meth-ode.htm	Учебно-образовательная физико-математическая библиотека, содержащая DjVu- и PDF-файлы учебников по теме: Обыкновенные дифференциальные уравнения
2	http://eqworld.ipmnet.ru/ru/solutions/firstpde.htm	Учебно-образовательная физико-математическая библиотека, содержащая DjVu- и PDF-файлы учебников по теме: Обыкновенные дифференциальные уравнения

1.11.МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Дисциплина «Дифференциальные уравнения» входит в теоретический цикл фундаментальных дисциплин и не требует специального лабораторного оборудования.

Материальное обеспечение дисциплины предполагает наличие учебных аудиторий для проведения лекционных и практических занятий с возможностью использования мультимедийных средств.

1.12. РЕЙТИНГОВАЯ ОЦЕНКА ЗНАНИЙ СТУДЕНТОВ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Проводится в соответствии с положением о балльно-рейтинговой системе оценки знаний студентов АмГУ и положением кафедры МАиМ по дисциплине.

Система оценки в баллах

№	Вид работы	Норма	Максимальное кол-во баллов
	4-ый семестр		
1	Посещение занятий	0,5 балла/1часа ауд.зан.	18 баллов
2	Индивидуальное задание № 1	0-10 баллов	10 баллов
3	Индивидуальное задание № 2	0-10 баллов	10 баллов
4	Индивидуальное задание № 3	0-10 баллов	10 баллов
5	Домашние задания	0-6 баллов	6 баллов
6	Теоретический опрос	0-6 баллов	6 баллов
7	Экзамен	0 – 40 баллов	40 баллов
	Всего за семестр	0-100 баллов	100 баллов

2 Краткое изложение программного материала
Семестр обучения 3

Лекция 1. Введение. Теория дифференциальных, уравнений и ее приложения. Основные понятия и определения теории дифференциальных уравнений

Дифференциальные уравнения 1-го порядка разрешенные относительно производной. Теорема существования и единственности решения уравнения $y' = f(x, y)$.

План лекции. Место теории дифференциальных уравнений среди математических дисциплин и ее приложения.

При изучении физических явлений часто не удается непосредственно найти закон, связывающий независимые переменные и искомую функцию, но можно установить связь между этой функцией и ее производными или дифференциалами.

Основные понятия и определения теории дифференциальных уравнений:

Уравнения, в которых неизвестная функция или вектор-функция входит под знаком производной, или дифференциала, называется дифференциальными уравнениями.

Нахождение неизвестных функций, определяемых дифференциальными уравнениями, и является основной задачей теории дифференциальных уравнений.

Если в дифференциальном уравнении неизвестные функции или вектор - функции являются функциями одной переменной, то дифференциальное уравнение называется обыкновенным.

Если неизвестная функция, входящая в дифференциальное уравнение, является функцией двух или большего числа независимых переменных, то дифференциальное уравнение называется уравнением в частных производных.

Порядком дифференциального уравнения называется максимальный порядок входящей в уравнение производной (или дифференциала) неизвестной функции.

Решением дифференциального уравнения называется функция, которая при подстановке в дифференциальное уравнение обращает его в тождество.

Процесс нахождения решений дифференциального уравнения называется интегрированием дифференциального уравнения.

Часто дополнительные условия задаются не в одной, а в двух точках – носит название краевой или граничной задачей.

Точное или приближенное решение задач с начальными условиями и граничных задач является основной задачей теории дифференциальных уравнений, однако иногда требуется выяснить или приходится ограничиваться выяснением лишь некоторых свойств решений.

Дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной, устанавливает зависимость между координатами точки и угловым коэффициентом касательной к графику решения в той же точке. Следовательно, дифференциальное уравнение рассматриваемого вида определяет поле направлений, и задача интегрирования дифференциального уравнения заключается в том, чтобы найти кривые, называемые интегральными кривыми, направление касательных к которым в каждой точке совпадает с направлением поля.

Уравнения, с разделяющимися переменными. Уравнения, приводящиеся к уравнениям с разделяющимися переменными.

Уравнения вида $\varphi_1(x)\psi_1(y)dx = \varphi_2(x)\psi_2(y)dy$, в которых коэффициенты при дифференциалах распадаются на множители, зависящие только от x и только от y, называются дифференциальными уравнениями с разделяющимися переменными. Так как путем деления на $\psi_1(y)\varphi_2(x)$ они приводятся к уравнению с разделенными переменными $\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}dx = \frac{\psi_2(y)}{\psi_1(y)}dy$.Метод решения уравнений с разделяющимися переменными. Отыскание потерянных решений. Три типа уравнений сводящихся к уравнениям с разделяющимися переменными. I. К числу таких уравнений относятся, например уравнения вида

$$\frac{dy}{dx} = f(ax+by),$$

где a и b постоянные величины, которые заменой переменных $z = ax+by$ преобразуется в уравнение с разделяющими переменными.

II. К уравнениям с разделяющимися переменными приводятся и так называемые однородные дифференциальные уравнения первого порядка, имеющие вид: $\frac{dy}{dx} = f(\frac{y}{x})$.

III. Уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = f(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2})$$

преобразуется в однородные уравнения путем переноса начала координат в точку пересечения (x_1, y_1) прямых

$$a_1x+b_1y+c_1=0 \text{ и } a_2x+b_2y+c_2=0.$$

Цель лекции. Ввести студентов в дисциплину «Дифференциальные уравнения», обозначить структуру курса, содержание практического и лекционного материала по основным разделам, предусмотренным Государственным образовательным стандартом, озвучить междисциплинарные связи, правила организации аудиторной и самостоятельной работы студентов, дать методические рекомендации по изучению дисциплины, указать список основной и дополнительной литературы, рекомендуемой студентам, ознакомить студентов с формами текущего и итогового контроля по дисциплине. Дать основные понятия и определения.

Выделить класс уравнений с разделяющимися переменных и уравнений, сводящихся к уравнениям с разделяющимися переменными. Объяснить методы решения таких уравнений.

Ключевые вопросы:1) Дать определение обыкновенного дифференциального уравнения. 2)Дать определение дифференциального уравнения с частными производными (УЧП) 3) Какие уравнения называются линейными, нелинейными. 4)Что такое порядок уравнения, что такое число неизвестных? 5) Что называется решением дифференциального уравнения? 6)Сформулировать задачу с начальными условиями.7)Привести примеры дифференциальных уравнений. 8) Записать дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной.9) Что называется изоклинами? 10) Какие уравнения называются уравнениями, с разделяющимися переменными? 11) Как интегрируются уравнения с разделяющимися переменными? 12) Перечислить три вида уравнений сводящихся к уравнениям с разделяющимися переменными. 13) При помощи каких замен они сводятся к уравнениям с разделяющимися переменными? 14) Какие уравнения называются однородными?

Ссылки на литературные источники:

1.10.1-1.10.4; 1.10.6; 1.10.10-1.10.12.

Лекция 2. Линейные уравнения первого порядка. Уравнения Бернулли, Риккати. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель.

План лекции. *Определение.* Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение линейное относительно неизвестной функции и ее производной. Линейное уравнение имеет вид

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x)$$

где $p(x)$ и $f(x)$ в дальнейшем будем считать непрерывными функциями x в области интегрирования уравнения.

Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение называется линейным однородным. В линейном однородном уравнении переменные разделяются. Общее решение линейного неоднородного уравнения. Метод вариации произвольных постоянных или метод Лагранжа решения неоднородного уравнения. Уравнение Бернулли и сведение его к линейному дифференциальному уравнению первого порядка. Метод Бернулли решения линейных уравнений первого порядка. Уравнение Риккати и его сведение к уравнению Бернулли. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель. Методы интегрирования уравнения в полных дифференциалах. Метод нахождения интегрирующего множителя.

Цель лекции. Ввести понятие линейного уравнения первого порядка и дать методы решения этого уравнения. Ввести некоторые классы уравнений сводящихся к линейным уравнениям. Познакомить студентов с уравнением в полных дифференциалах и методами решения этого уравнения. Научить сводить некоторые дифференциальные уравнения при помощи интегрирующего множителя к уравнениям в полных дифференциалах.

Ключевые вопросы: 1) Какое уравнение называется линейным дифференциальным уравнением первого порядка? 2) Какое уравнение называется однородным, а какое неоднородным? 3) Методы решения линейного уравнения первого порядка. 4)В чем заключается идея метода Лагранжа? 5) Уравнение Бернулли и замена, сводящая это уравнение к линейному. 6) Уравнение Риккати и замена, сводящая это уравнение к уравнению Бернулли. 7) Какие уравнения называются уравнения в полных дифференциалах? 8) Записать необходимые и достаточные условия Эйлера. 9)Как проинтегрировать уравнения в полных дифференциалах? 10) Что называется интегрирующим множителем? 11) Записать формулу для нахождения интегрирующего множителя, зависящего от x. 12) Записать формулу для нахождения интегрирующего множителя, зависящего от y.

Ссылки на литературные источники:

1.10.1-1.10.4; 1.10.6; 1.10.10-1.10.12.

Лекция 3. Дифференциальные уравнения 1-го порядка неразрешенные относительно производной. Частные виды уравнения $F(x, y, y')$, особые решения. Уравнения Лагранжа. Уравнения Клеро. Теорема существования и единственности для дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной. Особые решения.

План лекции. Дифференциальное уравнение первого порядка, не разрешенное относительно производной, имеет вид

$F(x, y, y') = 0$. Рассмотрим типы уравнений, не разрешенных относительно производной.

1. Уравнение имеет вид $F(y') = 0$.**2.** Уравнение имеет вид $F(x, y') = 0$.

3. Уравнение имеет вид $F(y, y') = 0$. 4.Рассмотрим теперь общий случай: левая часть уравнения

$F(x, y, y') = 0$. Параметрическое представление решения. Приведем примеры дифференциальных уравнений 1-го порядка не разрешенных относительно производной. Введем уравнение Лагранжа. Рассмотрим метод интегрирования этого уравнения. Рассмотрим частный случай уравнения Лагранжа- уравнение Клеро. Метод интегрирования уравнения Клеро. Особые решения.

Цель лекции. Ознакомить студентов с методами интегрирования дифференциальных уравнений 1-го порядка не разрешенных относительно производной. Продемонстрировать на конкретных примерах интегрирование дифференциальных уравнений с помощью дифференцирования

Ключевые вопросы: 1) Дать определение дифференциальному уравнению, не разрешенному относительно производной. 2)Как проинтегрировать уравнение, если в него входит только производная от неизвестной функции? 3) Как проинтегрировать уравнение, если в него не входит искомая функция? 4) Как проинтегрировать уравнение, если в него не входит независимое переменное? 5)Общий метод интегрирования дифференциального уравнения, не разрешенного относительно производной. 6) Дать определение особых решений. . 7) Записать уравнение Лагранжа. 8)Метод интегрирования уравнение Лагранжа.9) Записать уравнение Клеро.10) Метод интегрирования уравнения Клеро.

Ссылки на литературные источники:

1.10.1-1.10.4; 1.10.6; 1.10.10-1.10.12.

Лекция 4. Дифференциальные уравнения n-го порядка. Простейшие случаи понижения порядка. Линейный дифференциальный оператор L и его свойства. Теоремы о решениях линейного однородного уравнения.

План лекции. Уравнение n-го порядка. Дифференциальное уравнение n-го порядка имеет вид

$F\left(x, y, y', y'',..., y^{(n)}\right)=0$, где x – независимая переменная, y – искомая функция, а функция F определена и непрерывна в некоторой области $G \subseteq \mathbf{R}^{n+2} (n \geq 1)$.

Дифференциальное уравнение n-го порядка, разрешенное относительно старшей производной, имеет вид

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'',..., y^{(n-1)}\right),$$

где функция f также предполагается непрерывной в некоторой области $D \subseteq \mathbf{R}^{n+1}$ изменения своих аргументов.

Общее решение. Частное решение уравнения n-го порядка. Теорема существования и единственности для дифференциального уравнения n-го порядка.

Уравнения, допускающие понижение порядка: 1. Если в уравнение не входит неизвестной функции y. 2. Если в уравнение не входят независимое переменное x. 3.Если уравнение однородно относительно неизвестной функции и ее производных. 4. Порядок уравнения можно понизить, если оно однородно относительно x и y в обобщенном смысле.

Линейным дифференциальным уравнением n-го порядка называется уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + ... + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x).$$

Здесь функции $a_1(x), a_2(x),..., a_n(x), f(x)$ непрерывны на интервале (a,b).

Если $f(x) \equiv 0$, уравнение называется линейным однородным, если $f(x) \neq 0$, – линейным неоднородным, или линейным уравнением с правой частью.

Краткая запись линейного неоднородного уравнения имеет вид $L(y) = f(x)$, где L – линейный дифференциальный оператор n-го порядка, т.е.

$$L(y) = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_n(x)y,$$

определенный на множестве n раз непрерывно дифференцируемых на (a,b) функций. Краткая запись линейного однородного уравнения соответственно имеет вид: $L(y) = 0$.Основные свойства дифференциального оператора n-го порядка.

Решение линейных однородных и неоднородных дифференциальных уравнений n-го порядка методом понижения порядка уравнения.

Зная одно частное решение $y_1(x)$ линейного однородного уравнения, можно с помощью замены искомой функции $y(x) = y_1(x)\int z(x)dx$ понизить его порядок, а, следовательно, и порядок соответствующего неоднородного уравнения (2.13), на единицу. Полученное уравнение (n-1)-го порядка относительно z также является линейным. Общее решение линейного однородного уравнения n-го порядка. Общее решение линейного неоднородного уравнения n-го порядка. Линейная зависимость и независимость функций. Примеры линейно зависимых и независимых функций. Определитель Вронского. Теоремы, определяющие свойства определителя Вронского. Теоремы, определяющие свойства решений уравнением n-го. Фундаментальная система решений. Максимальное число линейно независимых решений. Нахождение дифференциального уравнения по заданной системе фундаментальных решений. Вывод формулы Остроградского-Лиувилля.

Цель лекции. Познакомить студентов с уравнениями n-го порядка и доказать теорему существования и единственности для дифференциального уравнения n-го порядка. Дать понятие линейного дифференциального уравнения n-го порядка.

Ввести линейный дифференциальный оператор n-го порядка и его свойства. Сформулировать и доказать свойства решений обыкновенных линейных дифференциальных уравнений n-го порядка.

Ключевые вопросы. 1) Какой вид имеет дифференциальное уравнение n-го порядка? 2)Сформулировать теорему существования и единственности для дифференциального уравнения n-го порядка. 3)Что называется общим решением дифференциального уравнения n-го порядка? 4) Перечислить уравнения допускающие понижение порядка и методы решения этих уравнений. 5)Какое уравнение называется линейным дифференциальным уравнением n-го порядка? 6) Что называется линейным дифференциальным оператор n-го порядка? 7) Как понизить порядок уравнения, зная одно частное решение? 8)Какие функции называются линейно зависимыми и независимыми? 9) Что называется фундаментальной системой решений? 10)Запишите определитель Вронского. 11) Как по заданной системе решений построить дифференциальное уравнение? 12)Записать формулу Остроградского – Лиувилля. 13)Как формула Остроградского – Лиувилля может быть использована для интегрирования линейного однородного уравнения второго порядка?14) Сформулировать основные свойства решений уравнением n-го.

Ссылки на литературные источники:

1.10.1-1.10.4; 1.10.6; 1.10.10-1.10.12.

Лекция 5. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами. Уравнение Эйлера.

План лекции. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами. Метод Эйлера. Характеристическое уравнение. Случай, когда корни характеристического уравнения действительные и различные. Случай, когда корни характеристического уравнения действительные и кратные. Среди корней характеристического уравнения, имеются комплексные корни. Характеристическое уравнение имеет кратный комплексный корень. Уравнение Эйлера и его сведение к линейному однородному уравнению с постоянными коэффициентами. Методы решения уравнения Эйлера.

Линейным однородным уравнением n-го порядка с постоянными коэффициентами называется уравнения вида

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_n y = 0,$$

где $a_1, a_2, ..., a_n$ – некоторые действительные числа.

Для нахождения частных решений составляют характеристическое уравнение

$$k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_{n-1} k + a_n = 0,$$

которое получается из дифференциального уравнения, если искать частные решения этого уравнения в виде $y = e^{kx}$ (метод подбора решений, метод Эйлера).

Характеристическое уравнение, является уравнением n-й степени и имеет n корней действительных или комплексных, среди которых могут быть и равные.

Частные решения дифференциального уравнения зависят от вида корней характеристического уравнения и при их нахождении полезно использовать таблицу 1.

Таблица 1

Характер корней характеристического уравнения	Частные решения уравнения
k – простой вещественный корень	e^{kx}
k – вещественный корень кратности r	$e^{kx}, xe^{kx}, x^2 e^{kx}, \ldots, x^{r-1} e^{kx}$

$\alpha \pm \beta i$ – комплексно сопряженные корни	$e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x$
$\alpha \pm \beta i$ – комплексно сопряженные корни кратности r	$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x,\dots,x^{(r-1)}e^{\alpha x}$ c $e^{\alpha x}\sin\beta x,\ xe^{\alpha x}\sin\beta x,\dots,x^{(r-1)}e^{\alpha x}$ si

Общее решение дифференциального уравнения записывается так:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_{n-1} y_{n-1} + c_n y_n,$$

где $y_1, y_2, \dots, y_n$ – частные линейно независимые решения, образующие фундаментальную систему, а $c_1, c_2, \dots, c_n$ – произвольные постоянные.

<u>Цель лекции</u>. Ввести линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и дать методы интегрирования этих уравнений. Дать понятие уравнения Эйлера и методы интегрирования этого уравнения.

<u>Ключевые вопросы</u>: 1) Записать линейное однородные уравнения с постоянными коэффициентами. 2)Какое уравнение называется характеристическим? 3)Метод Эйлера интегрирования линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами. 4) Записать общий вид решения дифференциального уравнения, если корни характеристического уравнения действительные и различные. 5) Записать общий вид решения дифференциального уравнения, если корни характеристического уравнения действительные и кратные. 6) Записать общий вид решения дифференциального уравнения, если корни характеристического уравнения комплексные. 7) Записать общий вид решения дифференциального уравнения, если корни характеристического уравнения кратные комплексные. 8) Записать вид уравнения Эйлера. 9) При помощи каких замен независимого переменного и искомой функции, уравнение Эйлера сводится к линейному уравнению с постоянными коэффициентами?

<u>Ссылки на литературные источники</u>:

<u>1.10.1-1.10.4; 1.10.6; 1.10.10-1.10.12.</u>

<u>Лекция 6.</u> Линейные неоднородные уравнения. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами.

<u>План лекции.</u> Линейные неоднородные уравнения с переменными коэффициентами. Свойства решений неоднородного уравнения. Структура общего решения неоднородного уравнения. Метод интегрирования линейного неоднородного уравнения (метод вариации произвольных постоянных). Пример применение метода Лагранжа. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами. Подбор частного решения неоднородного уравнения по виду правой части. Правая часть является многочленом степени s. Правая часть является произведением многочлена степени s на экспоненциальную функцию. Правая часть является произведением многочлена на тригонометрическую функцию. В зависимости от корней характеристического уравнения и показателя экспоненты стоящей в правой части решения надо искать в соответствующем виде.

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, т.е. уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x),$$

где a_i $(i = 1,2,\dots,n)$ - действительные числа, а $f(x) \neq 0$.

Общее решение уравнения записывается в виде $y = \bar{y} + y^*$, где $\bar{y}$ – общее решение $L(y) = 0$. соответствующего данному, y^* – любое частное решение уравнения $L(y) = f(x)$.

Общее решение $\bar{y}$ находится с помощью табл. 1.

Для отыскания $y*$ в общем случае можно воспользоваться методом Лагранжа вариации произвольных постоянных.

В частных случаях, когда функция $f(x)$ в уравнении (2.17) имеет специальный вид, частное решение находится методом неопределенных коэффициентов (метод подбора частного решения). При этом используют табл. 2.

Таблица 2

Вид правой части уравнения (2.17)	Корни характеристического уравнения $L(y)=0$.	Вид частного решения уравнения (2.17)
$f(x)=e^{\alpha x}P_m(x)$	1) α – не является корнем характеристического уравнения 2) α – корень характеристического уравнения кратности r	1) $y^*=e^{\alpha x}Q_m(x)$ 2) $y^*=x^r e^{\alpha x}Q_m(x)$
$f(x)=A\cos\beta x+B\sin\beta x$	1) $\pm\beta i$ – не является корнем характеристического уравнения 2) $\pm\beta i$ – корень характеристического уравнения кратности r	1) $y^*=M\cos\beta x+N\sin\beta x$ 2) $y^*=x^r(M\cos\beta x+N\sin\beta x)$
$f(x)=e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x+$ $+P_n(x)\sin\beta x]$	1) $\alpha\pm\beta i$ – не является корнем характеристического уравнения 2) $\alpha\pm\beta i$ – корень характеристического уравнения кратности r	1) $y^*=e^{\alpha x}[M_k(x)\cos\beta x+N_k(x)\sin\beta x]$ 2) $y^*=x^r e^{\alpha x}[M_k(x)\cos\beta x+N_k(x)\sin\beta x]$

Замечание 1. (к табл. 2). $M_k(x)=A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots+A_kx^k$,

$N_k(x)=B_0+B_1x+B_2x^2+\ldots+B_kx^k$, где k – наибольшее из чисел m и n.

Замечание 2. Если $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$, то $y^*=y_1^*+y_2^*$, где y_1^* соответствует $f_1(x)$, а y_2^* - $f_2(x)$.

Замечание 3. Многочлены $Q_m(x)$ должны быть полными (т.е. содержать все степени x от 0 до m). Если в выражение функции $f(x)$ входит хотя бы одна из функций $\cos\beta x$ или $\sin\beta x$, то в $y*$ нужно всегда вводить обе функции.

Цель лекции. Дать понятие Линейные неоднородные уравнения с переменными коэффициентами. Свойства решений неоднородного уравнения. . Научить студентов решать Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.
Ключевые вопросы: 1) Записать линейное неоднородные уравнения с переменными коэффициентами. 2) Сформулировать основные теоремы, определяющие свойства решений неоднородного уравнения. 3) Чему равно общее решение неоднородного уравнения? 4) В чем заключается метод вариации произвольных постоянных? 5) Привести пример применение метода Лагранжа. 6) В каком виде записывается общее решение неоднородного уравнения?7) В каком виде ищется частное решение неоднородного уравнения, если в правой части дифференциального уравнения стоит многочлен. 8) В каком виде ищется частное решение неоднородного уравнения, если правая часть является произведением многочлена степени s на экспоненциальную функцию? 9) В каком виде ищется частное решение неоднородного уравне-

ния, если правая часть является произведением многочлена на тригонометрическую функцию?

Ссылки на литературные источники:

1.10.1-1.10.4; 1.10.6; 1.10.10-1.10.12.

Лекция 7. Системы дифференциальных уравнений. Общие понятия. Интегрирование системы дифференциальных уравнений. Системы линейных дифференциальных уравнений.

План лекции. Основные понятия. Что называется системой дифференциальных уравнений. Нормальная система дифференциальных уравнений. Решение системы дифференциальных уравнений. Динамическая система. Фазовое пространство, фазовая траектория. Теорема существования и единственности решения системы дифференциальных уравнений. Основные методы интегрирования систем дифференциальных уравнений. Метод сведения к одному уравнению более высокого порядка. Нахождение интегрируемых комбинаций. Симметрическая форма записи системы уравнений. Определение системы линейных дифференциальных уравнений. Введем линейный дифференциальный оператор и его основные свойства. Система однородных дифференциальных уравнений. Изложим свойства решений система однородных дифференциальных уравнений. Система линейно зависимых и независимых векторов. Определитель Вронского системы функций. Приведем свойства определителя Вронского. Определим фундаментальную систему решений системы линейных дифференциальных уравнений. Общее решение однородной системы линейных дифференциальных уравнений. Общее решение неоднородной системы линейных дифференциальных уравнений.

Цель и задачи лекции. Познакомить студентов с теорией систем дифференциальных уравнений. Рассмотрим задачи, в которых требуется найти несколько неизвестных функций от одной независимой переменной, удовлетворяющих заданной системе дифференциальных уравнений, число которых равно числу неизвестных функций.

Ключевые вопросы: 1) Дать определение системы обыкновенных дифференциальных уравнений. 2) Что называется решением системы дифференциальных уравнений? 3) Сформулировать теорему существования и единственности решения системы дифференциальных уравнений. 4) Что называется частным решением системы? 5) Изложить метод сведения к одному уравнению более высокого порядка. 6) Изложить метод нахождения интегрируемых комбинаций.7) Записать нормальную систему в симметричной форме. 8) Что называется системой линейных дифференциальных уравнений. 9)Что собой представляет линейный дифференциальный оператор? 10) Сформулировать основные свойства дифференциального оператора. 11)Сформулируйте основные свойства определителя Вронского. 12) Что называется фундаментальной системой решений? 13) Сформулировать основные свойства решений системы линейных дифференциальных уравнений

Ссылки на литературные источники:

1.10.1-1.10.4; 1.10.6; 1.10.10-1.10.12.

Лекция 8. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

План лекции. Определение линейной системы с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Построение решений линейной системы с постоянными коэффициентами в зависимости от корней характеристического уравнения. Все корни характеристического уравнения действительны и различны. Корни характеристического уравнения различны, но среди них имеются комплексные. Среди корней характеристического уравнения имеются кратные. Решение систем, не приведенных к нормальному виду. Фундаментальная матрица. Матричная экспонента.

Цель и задачи лекции. Ввести линейные системы с постоянными коэффициентами и построить линейно независимые частные решения.

Ключевые вопросы: 1) Какая система с постоянными коэффициентами называется линейной? 2) Какое уравнение называется характеристическим? 3)От чего зависит структура фундаментальной системы решений? 4) Как решить систему не приведенных к нормальному виду.

Ссылки на литературные источники:

1.10.1-1.10.4; 1.10.6; 1.10.10-1.10.12.

Лекция 9 .Линейные неоднородные системы. Метод вариации произвольных постоянных. Решения линейных систем методами неопределенных коэффициентов.

План лекции. Общее решение неоднородной системы линейных дифференциальных уравнений. Метод вариации произвольных постоянных для решения неоднородных систем.

Рассмотрим линейные неоднородные системы. Линейной неоднородной системой называется система вида

$$\frac{dx_i}{dt} = a_{i1}(t)x_1 + a_{i2}(t)x_2 + ... + a_{in}(t)x_n + f_i(t), \; i = \overline{1,n}, \qquad (1)$$

или в векторной записи

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t),$$

где x – вектор с компонентами $x_1, ..., x_n$; $A(t)=\{a_{ij}(t)\}$ – матрица, компонентами которой являются функции $a_{ij}(t)$; f(t) – вектор-функция с компонентами $f_i(t)$.

Систему линейных неоднородных уравнений можно решать путем приведения их к одному уравнению более высокого порядка.

Решение линейной неоднородной системы можно найти методом вариации постоянных, если известно общее решение однородной системы с теми же коэффициентами $a_{ij}(t)$. Для этого в формуле общего решения однородной системы надо заменить произвольные постоянные c_i на неизвестные функции $c_i(t)$. Полученные выражения для x_i надо подставить в систему и из этой системы найти функции $c_i(t)$.

Частное решение линейных неоднородных систем с постоянными коэффициентами, можно искать методом неопределенных коэффициентов в том случае, когда функции стоящая в правой части $f_i(t)$ состоят из сумм и произведений функций t^m, $e^{\alpha t}$, $\cos\beta t$, $\sin\beta t$. Это делается по тем же правилам, что и для одного линейного уравнения с постоянными коэффициентами, но со следующими изменениями. Если в $f_i(t) = P_{m_i}(t)e^{\gamma t}$, где $P_{m_i}(t)$ – многочлен степени m_i, то частное решение системы ищется в виде

$Q^i_{m+s}(t)e^{\gamma t}, \; i = \overline{1,n}$,

где $Q^i_{m+s}(t)$ - многочлен степени m+s с неизвестными коэффициентами, $m = \max\{m_i, s\} = 0$, если γ – не корень характеристического уравнения, а если γ – корень, то s следует взять равным кратности этого корня.

Аналогично определяются степени многочленов в случае, когда $f_i(t)$ содержит $e^{\alpha t}\cos\beta$ t и $e^{\alpha t}\sin\beta$ t,; здесь γ=α+βi.

Цель и задачи лекции. Изложить общие методы решения неоднородных систем.

Ключевые вопросы. 1) Структура общего решения неоднородной системы линейных дифференциальных уравнений.2) Идея метода Лагранжа для отыскания решения неоднородной системы.3)Какими методами можно найти решения неоднородных систем? 4) Что называется матричной экспонентой? 5)Какова идея метода неопределенных коэффициентов, отыскания частных решений неоднородной системы дифференциальных уравнений?

Ссылки на литературные источники:

1.10.1-1.10.4; 1.10.6; 1.10.10-1.10.12.

3. Методические указания

Для оптимальной организации изучения дисциплины студентам рекомендуется следовать следующим методическим указаниям.

Студенты обязаны присутствовать на лекциях и практических занятиях и выполнять все предусмотренные учебно-методическим комплексом дисциплины формы учебной работы. Материалы лекций являются основой для изучения курса и подготовки к практическим занятиям. Лекция является одним из основных источников знаний, так как она содержит в себе информацию в обобщенном и законченном виде.

При изучении курса учебной дисциплины особое внимание следует обратить на правильное ведение конспекта. После лекции необходимо работать с учебниками, рекомендованными лектором, дополнять лекцию новыми примерами, разъяснениями, дополняющими рассмотренную теорию. Вносить в конспект курса лекций теоретические вопросы, отнесенные к самостоятельному изучению тем, предусмотренных рабочей программой дисциплины.

Перед очередной лекцией полезно изучить предыдущую лекцию.

Дисциплина «Дифференциальные уравнения» изучается студентами в 3 семестре обучения. 3 семестр включает 18 часов лекционных занятий, 18 часа практических занятий и заканчивается экзаменом. На самостоятельную работу студентов отводится 36 часов и 36 на подготовку и сдачу экзамена.

Теоретическая часть курса включает следующие разделы тем (в скобках указан объем каждого раздела в часах).

Раздел1. Дифференциальные уравнения, первого порядка, (6).

Раздел 2. Дифференциальные уравнения порядка выше первого (6).

Раздел 3. Системы дифференциальных уравнений (6).

Каждая лекция содержит необходимый объем теоретического материала, изучение которого предусмотрено государственным образовательным стандартом дисциплины, а также некоторые дополнительные главы, необходимые для дальнейшего изучения прикладных дисциплин. В дополнение к лекционному материалу, студентам рекомендуется использовать основную и дополнительную литературу согласно перечню, приведенному в п.1.10.

Студенты в рамках аудиторных занятий должны, в целом, владеть математическим аппаратом, основанном на ранее изученных дисциплинах, воспринимать теоретический материал основного содержания лекции, видеть причинно-логические связи в лекции, понимать алгоритм решения задач, приводимых в лекции. Для освоения темы каждой лекции на более глубоком уровне требуется дополнительная работа с теоретическим материалом в форме прочтения и изучения основной и дополнительной литературы, самостоятельной работы с лекцией.

3.1 Методические указания к практическим занятиям

Практические занятия направлены на закрепление теоретического материала на практическом уровне и предусматривают реализацию аналитических методов по вариантам индивидуальных заданий. Для выполнения индивидуальных заданий необходимо освоить теоретические основы соответствующего раздела, закрепить теорию на практических занятиях и пользоваться методической литературой по данной теме. Каждое индивидуальное задание оформляется в соответствии с требованиями преподавателя и защищается на консультациях.

Перед практическим занятием разобрать материал, изложенный на лекции и выполнить самостоятельную работу, предусмотренную рабочим планом. Для этого используются: конспект лекций, соответствующие разделы печатных и электронных учебников, ответы на вопросы для самоконтроля знаний. После практического занятия самостоятельно решить рекомендованные задачи на дом и индивидуальные задания.

Если у студента возникают вопросы по выполнению индивидуальных заданий или домашних заданий, то он может обратиться к преподавателю за консультацией, которая проводится один раз в неделю в заранее установленное время. Кроме этого по выполнению домашнего задания и освоению лекционного курса, вопросы желательно задавать и на практических и на теоретических занятиях.

Студент обязан проходить промежуточный и итоговый контроль в виде защит индивидуальных и практических работ, аттестации в форме тестового контроля знаний; сдачи экзаменов в предлагаемой преподавателем форме.

Практический курс предусматривает практические занятия по следующим темам (объем в часах – 2, отводимый на выполнение каждой работы).

Номера задач для аудиторных и домашних занятий из сборника 1.10.7.

3 семестр.

Занятие 1. Уравнения с разделяющимися переменными. Однородные уравнения.

Вопросы для подготовки: 1)Что называется изоклинами? 2)Как, не решая уравнения, строить интегральные кривые? 3)Как составить дифференциальное уравнение семейства кривых? 4)Какие уравнения называются уравнениями, с разделяющимися переменными? 5) Как интегрируются уравнения с разделяющимися переменными? 6) Перечислить три вида уравнений сводящихся к уравнениям с разделяющимися переменными. 7) При помощи каких замен они сводятся к уравнениям с разделяющимися переменными? 8) Какие уравнения называются однородными?

Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач №1-14; 17-29. задачи №51-65; 101-129.

Занятие 2. Линейные уравнения первого порядка. Уравнения Бернулли, Риккати. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель.

Вопросы для подготовки: 1) Какое уравнение называется линейным дифференциальным уравнением первого порядка? 2) Какое уравнение называется однородным, а какое неоднородным? 3) Методы решения линейного уравнения первого порядка. 4)В чем заключается идея метода Лагранжа? 5) Уравнение Бернулли и замена, сводящая это уравнение к линейному. 6) Уравнение Риккати и замена, сводящая это уравнение к уравнению Бернулли7) Какие уравнения называются уравнения в полных дифференциалах? 8) Записать необходимые и достаточные условия Эйлера. 9)Как проинтегрировать уравнения в полных дифференциалах? 10) Что называется интегрирующим множителем? 11) Записать формулу для нахождения интегрирующего множителя, зависящего от x. 12) Записать формулу для нахождения интегрирующего множителя зависящего от y.

Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач №136-160; 167-171; №186-194; 195-220.

Занятие3. Уравнения, не разрешенные относительно производной.

Уравнение Лагранжа, Клеро. Физические и геометрические задачи.

Методические указания: Чтобы решить геометрическую задачу, надо построить чертеж, обозначить искомую кривую через $y(x)$ и составить дифференциальное уравнение. Затем проинтегрировать полученное решение.

В физических задачах надо решить, какую из величин взять за независимое переменное, а какую - за искомую функцию. Затем составить дифференциальное уравнение. Решить полученное уравнение.

Вопросы для подготовки: 1) Дать определение дифференциальному уравнению, не разрешенному относительно производной. 2)Как проинтегрировать уравнение, если в него входит только производная от неизвестной функции? 3) Как проинтегрировать уравнение, если в него не входит искомая функция? 4) Как проинтегрировать уравнение, если в него не входит независимое переменное? 5)Общий метод интегрирования дифференциального уравнения, не разрешенного относительно производной. 6) Дать определение особых решений. 7) Записать уравнение Лагранжа. 8)Метод интегрирования уравнение Лагранжа.9) Записать уравнение Клеро. 10) Метод интегрирования уравнения Клеро.

Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач №241-250; 251-266; 267-286. №287-296; 298; 300. №71-76; 77-79;80, 81, 83,84,85,87,88,89,91,92,93.

Занятие 4.Уравнения, допускающие понижение порядка.

Вопросы для подготовки: 1) Перечислить уравнения допускающие понижение порядка. 2) Методы решения этих уравнений?

Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач №421-437; 455-458; 463-470; 501-503.

Занятие 5. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами.

Вопросы для подготовки: 1) Метод Эйлера интегрирования линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами. 2) Записать общий вид решения дифференциального уравнения, если корни характеристического уравнения действительные и различные.3) Записать общий вид решения дифференциального уравнения, если корни характеристического уравнения действительные и кратные 4) Записать общий вид решения дифференциального уравнения, если корни характеристического уравнения комплексные 5) Записать общий вид решения дифференциального уравнения, если корни характеристического уравнения кратные комплексные

Практическая, самостоятельная работа включает решение задач №511-548;575-581; 582-586.

Занятие 6. Линейные уравнения с переменными коэффициентами. Решение уравнений удовлетворяющих начальным условиям. Уравнение Эйлера.

Вопросы для подготовки: 1) Записать вид уравнения Эйлера. 2) При помощи каких замен независимого переменного и искомой функции, уравнение Эйлера сводится к линейному уравнению с постоянными коэффициентами?

3)Какие функции называются линейно зависимыми и независимыми? 4) Как по заданной системе решений построить дифференциальное уравнение? 5)Записать формулу Остроградского – Лиувилля. 6)Как формула Остроградского – Лиувилля может быть использована для интегрирования линейного однородного уравнения второго порядка?

Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач: №582-588 №641-662;674-678;681-701.

Занятие 7. Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами: метод исключения, метод Эйлера.

Вопросы для подготовки: 1) Что называется решением системы дифференциальных уравнений? 2) Что называется частным решением системы? 3) Изложить метод сведения к одному уравнению более высокого порядка. 4) Изложить метод нахождения, интегрируемых комбинаций. 5) Записать нормальную систему в симметричной форме. 6) Какая система с постоянными коэффициентами называется линейной? 7) Какое уравнение называется характеристическим? 8) От чего зависит структура фундаментальной системы решений?

Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач №786-796. №797-812.

Занятие 8. Линейные неоднородные системы. Метод неопределенных коэффициентов, метод вариации постоянных.

Вопросы для подготовки: 1) В каком виде можно частное решение линейной неоднородной системы? 2)В чем состоит отличие отыскания частных решений от одного линейного уравнения? 3) Чему равно общее решение неоднородного уравнения? 4) В чем заключается метод вариации произвольных постоянных для системы дифференциальных уравнений?

Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач№826-845. №846-850.

*Занятие*9. Контрольная работа.

Для выполнения домашних заданий рекомендуется пользоваться учебниками, в которых разобраны подробно и продемонстрированы методы решения задач по каждой теме в п.1.10.6-1.10.10. Практическая часть курса методически поддержана пособиями, указанными в п.1.10.8-1.10.10. В учебном пособии «Дифференциальные уравнения в примерах и задачах» (1.10.8) приводятся варианты индивидуальных заданий по всем разделам изучаемой дисциплины. В этом пособии даны необходимые для решения индивидуальных заданий теоретические сведения по каждой теме задания, по каждой теме решено по несколько задач, которые демонстрируют алгоритмы решения по каждому типу. Решение задач сопровождается разъяснением используемых методов и понятий. В конце каждого раздела приведены индивидуальные задачи для самостоятельной работы.

Индивидуальное задание (типовой расчет) выполняется строго в соответствии с выданным преподавателем заданием и вариантом. Оформлять работу следует четко и аккуратно, придерживаясь основных правил оформления работ: титульный лист содержит: ФИО, №группы, курс, дисциплина, тема расчета и т. д. Типовой расчет считается выполненным **с** дифференцированной оценкой, если:

1) работа выполнена полностью и в соответствии с заданием;

2) студент отвечает на основные теоретические вопросы по соответствующему разделу;

3) работа оформлена в соответствии с указанными требованиями.

Сроки сдачи работ ограничены отведенным на выполнение практикума аудиторным временем – 18 часов практических занятий в 3 семестре. Рекомендуется выполнять и сдавать на проверку индивидуальные задания по мере изложения лекционного материала и практического и выдачи заданий преподавателем. Необходимым условием допуска студента на экзамен является сдача всех практических и индивидуальных работ соответственно.

3.2 Методические указания по самостоятельной работе студентов

Объем самостоятельной работы студентов определяется учебным планом.

На самостоятельную работу студента по дисциплине «Дифференциальные уравнения» отводится 72 час, из которых 36 часов предусмотрено на самостоятельную работу в течении семестра, а 36 часов на подготовку к экзамену.

В качестве самостоятельной работы по дисциплине «Дифференциальные уравнения» студентам предлагается выполнять индивидуальные задания по разделам дисциплины; заниматься подготовкой к контрольным работам, выполнять индивидуальные домашние задания по всем темам практических занятий; заниматься подготовкой к экзамену.

Для промежуточного контроля приобретенных практических навыков предусмотрены индивидуальные задания (по вариантам).

Для промежуточного контроля усвоения теоретического материала предусмотрены коллоквиумы, которые проводятся по различным разделам дисциплины по вопросам к экзамену.

<u>Контрольные работы</u>

Дифференциальные уравнения первого порядка (1 час); Дифференциальные уравнения порядка выше первого (1 час)

<u>Индивидуальные задания</u>.

1. Дифференциальные уравнения первого порядка (8 часов);

2.Дифференциальные уравнения порядка выше первого (8часов)

3. Системы дифференциальных уравнений (8 часов)

Все индивидуальные задания берутся из методического пособия п.1.10.8.

4. Домашние задания по всем темам практических занятий 12 часов)

Все задачи для домашних заданий берутся из сборника п.1.10.7.

5. Подготовка к экзаменам (36 час).

Для подготовки к экзамену используются лекции и перечисленные в рабочей программе учебники из основной и дополнительной литературы (1.10.1-1.10.4; 1.10.12)

Контроль над выполнением самостоятельной работы осуществляется проведением аудиторных контрольных работ, проведением коллоквиумов по некоторым разделам дисциплины, проверкой и защитой индивидуальных работ проведением итогового экзамена по дисциплине.

4. Контроль знаний.

4.1 Текущий контроль знаний

Оценочные средства для текущего контроля успеваемости и для промежуточной аттестации: зачетная система оценки знаний учащихся (пункт рабочей программы 1.11).

Вначале семестра проводится тестирование по остаточным знаниям дисциплин, которые будут использоваться при изучении дифференциальных уравнений. Приведем пример входящего теста.

Тест

1. При помощи символов включения связь между множествами $\mathbb{C}$ комплексных чисел, $\mathbb{R}$ действительных чисел, $\mathbb{Z}$ целых чисел и $\mathbb{N}$ натуральных чисел имеет вид:

a) $\mathbb{C} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{N}$

b) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{R}$

c) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

d) $\mathbb{N} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$

2. Что такое модуль комплексного числа $z = x + y \cdot i$?

a) Неотрицательное число $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ равное расстоянию от начала координат до точки отображающей число z.

b) Неотрицательное число $|z|$ определяемое следующим образом: если $z \geq 0$, то $|z| = z$; если $z < 0$, то $|z| = -z$.

c) Максимальное из двух чисел x и y.

d) Величина определяемая следующим образом: $|z| = \sqrt{z^2}$.

3. Какова геометрическая интерпретация неравенства треугольника $|a+b| \leq |a| + |b|$?

a) Для всякой тройки положительных чисел *a*, *b* и *c*, такой, что $a^2 + b^2 = c^2$, существует прямоугольный треугольник с катетами *a* и *b* и гипотенузой *c*.

b) Длина любой стороны треугольника не больше суммы длин двух его других сторон

c) Всякое комплексное число z = (a, b) можно изобразить как точку на плоскости с координатами a и b.

d) Правильного ответа нет.

4. Какие из промежутков числовой прямой $\mathbb{R}$ имеют общие точки: отрезок $[a,b]$, интервал (b,c), полуинтервал $(a,c]$, бесконечный интервал $(-\infty,b)$ и бесконечный полуинтервал $[b,+\infty)$?

a) $[a,b]$ и $(a,c]$ имеют общую точку a; $[a,b], [b,+\infty)$ и имеют общую точку b

b) $[a,b]$ и $(-\infty,b)$ не имеют общую точку; (b,c) и $(a,c]$ имеют общую точку c

c) $[a,b]$ и $(-\infty,b)$ имеют общую точку a; $[a,b], [b,+\infty)$ и $(a,c]$ имеют общую точку b

d) Промежутки не имеют общих точек

5. Что называют критерием некоторого утверждения?

a) Признак существования какого-либо свойства математического объекта, содержащий или необходимые, или достаточные условия

b) Признак существования какого-либо свойства математического объекта, содержащий только достаточные условия

c) Признак существования какого-либо свойства математического объекта, содержащий только необходимые условия

d) Признак существования какого-либо свойства математического объекта, содержащий как необходимые, так и достаточные условия

6. В чем состоит метод доказательства от «противного»?

a) Для доказательства теоремы $A \Rightarrow B$ предполагают, что верно B, и если рассуждения приводят к тому, что при таком предположении условие А невыполнимо, то теорема считается доказанной.

b) Для доказательства теоремы $A \Rightarrow B$ предполагают, что верно $\neg\neg B$, и если рассуждения приводят к тому, что при таком предположении условие A выполнимо, то теорема считается доказанной.

c) Для доказательства теоремы $A \Rightarrow B$ предполагают, что верно $\neg B$, и если рассуждения приводят к тому, что при таком предположении условие A невыполнимо, то теорема считается доказанной.

d) Правильного ответа нет.

7. Метод математической индукции является важным способом доказательства предложений (утверждений) $P(n)$, зависящих от натурального аргумента n. Какие этапы он в себя включает?

a) Этап проверки: проверяется, истинно ли предложение (утверждение) $P(1)$.
Этап доказательства: предполагается, что предложение $P(n)$ истинно, и доказывается истинность предложения $P(n + 1)$ (n увеличено на единицу).

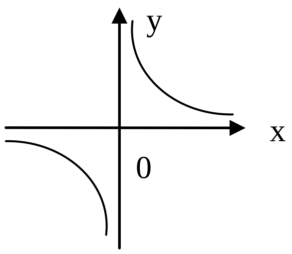
b) Этап доказательства: предполагается, что предложение $P(n)$ истинно, и доказывается истинность предложения $P(n + 1)$ (n увеличено на единицу).

c) Этап проверки: проверяется, истинно ли предложение (утверждение) $P(2)$.
Этап доказательства: предполагается, что предложение $P(n)$ истинно, и доказывается истинность предложения $P(n + 2)$ (n увеличено на двойку).

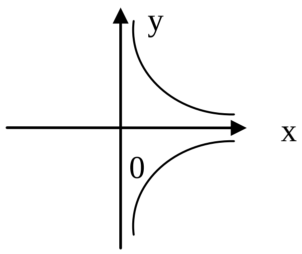
d) Верны все ответы.

8. Какой из графиков соответствует функции $y^2 = \frac{1}{x}$?

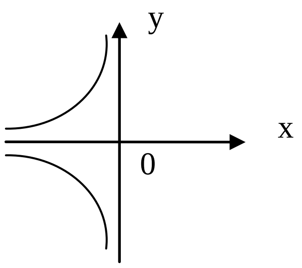
a)



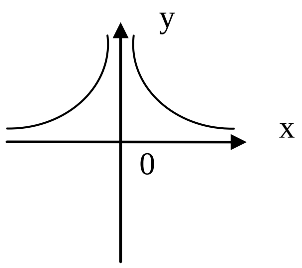
b)



c)



d)



9. По графику функции $y^2 = \frac{1}{x}$ (из предыдущего задания) укажите ее область определения $\mathbb{D}$ и область значений $\mathbb{E}$.

a) $\mathbb{D} = (0;+\infty)$, $\mathbb{E} = (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$

b) $\mathbb{D} = (-\infty;+\infty)$, $\mathbb{E} = (-\infty;+\infty)$

c) $\mathbb{D} = (-\infty;0)$, $\mathbb{E} = (-\infty;+\infty)$

d) $\mathbb{D} = (-\infty;+\infty)$, $\mathbb{E} = (0;+\infty)$

10. Функция $f(x)$ имеет предел A в точке x_0, если:

a) эта функция определена в некоторой окрестности точки x_0 за исключением, быть может, самой точки x_0, и для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

b) для всех значений x, достаточно близких к x_0, значение $f(x)$ близко к A.

c) верны ответы a) и b)

d) правильного ответа нет.

11. Производная функции определяется как:

a) величина равная $\lim\limits_{x \to x_0 +} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

b) предел отношения приращения аргумента к приращению функции при стремлении приращения аргумента к нулю, если таковой предел существует.

c) предел отношения приращения функции к приращению ее аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю, если таковой предел существует.

d) величина равная $\lim\limits_{x \to x_0 -} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

12. Если функция непрерывна в точке, то:

a) ее производная существует.

b) она всегда дифференцируема в этой точке.

c) непрерывна и ее производная.

d) это не означает ее дифференцируемость.

13. Какие из свойств непрерывных на отрезке функций верны?

a) Функция, непрерывная на отрезке, ограничена на этом отрезке.

b) Функция, непрерывная на отрезке, принимает на нем наибольшее и наименьшее значения .

c) Если функция f(x) непрерывна на отрезке и имеет на концах отрезка значения противоположных знаков, то существует такая точка внутри этого отрезка, где f(x) = 0.

d) Функция, непрерывная на отрезке, принимает на этом отрезке лишь некоторые значения между двумя произвольными величинами.

14. Пусть функция y = f(x) возрастает (или убывает) и непрерывна в некоторой окрестности точки x. Пусть, кроме того, эта функция дифференцируема в точке x и f'(x)≠0. Тогда:

a) в некоторой окрестности соответствующей точки y = f(x) определена обратная функция $x = f^{-1}(y)$, причем обратная функция дифференцируема в точке $x = f^{-1}(y)$ и для ее производной справедлива формула $(f^{-1}(y))' = f'(x)$.

b) в некоторой окрестности соответствующей точки y = f(x) определена обратная функция $x = f^{-1}(y)$, причем обратная функция дифференцируема в точке $x = f^{-1}(y)$ и для ее производной справедлива формула $(f^{-1}(y))' = 1/f'(x)$.

c) в некоторой окрестности соответствующей точки y = f(x) определена обратная функция $x = f^{-1}(y)$, причем обратная функция не дифференцируема в точке
$x = f\text{-}^{1}(y)$.

d) правильного ответа нет.

15. При вычислении производной сложной функции:

a) сначала дифференцируют внутреннюю функцию, не обращая внимания на внешнюю, затем умножают на производную конкретной внешней функции.

b) дифференцируют внешнюю функцию, не обращая внимания на внутреннюю.

c) сначала дифференцируют внешнюю функцию, не обращая внимания на внутреннюю, затем умножают на производную конкретной внутренней функции.

d) дифференцируют внутреннюю функцию, не обращая внимания на внешнюю.

16. Радиус-вектор - это…

a) вектор-функция скалярного аргумента с началом в фиксированной точке

b) предел средней дуги кривой, когда дуга стягивается в эту точку

c) единичный вектор, пересекающий ось Ox

d) нет правильного ответа

17.Какие из перечисленных утверждений являются верными:

a) определитель не равен нулю, если он имеет нулевую строку

b) определитель не меняется при транспонировании матрицы

c) при перестановки двух строк, определитель меняет свой знак на противоположный

d) определитель изменится, если к любой его строке прибавить линейную комбинацию других строк

e) общий множитель элементов строки (столбца) может быть вынесен за определитель

18. Собственный вектор - это …

a) ненулевой вектор x для которого выполняется равенство вида $Ax=\lambda x$, где A-линейный оператор, λ-собственные значения линейного оператора

b) ненулевой вектор x для которого выполняется неравенство вида $Ax\neq\lambda x$, где A-линейный оператор, λ-собственные значения линейного оператора

c) вектор x для которого выполняется равенство вида $xA=\lambda x$, где A-многочлен, а λ – коэффиценты многочлена

d) ненулевой вектор x для которого выполняется равенство вида $AxA^{-1}= \lambda x$, где A-линейный оператор, λ-собственные значения линейного оператора

19. При каком условии однородная система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) имеет не нулевое решение?

a) при условии, что ее матрица невырождена

b) при условии, что строки матрицы линейно независимы

c) при условии, что её матрица вырождена

d) при условии, что главные миноры матрицы не равны нулю

20. Выберите правильную формулировку критерия Сильвестра знакоопределенности квадратичной формы

a) для того чтобы квадратичная форма от n переменных была положительно определена, необходимо и достаточно, чтобы один из главных миноров матрицы был положителен

b) для того чтобы квадратичная форма от n переменных была положительно определена, необходимо и достаточно, чтобы один из главных миноров матрицы был нулевой

c) для того чтобы квадратичная форма от n переменных была положительно определена , необходимо и достаточно , чтобы один из главных миноров матрицы был отрицателен

d) для того чтобы квадратичная форма от n переменных была положительно определена, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры матрицы были положительны

21.Неопределенный интеграл – это…

a) предел интегральных сумм, при стремлении максимального шага разбиения отрезка к нулю

b) множество всех первообразных функции f(x) в некотором промежутке и обозначается $\int f(x)dx$

c) множество всех первообразных функции f(x) на указанном промежутке [a,b] и обозначается $\int_a^b f(x)dx$

d) верные ответы a,в

22.Формула Ньютона-Лейбница имеет вид:

a) $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

b) $\int_b^a f(x)dx = F(b) - F(a)$

c) $\int_b^a f(x)dx = F(b) + F(a)$

d) $\int_a^b f(x)dx = F(b) + F(a)$

23.Сколько нулей имеет многочлен степени n ≥1 ?

а) n

б) n+1

в) 0

г) n^n

Текущий контроль за аудиторной и самостоятельной работой обучаемых осуществляется во время проведения практических занятий посредством устного опроса по контрольным вопросам соответствующего раздела, а также проверки домашних задач, проверкой контрольных работ. Промежуточный контроль осуществляется три раза в семестр в виде контрольных точек при анализе оценок и посещаемости студента. Приведем примеры аудиторных контрольных работ по всем разделам изучаемой дисциплины.

1 Контрольная работа на тему: Дифференциальные уравнения первого порядка.

ВАРИАНТ №1

1.Решить уравнение и построить несколько интегральных кривых:

$$xydx + (x+1)dy = 0.$$

2. Проверить, что данное уравнение являются уравнением в полных дифференциалах, и решить его

$$2xydx + (x^2 - y^2)dy = 0.$$

3. Решить уравнение

$$(2x^2 y \ln y - x)y' = y.$$

4.Найти решение данного уравнения, выделить особые решения (если они есть), дать чертеж

$$y'^2 - y^2 = 0.$$

ВАРИАНТ №2

1.Решить уравнение и построить несколько интегральных кривых.

$$\sqrt{y^2 + 1}dx = xydx$$

2. Проверить, что данное уравнение являются уравнением в полных дифференциалах, и решить его

$$(2 - 9xy^2)xdx + (4y^2 - 6x^3)ydy = 0$$

3. Решить уравнение

$$y'x^3 \sin y = xy' - 2y$$

4.Найти решение данного уравнения, выделить особые решения (если они есть), дать чертеж

$$(y' + 1)^3 = 27(x + y)^2.$$

2 Контрольная работа на тему: Дифференциальные уравнения порядка выше первого.

ВАРИАНТ №1

Решить уравнения:

1) $y''' - y'' - y' + y = 0$

2) $y'' - 6y' + 8y = 2e^{4x} \sin x$

3) $y'' - 2y' + y = 2xe^x$

4) $y'' + 2y' + y = \dfrac{1}{xe^x}$

5) $y''' - 3y' - 2y = 9e^{2x}; \quad y(0) = 1; \; y'(0) = 2; \; y''(0) = 3$

ВАРИАНТ №2

Решить уравнения:

1) $y''' - 4y'' + 3y' = 0$

2) $y'' - 6y' + 13y = 3\cos 2x$

3) $y'' - 8y' + 17y = x^2 \cdot e^{4x}$

4) $y'' - 2y' + y = \operatorname{ctg} x$

5) $y'' + y = 4e^x; \quad y(0) = 1; \; y'(0) = 3;$

3 Контрольная работа на темы: Системы дифференциальных уравнений; теория устойчивости.

ВАРИАНТ №1

1. Решить систему уравнений:

а) $\begin{cases} \dot{x} = x - y + z \\ \dot{y} = x + y - z \\ \dot{z} = 2x - y \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dot{x} = -4x - 2y + \dfrac{2}{e^t - 1} \\ \dot{y} = 6x + 3y - \dfrac{3}{e^t - 1} \end{cases}$

ВАРИАНТ №2

1. Решить систему уравнений:

а) $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = x + 3y - z \\ \dot{z} = -x + 2y + 3z \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dot{x} = x - y + 8t \\ \dot{y} = 5x - y \end{cases}$

<u>Пример теста</u>

Тесты по проверке остаточных знаний

ВАРИАНТ № 1

1. Выберите верное утверждение, если y_1, y_2, y_3 - частные решения $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$ и $y_1 = \lambda y_2, y_2 \neq \lambda y_3 (\lambda \neq 0)$

1) $y(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2$ 2) $y(x) = C_1 y_1 + C_2 y_3$

3) $y(x) = C_1 y_2 + C_2 y_3$ 4) $y(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3$

2. Пусть $y'' + a_1 y' + a_2 y = 3x^2 e^{-x}$. Выберите общее решение дифференциального уравнения, если корни характеристического уравнения $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$.

1) $y(x) = (C_1 + C_2 x + Ax^2)e^{-x}$ 2) $y(x) = (C_1 + C_2 x + Ax^4)e^{-x}$

3) $y(x) = e^{-x}(C_1 + C_2 x + Ax^4 + Bx^3 + Dx^2)$ 4) $y(x) = e^{-x}(C_1 + C_2 x + Ax^4 + Dx^2$

3. $y''' + a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = 0$ - линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Выберите общее решение этого уравнения, если корни характеристического уравнения $\lambda_1 = \alpha, \lambda_2 = \alpha, \lambda_3 = \beta$ $(\alpha, \beta \in R)$.

1) $y(x) = C_1 e^{\alpha x} + C_2 x e^{\alpha x} + C_3 x^2 e^{\beta x}$ 2) $y(x) = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x + C_3)$

3) $y(x) = C_1 e^{\alpha x} + C_2 x e^{\alpha x} + C_3 e^{\beta x}$ 4) $y(x) = e^x(C_1 x + C_2 x^2 + C_3 e^{\beta})$

4. Выберите те дифференциальные уравнения, частные решения которых можно найти методом неопределенных коэффициентов (методом подбора).

1) $y'' + 2y' = x^2 - 2x^3 + 5$ 2) $\ddot{x} - \dot{x} = \dfrac{1}{5 + t^2}$

3) $y'' - y = \dfrac{1}{\cos x}$ 4) $\ddot{x} + \dot{x} + x = \cos t$

5. Дифференциальным уравнением 3-го порядка являются уравнения:

а) $y'' + y' + y = 3$ в) $y' + y'' = x$

б) $y''' = 5$ г) $\sin x \cdot (y')^3 + y = 0$

1)в 2) в,г 3) в,г,д 4)б,в

6.Из дифференциальных уравнений укажите уравнения в полных дифференциалах:

а) $(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2 y + 4y^3)dy = 0$ б) $x^3 dy + y^3 dx = 0$

в) $(1 - x^2 y)dx + x^2(y - x)dy = 0$ г) $x^3 + y^3 = 37(x + y)$

1) б,г 2) а 3) никакое 4) а,в,

7. Укажите функцию, которая является общим решением дифференциального уравнения $y'' = x + \sin x$.

а) $y(x) = \frac{x^2}{2} + \sin x + C_1 x + C_2$

б) $y(x) = \frac{x^3}{6} - \sin x + C_1 x + C_2$

в) $y(x) = \frac{x^3}{6} - \sin x + C_1$

г) $y(x) = \frac{x^3}{6} + \cos x + C_2$

1) а 2) б 3) в 4) г

8.Выберите функцию, график которой проходит через точку *(0,0)* и является решением дифференциального уравнения $y' + 3x = 0$

а) $y = \frac{3}{2}x^2 + C$

б) $2y + 3x^2 = 0$

в) $y = -\frac{3}{2}x^2 + 2$

Г) $3x^2 - 2y = 0$

1) а 2) г,б 3) в 4) б

9. Укажите однородные функции:

а) $\ln\frac{2x + y + 2}{3x + 5y}$

б) $x^2 + 3xy + y^2$

в) $x + 3y$

г) $4 - x - y$

1)б 2) в 3) а, б 4) г

10. Укажите дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

а) $ydx + (x+1)dy = 0$

б) $xy' - 2y = 2x^4$

в) $\sqrt{y^2 + 1}dx = xydy$

г) $y' + 7y = x$

1) а,б 2) а, г 3) а,в 4)в

11. Линейным дифференциальным уравнением являются:

а) $xy' - 2x^4 = 2y$

б) $y' = 2x(x^2 + y)$

в) $(x - y - 1) + (y - x + 2)y' = 0$

г) $y^2 + 5(y')^2 - \sin x = 2$

1) а 2) б,г 3) а,б 4) а,в

12. Укажите уравнения высших порядков, допускающих понижения порядка:

а) $xy^{(4)} = 1$

б) $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$

в) $(y'')^2 + y' = xy''$

1) а 2) а,б 3) в 4) все

13. Для дифференциального уравнения $y'' - 2y' + 2y = e^x$ укажите частные решения с неопределенными коэффициентами (числовые значения коэффициентов не находить)

а) $y(x) = Ae^x$

б) $y(x) = Ae^x + Bx\cos x$

в) $y(x) = Ae^x + (Bx + C)\cos x + (Dx + E)\sin x$ г) $y(x) = Ax + Bx^2 + Cx^3$

1) а 2) б 3) в 4) в,г

14. Выберите уравнения, которые решаются только методом вариации постоянных:

а) $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$ б) $y'' + 4y = 2tgx$

в) $y''' + 4y'' = 7x - 3\cos x$ г) $y'' + 2y' + y = x^2 + 5$

1)а,б 2) а,в 3) в,г 4) а,б,в

15. Укажите дифференциальное уравнение, для которого только *(-1)* является корнем характеристического уравнения:

а) $y'' - 2y' + 2y = e^{-x}$ б) $y'' + 2y' + y = 3$

в) $y'' + y = x^2 + xe^{2x}$ г) $y'' + 5y' + 10y = x^2$

1) а 2) б 3) в 4) в,г

16. Однородными дифференциальными уравнениями 1-го порядка являются дифференциальные уравнения:

а) $(x - y)dx + (x + y)dy = 0$ б) $x^2y' + xy + 1 = 0$

в) $y' - y = 2x - 3$ г) $y' - y \cdot \sin x = \cos x^2$

1) а 2) б 3) в 4) все

17. Решением дифференциального уравнения $y'' - 2y' - 3y = 0$ является функция:

а) $y = e^{3x} + \dfrac{1}{e^x}$ б) $y = ee^{3x}$

в) $y = x^2 - 2x + 3$ г) $y = x + 3x^2$

1) б 2) а 3) г,а 4) в

18. Определить тип дифференциального уравнения $1^{-го}$ порядка:

$$(xy^2 + y^2)dx + (x^2 - x^2y)dy = 0$$

а) Однородное б) С разделяющимися переменными

в) Линейное г) В полных дифференциалах

1) в 2) а 3) б 4) г

19. Частное решением дифференциального уравнения $(1 + x^2)y' = 2xy$ при $y(0) = 1$ имеет вид:

1) $y(x) = x^2 + 1$ 2) $y(x) = 2x$ 3) $y(x) = x^3 - 1$ 4) $y(x) = 2x^2 + 3$

20. Общим решение дифференциального уравнения $y'' = \dfrac{2}{x^3}$ является:

1) $-\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{C_1}{x} + C_2$ 2) $\ln|x| + C_1x^2 + C_2x$

3) $\ln|x| + C_1x + C_2$ 4) $\dfrac{1}{x} + C_1x + C_2$

4.2 Итоговый контроль знаний

Итоговый контроль осуществляется после успешного прохождения студентами текущего и промежуточного контроля в виде экзамена.

Необходимым условием допуска на экзамен является сдача всех практических и расчетных работ. В билет входят два вопроса и две задачи. Студент должен дать развернутый ответ на основные вопросы и краткий – на дополнительные, решить обе задачи.

Оценка «отлично» ставиться при полном изложении теоретического материала экзаменационного билета, ответах на дополнительные вопросы, подтверждающие знание материала, и при правильном решении задач.

Оценка «хорошо» ставится при твердых знаниях студентом материала (в пределах конспектов лекций), при решении задач допущены небольшие недочеты и ошибки вычислительного характера.

Оценка «удовлетворительно» ставиться, если правильно решена только одна из задач и на теоретические вопросы даны неполные ответы, показывающие поверхностное знание излагаемого материала.

Оценка «неудовлетворительно» ставиться, если не решены обе задачи и студент дал ответ без доказательства теорем.

Форма сдачи экзамена – устная. Экзамен проходит в письменной форме с последующей индивидуальной беседой преподавателя со студентом. На письменную работу над билетом отводится 2 часа. Каждый пункт оценен определенным количеством баллов.

Вопросы к экзамену приведены в рабочей программе пункт 1.9.

Приведем примеры экзаменационных билетов для 3 семестр. В скобках количество баллов за каждый вопрос или задачу.

3 семестр

Экзаменационный билет № 1

1. Уравнение Лапласа и Клеро, методы решения этих уравнений.(1 балл)
2. Линейный дифференциальный оператор L и его свойства. Теоремы о решениях линейного ОДУ.(2 балла)
3. Решить уравнение:
   $xy'+y=y^2$, $y(1)=0.5$. (1 балл)
4. Решить уравнение:
   $y''-2y'+y=\dfrac{e^x}{x}$. (1 балл)

Экзаменационный билет № 2

1. Линейные уравнения первого порядка. Уравнение Бернулли и Лагранжа. (2 балла)
2. Определитель Вронского. Фундаментальная система решений. (1балла)
3. Решить систему уравнений
   $\begin{cases} \dot{x}=3x+2y+3e^{2t} \\ \dot{y}=x+2y+e^{2t} \end{cases}$.(1 балл)
4. Решить уравнение
   $y'+ytgx=\sec x$.(1 балл)

Экзаменационный билет № 3

1. Нахождение интегрируемых комбинаций для систем дифференциальных уравнений. Система линейных дифференциальных уравнений. Основные понятия и определения. Линейный оператор и его свойства. (2 балла)
2. Простейшие типы уравнений, не разрешенных относительно производной.(1 балл)
3. Решить линейную неоднородную систему
$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y \\ \dot{y} = 2y - x - 5e^t \sin t \end{cases}.$$ (1 балл)
4. Найти решение уравнения, удовлетворяющего краевым условиям
$y'' - y' = 0$; $y(0) = -1$, $y'(1) - y(1) = 2$.(1 балл)

5 Интерактивные технологии и инновационные методы, используемые в образовательном процессе

При преподавании дисциплины «Дифференциальные уравнения» используются следующие инновационные технологии и методы: применение мультимедийного проектора при чтении лекций, использование ресурсов сети Internet и электронных учебников при самостоятельной работе студентов, дискуссии в обсуждении проблемных ситуаций. В пункте 1.8 рабочей программы изложены интерактивные методы.