Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Амурский государственный университет»

Кафедра Математического анализа и моделирования

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС ДИСЦИПЛИНЫ

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Основной образовательной программы по специальности
010701.65 – Физика

Благовещенск 2012

УМКД разработан канд. физ.-мат. наук Максимовой Надеждой Николаевной

Рассмотрен и рекомендован на заседании кафедры
Протокол заседания кафедры от «11» _01_ 2012 г. №_5_
Зав. кафедрой ______________ / В.В.Сельвинский /

УТВЕРЖДЕН
Протокол заседания УМСС 010701.65 – Физика
от «__» __________ 2012 г. №___
Председатель УМСС ______________ /Е.А. Ванина/

СОДЕРЖАНИЕ

1. РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

1.1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Цели изучения дисциплины:

– ознакомление студентов с основами теории интегральных уравнений и вариационного исчисления, практическими использования основных положений, методов для решения практических задач.

Задачи изучения дисциплины:

– ознакомление студентов с базовыми понятиями теории интегральных уравнений, классификацией интегральных уравнений и методами их решения;

– ознакомление студентов с базовыми понятиями вариационного исчисления, классификацией вариационных задач и методами их решения.

1.2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ООП ВПО

Дисциплина «Интегральные уравнения и вариационное исчисление» входит в цикл математических и естественнонаучных дисциплин Государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования (ГОС ВПО) по специальности 010701.65 «Физика».

1.3. ТРЕБОВАНИЯ К ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

В результате освоения дисциплины обучающийся должен демонстрировать следующие результаты образования:

знать и понимать основные определения (основные интегральные уравнения, гильбертово пространство, операторы и алгебра операторов, представление), классификацию интегральных уравнений и вариационных задач;

уметь решать стандартные задачи;

владеть навыками практического использования современного математического инструментария для решения и анализа задач механики, физики и естествознания.

1.4. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Общая трудоемкость дисциплины составляет _72_ часа.

№ п/п	Раздел дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)			Формы текущего контроля успеваемости *(по неделям семестра)* Форма промежуточной аттестации *(по семестрам)*
				Лекц.	Прак.	Самост.	
1	**Интегральные уравнения**	**5**	**1-11**	**22**	**11**	**5,5 (2+3,5)**	**Выполнение индивидуального задания**
1.1	Введение	5	1	1	0,5	–	
1.2	Метрические, нормированные и евклидовы пространства	5	1	1	0,5	0,2	Выполнение домашнего задания
1.3	Элементы теории линейных операторов	5	2	1	0,5	0,2	Выполнение домашнего задания
1.4	Существование собственного значения вполне непрерывного самосопряженного	5	2	1	0,5	–	

	оператора						
1.5	Построение последовательности собственных значений и собственных векторов вполне непрерывного самосопряженного оператора	5	3	1	0,5	–	
1.6	Характеристические числа и собственные функции оператора Фредгольма с симметрическим непрерывным ядром	5	3	1	0,5	0,3	Выполнение домашнего задания
1.7	Теорема Гильберта-Шмидта	5	4	2	1	–	
1.8	Неоднородное уравнение Фредгольма 2-го рода с симметрическим непрерывным ядром	5	5	2	1	0,4	Выполнение домашнего задания
1.9	Принцип сжимающих отображений. Теоремы о неподвижной точке	5	6	2	1	0,4	Выполнение домашнего задания
1.10	Неоднородное уравнение Фредгольма 2-го рода с "малым"	5	7	2	1	0,4	Выполнение домашнего задания
1.11	Линейное уравнение Вольтерра 2-го рода	5	8	2	1	0,4	Выполнение домашнего задания
1.12	Уравнения Фредгольма с вырожденными ядрами. Теоремы Фредгольма	5	9	2	1	0,4	Выполнение домашнего задания
1.13	Уравнение Фредгольма 2-го рода с произвольным непрерывным ядром. Теоремы Фредгольма	5	10	2	1	0,4	Выполнение домашнего задания
1.14	Задача Штурма-Лиувилля	5	11	2	1	0,4	Выполнение домашнего задания
2	**Вариационное исчисление**	**5**	**12-17**	**12**	**6**	**3,5 (1,5+2)**	**Выполнение индивидуального задания**
2.1	Введение	5	12	1	0,5		
2.2	Понятие вариации функционала	5	12	1	0,5		
2.3	Задача с закрепленными концами. Необходимое условие экстремума	5	13-14	4	2	0,5	Выполнение домашнего задания

2.4	Задачи на условный экстремум	5	15-16	4	2	0,5	Выполнение домашнего задания
2.5	Задачи с подвижной границей	5	17	1	0,5	0,5	Выполнение домашнего задания
2.6	Достаточные условия экстремума в задаче с закрепленными концами	5	17	1	0,5	0,5	Выполнение домашнего задания
3	**Понятие о методах регуляризации решения некорректно поставленных задач**	**5**	**18**	**2**	**1**	**–**	
3.1	Интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода как пример некорректно поставленной задачи	5	18	1	0,5	–	Выполнение домашнего задания
3.2	Метод регуляризации А.Н. Тихонова	5	18	1	0,5	–	Выполнение домашнего задания
4	**Экзамен**	**5**		**–**	**–**	**9**	**Подготовка к экзамену**
	ИТОГО			**36**	**18**	**18**	

1.5. СОДЕРЖАНИЕ РАЗДЕЛОВ И ТЕМ ДИСЦИПЛИНЫ

1. Интегральные уравнения

Метрические, нормированные и евклидовы пространства. Элементы теории линейных операторов. Существование собственного значения вполне непрерывного самосопряженного оператора. Построение последовательности собственных значений и собственных векторов вполне непрерывного самосопряженного оператора. Характеристические числа и собственные функции оператора Фредгольма с симметрическим непрерывным ядром. Теорема Гильберта-Шмидта. Неоднородное уравнение Фредгольма 2-го рода с симметрическим непрерывным ядром. Принцип сжимающих отображений. Теоремы о неподвижной точке. Неоднородное уравнение Фредгольма 2-го рода с "малым". Линейное уравнение Вольтерра 2-го рода. Уравнения Фредгольма с вырожденными ядрами. Теоремы Фредгольма. Уравнение Фредгольма 2-го рода с произвольным непрерывным ядром. Теоремы Фредгольма. Задача Штурма-Лиувилля

2. Вариационное исчисление

Определение функционала. Непрерывность функционала. Основные функциональные пространства. Первая и вторая вариации функционала. Основная лемма вариационного исчисления. Уравнение Эйлера. Экстремаль функционала. Необходимые и достаточные условия экстремума функционала. Условия Якоби и условия Лежандра. Частные случаи интегрируемости уравнения Эйлера. Алгоритм решения задач нахождения экстремалей функционала, зависящего от нескольких функций. Система уравнений Эйлера. Алгоритм решения задач нахождения экстремалей функционала, зависящего от производных высшего порядка одной или нескольких функций. Система уравнений Эйлера-Пуассона. Алгоритм решения вариационных задач с подвижными границами. Условия трансверсальности. Задачи на условный экстремум с конечными, дифференциальными и интегральными связями. Алгоритмы их решения.

3. Понятие о методах регуляризации решения некорректно поставленных задач

Интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода как пример некорректно поставленной задачи. Метод регуляризации А.Н. Тихонова.

1.6. САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

№ п/п	№ раздела (темы)	Форма (вид) самостоятельной работы	Трудоёмкость в часах
1	**1**	**Выполнение индивидуального задания**	**5,5 (2+3,5)**
2	1.1	–	–
3	1.2	Выполнение домашнего задания	0,2
4	1.3	Выполнение домашнего задания	0,2
5	1.4	–	–
6	1.5	–	–
7	1.6	Выполнение домашнего задания	0,3
8	1.7	–	–
9	1.8	Выполнение домашнего задания	0,4
10	1.9	Выполнение домашнего задания	0,4
11	1.10	Выполнение домашнего задания	0,4
12	1.11	Выполнение домашнего задания	0,4
13	1.12	Выполнение домашнего задания	0,4
14	1.13	Выполнение домашнего задания	0,4
15	1.14	Выполнение домашнего задания	0,4
16	**2**	**Выполнение индивидуального задания**	**3,5 (1,5+2)**
17	2.1	–	
18	2.2	–	
19	2.3	Выполнение домашнего задания	0,5
20	2.4	Выполнение домашнего задания	0,5
21	2.5	Выполнение домашнего задания	0,5
22	2.6	Выполнение домашнего задания	0,5
23	**3**	**–**	**–**
24	3.1	Выполнение домашнего задания	–
25	3.2	Выполнение домашнего задания	–
26	**4**	**Подготовка к экзамену**	**9**
27		***ИТОГО***	**18**

1.7. ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

Неимитационные методы обучения: проблемная лекция.
Неигровые имитационные методы обучения: метод группового решения задач.
Игровые имитационные методы обучения: мозговой штурм.

Тема и вид занятия	**Вид ОТ**	**Количество часов**
Существование собственного значения вполне непрерывного самосопряженного оператора	Проблемная лекция	2
Метрические, нормированные и евклидовы пространства	Мозговой штурм	2
Линейное уравнение Вольтерра 2-го рода	Метод группового решения задач	2
Неоднородное уравнение Фредгольма 2-го рода	Метод группового решения задач	2
Задачи на условный экстремум	Проблемная лекция	2

Условный экстремум. Задача Лагранжа. Изопериметрические задачи	Метод группового решения задач	2
ИТОГО		**12**

1.8. ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ, ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО ИТОГАМ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Оценочные средства состоят из вопросов к экзамену, вариантов индивидуальных работ.

Вопросы к экзамену

1. Метрические, нормированные и евклидовы пространства.)
2. Элементы теории линейных операторов.
3. Существование собственного значения вполне непрерывного самосопряженного оператора.
4. Построение последовательности собственных значений и собственных векторов вполне непрерывного самосопряженного оператора.
5. Характеристические числа и собственные функции оператора Фредгольма с симметрическим непрерывным ядром.
6. Теорема Гильберта-Шмидта.
7. Неоднородное уравнение Фредгольма 2-го рода с симметрическим непрерывным ядром.
8. Принцип сжимающих отображений. Теоремы о неподвижной точке.
9. Неоднородное уравнение Фредгольма 2-го рода с "малым".
10. Линейное уравнение Вольтерра 2-го рода.
11. Уравнения Фредгольма с вырожденными ядрами. Теоремы Фредгольма.
12. Уравнение Фредгольма 2-го рода с произвольным непрерывным ядром. Теоремы Фредгольма.
13. Задача Штурма-Лиувилля.
14. Понятие вариации функционала.
15. Задача с закрепленными концами. Необходимое условие экстремума.
16. Задачи на условный экстремум.
17. Задачи с подвижной границей.
18. Достаточные условия экстремума в задаче с закрепленными концами.
19. Интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода как пример некорректно поставленной задачи.
20. Метод регуляризации А.Н. Тихонова.

1.9. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Основная литература:

1. Андреева, Е.А. Вариационное исчисление и методы оптимизации: учеб. пособие: рек. УМО / Е.А. Андреева, В.М. Цирулева. – М.: Высш. шк., 2006. – 584 с.
2. Васильева, А.Б. Интегральные уравнения: учеб.: рек. Мин. обр. РФ / А.Б. Васильева, Н.А. Тихонов. – 2-е изд. – М.: Физматлит, 2004. – 160 с.
3. Васильева, А.Б. Интегральные уравнения: учеб. / А.Б. Васильева, Н.А. Тихонов. – 3-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2009. – 160 с.
4. Зон, Б.А. Лекции по интегральным уравнениям: учеб. пособие: Рек. УМО вузов / Б.А. Зон. – М. : Высш. шк., 2004. – 94 с.

Дополнительная литература:

1. Алексеев, В.М. Сборник задач по оптимизации. Теория. Примеры. Задачи:

учеб. пособие: рек. УМО / В.М. Алексеев, Э.М. Галеев, В.М. Тихомиров. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Физматлит, 2005. – 256 с.

2. Дифференциальные и интегральные уравнения. Вариационное исчисление в примерах и задачах / А.Б. Васильева и др. – 2-е изд., испр. – М.: Физматлит, 2005. – 430 с.

3. Интегральные уравнения и вариационное исчисление: учеб.-метод. комплекс для спец. 010701 – Физика / АмГУ, ФМиИ; сост. В. П. Нейман. – Благовещенск: Изд-во Амур. гос. ун-та, 2007. – 40 с.

4. Краснов, М.Л. Интегральные уравнения: задачи и примеры с подробными решениями: учеб. пособие: доп. Мин. обр. / М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. – 3-е изд., испр. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 190 с.

5. Ловитт, У.В. Линейные интегральные уравнения / У.В. Ловитт; пер. Д.А. Райков. – 4-е изд. – М. : Едиториал УРСС, 2009. – 234 с.

6. Пантелеев, А.В. Методы оптимизации в примерах и задачах: учеб. пособие: рек. УМО / А.В. Пантелеев, Т.А. Летова. – 3-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2008. – 544 с.

7. Полянин, А.Д. Справочник по интегральным уравнениям: справочное издание / А.Д. Полянин, А.В. Манжиров. – М. : Физматлит, 2003. – 608 с.

8. Сабитов, К.Б. Функциональные, дифференциальные и интегральные уравнения: учеб. пособие: рек. УМО / К.Б. Сабитов. – М.: Высш. шк., 2005. – 672 с.

9. Цлаф, Л.Я. Вариационное исчисление и интегральные уравнения: справ. рук. / Л.Я. Цлаф. – 3-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2005. – 192 с.

10. Шелковников, Ф.А. Сборник упражнений по операционному исчислению: учеб. пособие: доп. Мин. обр. РФ / Ф.А. Шелковников, К.Г. Такайшвили. – 4-е изд., стер. – М.: Старс, 2006. – 184 с.

Периодические издания:

1. Известия РАН. Серия математическая
2. Сибирский математический журнал
3. Успехи математических наук

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы:

№	Наименование ресурса	Краткая характеристика
1	http://www.twirpx.com/	Учебно-образовательная литература, содержащая DjVu-файлы, PDF-файлы, DOC-файлы, по различным дисциплинам, в т.ч. «Интегральные уравнения и вариационное исчисление»
2	http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/ie.htm	Учебно-образовательная физико-математическая литература, содержащая DjVu-файлы и PDF-файлы учебников по теме «Интегральные уравнения, интегральные преобразования»
3	http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/variational.htm	Учебно-образовательная физико-математическая литература, содержащая DjVu-файлы и PDF-файлы учебников по теме «Вариационное исчисление»

1.10. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

1 Доска, мел, тряпка, линейка.
2 Мультимедийный проектор.
3 Наглядные пособия.

1.11. РЕЙТИНГОВАЯ ОЦЕНКА ЗНАНИЙ СТУДЕНТОВ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Текущий контроль включает в себя контрольные аудиторные работы, индивидуальные и общие домашние задания.

Условия начисления премиальных баллов за внеаудиторную работу (олимпиады, конференции, рефераты):

1. Подготовка и проведение доклада – 5 баллов
2. Участие в олимпиаде, конференции с хорошим результатом – 5 баллов

Начисление штрафных баллов:

За каждый пропуск занятий без уважительной причины из суммы баллов вычитается по 1 баллу.

Учебная дисциплина «Интегральные уравнения и вариационное исчисление» относится к категории дисциплин с экзаменом и оценивается в 100 баллов за семестр. Пересчет рейтинговой оценки дисциплины проводится по шкале:

менее 51 балла – «неудовлетворительно»;

от 51 до 64 баллов – «удовлетворительно»;

от 65 до 80 баллов – «хорошо»;

от 81 до 100 баллов – «отлично».

Рейтинговая оценка студента по дисциплине «Интегральные уравнения и вариационное исчисление» складывается из баллов, набранных по текущему контролю, баллов, набранных за экзамен, и премиальных баллов. Из итоговой суммы вычитаются штрафные баллы за пропуски занятий без уважительной причины.

Бальная структура оценки дисциплины

Учебный модуль	Виды контроля	Сроки выполнения (недели)	Максимальное количество баллов
1. Интегральные уравнения	Выполнение домашнего задания	3-4	20
	Индивидуальная работа	5	12
	Максимальное количество баллов за учебный модуль		**32**
2. Вариационное исчисление	Выполнение домашнего задания	17-18	12
	Индивидуальная работа	18	6
	Максимальное количество баллов за учебный модуль		**18**
Максимальная сумма баллов			**50**
Дополнительные баллы за активную работу в семестре			**10**
ИТОГО за работу в семестре			**60**
Экзамен	1) Ответ на первый вопрос		10
	2) Ответ на второй вопрос		10
	3) Решение первой задачи		10
	4) Решение второй задачи		10
Сдача экзамена			**40**
ИТОГО за семестр			**100**

2. КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ПРОГРАММНОГО МАТЕРИАЛА

Лекция 1. Введение. Метрические, нормированные и евклидовы пространства

План лекции. Понятие интегрального уравнения. Классификация интегральных уравнений. Линейное пространство. Метрическое пространство. Нормированное пространство. Евклидово пространство. Неравенство Коши-Буняковского.

Цели и задачи. Обозначить структуру курса, содержание практических занятий, задания к курсовой работе, озвучить правила организации аудиторной и самостоятельной работы студентов, дать методические рекомендации по изучению дисциплины, указать список основной и дополнительной литературы, рекомендуемой студентам, ознакомить студентов с формами текущего и итогового контроля по дисциплине. Ввести студентов в курс интегральных уравнений, дать классификацию интегральных уравнений. Ознакомить с основными понятиями линейных, метрических и евклидовых пространств.

Ключевые вопросы.

1. Записать уравнение Фредгольма 2-го рода. Какое уравнение называется однородным?
2. Записать уравнение Вольтерра 2-го рода. Какое уравнение называется однородным?
3. Записать уравнение Фредгольма 1-го рода. Какое уравнение называется однородным?
4. Записать уравнение Вольтерра 1-го рода. Какое уравнение называется однородным?
5. Сформулировать определение линейного пространства.
6. Сформулировать определение метрического пространства.
7. Сформулировать определение нормированного пространства.
8. Сформулировать определение евклидова пространства.
9. Сформулировать определение сходимости последовательности элементов метрического пространства.
10. Сформулировать определение сходимости последовательности элементов нормированного пространства.
11. Сформулировать определение фундаментальной последовательности элементов нормированного пространства.
12. Сформулировать определение банахова пространства.
13. Сформулировать определение пространства $C[a,b]$. Как называется сходимость по норме этого пространства?
14. Сформулировать определение пространства $C^{(p)}[a,b]$. Как называется сходимость по норме этого пространства?
15. Как определяется скалярное произведение в пространстве $h[a,b]$? Почему это пространство является бесконечномерным евклидовым пространством? Как называется сходимость по норме этого пространства?
16. Записать неравенство Коши-Буняковского.

Ссылки на литературные источники, приведенные в рабочей программе дисциплины.

Основная литература (пп. 1-4), дополнительная литература (пп. 3, 5, 7-9).

Лекция 2. Элементы теории линейных операторов. Существование собственного значения вполне непрерывного самосопряженного оператора

План лекции. Оператор. Линейный оператор. Ядро оператора. Непрерывность оператора. Норма оператора. Собственное значение и собственный вектор оператора.

Цели и задачи. Ознакомить студентов с понятием и теорией линейного оператора, с понятием собственного значения и собственного вектора оператора.

Ключевые вопросы.

1. Сформулировать определение линейного оператора.
2. Сформулировать два определения непрерывности в точке оператора, действующего в нормированных пространствах.
3. Сформулировать определение нормы линейного оператора, действующего в нормированных пространствах.
4. Сформулировать определение ограниченного линейного оператора.
5. Сформулировать определение ограниченной последовательности элементов нормированного пространства.
6. Сформулировать определение компактной последовательности элементов нормированного пространства.
7. Сформулировать определение вполне непрерывного оператора.

8. Сформулировать необходимое и достаточное условие компактности последовательности векторов конечномерного евклидового пространства Rn .

9. Сформулировать теорему Арцела.

10. Сформулировать определение оператора, сопряженного к линейному оператору, действующему в евклидовом пространстве.

11. Сформулировать определение самосопряженного (симметрического) оператора, действующего в евклидовом пространстве.

12. Сформулировать определение интегрального оператора Фредгольма с симметрическим ядром.

13. Сформулировать определение собственного значения линейного оператора.

14. Сформулировать определение собственного вектора линейного оператора.

15. Сформулировать определение максимального вектора линейного оператора.

<u>Ссылки на литературные источники, приведенные в рабочей программе дисциплины.</u>

Основная литература (пп. 1-4), дополнительная литература (пп. 3, 5, 7-9).

<u>Лекция 3.</u> Построение последовательности собственных значений и собственных векторов вполне непрерывного самосопряженного оператора. Характеристические числа и собственные функции оператора Фредгольма с симметрическим непрерывным ядром

<u>План лекции.</u> Инвариантное подпространство. Теоремы о собственных значениях и собственных векторах оператора. Характеристические числа и собственные функции оператора Фредгольма с симметрическим непрерывным ядром.

<u>Цели и задачи.</u> Ознакомить студентов с методом нахождения последовательности собственных значений и собственных векторов вполне непрерывного самосопряженного оператора. Ознакомить студентов с понятиями характеристического числа и собственной функции оператора Фредгольма с симметрическим непрерывным ядром.

<u>Ключевые вопросы.</u>

1. Сформулировать определение инвариантного подпространства линейного оператора.

2. Сформулировать определение кратности собственного значения линейного оператора.

3. Сформулировать определение собственной функции ядра интегрального оператора Фредгольма.

4. Сформулировать определение вырожденного линейного оператора.

5. Сформулировать определение замкнутого ядра интегрального оператора Фредгольма.

6. Сформулировать определение вырожденного ядра интегрального оператора Фредгольма.

7. Сформулировать определение скалярного произведения в комплексном расширении пространства $h[a,b]$.

<u>Ссылки на литературные источники, приведенные в рабочей программе дисциплины.</u>

Основная литература (пп. 1-4), дополнительная литература (пп. 3, 5, 7-9).

<u>Лекция 4.</u> Теорема Гильберта-Шмидта

<u>План лекции.</u> Функция, истокопредставимая с помощью ядра. Теорема Гильберта-Шмидта

<u>Цели и задачи.</u> Ознакомить студентов с теоремой Гильберта-Шмидта.

<u>Ключевые вопросы.</u>

1. Сформулировать определение функции, истокопредставимой с помощью ядра интегрального оператора.

2. Сформулировать теорему Гильберта-Шмидта.

<u>Ссылки на литературные источники, приведенные в рабочей программе дисциплины.</u>

Основная литература (пп. 1-4), дополнительная литература (пп. 3, 5, 7-9).

Лекция 5. Неоднородное уравнение Фредгольма 2-го рода с симметрическим непрерывным ядром

План лекции. Интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода.

Цели и задачи. Ознакомить студентов с интегральным уравнением Фредгольма 2-го рода и основными теоремами о его решении.

Ключевые вопросы.

1. Сформулировать определение интегрального оператора с полярным ядром.
2. Сформулировать определение интегрального оператора со слабо полярным ядром.
3. Сформулировать определение резольвенты интегрального оператора.
4. Сформулировать альтернативу Фредгольма для интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода с непрерывным симметрическим ядром.
5. При каком условии неоднородное уравнение Фредгольма 2-го рода с симметрическим непрерывным ядром имеет и притом единственное решение для любой непрерывной функции $f(x)$ - неоднородности уравнения?
6. Сформулировать условие разрешимости неоднородного уравнения Фредгольма 2-го рода с симметрическим непрерывным ядром в случае, когда однородное уравнение имеет нетривиальное решение. Сколько решений имеет неоднородное уравнение, если оно разрешимо?

Ссылки на литературные источники, приведенные в рабочей программе дисциплины.

Основная литература (пп. 1-4), дополнительная литература (пп. 3, 5, 7-9).

Лекция 6. Принцип сжимающих отображений. Теоремы о неподвижной точке

План лекции. Сжимающее отображение. Неподвижная точка.

Цели и задачи. Ознакомить студентов с понятием сжимающих отображений и теоремой и неподвижной точке.

Ключевые вопросы.

1. Сформулировать определение сжимающего оператора.
2. Сформулировать определение неподвижной точки оператора.
3. Сформулировать теорему о существовании неподвижной точки у сжимающего оператора.
4. Как можно найти неподвижную точку?

Ссылки на литературные источники, приведенные в рабочей программе дисциплины.

Основная литература (пп. 1-4), дополнительная литература (пп. 3, 5, 7-9).

Лекция 7. Неоднородное уравнение Фредгольма 2-го рода с "малым"

План лекции. Уравнения Фредгольма 2-го рода с «малыми» λ.

Цели и задачи. Ознакомить студентов с интегральным уравнением Фредгольма 2-го рода с «малыми» λ и теоремами о его решении.

Ключевые вопросы.

1. Записать метод последовательных приближений решения интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода с «малым» λ.
2. Сформулировать определение повторного (итерированного) ядра интегрального оператора Фредгольма. Ядром какого интегрального оператора оно является?

Ссылки на литературные источники, приведенные в рабочей программе дисциплины.

Основная литература (пп. 1-4), дополнительная литература (пп. 3, 5, 7-9).

Лекция 8. Линейное уравнение Вольтерра 2-го рода

План лекции. Интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода.

Цели и задачи. Ознакомить студентов с интегральным уравнением Вольтерра 2-го рода и теоремами о его решении.

<u>Ключевые вопросы.</u>

1) Сформулировать теорему о разрешимости интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода.

<u>Ссылки на литературные источники, приведенные в рабочей программе дисциплины.</u>

Основная литература (пп. 1-4), дополнительная литература (пп. 3, 5, 7-9).

<u>Лекция 9-10.</u> Уравнения Фредгольма с вырожденными ядрами. Уравнение Фредгольма 2-го рода с произвольным непрерывным ядром. Теоремы Фредгольма

<u>План лекции.</u> Уравнения Фредгольма 2-го рода. Уравнение Фредгольма 2-го рода с произвольными непрерывными ядрами. Теоремы Фредгольма.

<u>Цели и задачи.</u> Ознакомить студентов с интегральным уравнением Фредгольма и теоремами Фредгольма.

<u>Ключевые вопросы.</u>

1. Записать интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода с вырожденным ядром.
2. Сформулировать определение союзного интегрального уравнения.
3. Сформулировать условие разрешимости неоднородной системы линейных алгебраических уравнений.
4. Сформулировать теорему о числе линейно независимых решений однородного уравнения Фредгольма 2-го рода и союзного с ним (1-я теорема Фредгольма). При каких условиях на ядра интегральных операторов эта теорема была доказана в лекционном курсе?
5. Сформулировать теорему о необходимом и достаточном условии разрешимости неоднородного уравнения Фредгольма 2-го рода (2-я теорема Фредгольма). При каких условиях на ядра интегральных операторов эта теорема была доказана в лекционном курсе?
6. Сформулировать альтернативу Фредгольма (3-я теорема Фредгольма). При каких условиях на ядра интегральных операторов эта теорема была доказана в лекционном курсе?
7. Сформулировать теорему о характеристических числах интегрального оператора Фредгольма (4-я теорема Фредгольма). При каких условиях на ядра интегральных операторов эта теорема была доказана в лекционном курсе?

<u>Ссылки на литературные источники, приведенные в рабочей программе дисциплины.</u>

Основная литература (пп. 1-4), дополнительная литература (пп. 3, 5, 7-9).

<u>Лекция 11.</u> Задача Штурма-Лиувилля

<u>План лекции.</u> Начально-краевая задача для дифференциального уравнения в частных производных второго порядка. Первая краевая задача на собственные значения и собственные функции для оператора Штурма-Лиувилля (задача Штурма-Лиувилля). Теорема Стеклова.

<u>Цели и задачи.</u> Ознакомить студентов с задачей Штурма-Лиувилля и теоремами о ее решении.

<u>Ключевые вопросы.</u>

1. Записать оператор Штурма-Лиувилля.
2. Сформулировать задачу Штурма-Лиувилля в случае однородных граничных условий первого рода.
3. Описать свойства собственных значений и собственных функций задачи Штурма-Лиувилля в случае однородных граничных условий первого рода.
4. Сформулировать теорему Стеклова.

<u>Ссылки на литературные источники, приведенные в рабочей программе дисциплины.</u>

Основная литература (пп. 1-4), дополнительная литература (пп. 3, 5, 7-9).

<u>Лекция 12.</u> Введение в вариационное исчисление. Понятие вариации функционала

План лекции. Задача вариационного исчисления. Интегральный функционал. Вариация функционала.

Цели и задачи. Ознакомить студентов с основными понятиями вариационного исчисления. Дать определение интегрального функционала, вариации функционала.

Ключевые вопросы.

1. Сформулировать определение функционала.
2. Сформулировать определение непрерывного функционала.
3. Сформулировать определение дифференцируемого функционала.
4. Сформулировать определение вариации функционала.

Ссылки на литературные источники, приведенные в рабочей программе дисциплины.

Основная литература (пп. 1-4), дополнительная литература (пп. 3, 5, 7-9).

Лекция 13-14. Задача с закрепленными концами. Необходимое условие экстремума

План лекции. Простейшая задача вариационного исчисления. Сильный и слабый экстремум. Необходимое условие экстремума для задачи с закрепленными концами. Основная лемма вариационного исчисления. Частные случаи интегрируемости уравнения Эйлера.

Цели и задачи. Ознакомить студентов с простейшей задачей вариационного исчисления и методами ее решения.

Ключевые вопросы.

1. Сформулировать постановку простейшей задачи вариационного исчисления – задачи с закрепленными концами.
2. Сформулировать определение сильного минимума функционала.
3. Сформулировать определение сильного максимума функционала.
4. Сформулировать определение слабого минимума функционала.
5. Сформулировать определение слабого максимума функционала.
6. Сформулировать определение строгого минимума (максимума) функционала.
7. Сформулировать необходимое условие экстремума для задачи с закрепленными концами.
8. Сформулировать основную лемму вариационного исчисления.
9. Сформулировать постановку задачи с закрепленными концами и необходимые условия экстремума для функционала, зависящего от нескольких функций.

Ссылки на литературные источники, приведенные в рабочей программе дисциплины.

Основная литература (пп. 1-4), дополнительная литература (пп. 3, 5, 7-9).

Лекция 15-16. Задачи на условный экстремум

План лекции. Вариационные задачи на условный экстремум: конечные связи, дифференциальные связи, интегральные связи.

Цели и задачи. Ознакомить студентов с вариационными задачами поиска условного экстремума и методами их решения.

Ключевые вопросы.

1. Сформулировать постановку задачи поиска экстремума функционала, зависящего от нескольких функций, при условии, что концы закреплены, и имеется неголономная связь. Записать необходимые условия экстремума в этой задаче.
2. Сформулировать постановку задачи поиска экстремума функционала, зависящего от нескольких функций, при условии, что концы закреплены, и имеется голономная связь. Записать необходимые условия экстремума в этой задаче.
3. Сформулировать определение геодезической линии.
4. Сформулировать изопериметрическую задачу с закрепленными концами и необходимые условия экстремума в этой задаче.

Ссылки на литературные источники, приведенные в рабочей программе дисциплины.

Основная литература (пп. 1-4), дополнительная литература (пп. 3, 5, 7-9).

<u>Лекция 17.</u> Задачи с подвижной границей. Достаточные условия экстремума в задаче с закрепленными концами

<u>План лекции.</u> Вариационные задачи с подвижными границами и методы ее решения. Условия трансверсальности. Достаточные условия в задаче с закрепленными концами.

<u>Цели и задачи.</u> Ознакомить студентов с вариационными задачами с подвижными границами и методами ее решения. Научит студентов находить решение вариационной задачи с закрепленными концами, используя достаточные условия.

<u>Ключевые вопросы.</u>

1. Записать условие трансверсальности.
2. Сформулировать постановку задачи поиска экстремума простейшего функционала вариационного исчисления, считая, что левый конец закреплен, а правый подвижен, и записать необходимые условия экстремума в этой задаче.
3. Сформулировать постановку задачи поиска экстремума простейшего функционала вариационного исчисления, считая, что левый конец свободен, а правый подвижен, и записать необходимые условия экстремума в этой задаче.
4. Сформулировать постановку задачи поиска экстремума простейшего функционала вариационного исчисления, считая, что оба конца подвижны, и записать необходимые условия экстремума в этой задаче.
5. Сформулировать постановку задачи поиска экстремума простейшего функционала вариационного исчисления, считая, что оба конца свободны, и записать необходимые условия экстремума в этой задаче.
6. Сформулировать определение центрального поля экстремалей.
7. Сформулировать определение собственного поля экстремалей.
8. Сформулировать достаточные условия сильного минимума в задаче с закрепленными концами с использованием функции Вейерштрасса.
9. Сформулировать достаточные условия слабого минимума в задаче с закрепленными концами с использованием функции Вейерштрасса.
10. Сформулировать достаточные условия Лежандра сильного минимума в задаче с закрепленными концами.
11. Сформулировать достаточные условия Лежандра слабого минимума в задаче с закрепленными концами.
12. Сформулировать достаточные условия сильного максимума в задаче с закрепленными концами с использованием функции Вейерштрасса.
13. Сформулировать достаточные условия слабого максимума в задаче с закрепленными концами с использованием функции Вейерштрасса.
14. Сформулировать достаточные условия Лежандра сильного максимума в задаче с закрепленными концами.
15. Сформулировать достаточные условия Лежандра слабого максимума в задаче с закрепленными концами.

<u>Ссылки на литературные источники, приведенные в рабочей программе дисциплины.</u>

Основная литература (пп. 1-4), дополнительная литература (пп. 3, 5, 7-9).

<u>Лекция 18.</u> Интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода как пример некорректно поставленной задачи. Метод регуляризации А.Н. Тихонова

<u>План лекции.</u> Интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода. Метод регуляризации по А.Н. Тихонову.

<u>Цели и задачи.</u> Ознакомить студентов с методами решения некорректно-поставленных задач.

<u>Ключевые вопросы.</u>

1. Сформулировать определение корректно и некорректно поставленной задачи.

2. Сформулировать определение регуляризируемой некорректно поставленной задачи.

3. Сформулировать регуляризирующий алгоритм А.Н. Тихонова.

4. Записать функционал А.Н. Тихонова.

5. Сформулировать теорему о существовании и единственности минимума функционала А.Н. Тихонова.

6. Сформулировать теорему о согласовании параметра регуляризации в функционале А.Н. Тихонова с погрешностью входных данных для построения регуляризирующего алгоритма решения интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода.

Ссылки на литературные источники, приведенные в рабочей программе дисциплины.

Основная литература (пп. 1-4), дополнительная литература (пп. 3, 5, 7-9).

3. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

3.1. Методические указания к семинарским, практическим и лабораторным занятиям

При проведении практических занятий используется следующая литература:

1. Пантелеев, А.В. Методы оптимизации в примерах и задачах: учеб. пособие, рек. УМО / А.В. Пантелеев, Т.А. Летова. – 3-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2008. – 544 с.
2. Попов В.А. Сборник задач по интегральным уравнениям. Казань, 2006. – 30 с.

Практический курс предусматривает практические занятия по следующим темам:

Наименование	Кол-во часов	Источники (из представленного списка)
Метод последовательных приближений решения интегрального уравнения Фредгольма	2	п. 2 (№ 1-8)
Метод итерированных ядер	1	п. 2 (№ 9-14)
Уравнение Фредгольма с вырожденным ядром	2	п. 2 (№ 15-26)
Собственные значения и собственные функции	1	п. 2 (№ 27-40)
Метод последовательных приближений решения интегрального уравнения Вольтерра	2	п. 2 (№ 41-48)
Решение интегрального уравнения путем сведения его к дифференциальному уравнению	1	п. 2 (№ 49-69)
Интегральное уравнение Вольтерра с вырожденным ядром	1	п. 2 (№ 70-81)
Интегральное уравнение Вольтерра с разностным ядром	1	п. 2 (№)82-97
Интегрально-дифференциальные уравнения с разностным ядром	2	п. 2 (№ 98-103)
Вариационные задачи поиска безусловного экстремума	2	п. 1 (п. 15.1, № 1-47)
Вариационные задачи с подвижными границами	1	п. 1 (п. 15.2, № 1-11)
Вариационные задачи поиска условного экстремума	2	п. 1 (п 16.1, № 1-4, п 16.2, № 1-3, п 16.3, № 1-10)
ИТОГО	**18**	

Для выполнения домашнего задания и индивидуальных заданий, а также разъяснения некоторых теоретических вопросов следует также обратиться к литературе, указанной в п. 9 рабочей программы дисциплины.

3.2. Методические указания по выполнению курсовых работ и рефератов

Рабочей программой не предусмотрена курсовая работа по данной дисциплине.

3.3. Методические указания по самостоятельной работе студентов

На самостоятельную работу предусмотрено 18 часов, из которых 9 отводится на подготовку к экзамену. Самостоятельная работа студентов организуется по схеме, указанной в п. 6 рабочей программы.

При подготовке к практическим занятиям, к контрольной работе, при выполнении домашних и индивидуальных работ, следует пользоваться конспектом лекций, материалом, рассмотренном на практических занятиях, литературой, предусмотренной п. 9 рабочей программы, а так же другими источниками.

4. КОНТРОЛЬ ЗНАНИЙ

4.1. Текущий контроль знаний

Текущий контроль знаний осуществляется проверкой домашних работ (задания к домашней работе выдаются после каждого практического занятия), а так же проверкой индивидуальных работ.

Пример индивидуальной работы
«Интегральные уравнения»

Задание 1. Составить интегральные уравнения или системы уравнений, соответствующие следующим задачам Коши:

а) $y' = -1 + 3x^2 + y^2, y(1) = 1$;

б) $y''' = \dfrac{3}{2}x(y')^2, y(0) = -3, y'(0) = 1, y''(0) = -1$.

Задание 2. Решить интегральное уравнение, сведя его предварительно к обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$y(x) = \frac{1}{1+x^2} + \int_0^x \sin(x-t)y(t)dt.$$

Задание 3. Решить интегральное уравнение методом последовательных приближений.

$$y(x) = \frac{x^2}{2} + x - \int_0^x y(t)dt, y_0(x) = \frac{x^2}{2} + x.$$

Задание 4. Найти с помощью резольвенты решение интегрального уравнения:

$$y(x) = \sin x + 2\int_0^x e^{x-t} y(t)dt.$$

Задание 5. С помощью преобразования Лапласа найти решение уравнения типа свертки

$$y(x) = xe^{2x} - \int_0^x e^{2(x-t)} y(t)dt.$$

Задание 6. Решить уравнение Вольтера 1-го рода, сводя его к уравнению 2-го рода.

$$\int_0^x \sin(x-t)y(t)dt = 1 - \cos x.$$

Задание 7. Найти все решения или установить неразрешимость уравнения Фредгольма 2-го рода с вырожденным ядром.

$$y(x)-\frac{24}{7}\int_0^1(1-x^2)(1-\frac{3}{2}t)y(t)dt=x.$$

Задание 8. Найти характеристические числа и собственные функции уравнения.

$$y(x)-\lambda\int_0^1(xt-2x^2)y(t)dt=0.$$

Пример контрольной работы
«Вариационное исчисление»

Задание 1. Найти экстремали функционала, зависящего от одной функции:

а) $\int_0^1\left(xy'-y'^2\right)dx,\ y(0)=1,\ y(1)=\frac{1}{4}$; б) $\int_0^3\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}dx,\ y(0)=1,\ y(3)=4$.

Задание 2. Исследовать функционал с помощью необходимых и достаточных условий:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(4y^2-y'^2+8y\right)dx,\ y(0)=-1,\ y(\frac{\pi}{4})=0.$$

Задание 3. Найти экстремаль функционала, зависящего от нескольких функций:

$$\int_0^3\sqrt{1+y_1'^2+y_2'^2}dx,\ y_1(0)=1,\ y_2(0)=-2,\ y_1(3)=7,\ y_2(3)=1.$$

Задание 4. Найти экстремаль функционала, зависящего от производных высшего порядка одной функций:

$$\int_0^1\left(3yy'+y''^2\right)dx,\ y(0)=y'(0)=0,\ y(1)=2,\ y'(1)=5.$$

Задание 5. Найти экстремали в вариационной задаче с правым подвижным концом:

$$\int_0^b\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{y}dx\to extr, y(0)=0, y(b)=b-5.$$

Задание 6. Найти экстремаль функционала с конечными связями:

$$\int_0^1\left[y_1'^2+y_2'^2+x^3\right]dx,$$

$$y_1(0)=y_2(1)=2,\ y_1(1)=y_2(0)=1,$$

$$y_1-2y_2+3t=0.$$

Задание 7. Найти экстремаль функционала с дифференциальными связями:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[y_1'^2-y_2'^2\right]dx,$$

$$y_1(0)=y_2(0)=0,\ y_1\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{4},\ y_2\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{2},$$

$$y_1'-y_2-\sin t=0.$$

Задание 8. Найти экстремаль функционала с интегральными связями:

$$\int_0^1 x[y_1 - y_2]dx,$$

$$y_1(0) = y_2(0) = y_2(1) = 0, \ \ y_1(1) = 2,$$

$$\int_0^1 y_1' y_2' dx = -\frac{4}{5}.$$

4.2. Итоговый контроль знаний

Итоговый контроль знаний осуществляется в виде экзамена. Вопросы к экзамену представлены в п. 8 рабочей программы.

Пример экзаменационного билета

ФГБОУ ВПО «Амурский государственный университет»

Утверждено на заседании кафедры
«21» ноября 2011 г. Протокол № 3
Заведующий кафедрой
Утверждаю: _______________

Кафедра *математического анализа и моделирования*
Факультет *математики и информатики*
Курс *3*
Дисциплина *Интегральные уравнения вариационного исчисления*

Экзаменационный билет 0

1. Метрические, нормированные и евклидовы пространства.
2. Вариационная задача с закрепленными концами. Необходимое условие экстремума.
3. Найти экстремали функционала, зависящего от одной функции:

$$\int_1^2 \left(x^2 y'^2 + 12 y^2\right) dx, \ \ y(1) = 1, \ \ y(2) = 8.$$

4. Решить интегральное уравнение, сведя его предварительно к обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$y(x) = \frac{1}{1+x^2} + \int_0^x \cos(x-t)\, y(t)\, dt.$$

5. ИНТЕРАКТИВНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И ИННОВАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В ОБРАЗОВАТЕЛЬНОМ ПРОЦЕССЕ

При проведении занятий используются следующие инновационные технологии и методы: применение мультимедийного проектора при чтении лекций, использование ресурсов сети Internet и электронных учебников при самостоятельной работе студентов, дискуссии в обсуждении проблемных ситуаций при выполнении практических заданий.