Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Амурский государственный университет»

Кафедра математического анализа и моделирования

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС ДИСЦИПЛИНЫ

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Основной образовательной программы по специальности

010501.65 - прикладная математика и информатика

Благовещенск 2012

УМКД разработал канд.физ.-мат.наук, доцент Сельвинский Владимир Владимирович

Рассмотрен и рекомендован на заседании кафедры

Протокол заседания кафедры от «11» января 2012 г. № 5

Зав. кафедрой ________________ / В.В. Сельвинский /

УТВЕРЖДЕН

Протокол заседания УМС по специальности 010501.65 - прикладная математика и информатика

от «11 » января 2012 г. № 5

Председатель УМСС ______________ / В.В. Сельвинский /

I. РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

Вариационное исчисление
(наименование учебной дисциплины/модуля)

Специальность 010501.65 – прикладная математика и информатика
(шифр и наименование специальности)

Специализация Математическое моделирование

Квалификация выпускника математик, системный программист

Курс 4, 5 Семестр 8, 9

Лекции 28, 34 (час.) Экзамен 9 (семестр)

Практические (семинарские) занятия 28, 34 (час.) Зачет 8 (семестр)

Самостоятельная работа 96 (час.)

Общая трудоемкость дисциплины 220 (час.)

Составитель В.В.Сельвинский, и.о. зав. кафедрой, доцент
(И.О.Ф., должность, ученое звание)

1.1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Дисциплина "Вариационное исчисление" изучает математические модели естественнонаучных явлений, которые приводят к задачам отыскания экстремальных значений функционалов при заданных ограничениях на множестве допустимых решений.

Целью дисциплины является знакомство с методами исследования математических моделей различных процессов и явлений естествознания, изучение основных методов решения возникающих при этом математических задач, выяснение смысла полученного решения.

1.2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ООП ВПО

Дисциплина «Вариационное исчисление» включена в цикл общепрофессиональных дисциплин (дисциплина по выбору), является фундаментальной дисциплиной в освоении математических знаний. Освоение дисциплины «Вариационное исчисление» может быть использовано для подготовки квалификационной работы.

1.3. ПЕРЕЧЕНЬ ОСНОВНЫХ УМЕНИЙ И НАВЫКОВ, ПРИОБРЕТАЕМЫХ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ДИСЦИПЛИНЫ.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

знать: основные понятия, определения и свойства объектов методов оптимизации, формулировки и доказательства утверждений, методы их доказательства, возможные сферы их связи и приложения в других областях математического знания и дисциплинах естественнонаучного содержания.

уметь: доказывать утверждения методов оптимизации, решать задачи вариационного исчисления и методов оптимизации, уметь применять полученные навыки в других областях математического знания и дисциплинах естественнонаучного содержания.

владеть: аппаратом методов оптимизации, методами доказательства утверждений, навыками применения этого в других областях математического знания и дисциплинах естественнонаучного содержания.

1.4. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ Вариационное исчисление

Общая трудоемкость дисциплины составляет 220 часов.

№ п/п	Раздел дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)			Формы текущего контроля успеваемости *(по неделям семестра)* Форма промежуточной аттестации *(по семестрам)*
				Лек.	Прак. зан.	Сам. раб.	
1	Элементы дифференциального исчисления и выпуклого анализа	8	1-3	6	6	6	Устный опрос, самостоятельная
2	Задачи линейного программирования; теорема двойственности	8	4-7	8	8	10	Устный опрос, рейтинговая оценка, индивидуальное задание
3	Классическое вариационное исчисление. Простейшая задача.	8	8 - 14	14	14	8	Контрольная работа, устный опрос, рейтинговая оценка
	Зачет					10	
4	Достаточные условия экстремума Лежандра и Якоби	9	15 - 18	10	10	10	устный опрос, рейтинговая оценка, индивидуальное задание
5	Задачи оптимального управления	9	1-6	12	12	12	Устный опрос, рейтинговая оценка, индивидуальное задание
6	Численные методы решения задач вариационного исчис-	9	7-12	12	12	10	Контрольная работа, устный опрос, рейтинговая оценка

	ления и опти-мального управления						
	Экзамен	9				30	
	Всего			62	62	96	

1.5. СОДЕРЖАНИЕ РАЗДЕЛОВ И ТЕМ ДИСЦИПЛИНЫ

5.1. Лекции.

8-ой семестр

Раздел 1. Элементы дифференциального исчисления и выпуклого анализа

Лекция 1. Выпуклые множества и выпуклые функции.
Лекция 2. Гладкие задачи с равенствами и неравенствами.
Лекция 3. Правило множителей Лагранжа.

Раздел 2. Задачи линейного программирования; теорема двойственности

Лекция 4. Методы решения задач линейного программирования.
Лекция 5. Симплекс-метод.
Лекция 6. Теорема двойственности.
Лекция 7. Транспортная задача.

Раздел 3. Классическое вариационное исчисление. Простейшая задача.

Лекция 8. Необходимое условие экстремума функционала.
Лекция 9. Простейшая задача с неподвижными границами.
Лекция 10. Уравнение Эйлера.
Лекция 11. Обобщения простейшей задачи.
Лекция 12. Задачи с подвижными границами.
Лекция 13. Задачи на условный экстремум.
Лекция 14. Изопериметрические задачи.

9-ый семестр

Раздел 4. Достаточные условия экстремума Лежандра и Якоби

Лекция 1. Поле экстремалей.
Лекция 2. Условие Якоби о включении экстремали в поле экстремалей.
Лекция 3. Функция Вейерштрасса.
Лекция 4. Условие Лежандра.
Лекция 5. Исследование интегральных функционалов на экстремум

Раздел 5. Задачи оптимального управления

Лекция 6. Постановка задачи оптимального управления
Лекция 7. Принцип максимума Понтрягина.
Лекция 8. Методы решения задач оптимального управления.
Лекция 9. Задача на быстродействие.
Лекция 10. Задача на максимальную дальность.
Лекция 11. Задача динамического программирования.

Раздел 6. Численные методы решения задач вариационного исчисления и оптимального управления

Лекция 12. Прямые методы решения задач.
Лекция 13. Метод Эйлера.
Лекция 14. Метод Ритца.
Лекция 15. Метод Канторовича.
Лекция 16. Метод Бубнова – Галеркина.
Лекция 17. Численные методы решения задач оптимального управления.

5.2. Практические занятия.

8-ой семестр

Занятие 1. Необходимое и достаточное условие экстремума для гладких функций.
Занятие 2. Условный экстремум для гладких функций.
Занятие 3. Графический метод решения задач линейного программирования.
Занятие 4, 5. Симплекс метод.
Занятие 6, 7. Частные случаи интегрируемости уравнений Эйлера.
Занятие 8, 9. Обобщения простейшей задачи с неподвижными границами.
Занятие 10, 11. Решение задачи с подвижными границами. Условие трансверсальности.
Занятие 12. Задачи на условный экстремум.
Занятие 13. Изопериметрические задачи.
Занятие 14. Контрольная работа.

9-ый семестр

Занятие 1, 2. Достаточные условия экстремума.
Занятие 3, 4. Условия Лежандра и Якоби.
Занятие 5, 6. Принцип максимума Понтрягина.
Занятие 7, 8. Задачи на быстродействие.
Занятие 9, 10. Метод Эйлера.
Занятие 11, 12. Метод Ритца,
Занятие 13, 14. Метод Канторовича.
Занятие 15, 16. Метод штрафных функций.
Занятие 17. Контрольная работа.

1.6. САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

№ п/п	№ раздела (темы) дисциплины	Форма (вид) самостоятельной работы	Трудоёмкость в часах
1	1	Домашнее задание: решение задач, изучение теоретического материала	10
2	2	Домашнее задание: решение задач,	12

		изучение теоретического материала, индивидуальное задание	
3	3	Домашнее задание: решение задач, изучение теоретического материала, индивидуальное задание	12
4	4	Домашнее задание: решение задач, подготовка к контрольной работе	10
5	5	Домашнее задание: решение задач, изучение теоретического материала, индивидуальное задание	12
6	6	Домашнее задание: решение задач, подготовка к контрольной работе	10
7		Подготовка к экзамену	30
	Всего		96

1.7. ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

Лекции: традиционное и проблемное изложение теоретического материала, текущий устный опрос, коллоквиумы, использование интерактивных обучающих мультимедиа средств; практические занятия: интерактивные методы решения задач, мозговой штурм, использование наглядных средств, контрольные работы; консультации, самостоятельная работа.

1.8. ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ, ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО ИТОГАМ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ И УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

В течение каждого семестра студенты разбирают и решают задачи, указанные преподавателем к каждому практическому занятию, повторяют основные понятия и теоремы, доказанные на лекциях. В каждом семестре предусмотрена контрольная работа.

В контрольную работу 8-ого семестра включаются задачи и упражнения на основные понятия и приемы решения простейшей задачи вариационного исчисления и ее обобщений.

Пример варианта контрольной работы 8-ого семестра

1. Среди всех функций класса $C^2[0,\pi]$, удовлетворяющих граничным условиям $y(0)=y(\pi)=0,\ y'(0)=y'(\pi)=1$, найти такую, которая реализует экстремум функционала *I[y]=* $I[y]=\int_0^\pi \left(16y^2-(y'')^2+x^2\right)dx$.
2. Найти экстремали заданного функционала:

I[y]= $I[y]=\int_0^1 \left((y'')^2+2(y')^2+y^2\right)dx,\ \ y(0)=y(1)=0,\ y'(0)=1, y'(1)=-Sh1.$

3. Найдите функции $y_1(x), y_2(x)\in C^2[0,\pi/2]$, на которых может достигаться экстремум заданного функционала при заданных краевых условиях: $I[y_1,y_2]=\int_0^{\pi/2}\left(y_1'y_2'-y_1y_2\right)dx$,

$y_1(0)=0, y_1(\pi/2)=1,\ y_2(0)=0, y_2(\pi/2)=-1$ **.**

В контрольную работу 9 –ого семестра включаются задачи на достаточные условия экстремума простейшего функционала, а также задачи на условный экстремум и изопериметрические задачи.

Пример варианта контрольной работы 9-ого семестра

1. Определите гладкие функции, на которых может достигаться экстремум функционала в следующей вариационной задаче:

$I[y,z]=\int_0^1\left((y')^2+(z')^2-z\,y'\right)dx,\ \ y=z+e^x,\ y(0)=2,\ y(1)=e,$

$z(0)=1,\ z(1)=0$.

2. Найдите экстремали следующих функционалов, определенных на множестве гладких функций в задаче Больца:

$$I[y]=\int_0^1\left((y')^2+y\right)dx-y^2(1),\ \ y(0)=1\ .$$

3. Найти функции, на которых может достигаться экстремум функционала в следующей изопериметрической задаче:

$$I[y]=\int_0^1 y'^2dx;\ \ y(0)=0,\ y(1)=1;\ \int_0^1 x\,y\,dx=0\,.$$

В соответствии с рабочим учебным планом в 8-ом семестре предусмотрен зачет, а в 9-ом семестре - экзамен.

Вопросы к зачету, 8-ой семестр

1. Предмет вариационного исчисления. Вариация и ее свойства.
2. Необходимое условие экстремума функционала.
3. Простейшая задача вариационного исчисления с неподвижными границами. Уравнение Эйлера. Экстремали.
4. Частные случаи интегрируемости уравнения Эйлера.
5. Задача о наименьшей площади поверхности вращения.

6. Задача о брахистохроне.
7. Функционалы, зависящие от производных более высокого порядка.
8. Функционалы, зависящие от функций нескольких независимых переменных.
9. Простейшая задача с подвижными границами. Условие трансверсальности.
10. Экстремали с угловыми точками. Задача об отражении экстремалей.
11. Экстремали с угловыми точками. Задача о преломлении экстремалей.
12. Односторонние вариации.
13. Вариационные задачи на условный экстремум. Геометрические связи.
14. Вариационные задачи на условный экстремум. Кинематические связи.
15. Изопериметрические задачи.

Вопросы к экзамену, 9-ый семестр

1. Предмет вариационного исчисления. Вариация и ее свойства.
2. Необходимое условие экстремума функционала.
3. Простейшая задача вариационного исчисления с неподвижными границами. Уравнение Эйлера. Экстремали.
4. Частные случаи интегрируемости уравнения Эйлера.
5. Задача о наименьшей площади поверхности вращения.
6. Задача о брахистохроне.
7. Функционалы, зависящие от производных более высокого порядка.
8. Функционалы, зависящие от функций нескольких независимых переменных.
9. Простейшая задача с подвижными границами. Условие трансверсальности.
10. Экстремали с угловыми точками. Задача об отражении экстремалей.
11. Экстремали с угловыми точками. Задача о преломлении экстремалей.
12. Односторонние вариации.
13. Вариационные задачи на условный экстремум. Геометрические связи.
14. Вариационные задачи на условный экстремум. Кинематические связи.
15. Изопериметрические задачи.
16. Достаточные условия экстремума. Поле экстремалей.
17. Условие Якоби включения экстремали в поле экстремалей. Уравнение Якоби.
18. Функция Вейерштрасса. Достаточные условия существования слабого и сильного экстремума.
19. Условия Лежандра существования слабого и сильного экстремума.
20. Преобразование уравнений Эйлера к каноническому виду. Уравнения Гамильтона-Якоби.
21. Задача оптимального управления и ее связь с вариационной задачей.
22. Принцип максимума Понтрягина.
23. Задача о быстродействии.
24. Задача о подъеме ракеты на максимальную высоту.

Примеры экзаменационных билетов

Билет 1

1. Вариация функционала и ее свойства.
2. Условие Якоби включения экстремали в поле экстремалей.
3. Исследовать на экстремум функционал:

$$v[y(x)] = \int_1^2 y'(1 + x^2 y')dx; \;\; y(1) = 3, \;\; y(2) = 5.$$

4. Найти экстремали изопериметрической задачи:

$$v[y(x)]=\int_0^{\pi} y\ Sin\ x\ dx;\ \int_0^{\pi} y'^2 dx=3\pi/2;\ y(0)=0,\ y(\pi)=\pi\ .$$

Билет 2

1. Необходимое условие экстремума функционала.
2. Функция Вейерштрасса $E(x,y,p,y')$.Условие сильного и слабого экстремума для функционала.
3. Найти геодезические линии круглого цилиндра $r=R$.

Указание: решение удобно искать в цилиндрических координатах r,φ,z.

Найти экстремали функционала в задаче с подвижными границами:

$$v[y(x)]=\int_0^{x_1} y'^2 dx;\ y(0)=0,\ y(x_1)=-x_1-1.$$

9.УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ Вариационное исчисление

а) основная литература:

1. Андреева Е. А. Вариационное исчисление и методы оптимизации : учеб. пособие: рек. УМО/ Е. А. Андреева, В. М. Цирулева. -М.: Высш. шк., 2006. -584 с.:а-рис.

2. Пантелеев А.В. Вариационное исчисление в примерах и задачах : учеб. пособие: рек. УМО/ А. В. Пантелеев. -М.: Высш. шк., 2006. -272 с.:а-рис.

3. Корнеенко В.П. Методы оптимизации: учебник: рек. УМО / В.П. Корнеенко. – М.: Высш. шк., 2007 – 664 с.

б) дополнительная литература:

1. Алексеев В.М. Оптимальное управление : учеб.: рек. УМС/ В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин. -2-е изд., перераб. и доп.. -М.: Физматлит, 2005. -384 с.:а-рис.

2. Аттетков А.В. Методы оптимизации : учебник: рек. Мин. обр. РФ/ А. В. Аттетков, С. В. Галкин, В. С. Зарубин ; под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко. -2-е изд., стер.. -М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001, 2003. -440 с.

3. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление: учебн.: доп. Мин. обр РФ / Л.Э.Эльсгольц.- 4-е изд.-М.: Эдиториал УРСС, 2000.- 319 с.

4. Вариационное исчисление **и** методы оптимизации : учеб.-метод. комплекс для спец.010101 "Математика"/ АмГУ, ФМиИ; сост. В. В. Сельвинский. -Благовещенск: Изд-во Амур. гос. ун-та, 2007. -1 о=эл. опт. диск (CD-ROM)

5. Вариационное исчисление и вариационные принципы : [Сб. учебников]: 20 кн. в PDF - формате. -М.: Компьютерные информационные технологии: Регулярная и хаотическая динамика, 2005. -1 о=эл. опт. диск (CD-ROM).

6. Цлаф Л.Я. Вариационное исчисление и интегральные уравнения : справ. рук./ Л. Я. Цлаф. -3-е изд., стер.. -СПб.: Лань, 2005. -192 с.:а-рис.

7. Математика [Текст] : Реферативный журнал/ ВИНИТИ. - Систематическо-предметный указатель (выходит 1 раз в год). - Авторско-библиографический указатель (выходит 1 раз в год). - Выходит ежемесячно. - ISSN 0034-2467

8. Известия РАН. Серия математическая [Текст]. - Выходит раз в два месяца. - ISSN 0373-2436

в) программное обеспечение и Интернет ресурсы

№	Наименование ресурса	краткая характеристика
1	http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/calculus.htm	Учебно-образовательная физико-математическая библиотека, содержащая DjVu- и PDF-файлы учебников по теме: Методы оптимизации

1.10.МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Дисциплина «Вариационное исчисление» является теоретической фундаментальной дисциплиной и не требует специального лабораторного оборудования.

Материальное обеспечение дисциплины предполагает наличие учебных аудиторий для проведения лекционных и практических занятий с возможностью использования мультимедийных средств (ауд. 338а, ауд. 521, ауд. 528а) на группу 16-20 студентов.

1.11. РЕЙТИНГОВАЯ ОЦЕНКА ЗНАНИЙ СТУДЕНТОВ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Проводится в соответствии с положением о балльно-рейтинговой системе оценки знаний студентов АмГУ и положением кафедры МАиМ по дисциплине.

Система оценки в баллах

№	Вид работы	Норма	Максимальное кол-во баллов
	8-ой семестр		
1	Посещение занятий	0, 5 балла /2часа ауд.зан.	14 баллов
2	Активность участия в занятиях	До 2 баллов за ответ	16 баллов
3	Самостоятельная работа	0-10 баллов	10 баллов
4	Контрольная работа	0-20 баллов	20 баллов
5	Зачет	0-40	40 баллов
	Всего за семестр	0-100 баллов	100 баллов
	9-ый семестр		
1	Посещение занятий	0, 5 балла/2часа ауд.зан.	17 баллов
2	Активность участия в занятиях	До 2 баллов за ответ	16 баллов
3	Самостоятельная работа	0-12 баллов	10 баллов
4	Контрольная работа	0-17 баллов	17 баллов
5	Экзамен	0 – 40 баллов	40 баллов
	Всего за семестр	0-100 баллов	100 баллов

2. ГРАФИК САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

В самостоятельную работу студентов входит курсовая работа, подготовка к текущим занятиям и подготовка к экзамену. Тематика и требования к содержанию и оформлению курсовой работы приведены в рабочей программе.

3. МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ЧТЕНИЯ ЛЕКЦИЙ

Введение

Принцип выбора лучшего варианта из многих является основой жизнедеятельности человека. Существенную роль здесь играет критерий, по которому оценивается лучший вариант. Один и тот же вариант может быть лучшим по одному критерию и не быть таковым по другому критерию. Выбор критерия оценки варианта – проявление уровня интеллекта и жизненного опыта человека.

Совокупность критерия и множества возможных вариантов составляют структуру любой задачи оптимизации. Математическая модель такой задачи включает в себя целевую функцию (или функционал), выражающую критерий оценки, а также систему уравнений или неравенств относительно переменных, определяющих вариант выбора. Методы решения таких задач существенно зависят от вида целевой функции (функционала), характера ограничений и составляют содержание таких математических дисциплин как математическое программирование, вариационное исчисление, оптимальное управление, методы оптимизации и т.п.

Основы вариационного исчисления были сформированы еще в 17-18 веках и связаны с именами таких великих ученых как братья Якоб и Иоганн Бернулли, Исаак Ньютон, Леонард Эйлер, Жозеф Луи Лагранж. В терминах вариационного исчисления были впервые сформулированы многие фундаментальные принципы классической механики, оптики, электродинамики, квантовой механики. Вариационные методы широко используются в современных научных исследованиях.

1. **Функциональные пространства** $C^k(D)$

Множество функций $f(x)$, определенных на некотором отрезке $[a,b]\subset R$ и имеющих на этом отрезке непрерывные производные порядка k образуют линейное пространство $C^k[a,b]$. Например: пространство непрерывных функций $C^0[a,b]$; пространство функций, имеющих непрерывную первую производную $C^1[a,b]$ и так далее. Элементы этого пространства часто обозначают $f(\cdot)$ или просто f . Здесь точка в круглых скобках указывает на наличие аргумента, но его несущественную роль в обозначении элемента. Если в этих пространствах определить следующие нормы:

в $C^0[a,b]$– норму

$$\|f\|_0 = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|,$$

в $C^k[a,b]$ – норму

$$\|f\|_k = \max_i \left\{\|f\|_0, \|f'\|_0, \ldots, \|f^{(k)}\|_0\right\} = \max_i \left\{\|f^{(i)}\|_0\right\} \qquad (i = 0,1,\ldots,k),$$

то эти пространства будет полными нормированными, или банаховыми. На основе указанной нормы можно определить расстояние между «точками» этого пространства – некоторыми функциями $f(x)$ и $g(x)$

$$\rho_k(f,g) = \|f-g\|_k .$$

Пусть $y_0(x)\in C^k[a,b]$ – некоторая функция. Множество функций $y(x)\in C^k[a,b]$, для которых $\rho_k(y,y_0)<\delta$ называют δ– окрестностью функции $y_0(x)$. Так как имеет место последовательное включение пространств $C^0[a,b]\supset C^1[a,b]\supset\ldots\supset C^k[a,b]$, в пространстве $C^k[a,b]$ можно использовать нормы более широких пространств $C^m[a,b]$ $(m<k)$. В этом случае δ – окрестность будет содержать

функции более широкого класса; принято δ – окрестность по норме $\|\cdot\|_0$ называть сильной δ – окрестностью, а по норме $\|\cdot\|_1$ – слабой δ – окрестностью. Согласно определению, слабая δ – окрестность всегда содержится в сильной δ – окрестности. Заметим, что пространство $C^k[a,b]$ по отношению к норме $\|\cdot\|_m$ $(m < k)$ перестает быть банаховым. Это следует, например, из того факта, что не всякая непрерывная функция, являющаяся предельной для последовательности дифференцируемых функций, будет обязательно дифференцируемой.

Отображение $I{:}D \to R$ множества $D \subset C^k[a,b]$ на множество действительных чисел R называют функционалом и обозначают $I[y(\cdot)]$; множество D называют множеством допустимых функций для функционала I. Функционал $I[y(\cdot)]$ называется непрерывным по норме $\|\cdot\|_k$ в «точке» $y_0(\cdot) \in D$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta = \delta(y_0, \varepsilon) > 0$, такое что, как только $\rho_k(y, y_0) < \delta$ и $y(\cdot) \in D$, то $|I[y(\cdot)] - I[y_0(\cdot)]| < \varepsilon$. Для любой $y_0(\cdot) \in D$ разность $\delta y = y - y_0$ называют вариацией функции $y_0(\cdot)$; здесь $y = y(\cdot) \in D$. Таким образом, вариация функции сама является функцией из того же пространства, то есть $\delta y = \delta y(\cdot) \in C^k[a,b]$. Будем говорить, что «точка» $y(\cdot)$ является внутренней для множества D, если она входит в него вместе с некоторой своей δ – окрестностью.

Рассмотрим приращение функционала в произвольной внутренней «точке» $y(\cdot) \in D$

$$\Delta I = \Delta I[y(\cdot), \delta y] = I[y(\cdot) + \delta y] - I[y(\cdot)].$$

Если в приращении функционала можно выделить линейную часть по отношению к вариации δy, то есть представить

$$\Delta I = L\,[y(\cdot), \delta y] + o\,(\|\delta y\|_k),$$

где $L\,[y(\cdot), \delta y]$ – линейный функционал относительно δy, а $o(\|\delta y\|_k)$, – величина, имеющая более высокий порядок малости, чем δy при $\|\delta y\|_k \to 0$, то линейная часть $L\,[y(\cdot), \delta y]$ называется дифференциалом функционала $I[y(\cdot)]$, а функционал считается дифференцируемым по Фреше (Фреше́ Морис Рене – французский математик).

Рассмотрим однопараметрическое семейство функций

$$y(x,\alpha) = y(x) + \alpha\,\delta y,$$

где $\alpha \in R$ – параметр, $y(\cdot) \in D$ – внутренняя «точка». Первой вариацией $\delta I[y(\cdot), \delta y]$ функционала I в «точке» $y(\cdot)$ называют предел

$$\delta I[y, \delta y] = \lim_{\alpha \to 0} \frac{I[y + \alpha\delta y] - I[y]}{\alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} I[y + \alpha \delta y]\Big|_{\alpha=0}.$$

Первую вариацию также называют дифференциалом Гато (Гато́ Рене Эжен – французский математик). Заметим, что из дифференцируемости по Фреше функционала I следует существование его первой вариации, которая в этом случае совпадает с дифференциалом, то есть $\delta I[y, \delta y] = L\,[y, \delta y]$. Однако существование первой вариации функционала I еще не означает его дифференцируемости в соответствующей «точке» $y(\cdot)$, подобно тому, как существование производной по любому направлению в данной точке для функции многих переменных еще не означает ее дифференцируемости в этой точке.

Вариации функционала I более высокого порядка можно определить как коэффициенты в разложении в ряд Тейлора в окрестности $\alpha=0$ функции $\varphi(\alpha)=I[y+\alpha\delta y]$, в которую превращается функционал на семействе функций $y(x,\alpha)=y(x)+\alpha\delta y$:

$$\Delta\varphi(\alpha)=I[y+\alpha\delta y]-I[y]=\alpha\delta I+\frac{\alpha^2}{2!}\delta^2 I+\ldots+\frac{\alpha^k}{k!}\delta^k I+\ldots ;$$

здесь $\delta^k I=\left.\frac{d^k\varphi(\alpha)}{d\alpha^k}\right|_{\alpha=0}=\left.\frac{\partial^k I[y+\alpha\delta y]}{\partial\alpha^k}\right|_{\alpha=0}$ – вариация функционала порядка k.

Конечно, здесь функция $\varphi(\alpha)$ должна быть дифференцируема соответствующее число раз.

Говорят, что функционал $I[y]$, определенный на линейном пространстве $C^1[a,b]$, достигает сильного минимума в «точке» $y^*(\cdot)\in C^1[a,b]$, если найдется такая сильная ε – окрестность функции $y_*(x)$, что для любой функции $y(x)$ из этой окрестности выполняется неравенство $I[y^*(\cdot)]\le I[y(\cdot)]$. Минимум называется слабым, если все функции $y(x)$ берутся только из слабой ε – окрестности. Аналогично определяются сильный и слабый максимумы. Все максимумы и минимумы объединяются общим названием экстремумы.

Поскольку всякая функция, принадлежащая слабой ε – окрестности функции $y^*(x)$, заведомо входит в ее же сильную ε – окрестность, то всякий сильный экстремум одновременно является и слабым.

Говорят, что функционал $I[y(\cdot)]$, определенный на множестве D кривых $y(x)$, достигает на кривой $y^*(x)$ глобального минимума, если

$$I[y^*(x)]\le I[y(x)] \quad \forall y(x)\in D;$$

аналогично определяется глобальный максимум.

Методы решения вариационных задач основаны на следующем утверждении.

Теорема (Необходимое условие экстремума функционала). Если функционал $I[y]$, достигает экстремума во внутренней точке $y^*(x)$ своей области определения и в этой точке существует первая вариация $\delta I[y^*(\cdot),\delta y]$, то $\delta I[y^*(\cdot),\delta y]=0$.

При выводе необходимых условий экстремума для различных постановок вариационных задач применяется следующая важная теорема.

Теорема (Основная лемма вариационного исчисления). Если для каждой непрерывной функции $\delta y(x)$

$$\int_a^b A(x)\delta y(x)dx=0 ,$$

где функция $A(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то $A(x)\equiv 0$ на том же отрезке.

Замечания. 1. Утверждение основной леммы вариационного исчисления не изменится, если на функцию $\delta y(x)$ наложить следующее ограничение $\delta y(a) = \delta y(b) = 0$.

2. Все изложенное в этом разделе без существенных изменений переносится на функционалы $I[y(x)] = I[y_1(x),\ldots, y_n(x)]$, зависящие от вектор-функции $y(x) = (y_1(x),\ldots, y_n(x))^T$ одной переменной, а также на функционалы, зависящие от функций нескольких переменных.

Приведем ряд примеров, иллюстрирующих свойства функционалов и функциональных пространств.

Пример 1. Показать, что функционал

$$I[\,y(\cdot)\,] = \int_a^b \sqrt{1 + (\,y'(\,x\,))^2}\,dx\,, \tag{1}$$

определенный на множестве функций $y = y(x)$, непрерывных вместе с первой производной на отрезке $[a, b]$, непрерывен в пространстве $C^1[a,b]$, но не является непрерывным в $C^0[a,b]$.

Решение. Вначале покажем, что функционал (1) непрерывен в пространстве $C^1[a,b]$. Действительно, имеем соотношения

$$\left| I[\,y\,] - I[\,y_0\,] \right| = \left| \int_a^b \left(\sqrt{1 + y'^2} - \sqrt{1 + y_0'^2} \right) dx \right| \le \int_a^b \frac{\left| y' + y_0' \right| \left| y' - y_0' \right|}{\sqrt{1 + y'^2} + \sqrt{1 + y_0'^2}}\,dx\,.$$

Из непрерывности производных y' и y_0' следует, что

$$\frac{\left| y' + y_0' \right|}{\sqrt{1 + y'^2} + \sqrt{1 + y_0'^2}} \le M\,.$$

Далее, из определения нормы в пространстве $C^1[a,b]$ заключаем, что

$$\max_{x\in[a.b]} \left| y' - y_0' \right| = \left\| y' - y_0' \right\|_0 \le \left\| y - y_0 \right\|_1 .$$

По заданному $\varepsilon > 0$ выберем $\delta = \varepsilon/(M(b-a))$. Тогда для всех $y(\cdot) \in C^1[a,b]$ и таких, что $\|y - y_0\|_1 < \delta$, имеем

$$\left| I[\,y\,] - I[\,y_0\,] \right| \le M \max_{x\in[a.b]} \left| y' - y_0' \right| \;(\,b - a\,) \le M(\,b - a\,) \left\| y - y_0 \right\|_1 < \varepsilon\,,$$

а это означает, что функционал (1) непрерывен в пространстве $C^1[a,b]$.

Функционал (1) не будет непрерывным в пространстве $C^0[a,b]$, так как он не ограничен в любой сильной δ - окрестности любой «точки» $y(\cdot) \in C^1[a,b]$ ввиду неограниченности всей совокупности значений производных функций $y(x) \in C^1[a,b]$.

Пример 2. Показать, что функционал

$$L(\,f\,) = \int_a^b \alpha(\,x\,)\,f(\,x\,)dx\,, \tag{2}$$

где $\alpha(x)$ - непрерывная фиксированная функция, является линейным в пространстве $C^0[a,b]$.

Решение. Аддитивность этого функционала очевидна. Покажем его непрерывность. Учитывая, что функция $\alpha(x)$ ограничена ($|\alpha(x)| < M$), оценим модуль разности; имеем

$$\left|L(f)-L(f_1)\right|\le\int_a^b|\alpha(x)|\,|f(x)-f_1(x)|dx\le$$
$$\le M\max_{x\in[a,b]}|f(x)-f_1(x)|(b-a)\le M\|f-f_1\|_0(b-a)<\varepsilon,$$

как только норма $\|f-f_1\|_0<\dfrac{\varepsilon}{M(b-a)}$. А это означает, что функционал (2) непрерывен.

Функционал (1) не является линейным в пространстве $C^0[a,b]$, ибо для него не выполнены условия непрерывности и аддитивности. Этот же функционал не будет линейным и в пространстве $C^1[a,b]$; хотя он и непрерывен, но не является аддитивным.

Пример 3. Найти расстояния $\|y-y_0\|_0$, $\|y-y_0\|_1$ между кривыми $y(x)=x^2$ и $y_0(x)=x^3$ в пространствах $C^0[0,1]$ и $C^1[0,1]$.

Решение. Найдем расстояние в пространстве $C^0[0,1]$:

$$\rho_0(x,y)=\|y-y_0\|_0=\max_{x\in[0,1]}\left|x^2-x^3\right|.$$

Рассмотрим функцию $f(x)=x^2-x^3$. Из необходимого условия экстремума $f'(x)=0$ получаем $2x-3x^2=0$, или $x_1=0$, $x_2=2/3$. Сравнивая значения функции $f(x)$ в точках экстремума и на концах промежутка $[0,1]$, $f(0)=f(1)=0$, устанавливаем искомое расстояние:

$$\rho_0(x,y)=\left|f(x)\right|_{x=2/3}=4/27.$$

Найдем расстояние в пространстве $C^1[0,1]$:

$$\rho_1(x,y)=\|y-y_0\|_1=\max\left\{\|f\|_0,\|f'\|_0\right\}=\max\left\{\|x^2-x^3\|_0,\|2x-3x^2\|_0\right\}.$$

Исследуя дополнительно функцию $g(x)=2x-3x^2$ на экстремум, из условия $g'(x)=0$ получаем $2-6x=0$, или $x_3=1/3$ – стационарная точка. Сравнивая значения функции $g(x)$ в стационарной точке и на концах отрезка $[0,1]$, $g(0)=0$, $g(1/3)=1/3$, $g(1)=-1$, устанавливаем

$$\|g\|_0=\|2x-3x^2\|_0=\left|2x-3x^2\right|_{x=1}=1,$$

то есть

$$\rho_1(x,y)=\max\{4/27,1\}=1.$$

Пример 4. Найти первую вариацию функционала

$$I[y(\cdot)]=\int_a^b y^2(x)\,dx.$$

Решение. Сначала найдем вариацию функционала как линейную часть его приращения

$$\Delta I=\int_a^b[y(x)+\delta y(x)]^2dx-\int_a^b y^2(x)\,dx=\int_a^b 2y(x)\cdot\delta y(x)dx+\int_a^b[\delta y(x)]^2\,dx.$$

Заметим, что первое слагаемое линейно относительно вариации $\delta y(x)$; второе слагаемое имеет более высокий порядок малости при $\|\delta y\|_0\to 0$. Действительно

$$\int_a^b[\delta y(x)]^2\,dx\le\int_a^b[\max_{x\in[a,b]}|\delta y(x)|]^2\,dx=[\max_{x\in[a,b]}|\delta y(x)|]^2(b-a)=(b-a)\|\delta y\|_0^2.$$

Таким образом

$$\delta I = \int_a^b 2y(x)\cdot \delta y(x)dx .$$

Найдем вариацию функционала другим способом. Рассмотрим изменение функционала на семействе функций $y(x,\alpha)=y(x)+\alpha\,\delta y(x)$:

$$I[\,y(x)+\alpha\delta y(x)] = \int_a^b [\,y(x)+\alpha\delta y(x)]^2\,dx .$$

Тогда

$$\delta I = \left.\frac{\partial I[\,y(x)+\alpha\delta y(x)]}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0} = \left.\int_a^b 2[\,y(x)+\alpha\delta y(x)]\delta y(x)dx\right|_{\alpha=0} = \int_a^b 2y(x)\delta y(x)dx .$$

Конечно, оба способа приводят к одному результату.

Пример 5. Доказать, что на кривой $y^*(x)= x$ функционал

$$I[\,y(\cdot)] = \int_0^1 y'^2(x)\,dx;\ \ y(0)=0,\ y(1)=1$$

достигает глобального минимума.

Решение. Очевидно, функция $y^*(x)= x\in C^1[0,1]$. Рассмотрим вариации $\delta\, y(x)\ \in C^1[0,1]$, удовлетворяющие условиям $\delta\, y(0) =\delta\, y(1)=0$. Исследуем приращение функционала:

$$I[\,y^*(x)+\delta y(x)] - I[\,y^*(x)] = \int_0^1 [\,y^{*\prime}(x)+\delta y'(x)]^2\,dx - \int_0^1 [\,y^{*\prime}(x)]^2\,dx =$$

$$= 2\int_0^1 y^{*\prime}(x)\delta y'(x)dx + \int_0^1 [\,\delta y'(x)]^2\,dx = 2\delta y(x)\Big|_0^1 + \int_0^1 [\,\delta y'(x)]^2\,dx \ge 0,$$

так как $y^{*\prime}(x)=1$. Поскольку кривая $y(x)= y^*(x)+\ \delta\, y(x)\ \in C^1[0,1]$ произвольна и $I[y(x)]=I[y^*(x)+\ \delta\, y(x)]\ge I[y^*(x)]$, то на функции $y^*(x)= x$ достигается глобальный минимум.

Пример 6. Доказать, что на кривой $y^*(x)= 0$ функционал

$$I[\,y(\cdot)] = \int_0^{\pi} y^2(x)[3-y'^2(x)]dx;\ \ y(0)=y(\pi)=0$$

достигает слабого минимума.

Решение. Так как $I[y^*(x)]=0$, то согласно определению требуется доказать, что существует $\varepsilon>0$ такое, что для всех $y(x)$, удовлетворяющих условию

$$\|y(x)-y^*(x)\|_1 = \max_{x\in[0,\pi]}\left\{\|y(x)-y^*(x)\|_0 ,\|y'(x)-y^{*\prime}(x)\|_0\right\} =$$

$$= \max_{x\in[0,\pi]}\left\{\|y(x)\|_0 ,\|y'(x)\|_0\right\} < \varepsilon ,$$

справедливо неравенство $I[y(x)]\ge I[y^*(x)]=0$.

Пусть $\varepsilon=1$, тогда для всех кривых из ε– окрестности первого порядка кривой $y^*(x)\equiv 0$ выполняются условия:

$$\max_{x\in[0,\pi]} |y(x)| < \varepsilon =1,\ \max_{x\in[0,\pi]} |y'(x)| < \varepsilon =1 .$$

Поэтому $0 \le y^2(x) < 1,\ \ 3 - y'^2(x) > 0$ и

$$I[y(\cdot)]=\int_0^{\pi} y^2(x)[3-y'^2(x)]dx \geq 0,$$

что и требовалось доказать. Следовательно, на кривой $y^*(x)\equiv 0$ функционал достигает слабого минимума.

Исследуем функционал на наличие сильного минимума. При $\varepsilon=1$ ε – окрестность нулевого порядка кривой $y^*(x)\equiv 0$ образуют кривые, удовлетворяющие условию

$$\|y(x)-y^*(x)\|_0=\max_{x\in[0,\pi]}|y(x)-y^*(x)|=\max_{x\in[0,\pi]}|y(x)|<\varepsilon=1 \quad .$$

Рассмотрим последовательность функций $y_n(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\pi}\right)^n$ из этой ε – окрестности. Нетрудно заметить, что функционал на этих функциях принимает следующие значения

$$I[y_n(\cdot)]=\int_0^{\pi} y_n^2(x)[3-y_n'^2(x)]dx=\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\left(\frac{x}{\pi}\right)^{2n}[3-\frac{n^2}{4\pi^2}\left(\frac{x}{\pi}\right)^{2n-2}]dx=$$

$$=\frac{48\pi^2 n-2n^3-n^2-12\pi^2}{16\pi(2n+1)(4n-1)},$$

которые становятся отрицательными, начиная уже с $n>n_0=15$. Аналогичные рассуждения справедливы при других значениях ε. Следовательно, на кривой $y^*(x)\equiv 0$ функционал не достигает сильного минимума.

2.1. Простейшая задача вариационного исчисления. Уравнение Эйлера

Простейшая задача вариационного исчисления формулируется следующим образом. Пусть функция $F(x,y,z)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно по всем своим аргументам. Требуется среди всех функций $y(x)\in C^1[a,b]$, удовлетворяющих граничным условиям

$$y(a)=y_0,\ y(b)=y_1, \tag{1}$$

найти ту функцию, на которой достигается слабый экстремум функционала

$$I[y(\cdot)]=\int_a^b F(x,y,y')dx\,. \tag{2}$$

Другими словами, простейшая задача вариационного исчисления состоит в отыскании на множестве всех гладких кривых, проходящих через точки $M_0(a,\,y_0)$ и $M_1(b,\,y_1)$, той кривой, на которой функционал (2) достигает слабого экстремума (рис.1).

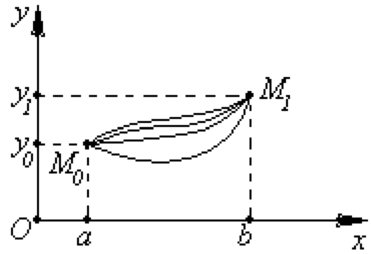

Рис. 1. Схема графиков семейства допустимых функций.

При решении простейшей задачи вариационного исчисления используется теорема, которая следует из необходимого условия экстремума, $\delta I=0$.

Теорема 1. Для того чтобы функционал (2) достигал на функции $y(x)\in C^1[a,b]$ слабого экстремума, необходимо, чтобы эта функция удовлетворяла уравнению Эйлера

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0 . \tag{3}$$

Решения (интегральные кривые) уравнения (3) называются экстремалями функционала (2).

Уравнение (3) в развернутом виде записывается следующим образом:

$$y''(x)F_{y'y'} + y'(x)F_{yy'} + F_{xy'} - F_y = 0 .$$

Если $F_{y'y'} \neq 0$, то оно представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, поэтому его общее решение зависит от двух произвольных постоянных, которые находятся с помощью граничных условий (1).

Отметим что, так как всякий сильный экстремум функционала является и слабым, то теорема 1 дает необходимое условие и сильного экстремума функционала (2). Кроме того, так как абсолютный экстремум функционала (2) на множестве

$$G=\{\, y(x)\in C_1[\,a,b\,] \mid y(a)=y_0,\, y(b)=y_1 \,\} \tag{4}$$

является и локальным экстремумом (сильным и слабым), то теорема 1 определяет необходимое условие абсолютного экстремума функционала (2) на множестве (4).

Таким образом, решение краевой задачи

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0,\ \ y(a) = y_0,\ \ y(b) = y_1, \tag{5}$$

позволяет найти все кривые возможного экстремума функционала (2) на множестве функций (4).

В отличие от задачи с начальными условиями, $y(a)=y_0$, $y'(a)=y_0'$ (задача Коши), задача с граничными условиями (1) может не иметь решение или иметь множество решений, даже если в окрестности точки $x= a$ выполняется теорема существования и единственности задачи Коши. Кроме этого, само уравнение Эйлера (3) может вырождаться в дифференциальное уравнение первого порядка ($F_{y'y'} \neq 0$) или даже вообще не быть дифференциальным ($F_{y'} = f(x)$).

Рассмотрим частные случаи интегрирования уравнения Эйлера.

1. $F = F(x,y)$, то есть подынтегральная функция в функционале (2) не зависит от y'. Уравнение (3) в этом случае принимает вид

$$F_y(x,y) = 0.$$

Это конечное (не дифференциальное) уравнение, его решение $y=y(x)$ не содержит произвольных постоянных и, следовательно, удовлетворяет условиям (1) только в исключительных случаях. В остальных случаях задача отыскания экстремума функционала (2) не имеет решения в классе функций $y(x) \in C^1[a,b]$.

Пример. Найти функцию $y(x) \in C^1[0,b]$, на которой достигается экстремум функционала

$$I[y] = \int_0^b y(y - 2x^2)dx,$$

удовлетворяющую граничным условиям $y(0)=0$, $y(b)=y_1$.

Решение. Уравнение Эйлера принимает вид $2y\text{-}2x^2=0$, отсюда $y=x^2$. Граничные условия удовлетворяются только, если $y_1=b^2$. В противном случае задача не имеет решения в пространстве $C^1[a,b]$.

2. $F(x,y) = M(x,y)+y'{\cdot}N(x,y)$, то есть подынтегральная функция в функционале (2) линейно зависит от y'. Уравнение (3) в этом случае принимает вид

$$M_y(x,y)–N_x(x,y)=0. \qquad (6)$$

Это уравнение не является дифференциальным, а его решение может не удовлетворять граничным условиям. Это означает, что в пространстве $C^1[a,b]$ экстремали функционала (2) отсутствуют, и исходная задача имеет решение в исключительных случаях. Заметим, что если условие (6) выполняется в некоторой области, имеющей граничные точки (a,y_0) и (b,y_1), то значение функционала не зависит от вида кривой $y(x) \in C^1[a,b]$. В этом случае функционал (2) можно рассматривать как криволинейный интеграл от дифференциальной формы

$$M(x,y)dx+ N(x,y)dy,$$

для которой (6) является условием полного дифференциала. Исходная задача на отыскание экстремалей теряет смысл.

3. Функция F зависит только от y': $F = F(y')$. Уравнение Эйлера принимает вид $F_{y'y'} \cdot y'' = 0$, а его решение $y(x)=C_1x+C_2$. Таким образом, в данном случае экстремалями функционала $I[y(x)]$ являются всевозможные прямые.

Пример. Найти функцию $y(x) \in C^1[0,1]$, на которой достигается экстремум функционала,

$$I[y]=\int_0^1 (y')^2 e^{\cos y'} dx,$$

удовлетворяющую граничным условиям $y(0)=0, y(1)=-4$.

Решение. Подынтегральная функция зависит только от y', $F(y')=(y')^2 e^{\cos y'}$. Поэтому семейство экстремалей представляет собой двухпараметрическое семейство прямых, $y(x)=C_1x+C_2$. Используя граничные условия, получаем $C_1=-4$, $C_2=0$. Таким образом, искомой экстремалью является функция $y(x)=-4x$.

4. Функция F не зависит от y, т.е. $F=F(x,y')$. Тогда уравнение (3) записывается в виде $\frac{d}{dx}F_{y'}(x,y')=0$, откуда получаем первый интеграл уравнения Эйлера $F_{y'}(x,y')=C_1$, т.е. дифференциальное уравнение первого порядка, решив которое, найдем экстремали функционала.

Пример. Материальная точка перемещается из точки $A(1,0)$ в точку $B(2,1)$ со скоростью $v=x$. Найти кривую, по которой время движения будет минимальным.

Решение: Используя известное кинематическое выражение $v=\frac{ds}{dt}$, где $ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$ – длина элемента дуги траектории точки, получаем дифференциальное соотношение для t: $dt=\frac{ds}{x}$. Поэтому время, затраченное на прохождение дуги кривой $y=y(x)$ $(1\le x\le 2)$, определяется с помощью интеграла

$$t[y]=\int_1^2 \frac{\sqrt{1+y'^2}}{x}dx,$$

представляющего собой функционал, в котором рассматриваемые кривые $y(x)$ удовлетворяют условиям $y(1)=0$, $y(2)=1$. Подынтегральная функция $F(x,y,y')=\frac{\sqrt{1+y'^2}}{x}$ не зависит от y, поэтому из $F_{y'}=C_1=const$ имеем равенство

$$\frac{y'}{x\sqrt{1+y'^2}}=\frac{1}{C_1}.$$

Определяя отсюда y':

$$y'=\pm\frac{x}{\sqrt{C_1^2-x^2}}$$

и интегрируя, находим экстремали

$$y=C_2\pm\sqrt{C_1^2-x^2}\text{, или } (y-C_2)^2+x^2=C_1^2.$$

Из граничных условий $y(1)=0$ и $y(2)=1$ для определения C_1 и C_2 получаем систему

$$C_2^2+1=C_1^2,\quad (1-C_2)^2+4=C_1^2.$$

Отсюда находим, что $C_1=\sqrt{5}$, $C_2=2$ и уравнение искомой экстремали есть окружность $x^2+(y-2)^2=5$ с центром в точке *(0,2)* радиуса $\sqrt{5}$.

Из физических соображений ясно, что максимума для времени движения по различным кривым не существует и функция $y=2-\sqrt{-5-x^2}$ дает минимум функционалу *t[y]*.

5. Функция F не зависит явно от x, т.е. $F=F(y,y')$. Уравнение Эйлера принимает вид

$$F_y - F_{yy'}\cdot y' - F_{y'y'}\cdot y''=0\ ,$$

или (после умножения обеих частей этого равенства на y')

$$\frac{d}{dx}(F-y'F_{y'})=0,$$

откуда получаем первый интеграл уравнения Эйлера

$$F-y'F_{y'}=C_1.$$

Это дифференциальное уравнение первого порядка можно проинтегрировать, разрешив его относительно y' и разделив переменные, или путем введения параметра. [17, Еф-Сб-4, стр. 115]

Пример. Среди кривых, соединяющих две точки $M_0(a,y_0)$ и $M_1(b,y_1)$, найти ту, которая при вращении вокруг оси *Ox* образует поверхность наименьшей площади.

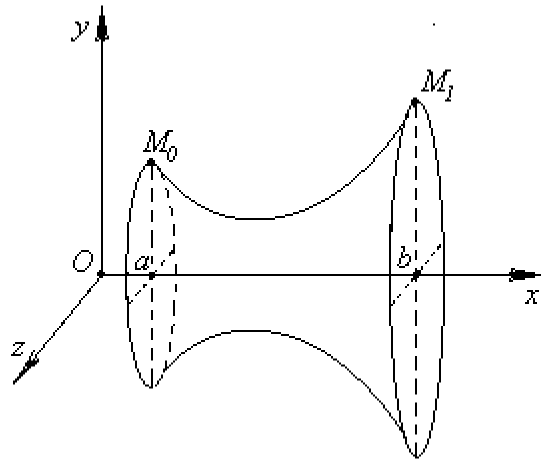

Рис. 2. Форма поверхности вращения наименьшей площади.

Решение: Площадь поверхности вращения вокруг оси Ox задается функционалом

$$I[y]=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

причем допустимые кривые *y(x)* удовлетворяют условию $y(a)=y_0$, $y(b)=y_1$. Подынтегральная функция не зависит от *x*, поэтому можем воспользоваться первым интегралом уравнения Эйлера $F-y'F_{y'}=C_1$, который в данном случае принимает вид

$$y\sqrt{1+y'^2}-\frac{yy'^2}{\sqrt{1+y'^2}}=C_1 \quad \text{, или } y=C_1\sqrt{1+y'^2}\ .$$

После элементарных преобразований получаем отсюда уравнение

$$C_1 dy/\sqrt{y^2-C_1^2}=dx\,,$$

интегрируя которое, имеем

$$ln\left|\frac{y}{C_1}+\sqrt{\left(\frac{y}{C_1}\right)^2-1}\right|=\frac{x}{C_1}+C_2\,.$$

Разрешая полученное равенство относительно y, придем к уравнению цепной линии

$$y=C_1Ch(x/C_1+C_2).$$

Постоянные C_1 и C_2 находим из системы

$$y_0=C_1Ch(a/C_1+C_2),\ \ y_1=C_1Ch(b/C_1+C_2), \qquad (5)$$

которая может иметь одно, два или ни одного решения. Дальнейшие исследования показывают, что если система (5) не имеет решения, а также при достаточно малых отношениях $y_i/(b-a)$ $(i=0,1)$, множество значений площади фигур вращения имеют инфимум, равный

$$\pi(a^2+b^2),$$

который не достигается в пространстве функций $C^1[a,b]$. При достаточно больших отношениях $y_i/(b-a)$ $(i=0,1)$ и когда система (5) имеет два решения, на ближней к оси x кривой достигается локальный максимум, а на дальней кривой – абсолютный минимум.

В общем случае приходится привлекать известные методы решения из теории дифференциальных уравнений.

Пример 4. Исследовать на экстремум функционал

$$I[y]=\int_1^2(x^2y'^2+12y^2)dx, \quad y(1)=1, y(2)=8.$$

Решение: Уравнение Эйлера для данного функционала имеет вид

$$x^2y''+2xy'-12y=0.$$

Линейные уравнения такого типа в теории дифференциальных уравнений называются также уравнениями Эйлера. Его решение ищем в виде $y=x^\lambda$. Найдем производные $y'=\lambda x^{\lambda-1}, y''=\lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}$; подставив их в уравнение Эйлера, получим

$$x^\lambda(\lambda^2+\lambda-12)=0.$$

Для определения λ имеем характеристическое уравнение

$$\lambda^2+\lambda-12=0,$$

корни которого $\lambda_1=3$ и $\lambda_2=-4$. Общее решение уравнения Эйлера имеет вид

$$y=c_1x^3+c_2x^{-4}.$$

Из граничных условий $y(1)=1, y(2)=8$ для определения постоянных C_1 и C_2 получаем систему

$$C_1 + C_2 = 1, \qquad 8C_1 + C_2 / 16 = 8.$$

Отсюда находим $C_1=1$, $C_2=0$. Следовательно, $y=x^3$ есть экстремаль данного функционала. В этом примере экстремаль $y=x^3$ реализует минимум функционала.

2.2. **Функционалы, зависящие от производных более высокого порядка**

Одним из обобщений простейшей задачи вариационного исчисления является задача на экстремум функционала $J[y(\cdot)]$, зависящего от производных высших порядков функции $y(x)$:

$$J[y(\cdot)] = \int_a^b F(x, y, \ldots, y^{(n)})dx, \tag{7}$$

где функция $F(x, y, \ldots, y^{(n)})$ имеет непрерывные частные производные вплоть до $(n+1)$-го порядка по всем аргументам, а $y(x) \in C^n[a,b]$.

Граничные условия в этой задаче имеют вид

$$\begin{aligned} &y(a) = y_0, \quad y^{(1)}(a) = y_0^{(1)}, \ldots, y^{(n)}(a) = y_0^{(n)}, \\ &y(b) = y_1, \quad y^{(1)}(b) = y_1^{(1)}, \ldots, y^{(n)}(b) = y_1^{(n)}. \end{aligned} \tag{8}$$

В рассматриваемой задаче теорема 1 обобщается следующей теоремой.

Теорема 2. Для того чтобы функционал (7) достигал на функции $y(x) \in C^n[a,b]$ локального экстремума, необходимо, чтобы эта функция удовлетворяла уравнению Эйлера-Пуассона

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y^{(1)}} + \frac{d^2}{dx^2}F_{y^{(2)}} - \ldots (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}} = 0. \tag{9}$$

Подобно случаю простейшей задачи вариационного исчисления, решения уравнения (9) (экстремали функционала (7)), удовлетворяющие граничным условиям (8), являются кривыми возможного абсолютного экстремума этого функционала на множестве

$$G = \left\{ y(x) \in C^n[a,b] \;\middle|\; y(a) = y_0, \ldots, y^{(n)}(a) = y_0^{(n)},\; y(b) = y_1, \ldots, y^{(n)}(b) = y_1^{(n)} \right\}.$$

2.3. **Функционалы, зависящие от нескольких функций одной переменной**

Другим обобщением простейшей задачи вариационного исчисления является задача отыскания экстремума функционала, зависящего от нескольких функций. Здесь требуется найти совокупность функций $y_1(x), \ldots, y_n(x) \in C^1[a,b]$, удовлетворяющих граничным условиям

$$y_k(a) = y_{k0},\ y_k(b) = y_{k1} \ (k=1,\ldots,n)$$

и доставляющих экстремум функционалу

$$I[y_1(x),...,y_n(x)]=\int_a^b F(x,y_1(x),...,y_n(x),y_1'(x),...,y_n'(x))dx, \qquad (10)$$

где функция $F(x,y_1(x),...,y_n(x),y_1'(x),...,y_n'(x))$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно по всем своим аргументам.

В этом случае необходимое условие экстремума функционала (10) приводит к следующей теореме.

Теорема 3. Для того чтобы набор функций $y_1(x),..., y_n(x)\in C^1[a,b]$ доставлял слабый экстремум функционалу (10), необходимо, чтобы эти функции удовлетворяли системе уравнений Эйлера

$$F_{y_k}-\frac{d}{dx}F_{y_k'}=0, \quad k=1,...,n \qquad (12)$$

Уравнения (12) представляют собой систему n дифференциальных уравнений второго порядка. Общее решение системы в общем случае содержит $2n$ произвольных постоянных, которые однозначно определяются из граничных условий.

3.1. Простейшая задача с подвижными границами. Условие трансверсальности

В задачах вариационного исчисления с подвижными границами в отличие от ранее рассмотренных задач граничные условия на функцию $y(x)$, $x\in[a,b]$ на концах отрезка $[a,b]$ не зафиксированы.

Простейшая задача вариационного исчисления с подвижными границами состоит в определении функции $y(x)\in C^1[a,b]$ и точек $x_0, x_1\in[a,b], x_0<x_1$, для которых функционал

$$J[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')dx \qquad (13)$$

достигает слабого экстремума при условиях

$$y(x_0)=\varphi_0(x_0), \; y(x_1)=\varphi_1(x_1). \qquad (14)$$

Здесь $\varphi_0(x),\varphi_1(x)\in C^1[a,b]$, $F(x,y,z)$ - заданные функции и $F(x,y,z)$ имеет непрерывные производные до второго порядка включительно по всем аргументам.

Замечание. Напомним, что слабым называется локальный экстремум в пространстве $C^1[a,b]$. В задаче с подвижными границами на кривой $y^*(x)$ с абсциссами концов x_0^* и x_1^* функционал (13) достигает локального экстремума в $C^1[a,b]$, если существует число $\varepsilon>0$ такое, что для всех кривых $y(x)\in C^1[a,b]$ и точек x_0 и x_1, удовлетворяющих неравенствам

$\left\| y^* - y \right\|_1 < \varepsilon$, $\left| x_0^* - x_0 \right| < \varepsilon$, $\left| x_1^* - x_1 \right| < \varepsilon$, справедливо $J[y^*(x)] \le J[y(x)]$ (локальный минимум) или $J[y^*(x)] \ge J[y(x)]$ (локальный максимум).

Задачу (13)-(14) можно сформулировать и следующим образом. Пусть на плоскости заданы гладкие кривые γ_0: $y = \varphi_0(x)$ и γ_1: $y = \varphi_1(x)$, $x \in [a,b]$. Требуется найти такую гладкую кривую $y = y(x)$, которая соединяет какую – либо точку кривой γ_0 с какой – либо точкой кривой γ_1 и доставляет слабый экстремум функционалу (13).

Приведем обобщение теоремы 1 для простейшей задачи вариационного исчисления с подвижными границами.

Теорема 4. Для того чтобы функционал (13) достигал на функции $y(x) \in C^1[a,b]$ слабого экстремума при условиях (14), необходимо, чтобы эта функция удовлетворяла уравнению Эйлера

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$$

и условию трансверсальности

$$\left\lfloor F + (\varphi_0' - y') F_{y'} \right\rfloor_{x = x_0} = 0, \ \left\lfloor F + (\varphi_1' - y') F_{y'} \right\rfloor_{x = x_1} = 0 \ . \qquad (15)$$

Таким образом, для определения экстремалей в простейшей задаче с подвижными границами необходимо найти общее решение $y(x, C_1, C_2)$ уравнения Эйлера, после чего из условий (15) и уравнений

$$y(x_0, C_1, C_2) = \varphi_0(x_0), \ \ y(x_1, C_1, C_2) = \varphi_1(x_1) \qquad (16)$$

определить постоянные C_1 и C_2 и концы отрезка $[x_0, x_1]$.

Если на одном из концов кривой $y(x)$ задано обычное граничное условие ($y(a) = y_0$ или $y(b) = y_1$), то условие трансверсальности (15) следует записать только для другого конца кривой.

Частным случаем задачи с подвижными границами является задача, в которой задана абсцисса одного из концов кривой $y(x)$, например $x_2 = b$, но граничное условие для $x = b$ отсутствует. Это означает, что граничная точка $(b, y(b))$ кривой $y(x)$ может перемещаться по вертикальной прямой $x = b$, и вместо второго условия трансверсальности (15) следует записать естественное граничное условие

$$\left\lfloor F_{y'} \right\rfloor_{x = b} = 0. \qquad (17)$$

К задачам вариационного исчисления с подвижными границами относится и задача Больца, состоящая в определении функции $y(x) \in C^1[a,b]$, доставляющей слабый экстремум функционалу

$$J[y(x)] = \int_a^b F(x, y, y')dx + f(y(a), y(b)), \qquad (19)$$

где $f(u,v)$ - заданная функция, имеющая непрерывные производные по u и v.

Необходимое условие экстремума функционала (19) формулируется следующим образом.

Теорема 5. Для того чтобы функционал (19) достигал на функции $y(x) \in C^1[a,b]$ слабого экстремума, необходимо, чтобы эта функция удовлетворяла уравнению Эйлера

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$$

и условию трансверсальности для задачи Больца

$$\left[F_{y'} - \frac{\partial f}{\partial y(a)}\right]_{x=a} = 0\,,\quad \left[F_{y'} - \frac{\partial f}{\partial y(b)}\right]_{x=b} = 0. \qquad (20)$$

Условия (20) используются для определения постоянных C_1 и C_2 из общего решения $y(x,C_1,C_2)$ уравнения Эйлера.

Пример 1. Найти экстремали функционала

$$I[y] = \int_0^{\pi}(\,y^2 - y'^2 - 2y\sin x\,)dx$$

при условии, что левый конец закреплен *(y(0)=0)*, а правый перемещается по прямой $x=\pi$.

Решение: На значение экстремали *y(x)* в правом конце $x=\pi$ не накладывается никаких условий, поэтому для отыскания экстремали следует найти решение уравнения Эйлера $y'' + y = \sin x$ при естественном граничном условии $F_{y'}\big|_{x=\pi} = y'\big|_{x=\pi} = 0$. Общее решение уравнение Эйлера записывается в виде

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{1}{2}x\cos x.$$

Тогда из условия $y(0)=0$ находим $C_1 = 0$, а из условия $y'(\pi) = 0$ получаем уравнение

$$y'\big|_{x=\pi} = \left(C_2\cos x - \frac{\cos x}{2} + \frac{x\sin x}{2}\right)\Bigg|_{x=\pi} = -C_2 + \frac{1}{2} = 0\,,$$

откуда $C_2=1/2$. Следовательно, экстремалью является кривая

$$y = \frac{1}{2}(\sin x - x\cos x\,).$$

Экстремали с угловыми точками.

Односторонние вариации.

Достаточные условия экстремума. Поле экстремалей.

Функция Вейерштрасса E(x,y,p,y').

Преобразование уравнений Эйлера к каноническому виду.

Вариационные задачи на условный экстремум. Связи вида $f(x,y_1,...,y_n) = 0$.

Вариационные задачи на условный экстремум. Связи вида $f(x,y_1,...,y_n,y_1',...,y_n') = 0$.

Изопериметрические задачи.

Прямые методы в вариационных задачах. Конечно-разностный метод Эйлера.

Метод Ритца. Метод Канторовича.

Зависимость функции и множества, на котором она максимизируется, от параметра. Оптимизация процессов, линейных относительно управления, без ограничений на управление.

Задачи с ограничениями на управление.

Необходимые условия оптимального управления в форме Лагранжа-Понтрягина.

Непрерывные процессы. Многошаговые процессы (без ограничений на управление, с ограничениями на управление).

Метод Гамильтона-Якоби-Беллмана (динамическое программирование). Непрерывные процессы. Многошаговые процессы.

5. МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ТЕКУЩЕГО И ИТОГОВОГО КОНТРОЛЯ

Экзаменационные билеты

Билет 1

5. Вариация функционала и ее свойства.
6. Условие Якоби включения экстремали в поле экстремалей.
7. Исследовать на экстремум функционал:

$$v[y(x)] = \int_1^2 y'(1 + x^2 y')dx; \; y(1) = 3, \; y(2) = 5.$$

8. Найти экстремали изопериметрической задачи:

$$v[y(x)] = \int_0^\pi y \, Sin \, x \, dx; \; \int_0^\pi y'^2 dx = 3\pi / 2; \; y(0) = 0, \; y(\pi) = \pi.$$

Билет 2

4. Необходимое условие экстремума функционала.
5. Функция Вейерштрасса E(x,y,p,y'). Условие сильного и слабого экстремума для функционала.
6. Найти геодезические линии круглого цилиндра $r = R$.

Указание: решение удобно искать в цилиндрических координатах r, φ, z.

7. Найти экстремали функционала в задаче с подвижными границами:

$$v[y(x)] = \int_0^{x_1} y'^2 dx; \; y(0) = 0, \; y(x_1) = -x_1 - 1.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Найдите расстояние между функциями $y_1(x)=x^2$, $y_2(x)= x^3$ по норме пространства: а) $C^0[0,1]$; б) $C^1[0,1]$.
2. Найдите расстояние между функциями $y_1(x)=xe^{-x}$, $y_2(x)=0$ по норме пространства: $C^0[0,2]$; б) $C^1[0,2]$.
3. Найдите расстояние между функциями $y_1(x)=x$, $y_2(x)=lnx$ по норме пространства: $C^0[e^{-1},e]$; б) $C^1[e^{-1},e]$.

4. Покажите, что функционал $I[y]=\int_0^1 (y-y')dx$, определенный на $C^1[0,1]$ с нормой $\|\cdot\|_1$, является непрерывным на функции $y_0(x)=x^3$.

5. Покажите, что функционал $I[y]=\int_0^1 (y')^2 dx$, определенный на $C^1[0,1]$, разрывен на функции $y_0(x)\equiv 0$ в случае нормы $\|\cdot\|_0$, но непрерывен на этой функции в случае нормы $\|\cdot\|_1$.

6. Покажите, что функционал $I[y]=\int_0^1 x^3\sqrt{1+y^2}\,dx$, определенный на пространстве $C[0,1]$, непрерывен на функции $y_0(x)=x^2$ по норме $\|\cdot\|_0$.

7. Докажите, что любой линейный непрерывный функционал в нормированном пространстве является дифференцируемым. Запишите его дифференциал.

8. Докажите, что функционал $I[y]=\int_a^b y^2 dx$, определенный в $C^0[a,b]$, является всюду дифференцируемым. Запишите его дифференциал.

9. Проверьте, являются ли дифференцируемыми следующие функционалы: а) $I[y]=y(a)$ в $C^0[a,b]$; б) $I[y]=y(a)$ в $C^1[a,b]$; в) $I[y]=|y(a)|$ в $C^0[a,b]$; г) $I[y]=\sqrt{1+y'(a)}$, в $C^1[a,b]$.

10.Найдите первую вариацию функционала, определенного на нормированном пространстве непрерывно дифференцируемых функций: а) $I[y]=\int_0^1 x^2\sqrt{1+y^2}\,dx$; б) $I[y]=\int_{-1}^1 (y'e^y+xy^2)dx$; в) $I[y]=\int_0^\pi y'Sinydx$; г) $I[y]=y^2(0)+\int_0^1 (xy+(y')^2)dx$.

11.Найти приращение и вариацию следующих функционалов:
а) $I[y]=\int_{-1}^e (yy'+xy'^2)dx$, если $y=\ln x,\ \delta y=\dfrac{\alpha(x-1)}{e-1}$;
б) $I[y]=\int_0^\pi y'^2 Sinxdx$, если $y=Sinx$, $\delta y=\alpha Cosx$.

Найдите все экстремали функционала $I[y]$, удовлетворяющие заданным краевым условиям (№№12-20):

12.$I[y]=\int_0^{\pi/2}((y')^2-y^2)dx,\ y(0)=0,\ y(\pi/2)=1$. Отв. $y(x)=Sinx$.

13.$I[y]=\int_0^1((y')^2+12xy)dx,\ y(0)=0,\ y(1)=1$. Отв. $y(x)=x^3$.

14.$I[y]=\int_\pi^{2\pi}(4(y')^2-7yy'-y^2)dx,\ y(\pi)=0,\ y(2\pi)=0$. Отв. $y(x)=0$

15. $I[y]=\int_0^{\pi/8}(16y^2+(y')^2+2y(Sin2x+16x))dx,\ y(0)=0,\ y(\pi/8)=-\pi/8.$

Отв. $y(x)=\dfrac{\sqrt{2}Sh4x}{40Sh(\pi/2)}-\dfrac{1}{20}Sin2x-x.$

16. $I[y]=\int_{\pi/4}^{\pi/2}(3x^2y^2+Cos\,y+y'(2x^3y\text{ - }xSin\,y))dx,$

$y(\pi/4)=0,\ y(\pi/2)=1.$ Отв. $y(x)\in C^1[\pi/4,\pi/2]$

17. $I[y]=\int_2^4(x(y')^4-2y(y')^3)dx,\ y(2)=4,\ y(4)=5.$ Отв. $y(x)=0.5x+3$

18. $I[y]=\int_0^1((y')^2-2x^6y'-2xy)dx,\ y(0)=0,\ y(1)=-1/6.$ Отв.

$y(x)=2\cdot x^7/7-x^3/3\text{-}5x/42$

19. $I[y]=\int_0^1 tg\ y'dx,\ y(0)=0,\ y(1)=2.$ Отв. $y(x)=2x$

20. $I[y]=\int_0^1((y')^2+\dfrac{2xy}{1+x^2})dx,\ y(0)=0,\ y(1)=-1.$ Отв. $y(x)=05xln(x^2+1)$-

$x+arctgx\text{-}0.25(2ln2\text{-}\pi)$

21. Покажите, что функционал

$$I[y]=\int_a^b(p(x)y'+q(x)y+r(x))\,dx,$$

где $p(x)\in C^1[a,b]$, $q(x)$, $r(x)\in C[a,b]$, не имеет экстремумов.

22. Покажите, что для всякого дифференциального уравнения

$$y''=\varphi(x,y,y')$$

с дважды непрерывно дифференцируемой правой частью $\varphi(x,y,y')$ можно найти такую функцию $f(x,y,y')$, что решения этого уравнения будут экстремалями функционала $\int_a^b f(x,y,y')dx$.

Найдите все экстремали заданного функционала, удовлетворяющие заданным краевым условиям:

а) $I[y]=\int_0^1(120\,xy-(y'')^2)\,dx,\quad y(0)=0, y(1)=1, y'(0)=0, y'(1)=6;$

г) $I[y]=\int_0^1((y'')^2+y^2-2yx^2)\,dx,\quad y(0)=0, y(1)=1, y'(0)=0, y'(1)=2;$

23. Среди всех функций класса $C^2[0,\pi]$, удовлетворяющих граничным условиям $y(0)=y(\pi)=0,\ y'(0)=y'(\pi)=1$, найти такую, которая реализует экстремум функционала $I[y]=\int_0^{\pi}(16y^2-(y'')^2+x^2)\,dx.$

24. Найти экстремали заданных функционалов:

$$I[y]=\int_0^1((y'')^2+2(y')^2+y^2)\,dx,\quad y(0)=y(1)=0,\ y'(0)=1,\ y'(1)=-Sh1.$$

25. Найти все экстремали функционала $J[y]$,удовлетворяющие граничным условиям.

26. $J(y)=\int_0^1 y''^2dx;\quad y(0)=y(1)=y'(1)=0,\ y'(0)=1.$

27. $J(y)=\int_0^1(48y-y''^2)dx;\quad y(0)=y'(0)=0,\ y(1)=1, y'(1)=4.$

28. $J(y)=\int_0^1(y''^2-24xy)dx;\quad y(0)=y'(0)=0,\ y(1)=1/5, y'(1)=1.$

29. $J(y)=\int_0^{\pi/2}(y''^2-y'^2)dx;\quad y(0)=y'(0)=0,\ y(\pi/2)=\pi/2,\ y'(\pi/2)=0.$

30. $J(y)=\int_0^b(y''^2+y'^2)dx;\quad y(0)=y'(0)=y(b)=y'(b)=0.$

31. $J(y)=\int_0^1 e^{-x}y''^2dx;\quad y(0)=0,\ y'(0)=1,\ y(1)=e,\ y'(1)=2e.$

32. $J(y)=\int_0^1(x+1)^3y''^2dx;\quad y(0)=1,\ y'(0)=-1,\ y(1)=1/2,\ y'(1)=-1/4.$

33. $J(y)=\int_0^{\pi/2}(y''^2-y^2+x^2)dx;\quad y(0)=1,\ y'(0)=y(\pi/2)=0,\ y'(\pi/2)=-1.$

34. $J(y)=\int_0^1 y'''^2dx;\quad y(0)=y'(0)=y''(0)=0,\ y(1)=1, y'(1)=4, y''(1)=12.$

35. $J(y)=\int_0^1(y'''^2+y''^2)dx;\quad y(0)=y''(0)=0,\ y'(0)=1, y(1)=y''(1)=Sh1,$ $y'(1)=Ch1.$

36. $J(y)=\int_0^{\pi}(y'''^2-y''^2)dx;\quad y(0)=y'(0)=y''(0)=0,\ y(\pi)=\pi, y'(\pi)=2,$ $y''(\pi)=0.$

37. $J(y)=\int_0^{\pi}(y'''^2-y'^2)dx;\quad y(0)=y'(0)=y''(0)=0, y(\pi)=y''(\pi)=Sh\pi,$ $y'(\pi)=Ch\pi+1.$

6. КАРТА КАДРОВОЙ ОБЕСПЕЧЕННОСТИ ДИСЦИПЛИНЫ

Лекторы: доцент, к.ф.-м.н. Сельвинский В.В.

Практические занятия: доцент, к.ф.-м.н. Сельвинский В.В.

ОГЛАВЛЕНИЕ