Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Амурский государственный университет»

Кафедра математического анализа и моделирования

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС ДИСЦИПЛИНЫ
УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Основной образовательной программы для направления 010500.62 – Прикладная математика и информатика

Благовещенск 2012 г.

УМКД разработан канд. тех. наук, доцентом Труфановой Татьяной Вениаминовной

Рассмотрен и рекомендован на заседании кафедры
Протокол заседания кафедры от «___» ___________ 201_ г. №___
Зав. кафедрой _______________ / В.В.Сельвинский /

УТВЕРЖДЕН
Протокол заседания УМСС 010500.62– Прикладная математика и информатика
от «___» ___________ 201_ г. №___
Председатель УМСС _______________ / В.В.Сельвинский /

СОДЕРЖАНИЕ

1 РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ
1.1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Дисциплина "Уравнения математической физики" посвящена изучению математических моделей естественнонаучных явлений, которые приводят к задачам для дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка.

Целью дисциплины является знакомство с методами построения математических моделей различных процессов и явлений естествознания, изучение основных методов исследования возникающих при этом математических задач и их решение, выяснение физического смысла полученного решения.

1.2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ООП ВПО

Дисциплина "Уравнения математической физики" излагается на базе математического анализа, алгебры и аналитической геометрии, дифференциальных уравнений, интегральных преобразований в тесной связи с теорией функций комплексного переменного и с основами вариационного исчисления.

Дисциплина " Уравнения математической физики " включена в рабочий учебный план для направления 010500.62 в цикл общепрофессиональных дисциплин.

1.3. ТРЕБОВАНИЯ К ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Дисциплина " Уравнения математической физики " вырабатывает у студентов навыки построения математических моделей простейших физических явлений и решения (аналитического и численного) получающихся при этом математических задач. Студент должен свободно ориентироваться в основных разделах дисциплины, что включает: уравнения гиперболического типа, уравнения параболического типа, уравнения эллиптического типа, свойства и методы решений этих уравнений.

1.4.СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ) "Уравнения математической физики" .

Общая трудоемкость дисциплины составляет __204__ часа.

№ п/п	Раздел дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)			Формы текущего контроля успеваемости *(по неделям семестра)* Форма промежуточной аттестации *(по семестрам)*
				Лек.	Прак. зан.	Сам. раб.	
1	Классификация уравнений с частными производными 2-го порядка	5	1-3	6	6	10	Контрольная работа, устный опрос
2	Уравнения гиперболического типа	5	3-10	16	16	10	Контрольная работа, устный опрос, рейтинговая оценка, индивидуальное задание
3	Уравнения параболического типа	5	10 - 18	14	14	10	Контрольная работа, устный опрос, рейтинговая оценка, индивидуальное задание, экзамен
4	Уравнения эллиптического типа	6	1-11	20	20	10	Контрольная работа, устный опрос, индивидуальное задание
5	Распространение волн в пространстве	6	11-15	8	8	10	устный опрос, домашнее задание
6	Распространение тепла в пространстве	6	15-18	8	8	10	устный опрос, домашнее задание, , экзамен
				72	72	60	

1.5. СОДЕРЖАНИЕ РАЗДЕЛОВ И ТЕМ ДИСЦИПЛИНЫ

5.1. Лекции

семестр 5, курс 3

Раздел 1. Классификация уравнений с частными производными 2-го порядка

Лекция 1. Введение. Основные примеры уравнений математической физики. Практическое применение уравнений математической физики для описания закономерностей различных физических явлений. Основные этапы исторического развития математической физики.

Лекция 2. Классификация уравнений с частными производными второго порядка и приведение их к каноническому виду

Понятие характеристической формы и классификация линейных уравнений второго порядка: эллиптического, гиперболического и параболического типов. Уравнение смешанного типа. Характеристические кривые и характеристические направления.

Лекция 3. Простейшие примеры трёх основных типов уравнений с частными производными второго порядка: уравнения Лапласа, волновое уравнение, уравнение теплопроводности. Задача Коши. Теорема Коши-Ковалевской.

Раздел 2. *Уравнение гиперболического типа.*

Лекция 4. Простейшие задачи, приводящие к уравнениям гиперболического типа. Постановка краевых задач. Уравнение малых поперечных колебаний струны.

Лекция 5.Уравнение продольных колебаний стержней и струн. Энергия колебания струны. Уравнение электрических колебаний в проводах. Граничные и начальные условия

Лекция 6. Теорема существования и единственности решения .Задача Коши для волнового уравнения и распространение волн в неограниченном пространстве. Формула Даламбера. Физическая интерпретация.

Лекция 7. Устойчивость решений. Полуограниченная прямая и метод продолжений.

Лекция 8. Методы решения краевых задач. Метод разделения переменных. Собственные значения и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля.

Лекция 9. Неоднородные уравнения. Общая первая краевая задача. Краевые задачи со стационарными неоднородностями.

Лекция 10.*Общая схема метода разделения переменных*

Лекция 11. Решение общих линейных уравнений гиперболического типа.

Раздел 3. *Уравнения параболического типа*

Лекция 12. Простейшие задачи, приводящие к уравнениям параболического типа. Постановка краевых задач. Линейная задача о распространении тепла.

Лекция13. Принцип максимального значения. Теорема единственности.

Лекция 14. Метод разделения переменных. Однородная краевая задача. Функция источника

Лекция 15. Неоднородное уравнение теплопроводности.

Лекция 16. Общая первая краевая задача .

Лекция17. Задача на бесконечной прямой. Функция источника для неограниченной области.

Лекция18. Краевые задачи для полуограниченной прямой.

семестр 6, курс 3

Раздел 4. Уравнения эллиптического типа

Лекция 1. Задачи, приводящие к уравнению Лапласа.

Лекция 2. Стационарное тепловое поле. Уравнения Лапласа и Пуассона. Постановка основных краевых задач. Уравнение Лапласа в криволинейной системе координат.

Лекция 3. Фундаментальные решения уравнения Лапласа. Гармонические функции и аналитические функции комплексного переменного

Лекция 4. Формулы Грина. Интегральное представление решения

Лекция 5. Основные свойства гармонических функций. Единственность и устойчивость первой краевой задачи. Внешние краевые задачи. Единственность решения для двух и трёхмерных задач. Вторая краевая задача. Теорема единственности

Лекция 6. Решение краевых задач для простейших областей методами разделения переменных. Первая краевая задача для круга (внешняя и внутренняя задачи Дирихле). Интеграл Пуассона

Лекция 7.. Функция источника (функция Грина). Функция источника для уравнения Лапласа и её основные свойства.

Лекция 8. Метод электростатических изображений и функция источника для сферы.

Лекция 9.Функция источника для круга. Функция источника для полупространства. Интеграл Пуассона для сферы и круга

Лекция10. Теория потенциала. Объёмный потенциал. Логарифмический потенциал. Поверхностные потенциалы

Лекция 11. Применение поверхностных потенциалов к решению краевых задач

Раздел 5. Распространение волн в пространстве

Лекция12. Уравнение колебаний в пространстве. Метод усреднения. Формула Пуассона. Метод спуска.

Лекция 13. Колебания ограниченных объемов. Общая схема метода разделения переменных.

Лекция 14. Колебания прямоугольной мембраны. Колебания круглой мембраны.

Раздел 6. Распространение тепла в пространстве

Лекция 15. Распространение тепла в_неограниченном пространстве. Функция температурного влияния.

Лекция 16. Распространение тепла в ограниченных телах. Схема метода разделения переменных.

Лекция 17. Краевые задачи остывания нагретых тел. Остывание круглого цилиндра, остывание прямоугольного параллелепипеда.

Лекция 18. Диффузионный процесс в активной среде с размножением. Задача экологического прогнозирования.

5.2. Практические) занятия.

3 курс, 5 семестр

Занятие 1. Дифференциальное уравнение с частными производными и его решения

Занятие 2. Классификация уравнений с частными производными

Занятие 3. Приведение к каноническому виду линейных уравнений с частными производными второго порядка с двумя независимыми переменными

Занятие 4. Приведение к каноническому виду линейных уравнений с частными производными второго порядка с тремя независимыми переменными.

Занятие 5. Привести к каноническому виду и проделать дальнейшее упрощение.

Занятие 6. Волновое уравнение. Общее решение волнового уравнения.

Занятие 7. Задача Коши для волнового уравнения

Занятие 8. Решение уравнений гиперболического типа на полуограниченной прямой.

Занятие 9. Задача Коши для волнового уравнения с двумя и тремя пространственными переменными.

Занятие10. Смешанная задача для уравнения гиперболического типа. Метод разделения переменных - метод Фурье для однородного уравнения с однородными граничными условиями

Занятие 11. Неоднородная смешанная задача для уравнения гиперболического типа с однородными и неоднородными граничными условиями

Занятие 12. Постановка задачи для уравнения теплопроводности.

Занятие 13. Метод разделения переменных. Однородная краевая задача.

Занятие 14. Неоднородное уравнение теплопроводности с однородными граничными условиями.

Занятие 15. Уравнение теплопроводности с неоднородными граничными условиями.

Занятие 16.Задача Коши для однородного уравнения теплопроводности.

Занятие 17. Задача Коши для неоднородного уравнения теплопроводности.

Занятие 18. Контрольная работа.

3 курс, 6 семестр

Занятие 1. Решение смешанной задачи для неоднородного уравнения теплопроводности с неоднородными граничными условиями

Занятие 2. Решение краевых задач для уравнения теплопроводности в пространственных областях

Занятие3. Предельные задачи для уравнения теплопроводности. Интеграл Пуассона.

Занятие 4. Основные свойства гармонических функций

Занятие5-6. Постановка задач для уравнения Лапласа и Пуассона. Фундаментальные решения уравнения Лапласа.

Занятие 7-8. Решение задач Дирихле и Неймана.

Занятие 9-10. Задачи на собственные значения и собственные функции оператора Лапласа.

Занятие 11-12. Функция источника (метод функции Грина).

Занятие 13-14. Теория потенциала. Метод интегральных уравнений.

Занятие 15. . Уравнение Гельмгольца

Занятие 16-17. Специальные функции. Асимптотическое разложение

Занятие18. Контрольная работа

1.6. САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

№ п/п	№ раздела (темы) дисциплины	Форма (вид) самостоятельной работы	Трудоём-кость в ча-сах
1	1	Домашние задания. Контрольная работа	4
2	2	Индивидуальное задание №1. Метод Фурье для гиперболических уравнений.	8
3	2	Домашние задания.	4
4	3	Индивидуальное задание №2. Метод Фурье для параболических уравнений.	8
	3	Домашние задания. Экзамен	6
5	4	Индивидуальное задание №3. Уравнения эл-липтического типа.	8
6	4	Домашние задания.	4
7	5	Индивидуальное задание №4. Интегральное преобразование Фурье	8
8	5	Домашние задания.	4
9	6	Домашние задания. Экзамен	6
			60

1.7.ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

Лекции: традиционное и проблемное изложение теоретического материала, текущий устный опрос, коллоквиумы, использование интерактивных обучающих мультимедиа средств; практические занятия: интерактивные методы решения задач, мозговой штурм, использование наглядных средств, контрольные работы; консультации, самостоятельная работа.

1.8.ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ, ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО ИТОГАМ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ И УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

В течение семестра студенты разбирают и решают задачи, указанные преподавателем к каждому занятию, разбирают и повторяют основные понятия и теоремы, доказанные на лекциях. В течение семестра предусмотрены индивидуальные задания и контрольная работа. По окончании курса предусмотрен экзамен.

Вопросы к экзамену, 5 – ый семестр

1. Понятие дифференциальных уравнений в частных производных и его решения.

2. Понятие характеристической формы и классификация линейных уравнений 2-го порядка (гиперболического, эллиптического, параболического).
3. Характеристические кривые и характеристические направления.
4. Приведение к каноническому виду уравнений 2-го порядка с двумя переменными.
5. Простейшие задачи, приводящие к уравнениям гиперболического типа (колебание струны, распространение звука, распространение волн).
6. Уравнение малых поперечных колебаний струны.
7. Уравнение продольных колебаний струны (стержня).
8. Энергия колебаний струны.
9. Уравнение колебаний мембраны (б.в.).
10. Граничные и начальные условия (3 типа).
11. Теорема единственности решения для гиперболического типа.
12. Формула Даламбера. (Решение задачи Коши для гиперболического типа)
13. Устойчивость решения.
14. Метод разделения переменных для уравнения свободных колебаний струны (метод Фурье).
15. Интерпретация решения для волнового уравнения.
16. Задачи с данными на характеристиках. Метод последовательных приближений для задачи Гурса.
17. Простейшие задачи, приводящие к уравнению параболического типа(уравнение теплопроводности, диффузионные процессы).
18. Линейная задача о распространении тепла (уравнение теплопроводности)
19. Постановка краевой задачи для уравнения теплопроводности.
20. Принцип максимального значения для уравнения теплопроводности.
21. Теорема единственности для параболического типа.
22. Метод разделения переменных для уравнения теплопроводности. Однородная краевая задача.
23. Функция источника для уравнения теплопроводности.
24. Неоднородное уравнение теплопроводности и его решение.
25. Общая (первая) краевая задача для уравнения теплопроводности (уравнение и граничные условия неоднородны).
26. Распространение тепла на бесконечной прямой (задача Коши).
27. Интеграл Пуассона для решения уравнения теплопроводности.
28. Краевая задача для полуограниченной прямой (леммы).

Вопросы к экзамену, 6 – ой семестр

1. Уравнения эллиптического типа. Задачи, приводящие к уравнениям Лапласа.
2. Уравнения Лапласа в криволинейной системе координат (3 вида: в сферической, полярной, цилиндрической).
3. Фундаментальные решения уравнения Лапласа.
4. Гармонические функции. Общие свойства функций.
5. Первая и вторая формулы Грина.
6. Основная формула Грина.
7. Внешние краевые задачи для уравнений эллиптического типа.
8. Решение краевых задач для простейших областей методом разделения переменных.
9. Интеграл Пуассона (эллиптические уравнения).
10. Функция источника для уравнения Лапласа.
11. Свойства функции источника для уравнения Лапласа.
12. Теория потенциалов. Объемный потенциал.
13. Плоская задача. Логарифмический потенциал.
14. Поверхностный потенциал. Потенциал простого слоя.
15. Потенциал диполя. Потенциал двойного слоя.

16. Применение поверхностных потенциалов к решению краевых задач.
17. Первая краевая задача для круга (вывод).
18. Уравнения колебания в пространстве.
19. Метод усреднения.
20. Формула Пуассона для решения задачи Коши о распространении волн в пространстве.
21. Метод спуска. Сферические, цилиндрические, плоские волны.
22. Решения уравнений колебания на плоскости и в пространстве (интегральные формулы Кирхгофа).
23. Решение неоднородного волнового уравнения в пространстве.
24. Колебания ограниченных объемов. Общая схема метода разделения переменных.
25. Колебания прямоугольной мембраны.
26. Колебания круглой мембраны.
27. Функция температурного влияния.
28. Распределение тепла в пространстве (неограниченном).
29. Распространение тепла в ограниченных телах. Схема метода разделения переменных.
30. Решение неоднородного уравнения теплопроводности в ограниченных телах.
31. Краевые задачи остывания нагретых тел. Остывание круглого цилиндра, остывание прямоугольного параллелепипеда.
32. Диффузионный процесс в активной среде с размножением. Задача экологического прогнозирования.

1.9.УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ « Уравнения математической физики»

<u>а) основная литература</u>:

1.9.1. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики : учеб.: рек. Мин. обр. РФ/ А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. -7-е изд.. -М.: Изд-во Моск. ун-та: Наука, 2004. -798 с.

1.9.2. Владимиров В.С. Уравнения математической физики : Учеб.: Рек. Мин. обр. РФ/ В. С. Владимиров, В. В. Жаринов. -2-е изд., стер.. -М.: Физматлит, 2003. -400 с.

1.9.3. Свешников А.Г. Лекции по математической физике : учеб. пособие: Доп. Мин. обр. РФ/ А. Г. Свешников, А. Н. Боголюбов, В. В. Кравцов; Моск. гос. ун-т им. М.В. Ломоносова. -2-е изд., испр. и доп.. -М.: Изд-во Моск. гос. ун-та: Наука, 2004. -415 с.

б) дополнительная литература

1.9.4. Бицадзе А.В. Сборник задач по уравнениям математической физики : учеб. пособие/ А. В. Бицадзе, Д. Ф. Калиниченко. -3-е изд.. -М.: Альянс, 2007. -311 с.

1.9.5. Будак Б.М. Сборник задач по математической физике : учеб. пособие: Рек. Мин. обр. РФ/ Б.М. Будак, А.А. Самарский, А.Н. Тихонов. -4-е изд., испр.. -М.: Физматлит, 20032004. -688 с.:z-табл.

1.9.6. Труфанова Т.В. Метод разделения переменных для решения уравнений математической физики : учеб. пособие: рек. ДВ РУМЦ/ Т. В. Труфанова, В. В. Сельвинский, А. Г. Масловская; АмГУ, ФМиИ. -Благовещенск: Изд-во Амур. гос. ун-та, 2007. -99 с.

1.9.7. Труфанова Т.В. Метод разделения переменных для решения уравнений математической физики : учеб.-метод. пособие/ Т. В. Труфанова, В. В. Сельвинский, А. Г. Масловская; АмГУ, Фак. мат. и информ.. -Благовещенск: Изд-во Амур. гос. ун-та, 2005. -88 с.

1.9.8. Уравнения математической физики : учеб.-метод. комплекс для спец. 010101 - Математика, 010501 - Прикладная математика / АмГУ, ФМиИ; сост. Т. В. Труфанова, А. Г. Масловская . -Благовещенск: Изд-во Амур. гос. ун-та, 2007. -244 с.

1.9.9. Математика : [Сб. учебников]: 29 кн. в PDF - формате. -М.: Регулярная и хаотическая динамика, 2005. -1 о=эл. опт. диск (CD-ROM)

1.9.10. Дифференциальные уравнения [Текст]. - Выходит ежемесячно. - ISSN 0374-0641

в) программное обеспечение и Интернет-ресурсы:

№	Наименование ресурса	краткая характеристика
1	http://eqworld.ipmnet.ru/ru/methods/meth-pde.htm	Учебно-образовательная физико-математическая библиотека, содержащая DjVu- и PDF-файлы учебников по теме: Уравнения математической физики
2	http://eqworld.ipmnet.ru/ru/solutions/lpde.htm	Учебно-образовательная физико-математическая библиотека, содержащая DjVu- и PDF-файлы учебников по теме: Уравнения математической физики

1.10.МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Дисциплина« Уравнения математической физики» входит в теоретический цикл фундаментальных дисциплин и не требует специального лабораторного оборудования.

Материальное обеспечение дисциплины предполагает наличие учебных аудиторий для проведения лекционных и практических занятий с возможностью использования мультимедийных средств.

1.11. РЕЙТИНГОВАЯ ОЦЕНКА ЗНАНИЙ СТУДЕНТОВ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Проводится в соответствии с положением о балльно-рейтинговой системе оценки знаний студентов АмГУ и положением кафедры МАиМ по дисциплине.

Система оценки в баллах

№	Вид работы	Норма	Максимальное кол-во баллов
	5-ый семестр		
1	Посещение занятий	0,25 балла/2часа ауд.зан.	18
2	Индивидуальное задание № 1	0-12 баллов	12
3	Домашние задания	0-6 баллов	6
4	Индивидуальное задание № 2	0-12 баллов	12
5	Контрольная работа	0-12 баллов	12
6	Экзамен	0-40 баллов	40
			100
	6-ой семестр		
1	Посещение занятий	0,25 балла/2часа ауд.зан.	18
2	Индивидуальное задание № 3	0-12 баллов	12
3	Домашние задания	0-6 баллов	6
4	Индивидуальное задание № 4	0-12 баллов	12
5	Контрольная работа	0-12 баллов	12
6	Экзамен	0-40 баллов	40
			100

2 Краткое изложение программного материала

Семестр обучения: 5

Лекции №1. Название темы:

Введение. Основные примеры уравнений математической физики. Практическое применение уравнений математической физики для описания закономерностей различных физических явлений.

Основные этапы исторического развития математической физики.

План лекции.

Введем основные определения УЧП: что называется дифференциальным уравнением с частными производными порядка n; что называется регулярным решением; фундаментальные решения; линейность и порядок уравнения; число независимых переменных; однородность и неоднородность уравнения.

Большинство физических явлений, как динамика жидкости, электричество и магнетизм, механика, оптика, теплопередача, могут быть описаны с помощью уравнений с частными производными (УЧП). При некоторых упрощениях, предложениях эти уравнения сводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям, но полное описание таких систем неминуемо приводит к исследованию уравнений с частными производными.

. В качестве примера можно привести уравнение Максвелла, закон теплообмена Ньютона, уравнение движения Ньютона и т.д. Во всех этих уравнениях физические явления описываются на языке пространственных и временных переменных. Производные появляются в уравнениях потому, что они описывают важнейшие физические величины (такие, как скорость, ускорение, сила, трение, поток, ток и т.д.). Таким образом, возникают уравнения с частными производными, содержащие производную функции, которую необходимо определить.

В этом курсе мы будем заниматься главным образом линейными уравнениями второго порядка с одной неизвестной. Такими уравнениями являются, например:

1. $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}$ - уравнение теплопроводности;

2. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}$ - волновое уравнение;

3. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}=0$ - уравнение Лапласа.

Метод исследования, характеризует эту отрасль науки, является математическим по своему существу. Однако постановка задач математической физики тесно связана с изучением физических проблем.

Цель лекции Ввести студентов в дисциплину «Уравнения математической физики», обозначить структуру курса, содержание практического и лекционного материала по основным разделам, предусмотренным Государственным образовательным стандартом, озвучить междисциплинарные связи, правила организации аудиторной и самостоятельной работы студентов, дать методические рекомендации по изучению дисциплины, указать список основной и дополнительной литературы, рекомендуемой студентам, ознакомить студентов с формами текущего и итогового контроля по дисциплине.

Ключевые вопросы

1) Дать определение дифференциального уравнения с частными производными (УЧП)

2) Какие уравнения называются линейными, нелинейными, квазилинейными.

3)Что такое порядок уравнения, что такое число неизвестных.

4)Привести примеры уравнений с частными производными.

Ссылки на литературные источники:

1.9.1-1.9.3, 1.9.4, 1.9.8.

Выводы по теме:

Познакомить студентов с уравнениями в частных производных, дать основные определения и понятия, познакомить с основными этапами развития математической физики.

Тема лекции №2-3 Классификация уравнений с частными производными второго порядка и приведение их к каноническому виду

План лекции. Дифференциальные уравнения с двумя независимыми переменными

Понятие характеристической формы и классификация линейных уравнений второго порядка: эллиптического, гиперболического и параболического типов. Уравнение смешанного типа. Характеристические кривые и характеристические направления.

Дадим необходимые определения.

Уравнением с частными производными 2-го порядка с двумя независимыми переменными x, y называется соотношение между неизвестной функцией $u(x,y)$ и ее частными производными до 2-го порядка включительно:

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy}, u_{xy}) = 0$$

Аналогично записывается уравнение и для большего числа независимых переменных.

Уравнение называется *линейным относительно старших производных*, если оно имеет вид

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F_1(x, y, u, u_x, u_y) = 0,$$

где a_{11}, a_{12}, a_{22} являются функциями x и y.

Это уравнение мы будем называть в точке M уравнением

гиперболического типа, если в точке M $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$,

эллиптического типа, если в точке M $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$,

параболического типа, если в точке M $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$.

Если коэффициенты a_{11}, a_{12}, a_{22} зависят не только от x и y, а являются, подобно F_1, функциями x, y, u, u_x, u_y,то такое уравнение называется *квазилинейным*. Уравнение называется *однородным*, если $f(x, y) = 0$.

С помощью преобразования переменных

$$\xi = \varphi(x, y), \qquad \eta = \psi(x, y),$$

допускающего обратное преобразование, мы получаем новое уравнение, эквивалентное исходному. Естественно поставить вопрос: как выбрать ξ и η, чтобы уравнение в этих переменных имело наиболее простую форму?

В этом пункте мы дадим ответ на поставленный вопрос для уравнений, линейных относительно старших производных с двумя независимыми переменными x и y.

Цель лекций состоит в том, чтобы научить студентов:

1) Составлять характеристическое уравнение.2) Находить характеристики и делать замену переменных.3) Приводить уравнения к каноническому виду.

Ключевые вопросы: 1)Записать линейное уравнение в частных производных второго порядка. 2)Как составить характеристическое уравнение?3) Какая замена переменных в гиперболическом, параболическом и эллиптическом случаях? 4) Привести к каноническому виду уравнение и определить его тип. 5)Что называется квадратичной формой? 6)Как привести квадратичную форму к каноническому виду? 6) Когда уравнение второго порядка со многими независимыми переменными называется уравнением эллиптического, гиперболического, ультрагиперболического или параболического типов?

Ссылки на литературные источники:

1.9.1-1.9.3, 1.9.4, 1.9.8.

Выводы по теме: Многие задачи математической физики приводят к дифференциальным уравнениям с частными производными. Наиболее часто встречаются дифференциальные уравнения 2-го порядка. Необходимо уметь классифицировать эти уравнения для того, чтобы подобрать аналитический или численный метод решения этого уравнения.

Лекция4. Название темы: Простейшие задачи, приводящие к уравнениям гиперболического типа. Постановка краевых задач. Уравнение малых поперечных колебаний струны.

План лекции. Вывод уравнения малых поперечных колебаний струны**.** Уравнения продольных колебаний стержней и струн**.**

Краткое пояснение.

Каждую точку струны длины l можно охарактеризовать значением ее абсциссы x. Описание процесса колебания струны может быть проведено при помощи задания положения точек струны в различные моменты времени. Для определения положения струны в момент времени t достаточно задать компоненты вектора смещения $\{u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t)\}$ точки x в момент времени t.

Мы рассмотрим наиболее простую задачу о колебаниях струны. Будем предполагать, что смещения струны лежат в одной плоскости x ,u и что вектор смещения $\boldsymbol{u}$ перпендикулярен в любой момент к оси x; тогда процесс колебания можно описать одной функцией $u(x,t)$, характеризующей вертикальное перемещение струны. Будем рассматривать струну как гибкую упругую нить. Математическое выражение понятия гибкости заключается в том, что напряжения, возникающие в струне, всегда направлены по касательным к ее мгновенному профилю. Это условие выражает собой то, что струна не сопротивляется изгибу.

Величина натяжения, возникающего в струне вследствие упругости, может быть вычислена по закону Гука. Будем рассматривать малые колебания струны и пренебрегать квадратом u_x по сравнению с единицей.

В случае постоянной плотности ρ=const этому уравнению обычно придают вид

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t) \qquad \left(a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}} \right),$$

где

$$f(x,t) = \frac{1}{\rho} F(x,t)$$

есть плотность силы, отнесенная к единице массы. При отсутствии внешней силы получим однородное уравнение

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

или

$$u_{xx} - u_{yy} = 0 \quad (y=at),$$

описывающее свободные колебания струны. Это уравнение является простейшим примером уравнения гиперболического типа.

Цель лекций состоит в том, чтобы научить студентов_по заданному физическому процессу построить математическую модель. Показать, как физическую задачу записать в виде уравнения в частных производных на примере колебания струны.

Ключевые вопросы:1) Приведите примеры уравнений гиперболического типа.2) Записать уравнение малых поперечных колебаний струны.3)Записать уравнение свободных колебаний струны.4) Какой физический закон использовали для вывода уравнения колебания?

Ссылки на литературные источники:

1.9.1-1.9.3, 1.9.4, 1.9.8.

Выводы по теме: Полученное соотношение представляет собой дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка относительно искомой функции $u(x,t)$. Оно описывает процесс малых поперечных колебаний струны, и его называют неоднородным одномерным волновым уравнением, или уравнением плоских волн. Это уравнение гиперболического типа.

Лекция 5.Уравнение продольных колебаний стержней и струн. Энергия колебания струны. Уравнение электрических колебаний в проводах. Граничные и начальные условия

План лекции. Найдем выражение для энергии поперечных колебаний струны. Вывод уравнения электрических колебаний в проводах. Введем основные типы граничных условий. Начальные условия для уравнений гиперболического типа.

Краткое пояснение.

Уравнения продольных колебаний для струны, стержня или пружины записываются одинаково. Рассмотрим стержень, расположенный на отрезке *(0, l)* оси *x*. Процесс продольных колебаний может быть описан функцией *u(x, t)*, представляющей в момент *t* смещение точки, имевшей в положении равновесия абсциссу *x*. При продольных колебаниях это смещение происходит вдоль стержня. При выводе уравнения будем предполагать, что натяжения, возникающие в процессе колебания, следуют закону Гука.

Найдем выражение для энергии поперечных колебаний струны *E=K+U*, где *K* – кинетическая и *U* – потенциальная энергии. Элемент струны *dx*, движущийся со скоростью $v = u_v$ обладает кинетической энергией

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\rho(x)dx(u_t)^2 \qquad (m = \rho dx).$$

Кинетическая энергия всей струны равна

$$K = \frac{1}{2}\int_0^1 \rho(x)[u_t(x,t)]^2 dx.$$

Потенциальная энергия поперечных колебаний струны, имеющей при $t = t_0$ форму $u(x,t_0) = u_0(x)$, равна работе, которую надо совершить, чтобы струна перешла из положения равновесия в положение $u_0(x)$. Пусть функция $u(x,t)$ дает профиль струны в момент *t*, причем

$$u(x,0) = 0 \qquad u(x,t_0) = u_0(x).$$

При перемещении закрепленной на концах струны из положения равновесия $u = 0$ в положение $u_0(x)$ работа не зависит от способа перевода струны в это положение и равна

$$-\frac{1}{2}\int_0^l T_0[u_0(x)]^2 dx, \tag{16}$$

Потенциальной энергии струны в момент $t = t_0$ с обратным знаком. Таким образом, полная энергия струны равна

$$E = \frac{1}{2}\int_0^l \left[T_0(u_x)^2 + \rho(x)(u_t)^2\right]dx.$$

Записать уравнения распространение электрических возмущений в линии при отсутствии потерь.

<u>Цель лекции.</u> Показать, что полученное уравнение гиперболического типа описывает не только колебания струны, но и ряд других физических процессов, которые называют волновыми. Научить дополнять математическое описание процессов колебания начальными и граничными условиями.

<u>Ключевые вопросы</u>. 1).Записать уравнение продольных колебаний стержня. 2). Записать уравнение полной энергии струны.3).Сформулировать основные типы граничных условий. 4).Записать начальные условия для колебания струны.

<u>Ссылки на литературные источники</u>:

1.9.1-1.9.3, 1.9.4, 1.9.8.

<u>Выводы по теме</u>: Математическое описание процессов поперечных колебаний струны или продольных колебаний стержня конечной длины должно быть дополнено помимо начальных условий граничными условиями. Эти условия показывают, что происходит на концах струны или стержня в любой момент времени. Учитывая дополнительные условия , получаем единственное решение поставленной задачи. Итак, формулировка задачи математической физики в общем случае включает в себя задание дифференциального уравнения в частных производных, описывающего изучаемый процесс, а также граничных и начальных условий, выделяющих единственным образом конкретный процесс.

<u>Лекция</u> 6. Теорема существования и единственности решения .Задача Коши для волнового уравнения и распространение волн в неограниченном пространстве. Формула Даламбера. Физическая интерпретация.

План лекции. Сформулировать теорему существования и единственности краевых задач. Рассмотрим свободные колебания бесконечной струны, т.е. достаточно длинной струны, влиянием концов которой на процесс колебаний можно пренебречь. Решение задачи проведем методом Даламбера. Рассмотрим задачу Коши для неоднородного уравнения.

Краткое пояснение.

Причинами, вызывающими такие колебания, могут являться начальные отклонения струны от равновесного положения или сообщенный струне начальный импульс, обусловливающий некоторое распределение скоростей частиц струны. Поэтому, описывая свободные колебания бесконечной струны, мы должны решить однородное уравнение свободных колебаний

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad -\infty < x < +\infty,$$

при начальных условиях

$$u\Big|_{t=0} = \varphi(x); \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x),$$

где функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ заданы на всей числовой оси.

Начальные условия вполне однозначно определяют колебания бесконечной струны. Эту задачу называют *задачей с начальными условиями*, или *задачей Коши*.

Решение этой задачи проведем методом Даламбера. В результате решения получим

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\theta)d\theta.$$

Если функция $\varphi(x)$ имеет производные до второго порядка включительно, а функция $\psi(x)$ - до первого порядка, то формула определяет решение задач Коши. При этом полученное соотношение называют *формулой Даламбера.*

Из формулы Даламбера следует, что задача Коши для волнового уравнения имеет единственное решение, непрерывно зависящее от начальных условий, т.е. если $|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| \prec \delta_1$ и $|\psi_1(x) - \psi_2(x)| \prec \delta_2$, то $|u_1(x,t) - u_2(x,t)| \prec \varepsilon$, причем $\varepsilon \to 0$ при $\delta_{1,2} \to 0$. Это свойство непрерывной зависимости решения от начальных условий обеспечивает корректность постановки задачи Коши для гиперболического уравнения.

Цель лекции. Научить студентов решать задачу Коши для гиперболического уравнения.

Ключевые вопросы. 1) Сформулировать теорему существования и единственности решения краевых задач. 2) Записать задачу с начальными условиями для свободных колебаний бесконечной струны. 3) Записать формулу Даламбера. 4) Дать физическую интерпретацию каждого слагаемого в этой формуле. 5) Записать решение задачи Коши для неоднородного уравнения.

Ссылки на литературные источники:

1.9.1-1.9.3, 1.9.4, 1.9.8.

Выводы по теме. Формула Даламбера определяет единственное решение задачи Коши. Начальные условия вполне однозначно определяют колебания бесконечной струны.

Лекция 7. Устойчивость решений. Полуограниченная прямая и метод продолжений.

План лекции. Доказательство лемм о свойствах решений уравнений колебаний , определенных на бесконечной прямой. Решение уравнения колебания, удовлетворяющего начальным условиям и граничному условию первого рода. Решение уравнения колебания, удовлетворяющего начальным условиям и граничному условию второго рода. Устойчивость решения.

Краткое пояснение.

Если при описании процесса колебаний струны учесть влияние одного из ее концов (x=0), то можно проанализировать колебания в полуограниченной струне, вызванные граничным возмущением, и изучить процесс отражения волн от конца струны.

Сформулируем следующую начально-краевую задачу для полуограниченной прямой:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ t>0,\ x>0$$

- уравнение,

$$u(0,t) = \mu(t),\ t \ge 0$$

- граничное условие и

$$u(x,0) = \varphi(x),\ x \ge 0$$

$$u_t(x,0) = \psi(x),\ x \ge 0$$

- начальные условия.

Здесь заданная функция $\mu(t)$ описывает закон движения конца струны. В частном случае она может быть периодической функцией времени.
Решаем поставленную задачу при помощи метода продолжения на основании лемм.

Цель лекции.
Научить студентов решать уравнения гиперболического типа на полуограниченной прямой с граничными условиями первого и второго рода.
Ключевые вопросы: 1)Сформулировать задачу о распространении волн на полуограниченной прямой. 2)Доказать лемму о свойствах решений колебаний, если начальные данные являются нечетными функциями. 3) Доказать лемму о свойствах решений колебаний, если начальные данные являются четными функциями. 4) Сформулировать теорему об устойчивости решения.

Ссылки на литературные источники:
1.9.1-1.9.3, 1.9.4, 1.9.8.
Выводы по теме. Для решения задачи на полуограниченной прямой с однородным граничным условием первого рода начальные данные надо продолжить на всю прямую нечетно. Для решения задачи на полуограниченной прямой с однородным граничным условием второго рода начальные данные надо продолжить на всю прямую четно

Лекция 8. Методы решения краевых задач. Метод разделения переменных. Собственные значения и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля.
План лекции. Уравнение свободных колебаний струны. Метод разделения переменных, или метод Фурье. Задача на собственные значения. Интерпретация решения.
Краткое пояснение.
Метод разделения переменных, или метод Фурье, является одним из основных методов решения задач математической физики в ограниченных областях. Изложим этот метод для задач о свободных колебаниях ограниченной струны с закрепленными концами, которая формулируется следующим образом: найти решение однородного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad t>0,\quad 0<x<l$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x),\quad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \psi(x),\quad 0 \le x \le l,$$

и однородным граничным условиям

$$u\big|_{x=0} = 0, u\big|_{x=l} = 0, t \ge 0$$

Идея метода Фурье основана на линейности и однородности уравнения и граничных условий. В этом случае справедлив принцип суперпозиции для любых частных решений u_1 и u_2 уравнения, удовлетворяющих условиям, т.е. функция $u = C_1 u_1 + C_2 u_2$, где $C_{1,2} = const$, также удовлетворяет уравнению и граничным условиям. Оказывается, что с помощью суперпозиции линейно независимых частных решений можно выполнить также и начальные условия.

Будем искать нетривиальное решение уравнения в виде произведения двух функций

$$u(x,t) = X(x)T(t),$$

одна из которых, зависит только от переменного x , а другая – только от t.

Дифференцируя дважды это выражение по x и по t, после подстановки его в уравнение получим

$$X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t),$$

или

$$\frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} .$$

Отсюда следует, что функции *T(t)* и *X(x)* можно определить из решения обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0\,; \quad X''(x) + \lambda X(x) = 0$$

Обозначив постоянную разделения буквой λ со знаком минус.

Чтобы такие частные решения вида $u(x,t) = X(x)T(t),$ удовлетворяли граничным условиям для любого $t \geq 0$, необходимо потребовать выполнения условий *X(0)=0* и *X(l)=0.* Таким образом, для отыскания координатной функции *X(x)* приходим к следующей задаче. Найти такие решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0\,,\ 0 < x < l\,,$$

которые в граничных точках *x=0* и *x=l* удовлетворяют условиям

X(0)=0, X(l)=0.

При любом $\lambda = const$ эта задача имеет тривиальное решение $X(x) \equiv 0$. Однако ниже будет показано, что при некоторых положительных значениях постоянной λ задача имеет и нетривиальные решения. Такие «особенные» значения λ называют собственными значениями, а соответствующие им нетривиальные решения $X(x)$ - собственными функциями. Задачу отыскания собственных значений и собственных функций называют задачей Штурма – Лиувилля.

Цель лекции. Ознакомить студентов с одним из наиболее распространенных методов решения уравнений с частными производными методом разделения переменных или методом Фурье.

Ключевые вопросы: 1)Сформулировать задачу Штурма-Лиувилля. 2) В каком виде Фурье представил решение уравнения свободных колебаний струны? 3)Какое движение струны называется стоячей волной? 4) Чему равна собственная частота колебаний струны?

Ссылки на литературные источники:

1.9.1-1.9.3, 1.9.4, 1.9.8.

Выводы по теме: Метод разделения переменных или метод Фурье является одним из основных аналитических методов решения краевых задач. Этот метод основан на линейности и однородности уравнения и граничных условий. Пользуясь этим методом можно решать и неоднородные уравнения с неоднородными граничными условиями.

Лекция 9. Неоднородные уравнения. Общая первая краевая задача. Краевые задачи со стационарными неоднородностями.

План лекции.

Неоднородное уравнение колебаний с однородными граничными условиями и с заданными начальными условиями. Общая первая краевая задача для уравнения колебаний, неоднородное уравнение и неоднородные граничные условия. Краевые задачи со стационарными неоднородностями, когда граничные условия и правая часть уравнения не зависят от времени.

Цель лекции: Научить студентов решать неоднородные уравнения колебаний струны с неоднородными граничными условиями методом разделения переменных.

Ключевые вопросы: 1)Сформулировать общую первую краевую задачу для уравнений колебаний. 2) Сформулировать краевую задачу со стационарными неоднородностями для уравнений колебаний. 3) В каком виде ищем решение неоднородного уравнения? 4) Как обнулить граничные условия? 5) В каком виде можно искать решение уравнения со стационарными неоднородностями?

Ссылки на литературные источники:

1.9.1-1.9.3, 1.9.4, 1.9.6-1.9.8.

Выводы по теме: Пользуясь методом разделения переменных, решаем задачу о вынужденных колебаниях струны с заданными законами колебаний ее концов.

Лекции 10-11. Общая схема метода разделения переменных. Решение общих линейных уравнений гиперболического типа.

План лекции.

Рассмотрим метод разделения переменных для уравнений колебаний неоднородной струны. Формулировка основных свойств собственных функций и собственных значений краевой задачи. 1)Существование счетного множества собственных значений. 2).Положительность собственных значений. 3) Ортогональность собственных функций. 4) Теорема разложимости В.А. Стеклова. Решим неоднородное линейное уравнение с неоднородными граничными условиями.

Цель лекции: Научить студентов решать уравнения колебаний неоднородной струны методом Фурье. Ознакомить с основными свойствами собственных значений и собственных функций.

Ключевые вопросы: 1)Составить математическую модель для уравнения колебаний неоднородной струны с заданными начальными условиями и с нулевыми граничными условиями первого рода. 2)Сформулировать основные свойства собственных значений и собственных функций. 3) Записать условие ортогональности собственных функций. 4) Разложить произвольную Функцию, дважды непрерывно дифференцируемую и удовлетворяющую тривиальным граничным условиям в равномерно и абсолютно сходящийся ряд по собственным функциям.

Ссылки на литературные источники:

1.9.1-1.9.3, 1.9.4, 1.9.6-1.9.8.

Выводы по теме: метод разделения переменных или метод Фурье является основным аналитическим методом решения уравнений в частных производных, и требуют качественного теоретического и практического освоения.

Лекция 12. Простейшие задачи, приводящие к уравнениям параболического типа. Постановка краевых задач. Линейная задача о распространении тепла.

План лекции.

Процесс передачи теплоты от более нагретых частей тела к менее нагретым связан с изменением температуры в различных частях тела. Вывод уравнения теплопроводности. Диффузионный процесс переноса массы. Диффузия частиц в веществе. Проникновение магнитного поля в проводящую среду. Начальные и граничные условия. Постановка краевых задач.

Цель лекции: состоит в том, чтобы научить студентов_по заданному физическому процессу теплопроводности построить математическую модель. Показать, как физическую задачу записать в виде уравнения в частных производных на примере распространения температуры в стержне. Научить студентов правильно ставить краевые задачи.

Ключевые вопросы : 1)Какие процессы описывают уравнения параболического типа? 2) Записать уравнение теплопроводности. 3) Записать уравнение диффузии. 4)Сформулировать три основных типа граничных условий в зависимости от температурных режимов на границе. 5) Что называется решением первой краевой задачи? 6) Сформулировать основные краевые задачи для процесса теплопроводности.

Ссылки на литературные источники:

1.9.1-1.9.3, 1.9.4, 1.9.6-1.9.8.

Лекция13. Принцип максимального значения. Теорема единственности.

План лекции. Привести уравнение теплопроводности с постоянными коэффициентами к простейшему виду. Сформулируем и докажем свойство решений уравнения теплопроводности, которое называется принципом максимального значения. Следствия из принципа максимального значения. Теорема единственности. Принцип физической определенности задачи. Теорема единственности для бесконечной прямой.

Цель лекции: Научить студентов корректно ставить краевые задачи, так чтобы поставленная задача имела единственное решение и чтобы это решение непрерывно зависело от дополнительных условий.

Ключевые вопросы: 1) Сформулировать принцип максимального значения для уравнения теплопроводности. 2) Сформулировать теорему единственности для первой краевой задачи. 3) Сформулировать следствия из принципа максимального значения. 4) Доказать теорему единственности для бесконечной прямой.

Ссылки на литературные источники:

1.9.1-1.9.3, 1.9.4, 1.9.6-1.9.8.

Лекция 14. Метод разделения переменных. Однородная краевая задача. Функция источника

План лекции. Однородная краевая задача. Функция мгновенного точечного источника. Свойства функции источника. Решение первой краевой задачи с нулевыми граничными условиями и непрерывным начальным условием.

Цель лекции: Научить студентов решать задачи параболического типа методом разделения переменных или методом Фурье.

Ключевые вопросы: 1) Сформулировать первую краевую задачу для уравнения теплопроводности. 2) Сформулировать основную вспомогательную задачу в методе разделения переменных. 3) Записать выражение для функции температурного влияния мгновенного точечного источника тепла.

Ссылки на литературные источники:

1.9.1-1.9.3, 1.9.4, 1.9.6-1.9.8.

Лекции 15-16. Неоднородное уравнение теплопроводности. Общая первая краевая задача.

План лекции. Рассмотрим неоднородное уравнение теплопроводности с нулевым начальным условием и однородными граничными условиями. Решение поставленной задачи будем искать в виде ряда Фурье по собственным функциям однородной задачи. Выясним смысл полученного решения. Общая первая краевая задача для уравнения теплопроводности. Подбор вспомогательной функции для обнуления граничных условий. Решение задачи для ограниченного стержня, концы которого поддерживаются при постоянной температуре.

Цель лекции: Научить студентов решать неоднородные уравнения теплопроводности с однородными и неоднородными граничными условиями методом разделения переменных.

Ключевые вопросы. 1) Записать математическую постановку задачи для неоднородного уравнения. 2) Решить задачу о нагревании тонкой однородной проволоки, если начальная температура, граничная температура, а также температура окружающей среды равна нулю. 3) Нахождение решения неоднородного уравнения теплопроводности с ненулевым начальным условием и неоднородными граничными условиями.

Ссылки на литературные источники:

1.9.1-1.9.3, 1.9.4, 1.9.6-1.9.8.

Лекция17. Задача на бесконечной прямой. Функция источника для неограниченной области.

План лекции. Рассмотрим распространение тепла на бесконечной прямой. Дадим сначала формальную схему решения поставленной задачи, основанную на разделении переменных. Пользуясь обратным преобразованием Фурье приходим к интегральному

представлению решения. Найдем фундаментальное решение уравнения теплопроводности-функцию источника. Покажем графически поведение функции источника в зависимости от времени. Докажем, что интеграл Пуассона представляет собой ограниченное решение уравнения теплопроводности на бесконечной прямой. В качестве примера рассмотрим задачу, если начальная температура имеет постоянные, но различные значения.
Цель лекции: Научить студентов решать задачи о распространение тепла на бесконечной прямой (задачу Коши).
Ключевые вопросы: 1) Сформулировать задачу Коши для уравнения теплопроводности.2)Записать фундаментальное решение уравнения теплопроводности. 3) Докажите, что интеграл Пуассона представляет собой ограниченное решение уравнения теплопроводности на бесконечной прямой.

Ссылки на литературные источники:

1.9.1-1.9.3, 1.9.4, 1.9.6-1.9.8.

Лекция18. Краевые задачи для полуограниченной прямой.

План лекции. Определим решение уравнения теплопроводности на полуограниченной прямой. Подробно исследуем первую краевую задачу. Решение поставленной задачи представим в виде суммы двух функций, где одна представляет влияние только начальных условий, а вторая влияние только граничного условия. Докажем две леммы относительно решения уравнения теплопроводности определяемого интегралом Пуассона. Пользуясь этими леммами решим первую и вторую краевые задачи. Применим полученную формулу к решению задачи об остывании равномерно нагретого стержня, на границе которого поддерживается постоянная температура.
Цель лекции: Дать алгоритм решения уравнений теплопроводности для полуограниченной прямой с различными краевыми условиями.
Ключевые вопросы 1)Сформулировать краевую задачу распределения температуры для полуограниченной прямой.2) Сформулировать две леммы относительно функции определяемой интегралом Пуассона. 3) Пользуясь леммами решить задачу для полуограниченной прямой с граничным условием первого рода. 4) Пользуясь леммами решить задачу для полуограниченной прямой с граничным условием второго рода.

Ссылки на литературные источники:

1.9.1-1.9.3, 1.9.4, 1.9.6-1.9.8.

Семестр обучения: 6

Лекция 1-2 Задачи, приводящие к уравнению Лапласа. Стационарное тепловое поле. Уравнения Лапласа и Пуассона. Постановка основных краевых задач. Уравнение Лапласа в криволинейной системе координат.

План лекции. Исследование стационарных процессов (колебания, теплопроводности, диффузии). Стационарное тепловое поле. Уравнения Лапласа и Пуассона. Сформулируем основные краевые задачи о стационарном распределении температуры. Выведем выражение для оператора Лапласа в ортогональной криволинейной системе координат. Введем криволинейные координаты. Рассмотрим элемент объема в новых координатах. Запишем условия ортогональности ребер. Выведем выражение дивергенции векторного поля в ортогональных криволинейных координатах. Используя это, запишем уравнение Лапласа в ортогональных криволинейных координатах. Рассмотрим частные случаи: сферические координаты; цилиндрические координаты; полярные координаты.

Цель лекции: Ознакомить студентов с задачами, приводящими к уравнениям эллиптического типа. Ввести уравнения Лапласа и Пуассона, являющимися дифференциальными уравнениями второго порядка и принадлежащие к уравнениям эллиптического типа.

Ключевые вопросы. 1) Какие физические процессы описывают уравнения эллиптического типа? 2) Записать уравнения Лапласа и Пуассона. 3) Сформулировать основные краевые задачи для уравнений эллиптического типа. 4) Запишите уравнение Лапласа в криволинейной системе координат. 5) Запишите уравнение Лапласа в сферической системе координат.6) Запишите уравнение Лапласа в цилиндрической системе координат. 6) Запишите уравнение Лапласа в полярной системе координат.

Ссылки на литературные источники:

1.9.1-1.9.3, 1.9.4, 1.9.6-1.9.8.

Лекция 3. Фундаментальные решения уравнения Лапласа. Гармонические функции и аналитические функции комплексного переменного.

План лекции. Выведем частные решения уравнения Лапласа обладающие сферической, цилиндрической симметрией. Фундаментальные решения уравнения Лапласа на плоскости и в пространстве. Необходимые и достаточные условия аналитичности функции, условия Коши-Римана. Докажем, что действительная и мнимая части аналитической функции удовлетворяют условиям Коши- Римана. Сопряженные гармонические функции.

Цель лекции: Показать, как решаются уравнения Лапласа обладающие сферической или цилиндрической симметрией. Напомнить понятия гармонических и аналитических функций.

Ключевые вопросы: 1)Записать частные решения уравнения Лапласа обладающие сферической симметрией. 2) Записать частные решения уравнения Лапласа обладающие цилиндрической симметрией. 3) Записать необходимые и достаточные условия аналитичности функции условия Коши- Римана. 4) Какие функции называются гармоническими?

Ссылки на литературные источники:

1.9.1-1.9.3, 1.9.4, 1.9.6-1.9.8.

Лекция 4. Формулы Грина. Интегральное представление решения.

План лекции. Выведем формулы Грина, являющиеся, прямым следствием формулы Остроградского. Первая формула Грина. Вторая формула Грина для функций двух и трех переменных. Основная интегральная формула Грина. Три частных случая, когда точка лежит на поверхности области T, внутри области T и вне области T.

Цель лекции: Дать интегральное представление гармонических функций, являющихся основным аппаратом для изучения общих свойств гармонических функций.

Ключевые вопросы: 1) Записать формулу Остроградского. 2) Пользуясь формулой Остроградского вывести первую формулу Грина. 3) Записать вторую формулу Грина. 4) Записать основную интегральную формулу Грина.

Ссылки на литературные источники:

1.9.1-1.9.3, 1.9.4, 1.9.6-1.9.8.

Лекция 5. Основные свойства гармонических функций. Единственность и устойчивость первой краевой задачи. Внешние краевые задачи. Единственность решения для двух и трёхмерных задач. Вторая краевая задача. Теорема единственности

План лекции. Установим несколько важных свойств гармонических функций: условие отсутствия источника внутри области; теорема среднего значения; принцип максимального значения. Следствия из принципа максимального значения. Докажем теорему единственности для первой краевой задачи. Докажем непрерывную зависимость решения первой краевой задачи от граничных условий. Постановка первой внешней краевой задачи (внешняя задача Дирихле). Докажем, что внешняя первая краевая задача имеет единственное решение. Сформулируем вторую краевую задачу и докажем что решение второй внутренней краевой задачи (внутренняя задача Неймана) определяется с точностью до произвольной постоянной. Покажем, что вторая внешняя краевая задача (внешняя задача Неймана) имеет единственное решение, регулярное на бесконечности.

Цель лекции: Научить студентов правильно ставить внешние и внутренние краевые задачи для двух и трех независимых переменных. Уметь доказывать теоремы единственности решения.

Ключевые вопросы: 1) Сформулировать основные свойства гармонических функций. 2) Сформулировать внутреннюю задачу Дирихле. 3) Сформулировать внутреннюю задачу-Неймана.. 4) Сформулировать внешнюю задачу Дирихле. 5) Сформулировать внешнюю задачу Неймана.. 6) Сформулировать теорему единственности для первой краевой задачи. 7) Сформулировать теорему единственности для второй краевой задачи.

Ссылки на литературные источники:

1.9.1-1.9.3, 1.9.4, 1.9.6-1.9.8.

Лекция 6. Решение краевых задач для простейших областей методами разделения переменных. Первая краевая задача для круга (внешняя и внутренняя задачи Дирихле). Интеграл Пуассона.

План лекции. Первая краевая задача для круга. Введем полярную систему координат и запишем уравнение Лапласа в полярных координатах. Будем решать задачу методом разделения переменных. Получим формальное решение первой внутренней и внешней задачи. Преобразуем полученные решения, получим формулу дающую решение первой краевой задачи внутри круга, которая называется интегралом Пуассона.

Цель лекции: Научить студентов решать краевые задачи для уравнения Лапласа методом разделения переменных на примере первой краевой задачи для круга.

Ключевые вопросы: 1) Сформулировать первую краевую задачу для круга. 2) Записать уравнение Лапласа в полярной системе координат. 3)Записать решение первой внутренней задачи для круга. 4) Записать решение первой внешней задачи для круга. 5) Записать формулу Пуассона, дающую решение первой краевой задачи для круга.

Ссылки на литературные источники:

1.9.1-1.9.3, 1.9.4, 1.9.6-1.9.8.

Лекция 7. Функция источника (функция Грина). Функция источника для уравнения Лапласа и её основные свойства.

План лекции. Выведем функции источника для уравнения Лапласа пользуясь второй формулой Грина. Введем основные условия определяющие функцию источника. Докажем некоторые свойства функции источника: функция источника положительна внутри T; функция источника симметрична относительно своих аргументов (математическое выражение принципа взаимности в физике). Функция источника для случая двух измерений.

Цель лекции: Познакомить студентов с методом функции источника, который дает удобный аппарат для аналитического представления решения краевых задач.

Ключевые вопросы: 1) Сформулировать основные условия, которые определяют функцию источника. 2) Записать основные свойства функции источника. 3) Введите функцию источника для двух независимых переменных. 4) Пользуясь функцией источника записать решение первой краевой задачи для уравнения Лапласа.

Ссылки на литературные источники:

1.9.1-1.9.3, 1.9.4, 1.9.6-1.9.8.

Лекция 8-9. Метод электростатических изображений и функция источника для сферы. Функция источника для круга. Функция источника для полупространства. Интеграл Пуассона для сферы и круга.

План лекции. Покажем наиболее распространенный метод построения функции источника: метод электростатических изображений. В качестве первого примера рассмотрим функцию источника для сферы. Пользуясь преобразованием обратных радиусов, выведем функцию источника для сфера. Введем сферическую систему координат с началом в центре сферы и перепишем решение первой краевой задачи для уравнения Лапласа в виде интеграла Пуассона. Этим же методом можно построить функцию источника для области внешней к сфере. Получим таким же методом функцию источника для круга. Вводя полярную систему координат, приходим к интегралу Пуассона для круга. Найдем функцию источника для полупространства. Пользуясь этой функцией, запишем решение первой краевой задачи.

Цель лекции: Научить студентов строить функции источника для простейших областей: круга, сферы, полупространства, методом электростатических изображений.

Ключевые вопросы: 1) Какова идея метода электростатических изображений. 2)Записать интеграл Пуассона для сферы. 3) Запишите решение первой краевой задачи для уравнения Лапласа, пользуясь интегралом Пуассона. 4) Записать интеграл Пуассона для круга. 5) Найдите функцию источника для полупространства.

Ссылки на литературные источники:

1.9.1-1.9.3, 1.9.4, 1.9.6-1.9.8.

Лекция10.. Теория потенциала. Объёмный потенциал. Логарифмический потенциал. Поверхностные потенциалы.

План лекции. Потенциалы, их приложения в физике и в методах решения краевых задач. Объемный потенциал. Потенциал силового поля. Свойства потенциала. Плоская задача. Логарифмический потенциал. Определим потенциал однородной бесконечной прямой. Логарифмический потенциал является решением уравнения Лапласа с двумя независимыми переменными. Поверхностные потенциалы. Рассмотрим поле, создаваемое массами, распределенными на поверхности, и определим потенциал этого поля. Потенциал простого слоя. Потенциал двойного слоя. Разрыв потенциала двойного слоя. Свойства потенциала простого слоя.

Цель лекции: Дать основные определения потенциалов, их свойств и определение первых и вторых производных.

Ключевые вопросы: 1)Записать формулу для объемного потенциала. 2) Что называется логарифмическим потенциалом и чему он равен? 3)Вычислить первые производные объемного потенциала. 4) Вычислить вторые производные объемного потенциала.

Ссылки на литературные источники:

1.9.1-1.9.3, 1.9.4, 1.9.6-1.9.8.

Лекция 11. Применение поверхностных потенциалов к решению краевых задач

План лекции. Метод разделения переменных и метод функции источника позволяют получить явное выражение для решения краевых задач в случае областей простейшего вида. Пользуясь теорией потенциалов можно решать краевые задачи для областей сложной формы. При помощи поверхностных потенциалов сведем краевые задачи для уравнения Лапласа и Пуассона к интегральным уравнениям. Рассмотрим внутренние краевые задачу для некоторого контура С. Первая краевая задача для круга. Первая краевая задача для полупространства.

Цель лекции: Научить студентов сводить краевые задачи для уравнения Лапласа и Пуассона при помощи потенциалов к интегральным уравнениям.

Ключевые вопросы: 1) Записать интегральное уравнение для внутренней краевой задачи. 2) Записать интегральное уравнение для внешней краевой задачи (уравнения типа Фредгольма второго рода).3)Пользуясь потенциалом двойного слоя получить интеграл Пуассона. 4) Пользуясь потенциалом двойного слоя решить первую краевую задачу для полупространства.

Ссылки на литературные источники:

1.9.1-1.9.3, 1.9.4, 1.9.6-1.9.8.

Раздел 5. Распространение волн в пространстве

Лекция12. Уравнение колебаний в пространстве. Метод усреднения. Формула Пуассона. Метод спуска.

План лекции. Рассмотрим задачу с начальными условиями (задачу Коши) для уравнения колебания в неограниченном пространстве. Рассмотрим частные решения однородного уравнения обладающего центральной симметрией относительно некоторой точки. Метод усреднения. Найдем интегральное представление для задачи Коши. Пользуясь начальными условиями, получим формулу Пуассона. Метод спуска. Из формулы Пуассона в пространстве получим решение задачи Коши на плоскости. Аналогично получим решение и на прямой. Уравнения с тремя, двумя и, соответственно, одним пространственным аргументом часто называют уравнениями сферических, цилиндрических и плоских волн.

Цель лекции: Научить студентов как из формулы , определяющей решение уравнение для многих переменных , извлечь решение задачи для уравнения с меньшим числом независимых переменных.

Ключевые вопросы: 1) Сформулировать задачу Коши в неограниченном пространстве. 2) Записать формулу для решения задачи Коши в пространстве. 3) Записать формулу для решения задачи Коши на плоскости. 4) Записать формулу для решения задачи Коши на прямой.

Ссылки на литературные источники:

1.9.1-1.9.3, 1.9.4, 1.9.6-1.9.8.

Лекция 13. Колебания ограниченных объемов. Общая схема метода разделения переменных.

План лекции. Проиллюстрируем общую схему метода разделения переменных на примере решения задачи колебания ограниченных объемов. С задачами подобного типа мы встречаемся при изучении процессов колебания мембраны, акустических колебаний газа, электромагнитных процессах в непроводящих средах. Сначала решим задачу на собственные значения. Рассмотрим общие свойства собственных функций и собственных значений. 1) существование собственных значений. 2)Положительность собственных значений. 3) Ортогональность собственных функций. 4) Теорема разложимости. Проведем формальную схему метода разделения переменных.

Цель лекции: Научить студентов применять метод разделения переменных для уравнения с несколькими пространственными координатами.

Ключевые вопросы: 1) Сформулировать задачу о колебаниях ограниченных объемов. 2)Найти нетривиальное решение однородного уравнения методом разделения переменных.3) Сформулировать задачу Штурма - Лиувилля. 4) Сформулировать основные свойства собственных функций и собственных значений.

Лекция 14. Колебания прямоугольной мембраны. Колебания круглой мембраны.

План лекции. Рассмотрим колебание прямоугольной мембраны при заданных начальных условиях и однородных граничных условиях первого рода. Решение будем искать методом разделения переменных. Получим задачу на собственные значения, которую также решать методом разделения переменных. Рассмотрим колебания круглой мембраны. Для этого перейдем к полярным координатам. При решение уравнения на собственные функции получим уравнение Бесселя. Решениями этого уравнения будут функции Бесселя и Неймана. Отметим основные свойства собственных функций Бесселя. Выведем норму этих функций.

Цель лекции: Научить студентов аналитически решать краевые задачи для случая двух пространственных переменных методом разделения переменных.

Ключевые вопросы: 1) Сформулировать и записать первую краевую задачу процесса колебания прямоугольной мембраны. 2) Записать решение поставленной задачи. 3) Записать уравнение колебания круглой мембраны в полярной системе координат. 4) Сформулировать основные свойства собственных функций Бесселя. 5) Записать решение для колебания круглой мембраны.

Ссылки на литературные источники:

1.9.1-1.9.3, 1.9.4, 1.9.6-1.9.8.

Раздел 6. Распространение тепла в пространстве

Лекция 15. Распространение тепла в_неограниченном пространстве. Функция температурного влияния.

План лекции. Рассмотрим задачу распространение тепла в_неограниченном пространстве. Построим функцию источника для уравнения теплопроводности в неограниченном пространстве. Сформулируем основные свойства функции влияния. Определим вид функции влияния в случае двух измерений. Используя функцию источника, найдем решение задачи Коши о распространение тепла в пространстве.

Цель лекции: Научить студентов, пользуясь функцией источника, решать задачу о распространении начальной температуры в неограниченном пространстве.

Ключевые вопросы: 1) Сформулировать задачу о распространение тепла в_неограниченном пространстве. 2)Записать функцию температурного влияния мгновенного источника тепла. 3) Написать решение задачи о распространение тепла в_неограниченном пространстве.

Ссылки на литературные источники:

1.9.1-1.9.3, 1.9.4, 1.9.6-1.9.8.

Лекция 16. Распространение тепла в ограниченных телах. Схема метода разделения переменных.

План лекции. Решим задачу о распространение тепла в ограниченных телах. Сначала решим задачу с однородными граничными условиями первого рода. Решать будем методом разделения переменных. Рассмотрим вспомогательную задачу на отыскание собственных функций и собственных значений. Затем решим неоднородное уравнение с однородными граничными и начальном условиях.. Изложим метод решения задачи и с неоднородными граничными условиями.

Цель лекции: Научит студентов решать задачи о распространение тепла в ограниченном пространстве методом разделения переменных.

Ключевые вопросы: 1) Сформулировать первую краевую задачу_о распространение тепла в ограниченном теле. 2) В каком виде ищется решение неоднородное уравнение с однородными граничными и начальном условиях? 3) Как решить задачу с неоднородными граничными условиями?

Ссылки на литературные источники:

1.9.1-1.9.3, 1.9.4, 1.9.6-1.9.8.

Лекция 17. Краевые задачи остывания нагретых тел. Остывание круглого цилиндра, остывание прямоугольного параллелепипеда.

План лекции. Рассмотрим примеры решения задач остывания тел правильной формы, когда задача может быть решена точно в аналитическом виде. Запишем математическую модель остывания тела из однородного материала. Задачу будем решать методом Фурье. Решим задачу остывание круглого цилиндра. Решение задачи обладает осевой симметрией и задача на собственные значения приводит к уравнению Бесселя. Получаем в качестве собственных функций – цилиндрические функции. В качестве второго примера рассмотрим остывание прямоугольного параллелепипеда. Собственные функции записываются в виде тройного тригонометрического ряда.

Цель лекции: Продемонстрировать примеры решения задач, остывания тел правильной формы на конкретных примерах.

Ключевые вопросы: 1) Записать математическую модель процесса остывания тела из однородного материала. 2) Записать математическую модель процесса остывания тела представляющего собой прямоугольный параллелепипед. 3) сформулировать задачу остывание круглого цилиндра. 5) Решить задачу под пунктом 3). 6) решить задачу под пунктом 4).

Ссылки на литературные источники:

1.9.1-1.9.3, 1.9.4, 1.9.6-1.9.8.

Лекция 18. Диффузионный процесс в активной среде с размножением. Задача экологического прогнозирования.

План лекции. Запишем диффузионное уравнение цепной реакции. Используя это уравнение, опишем процесс эволюции нейтронов в активной среде, представляющей собой шар, если начальное распределение нейтронов в этом шаре задано сферически симметричной функцией. Проведем анализ полученного решения. Рассмотрим задачу экологического прогнозирования, в основе математической модели которой лежит уравнение диффузии в движущейся среде.

Цель лекции: Продемонстрировать студентам на примерах уравнений параболического типа процесс эволюции нейтронов в активной среде и экологическое прогнозирование, в основе математической модели которых лежат уравнения диффузии в движущейся среде.

Ключевые вопросы: 1)Опишите процесс эволюции нейтронов в активной среде, представляющей собой шар, если начальное распределение нейтронов в этом шаре задано сферически симметричной функцией. 2)Поставить краевую задачу нестационарного распределения концентрации загрязняющего вещества.

Ссылки на литературные источники:

1.9.1-1.9.3, 1.9.4, 1.9.6-1.9.8.

3. Методические указания

Для оптимальной организации изучения дисциплины студентам рекомендуется следовать следующим методическим указаниям.

Студенты очной формы обучения обязаны присутствовать на занятиях и выполнять все предусмотренные учебно-методическим комплексом дисциплины формы учебной работы; проходить промежуточный и итоговый контроль в виде защит индивидуальны и практических работ, аттестации в форме тестового контроля знаний; сдачи экзаменов в предлагаемой преподавателем форме.

Дисциплина «Уравнения математической физики» изучается студентами в 5 и 6 семестрах обучения. 5 семестр включает 36 часов лекционных занятий, 36 часов практических занятий и заканчивается экзаменом. 6 семестр содержит 36 часов лекционных занятий, 36 часов практических занятий и заканчивается экзаменом. На самостоятельную работу студентов отводится 60 час.

Теоретическая часть курса включает следующие разделы тем (в скобках указан объем каждого раздела в часах).

Раздел 1. Классификация уравнений с частными производными 2-го порядка (6).

Раздел 2. Уравнение гиперболического типа (16).

Раздел 3. Уравнения параболического типа (14).

Раздел 4. Уравнения эллиптического типа (22).

Раздел 5. Распространение волн в пространстве (6).

Раздел 6. Распространение тепла в пространстве (8).

Каждая лекция содержит необходимый объем теоретического материала, изучение которого предусмотрено государственным образовательным стандартом дисциплины, а также некоторые дополнительные главы, необходимые для дальнейшего изучения прикладных дисциплин. В дополнение к лекционному материалу, студентам рекомендуется использовать основную и дополнительную литературу согласно перечню, приведенному в п.1.9.

Студенты в рамках аудиторных занятий должны, в целом, владеть понятийным аппаратом, основанном на ранее изученных дисциплинах, воспринимать теоретический материал основного содержания лекции, видеть причинно-логические связи в лекции, понимать алгоритм решения задач, приводимых в лекции. Для освоения темы каждой лекции на более глубоком уровне требуется дополнительная работа с теоретическим материалом в форме прочтения и изучения основной и дополнительной литературы, самостоятельной работы с лекцией.

Практические занятия направлены на закрепление теоретического материала на практическом уровне и предусматривают реализацию аналитических методов по вариантам индивидуальных заданий. Для выполнения индивидуальных заданий необходимо освоить теоретические основы соответствующего раздела, закрепить теорию на практических занятиях и пользоваться методической литературой по данной теме. Каждое индивидуальное задание оформляется в соответствии с требованиями преподавателя и защищается на консультациях. При возникновении проблемных ситуаций в ходе решения практических задач студент должен ходить на консультации во внеаудиторное время.

3.1 Методические указания к практическим занятиям

Практические занятия направлены на закрепление теоретического материала на практическом уровне и предусматривают реализацию аналитических методов по вариантам индивидуальных заданий. Для выполнения индивидуальных заданий необходимо освоить теоретические основы соответствующего раздела, закрепить теорию на практических занятиях и пользоваться методической литературой по данной теме. Каждое индивидуальное задание оформляется в соответствии с требованиями преподавателя и защищается на консультациях.

Перед практическим занятием разобрать материал, изложенный на лекции и выполнить самостоятельную работу, предусмотренную рабочим планом. Для этого используются: конспект лекций, соответствующие разделы печатных и электронных учебников, ответы на вопросы для самоконтроля знаний. После практического занятия самостоятельно решить рекомендованные задачи на дом и индивидуальные задания.

Если у студента возникают вопросы по выполнению индивидуальных заданий или домашних заданий, то он может обратиться к преподавателю за консультацией, которая проводится один раз в неделю в заранее установленное время. Кроме этого по выполнению домашнего задания и освоению лекционного курса, вопросы желательно задавать и на практических и на теоретических занятиях.

Студент обязан проходить промежуточный и итоговый контроль в виде защит индивидуальных и практических работ, аттестации в форме тестового контроля знаний; сдачи экзаменов в предлагаемой преподавателем форме.

Практический курс предусматривает практические (в 5-6семестрах) занятия по следующим темам (объем в часах – 2, отводимый на выполнение каждой работы).

Номера задач для аудиторных и домашних занятий из сборника 1.9.4.

5 семестр

Занятие 1. Дифференциальное уравнение с частными производными и его решения

Вопросы для подготовки: 1) Дать определение дифференциального уравнения с частными производными (УЧП). 2) Какие уравнения называются линейными, нелинейными, квазилинейными? 3)Что такое порядок уравнения, что такое число неизвестных?

Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач №1-6; 7-12; 13-24.

Занятие 2. Классификация уравнений с частными производными

Вопросы для подготовки. 1)Что называется квадратичной формой? 2)Как привести квадратичную форму к каноническому виду? 3) Когда уравнение второго порядка со многими независимыми переменными называется уравнением эллиптического, гиперболического, ультрагиперболического или параболического типов?

Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач №25-37;38-49;52-62.

Занятие 3. Приведение к каноническому виду линейных уравнений с частными производными второго порядка с двумя независимыми переменными

Вопросы для подготовки. 1)Как составить характеристическое уравнение? 2) Какая замена переменных в гиперболическом случае? 3) Какая замена переменных в параболическом случае? 4) Какая замена переменных в эллиптическом случае? 5) Как привести уравнение к каноническому виду. 6) При помощи какой замены можно сделать дальнейшее упрощение уравнения?

Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач №74-94.

Занятие 4. Приведение к каноническому виду линейных уравнений с частными производными второго порядка с тремя независимыми переменными.

Вопросы для подготовки: 1) Как привести квадратичную форму к каноническому виду, пользуясь методом Лагранжа? 2)Как составить матрицу невырожденного аффинного преобразования, приводящего исходное уравнение к каноническому виду?

Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач №107-120.

Занятие 5. Привести к каноническому виду и проделать дальнейшее упрощение.

Вопросы для подготовки: 1) При помощи какой замены можно сделать дальнейшее упрощение уравнения приведенного к каноническому виду?

Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач №95-106; 121-130.

Занятие 6. Волновое уравнение. Общее решение волнового уравнения.

Вопросы для подготовки: 1) Приведите примеры уравнений гиперболического типа.2) Записать уравнение малых поперечных колебаний струны.3)Записать уравнение свободных колебаний струны.4) Какой физический закон использовали для вывода уравнения колебания?

Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач № 131;135;359;363;369.

Занятие 7. Задача Коши для волнового уравнения.

Вопросы для подготовки: 1) Записать задачу с начальными условиями для свободных колебаний бесконечной струны. 2) Записать формулу Даламбера решения задачи Коши для волнового уравнения. 4) Дать физическую интерпретацию каждого слагаемого в этой формуле. 5) Записать решение задачи Коши для неоднородного уравнения.6) Что такое прямая и обратная волна?

Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач №384-396.

Занятие 8. Решение уравнений гиперболического типа на полуограниченной прямой.

Вопросы для подготовки: 1)Записать задачу о распространении волн на полуограниченной прямой. 2) Сформулировать лемму о свойствах решений уравнения колебаний, если начальные данные являются нечетными функциями. 3) Сформулировать лемму о свойствах решений уравнения колебаний, если начальные данные являются четными функциями.

Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач №445-4484 453-454.

Занятие 9. Задача Коши для волнового уравнения с двумя и тремя пространственными переменными. Общее решение уравнения в частных производных.

Вопросы для подготовки.1)Запишите уравнение колебания мембраны.2)Запишите решение задачи Коши для неоднородного волнового уравнения.

Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач №371-380;420-428

Занятие10. Смешанная задача для уравнения гиперболического типа. Метод разделения переменных - метод Фурье для однородного уравнения с однородными граничными условиями

Вопросы для подготовки: 1)Сформулировать задачу Штурма-Лиувилля. 2) В каком виде Фурье представил решение уравнения свободных колебаний струны? 3)Какое движение струны называется стоячей волной? 4) Чему равна собственная частота колебаний струны? 5)В чем заключается принцип суперпозиции? Имеет ли он место для нелинейных уравнений?

Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач №642-653.

Занятие 11. Неоднородная смешанная задача для уравнения гиперболического типа с однородными и неоднородными граничными условиями

Вопросы для подготовки: 1)В чем заключается метод решения неоднородной смешанной задачи? 2) Какие неоднородности называются стационарными? 3) В каком виде ищем решение неоднородного уравнения? 4) Как обнулить граничные условия?

Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач №654-658;659-660; 664-669; 670-674.

Занятие 12. Постановка задачи для уравнения теплопроводности.

Вопросы для подготовки: 1) Дайте физическое толкование различным типам граничных условий. 2)Что называется решением первой краевой задачи? 3) Сформулировать основные краевые задачи для процесса теплопроводности. 4)В чем заключается принцип максимального значения?

Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач №142-146.

Занятие 13. Метод разделения переменных. Однородная краевая задача.

Вопросы для подготовки: 1) Сформулировать первую краевую задачу для уравнения теплопроводности. 2) Сформулировать основную вспомогательную задачу в методе разделения переменных. 3) Записать выражение для функции температурного влияния мгновенного точечного источника тепла.

Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач № 686;687-693.

Занятие 14. Неоднородное уравнение теплопроводности с однородными граничными условиями.

Вопросы для подготовки: 1)Как найти решение неоднородного уравнения теплопроводности с ненулевым начальным условием и однородными граничными условиями?

Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач №694-697;702.

Занятие 15. Уравнение теплопроводности с неоднородными граничными условиями.

Вопросы для подготовки1)Как найти решение неоднородного уравнения теплопроводности с ненулевым начальным условием и неоднородными граничными условиями?

Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач №698-701; 703-704.

Занятие 16-17.Задача Коши для однородного уравнения теплопроводности. Задача Коши для неоднородного уравнения теплопроводности.

Вопросы для подготовки: 1)Дайте физическое толкование функции мгновенного источника. 2) Сформулировать задачу Коши для уравнения теплопроводности.3)Записать фундаментальное решение уравнения теплопроводности. 4) Докажите, что интеграл Пуассона представляет собой ограниченное решение уравнения теплопроводности на бесконечной прямой.

Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач №574;577;581-584. №585-599.

Занятие 18. Контрольная работа

6 семестр

Занятие1Решение смешанной задачи для неоднородного уравнения теплопроводности с неоднородными граничными условиями

Вопросы для подготовки: 1) Как найти решение смешанной неоднородной задачи для неоднородного уравнения теплопроводности?

Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач №

Занятие2. Решение краевых задач для уравнения теплопроводности в пространственных областях.

Вопросы для подготовки: 1)Построить математическую модель распределения температуры в прямоугольнике с заданной начальной температурой и с граничными условиями различных типов.

Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач №705-706; 708-710;713-715.

Занятие3. Предельные задачи для уравнения теплопроводности. Интеграл Пуассона.

Вопросы для подготовки: 1) Сформулировать задачу Коши для уравнения теплопроводности.2)Записать фундаментальное решение уравнения теплопроводности. 3) Докажите, что интеграл Пуассона представляет собой ограниченное решение уравнения теплопроводности на бесконечной прямой.

Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач №591-599.

Занятие 4. Основные свойства гармонических функций

Вопросы для подготовки: 1) Записать необходимые и достаточные условия аналитичности функции условия Коши- Римана. 2) Какие функции называются гармоническими? 3) Сформулировать основные свойства гармонических функций.

Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач №168-171.

Занятие5-6. Постановка задач для уравнения Лапласа и Пуассона. Фундаментальные решения уравнения Лапласа.

Вопросы для подготовки: 1)Записать частные решения уравнения Лапласа, обладающие сферической симметрией. 2) Записать частные решения уравнения Лапласа, обладающие цилиндрической симметрией.3) какие решения называются фундаментальными?

Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач №188-190.

Занятие 7-8. Решение задач Дирихле и Неймана.

Вопросы для подготовки: 1) Сформулировать внутреннюю задачу Дирихле. 2) Сформулировать внутреннюю задачуНеймана.. 3) Сформулировать внешнюю задачу Дирихле. 4) Сформулировать внешнюю задачу Неймана. 5)Сформулировать теорему единственности для первой краевой задачи.

Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач №191-194; 196-205.

Занятие 9-10. Задачи на собственные значения и собственные функции оператора Лапласа.

Вопросы для подготовки: 1)Как решить уравнение Лапласа в прямоугольнике? 2)Каким методом решить уравнение Лапласа вне круга?

Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач №717-722.

Занятие 11-12. Функция источника (метод функции Грина).

Вопросы для подготовки. 1) Записать вторую формулу Грина. 2) Записать основную интегральную формулу Грина.

Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач №221; 226;239; 257.

Занятие 13-14. Теория потенциала. Метод интегральных уравнений.

Вопросы для подготовки

Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач №267;268;269;270;276277;278;279

Занятие 15. Уравнение Гельмгольца

Вопросы для подготовки. 1) Записать уравнение Гельмгольца. 2) Какое решение имеет уравнение Гельмгольца?

Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач №284;285;286;287;288.

Занятие 16-17. Специальные функции. Асимптотическое разложение.

Вопросы для подготовки. 1)Записать уравнение Бесселя n-го порядка. 2) Какие функции являются решениями уравнения Бесселя? 3)Записать уравнение Чебышева. 3) Какие функции называются функциями Чебышева?

Практические занятия и самостоятельная работа включает в себя решение задач №723; 725;726;730;769;771:778;779.

Занятие18. Контрольная работа

Практическая часть курса методически поддержана пособиями, указанными в п.1.9.6-1.9.8. В учебном пособии « Метод разделения переменных для решения уравнений математической физики» приводятся варианты индивидуальных заданий по всем разделам изучаемой дисциплины. В этом пособии даны необходимые для решения индивидуальных заданий теоретические сведения по каждой теме задания, по каждой теме решено по несколько задач, которые демонстрируют алгоритмы решения по каждому типу. Решение задач сопровождается разъяснением используемых методов и понятий. В конце каждого раздела приведены индивидуальные задачи для самостоятельной работы и к каждой задаче имеется ответ.

Кроме методического пособия, студентам рекомендуется использовать также основную и дополнительную литературу согласно перечню, приведенному в п.1.9, при этом обращая внимание на практические аспекты использования алгоритмов и реализацию методов.

Индивидуальное задание (типовой расчет) выполняется строго в соответствии с выданным преподавателем заданием и вариантом. Оформлять работу следует четко и аккуратно. Основные правила оформления работ: титульный лист содержит: ФИО, №группы, курс, дисциплина, тема расчета и т. д. Типовой расчет считается выполненным **с** дифференцированной оценкой, если:

1) работа выполнена полностью и в соответствии с заданием;

2) студент отвечает на основные теоретические вопросы по соответствующему разделу;

3) работа оформлена в соответствии с указанными требованиями.

Сроки сдачи работ ограничены отведенным на выполнение практикума аудиторным временем – 36 час. практический занятий в 5 семестре и 36 час практических занятий – в 6 семестре. Рекомендуется выполнять и сдавать на проверку индивидуальные задания по мере изложения лекционного материала и практического и выдачи заданий преподавателем. Необходимым условием допуска студента на экзамен (в 5-6 семестрах) является сдача всех практических и индивидуальных работ соответственно.

3.2 Методические указания по самостоятельной работе студентов

Объем самостоятельной работы студентов определяется учебным планом.

На самостоятельную работу студента по дисциплине «Уравнения математической физик» отводится 60 час, из которых 30 часов предусмотрено в 5 семестре, 30 часов – в 6 семестре.

В качестве самостоятельной работы по дисциплине «Уравнения математической физик» студентам предлагается выполнять индивидуальные задания по разделам дисциплины; заниматься подготовкой к контрольным работам, выполнять индивидуальные домашние задания по всем темам практических занятий; заниматься подготовкой к экзамену.

Для промежуточного контроля приобретенных практических навыков предусмотрены индивидуальные задания (по вариантам).

Для промежуточного контроля усвоения теоретического материала предусмотрены коллоквиумы, которые проводятся по различным разделам дисциплины по вопросам к экзамену.

<u>Контрольные работы</u>

5 семестр: Решить задачу Коши (1час). Решить смешанную задачу для волнового уравнения (1час).

6 семестр: Решить смешанную задачу для уравнения параболического типа (1 час). Решить уравнение Лапласа (1 час).

<u>Индивидуальные задания</u>.

5 семестр: Индивидуальное задание №1. Метод Фурье для гиперболических уравнений (4 часа). Индивидуальное задание №2. Метод Фурье для параболических уравнений. (4 часа).

6 семестр: Индивидуальное задание №3. Уравнения эллиптического типа. (4 часа)

Все индивидуальные задания берутся из методического пособия п.1.9.6.

4. Домашние задания по всем темам практических занятий (27 часов)

Все задачи для домашних заданий берутся из сборника п.1.9.4.

5. Подготовка к экзаменам (21 час).

В качестве учебно-методического пособия по самостоятельной работе студентов используются конспекты лекций и пособие: 1.9.6. Труфанова Т.В. Метод разделения переменных для решения уравнений математической физики : учеб. пособие: рек. ДВ РУМЦ/ Т. В. Труфанова, В. В. Сельвинский, А. Г. Масловская; АмГУ, ФМиИ. -Благовещенск: Изд-во Амур. гос. ун-та, 2007. -99 с., содержание которого представлено ниже.

Для подготовки к экзамену используются лекции и перечисленные в рабочей программе учебники из основной и дополнительной литературы (1.9.1-1.9.3; 1.9.7; 1.9.8).

Ниже предлагается подробное решение задач, которые помогут студентам готовиться и к контрольным работам и к выполнению домашних и индивидуальны заданий.

1 Пример решения смешанной задачи для неоднородного волнового уравнения

Найти решение уравнения

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + xt, \quad 0<x<1, \quad t>0,$$

удовлетворяющее условиям

$$u|_{x=0} = t, \quad u_x|_{x=1} = 0;$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = x+1.$$

Решение. Подберем функцию $U(x,t)$, удовлетворяющую граничным условиям (см. b)), можно взять $U(x,t)=t$. Решение исходной задачи ищем в виде

$$u(x,t)=v(x,t)+t.$$

Тогда функция $v(x,t)$ удовлетворяет уравнению

$$v_{tt}=a^2v_{xx}+xt,$$

однородным граничным условиям $v|_{x=0}=0,\ v_x|_{x=1}=0$ и начальным условиям

$$v|_{t=0}=u|_{t=0}-U|_{t=0}=0,$$
$$v_t|_{t=0}=u_t|_{t=0}-U_t|_{t=0}=x.$$

Далее будем искать $v(x,t)$ в виде

$$v(x,t)=W(x,t)+\tilde{W}(x,t),$$

где W и $\tilde{W}$ являются соответственно решениями задач

1) $W_{tt}=a^2W_{xx}$, 2) $\tilde{W}_{tt}=a^2\tilde{W}_{xx}+xt,$

$W|_{x=0}=W_x|_{x=1}=0,$ $\tilde{W}|_{x=0}=\tilde{W}_x|_{x=1}=0,$

$W|_{t=0}=0; W_t|_{t=0}=x,$ $\tilde{W}|_{t=0}=W_t|_{t=0}=0.$

Применим метод разделения переменных для решения однородной задачи 1), положим

$$W(x,t)=X(x)T(t),$$

$$\frac{T''(t)}{a^2T}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda^2.$$

Таким образом, приходим к следующей задаче Штурма-Лиувилля

$$X''(x)+\lambda^2X=0,\ X(0)=X'(1)=0.$$

Решаем эту задачу, получим

$$X(x)=A\cos\lambda x+B\sin\lambda x.$$

Из краевых условий находим собственные значения $\lambda_k=\frac{\pi}{2}+\pi k$, k=0,1,2,… и соответствующие им собственные функции

$$X_k(x)=\sin\lambda_k x.$$

Решая уравнение

$$T_k''(t)+a^2\lambda_k^2T_k(t)=0,$$

найдем временные собственные функции

$$T_k(t)=A_k\cos a\lambda_k t+B_k\sin a\lambda_k t.$$

Решение $W(x,t)$ имеет вид

$$W(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}(A_k\cos a\lambda_k t+B_k\sin a\lambda_k t)\sin\lambda_k x.$$

Из начальных условий найдем коэффициенты A_k и B_k

$$0=\sum_{k=0}^{\infty}A_k\sin\lambda_k x,\quad x=\sum_{k=0}^{\infty}B_k a\lambda_k\sin\lambda_k x.$$

Откуда следует, что $A_k=0$, k=0,1,…

$$B_k=\frac{2}{a\lambda_k}\int_0^1 x\sin\lambda_k x\,dx=\frac{4}{a\pi(2k+1)}\int_0^1 x\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2}dx=-\frac{8}{a\pi^2(2k+1)^2}x\cdot$$

$$\cos\frac{(2k+1)\pi x}{2}\Bigg|_0^1+\frac{8}{a\pi^2(2k+1)^2}\int_0^1\cos\frac{(2k+1)\pi x}{2}dx=\frac{16(-1)^k}{a\pi^3(2k+1)^3}.$$

Итак,

$$W(x,t)=\frac{16}{a\pi^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}\cdot\sin\frac{a\pi(2k+1)t}{2}\sin\frac{\pi(2k+1)x}{2}.$$

Решение задачи ищем в виде ряда по собственным функциям однородной задачи, т.е.

$$\tilde{W}(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}T_k(t)\sin\lambda_k x,$$

где

$$T_k(0)=0,\ T_k'(0)=0.$$

Разложим функцию x в ряд Фурье по системе функций

$$x=\sum_{k=0}^{\infty}D_k\sin\lambda_k x,\ D_k=2\int_0^1 x\sin\lambda_k x=\frac{8(-1)^k}{\pi^2(2k+1)^2}.$$

Подставляя это разложение в представление для $\tilde{W}$ в уравнение, получим

$$T_k''+\lambda_k^2a^2T_k(t)=D_k\,t.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$T_k(t)=A\cos a\lambda_k t+B\sin a\lambda_k t+\frac{D_k t}{\lambda_k^2a^2}.$$

Найдем $A=0,\ B=-\dfrac{D_k}{\lambda_k^3a^3}$.

Подставляя $T_k=\dfrac{D_k}{\lambda_k^3a^3}(\lambda_k at-\sin a\lambda_k t)$ в (4.9), получим

$$\tilde{W}(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{8(-1)^k}{\pi^2(2k+1)^2\lambda_k^3 a^3}\cdot(\lambda_k at-\sin a\lambda_k t)\sin\lambda_k x\,.$$

Используя выражение для $U(x,t)$, $W(x,t)$, $\tilde{W}(x,t)$, окончательно получим

$$u(x,t)=t+\frac{16}{a\pi^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}\left[\frac{2t}{a(2k+1)\pi}+\left(1-\frac{4}{a^2(2k+1)^2\pi^2}\right)\sin\frac{a(2k+1)\pi t}{2}\right]*$$

$$*\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2}.$$

2)Пример решения неоднородного уравнения теплопроводности.

Решить смешанную задачу для неоднородного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-u=xt(2-t)+2\cos t\,,\qquad 0<x<\pi$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=t^2,\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=\pi}=t^2;\qquad u(x,0)=\cos 2x\,.$$

<u>Решение.</u> Подберем функцию $U(x,t)$, удовлетворяющую граничным условиям

$$U(x,t)=t^2\cdot x+\frac{t^2-t^2}{2}x^2=t^2\cdot x\,.$$

Поэтому, если искать решение в виде $u=v+t^2\cdot x$, то для функции v получим следующую задачу:

$$\frac{\partial v}{\partial t}-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-v=2\cos t\,,$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=0}=0,\qquad \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=\pi}=0;\qquad v(x,0)=\cos 2x\,.$$

Решение ищем в виде:

$$v=\tilde{W}+W\,,$$

где

$$\frac{\partial \tilde{W}}{\partial t}-\frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial x^2}-\tilde{W}=0\,,$$

$$\left.\frac{\partial \tilde{W}}{\partial x}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial \tilde{W}}{\partial x}\right|_{x=\pi}=0\,,\qquad \tilde{W}(x,0)=\cos 2x\,.$$

$$\frac{\partial W}{\partial t}-\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}-W=2\cos t\,,$$

$$\left.\frac{\partial W}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial W}{\partial x}\right|_{x=\pi} = 0, \qquad W(x,0) = 0.$$

Для построения функции $\tilde{W}(x,t)$ применим метод Фурье:

$$\tilde{W}(x,t) = T(t)X(x).$$

Подставляя в уравнение $\tilde{W}(x,t)$ и в граничные условия, получим:

$$T'X - TX'' - TX = 0, \qquad \frac{T'}{T} - 1 = \frac{X''}{X} = -\lambda^2;$$

$$T' + \left(\lambda^2 - 1\right)T = 0$$

отсюда

$$T = e^{-\left(\lambda^2 - 1\right)t}.$$

Задача Штурма-Лиувилля:

$$\left.\begin{array}{l} X'' + \lambda^2 X = 0 \\ X'(0) = X'(\pi) = 0 \end{array}\right\}$$

отсюда

$$X_k(x) = \cos kx,$$

$$\lambda_k^2 = k^2 \qquad \left(k^2 = 0,1,2,\ldots\right)$$

Применяя принцип суперпозиции, запишем

$$\tilde{W}(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k e^{-\left(k^2 - 1\right)t} \cos kx$$

Удовлетворим начальному условию

$$\tilde{W}(x,0) = \cos 2x = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos kx$$

отсюда

$$A_2 = 1, \qquad A_k = 0, \qquad \left(k = 0,1,3,4,\ldots\right)$$

$$\tilde{W}(x,t) = e^{-3t} \cos 2x.$$

Решение $W(x,t)$ ищем в виде ряда по собственным функциям соответствующей однородной задачи:

$$W(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t) \cos kx, \; T_k(0) = 0.$$

Подставляя $W(x,t)$ в уравнение, получим:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[T_k' t' + \left(k^2 - 1\right)T_k\right]\cos kx = 2\cos t, \qquad T_k(0) = 0.$$

Разлагая правую часть в ряд Фурье:

$$2\cos t = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t)\cos kx$$

получим:

$$f_0(t) = 2\cos t, \qquad f_k(t) \equiv 0, \qquad (k = 1,2,3,\ldots)$$

можем задачу для T_k записать в виде:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[T_k' + \left(k^2 - 1\right)T_k - f_k(t)\right]\cos kx = 0, \qquad T_k(0) = 0$$

отсюда

$$T_0' - T_0 - 2\cos t = 0, \qquad T_0(0) = 0$$

решая получим:

$$T_0(t) = e^t + \sin t - \cos t;$$

$$T_k' - T_k = 0, \qquad T_k(0) = 0,$$

отсюда

$$T_k(t) = 0 \qquad (k = 1,2,\ldots)$$

Таким образом, имеем:

$$W(x,t) = \left(e^t + \sin t - \cos t\right)\cos(0x).$$

Подставляя в выражение

$$u(x,t) = v(x,t) + t^2 x$$

значение $v(x,t) = \tilde{W}(x,t) + W(x,t)$ получим решение исходной неоднородной задачи:

$$u(x,t) = e^{-3t}\cos 2x + \left(e^t + \sin t - \cos t\right)\cdot 1 + t^2 x.$$

3)Примеры решения уравнений эллиптического типа.

Решение уравнения Лапласа в прямоугольнике.

Найти в прямоугольнике D:

$$0 < x < a$$

$$0 < y < b$$

решение уравнения Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$u(0,y)=\varphi_0(y), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=a}=\varphi_1(y), \qquad (0\le y\le b)$$
$$u(x,0)=\psi_0(x), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=b}=\psi_1(x), \qquad (0\le x\le a)'$$

причем $\varphi_0(0)=\psi_0(0)$

Решение. Решение задачи будем искать в виде $u=v+W$. Потребуем, чтобы функция v удовлетворяла условиям:

а) $$\Delta v=0, \qquad v(x,0)=0, \qquad \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{y=b}=0;$$

$$v(0,y)=\varphi_0(y), \qquad \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=a}=\varphi_1(y).$$

Тогда для W получаем:

б) $$\Delta W=0, \qquad W(0,y)=0, \qquad \left.\frac{\partial W}{\partial x}\right|_{x=a}=0;$$

$$W(x,0)=\psi_0(x), \qquad \left.\frac{\partial W}{\partial y}\right|_{y=b}=\psi_1(x).$$

Решаем задачу *а*) методом Фурье. Полагаем

$$v=X(x)Y(y),$$

получаем

$$X''Y+XY''=0. \qquad X(x)Y(0)=X(x)Y'(b)=0.$$

Разделяя переменные, получим

$$\frac{X''}{X}=-\frac{Y''}{Y}=\lambda^2.$$

Таким образом, приходим к задаче Штурма-Лиувилля (независимая переменная $y\in[0,b]$).

$$\left.\begin{aligned}&Y''+\lambda^2Y=0\\&Y(0)=Y'(b)=0\end{aligned}\right\},$$

отсюда находим:

$$\lambda_k=\frac{(2k+1)\pi}{2b} \qquad (k=0,1,2,\ldots)$$

$$Y_k(y)=\frac{\sin(2k+1)\pi}{2b}y$$

и к уравнению

$$X'' - \lambda_k^2 X = 0,$$

отсюда

$$X_k(x) = A_k \mathrm{ch}\,\frac{(2k+1)\pi x}{2b} + B_k \mathrm{sh}\,\frac{(2k+1)\pi x}{2b}.$$

Воспользуемся принципом суперпозиции, запишем решение задачи *а*):

$$v(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(x) Y_k(y) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left(A_k \mathrm{Ch}\,\frac{(2k+1)\pi x}{2b} + B_k \mathrm{Sh}\,\frac{(2k+1)\pi x}{2b}\right)\sin\frac{(2k+1)\pi y}{2b}.$$

Потребуем, чтобы эта функция удовлетворяла условиям

$$v(0,y) = \varphi_0(y) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \sin\frac{(2k+1)\pi y}{2b},$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=a} = \varphi_1(y) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(A_k \mathrm{Sh}\,\frac{(2k+1)\pi a}{2b} + B_k \mathrm{Ch}\,\frac{(2k+1)\pi a}{2b}\right)\cdot$$

$$\cdot\frac{(2k+1)\pi}{2b}\sin\frac{(2k+1)\pi y}{2b}.$$

Рассмотрим полученные равенства как разложение функций $\varphi_0(y)$ и $\varphi_1(y)$ в ряд по собственным функциям краевой задачи, это разложение будет иметь вид:

$$A_k = \frac{2}{b}\int_0^b \varphi_0(y)\sin\frac{(2k+1)\pi y}{2b}\,dy,$$

$$\left(A_k \mathrm{sh}\frac{(2k+1)\pi a}{2b} + B_k \mathrm{ch}\frac{(2k+1)\pi a}{2b}\right)\frac{(2k+1)\pi}{2b} = \frac{2}{b}\int_0^b \varphi_1(y)\sin\frac{(2k+1)\pi y}{2b}\,dy.$$

Вычислив A_k и B_k, подставив их значения в ряд для $v(x,y)$ и приведя подобные члены, получим решение задачи *а*):

$$v(x,y) = \frac{2}{b}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\mathrm{ch}\,\frac{(2k+1)\pi(x-a)}{2b}\int_0^b \varphi_0(y)\sin\frac{(2k+1)\pi y}{2b}\,dy +\right.$$

$$\left.+\frac{2b}{(2k+1)\pi}\mathrm{sh}\frac{(2k+1)\pi x}{2b}\int_0^b \varphi_1(y)\sin\frac{(2k+1)\pi y}{2b}\,dy\right)\frac{\sin\dfrac{(2k+1)\pi y}{2b}}{\mathrm{ch}\dfrac{(2k+1)\pi a}{2b}}.$$

Теперь решим задачу *б*). Ее отличие от задачи *а*) состоит в том, что независимой переменной задачи Штурма-Лиувилля будет $x \in [0, a]$, а дополнительные условия будут по переменной y. Отсюда заключаем, что решение $W(x, y)$ задачи *б*) может быть получено из решения $v(x, y)$ задачи *а*) путем замены x на y, a на b, а $\varphi_0(y)$ и $\varphi_1(y)$ на $\psi_0(x)$ и $\psi_1(x)$:

$$W(x, y) = \frac{2}{a}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\operatorname{ch}\frac{(2k+1)\pi}{2a}\int_0^a \psi_0(x)\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2a}dx + \right.$$

$$\left. + \frac{2a}{(2k+1)\pi}\operatorname{sh}\frac{(2k+1)\pi y}{2a}\int_0^a \psi_1(x)\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2a}dx\right)\frac{\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2a}}{\operatorname{Sh}\frac{(2k+1)\pi b}{2a}}.$$

Подставляя в равенство $u = v + W$ выражения v и W, получим решение исходной задачи.

Контроль над выполнением самостоятельной работы осуществляется проведением аудиторных контрольных работ, проведением коллоквиумов по некоторым разделам дисциплины, проверкой и защитой индивидуальных работ проведением итогового экзамена по дисциплине.

4. Контроль знаний.

4.1 Текущий контроль знаний

Оценочные средства для текущего контроля успеваемости и для промежуточной аттестации: зачетная система оценки знаний учащихся. (Пункт рабочей программы 1.11)

Проверка остаточных знаний у студентов по вопросам, которые будут использоваться для изучения данной дисциплины, проводится при помощи входящих тестов. Пример входящего теста.

Амурский Государственный Университет

Входящие тестовые задания по проверке остаточных знаний для дисциплины «УРАВНЕНИЯ в частных производных» для направления подготовки 010500.62 – Прикладная математика и информатика.

Вариант №1

1. Чему равна производная функции $y(x) = \int_0^x \sin\frac{x-\xi}{a}d\xi$?

a) $\cos\frac{x}{a}$

b) $\sin\frac{x}{a}$

c) 0

d) $-\sin\frac{x-\xi}{a}$

2. Чему равен вектор градиента в точке $M_0(x, y, z)$ для функции $u = 1/r$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$?

a) $grad(u) = (-\frac{2x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}; -\frac{2y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}; -\frac{2z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}})$

b) $grad(u) = (-\frac{x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}; -\frac{y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}; -\frac{z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}})$

c) $grad(u) = (\frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}; \frac{x^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}; \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}})$

d) $grad(u) = (-\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}; -\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}; -\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}})$

3. Для скалярной функции $\varphi(x, y, z)$ определить чему равна операция $rot(grad(\varphi))$.

a) 0

b) $(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x \partial z}) \cdot \vec{i} + (\frac{\partial^2\varphi}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x \partial y}) \cdot \vec{j} + (\frac{\partial^2\varphi}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial y \partial z}) \cdot \vec{k}$

c) $(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}) \cdot \vec{i} + (\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}) \cdot \vec{j} + (\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}) \cdot \vec{k}$

d) Правильного ответа нет.

4. Для скалярной функции $\varphi(x, y, z)$ и векторной функции $\vec{a}(x, y, z)$ определить чему равна операция $rot(\varphi \cdot \vec{a})$.

a) $\varphi \cdot rot(\vec{a}) + rot(\varphi) \cdot \vec{a}$

b) $\vec{a} \cdot rot(\varphi) + \left[\varphi, grad(\vec{a})\right]$

c) $rot(\varphi) + grad(\vec{a})$

d) $\varphi \cdot rot(\vec{a}) + \left[grad(\varphi), \vec{a}\right]$

5. Применяя формулу Остроградского, найдите поток вектора $\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$ через поверхность сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

a) 0

b) $\frac{4}{9}\pi R^3$

c) $4\pi R^3$

d) $12\pi R^3$

6. Найдите решение неоднородного дифференциального уравнения первого порядка $y' + y \cdot tgx = \sec x$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 1$.

a) $y = \sin x + \cos x$

b) $y = -\sin x + \sec x$

c) $y = \sin x$

d) $y = -\cos x$

7. Найдите решение неоднородного дифференциального уравнения второго порядка $y'' + y = 1$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0$, $y(\frac{\pi}{2}) = 0$.

a) $y = \sin x - \cos x$

b) $y = 1 - \sin x - \cos x$

c) $y = 1 - \cos x$

d) $y = 1 + \sin x + \cos x$

8. Найдите решение дифференциального уравнения $y'' - a^2 y = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0$, $y(1) = 1$.

a) $y = \dfrac{1}{e^a - e^{-a}} + \dfrac{e^{-ax}}{e^a - e^{-a}}$

b) $y = \dfrac{e^{ax}}{e^a - e^{-a}} - \dfrac{e^{-ax}}{e^a - e^{-a}}$

c) $y = \dfrac{e^{ax}}{e^a - e^{-a}} - \dfrac{1}{e^a - e^{-a}}$

d) $y = \dfrac{e^{ax}}{e^a - e^{-a}} + \dfrac{e^{-x}}{e^a - e^{-a}}$

9. Найдите коэффициенты разложения функции $u(x) = x$ на отрезке [0,1] в тригонометрический ряд Фурье по косинусам.

a) $\dfrac{1}{\pi^2 (2m+1)^2}$

b) $\dfrac{-4}{\pi^2 (2m)^2}$

c) $\dfrac{4}{\pi^2 (2m+1)}$

d) $\dfrac{-4}{\pi^2 (2m+1)^2}$

10. Найдите коэффициенты разложения функции $u(x) = 1$ на отрезке [0,1] в тригонометрический ряд Фурье по синусам.

a) $\dfrac{4}{\pi(2m+1)}$

b) $\dfrac{1}{(2m+1)}$

c) $\dfrac{1}{\pi(m+1)}$

d) $\dfrac{4}{\pi(2m)}$

11. Найти решение уравнения $y'' - y = 2x$, удовлетворяющего краевым условиям $y(0) = 0$, $y(1) = -1$:

a) $y = (shx / sh1) - 2x$

b) $y = shx - 2x$

c) $y = 2x$

d) $y = \frac{1}{2}(shx / sh1) - 2x$

12. Найти решение уравнения $y'' + y' = 1$, удовлетворяющего краевым условиям $y'(0) = 0$, $y(1) = 1$:

a) $y = x + e^{-x} - e^{-1}$

b) $y = e^{-x} - e^{-1}$

c) $y = x + e^{-x}$

d) $y = e^{-x}$

13. Найти решение уравнения $y'' + y = 1$, удовлетворяющего краевым условиям $y(0) = 0$, $y(\frac{\pi}{2}) = 0$:

a) $y = 1 - \sin x$

b) $y = 1 - \sin x - \cos x$

c) $y = 1 - \sin 2x - \cos 3x$

d) Нет решений

14. Найти решение уравнения $y'' - y' = 0$, удовлетворяющего краевым условиям $y(0) = -1$, $y'(1) - y(1) = 2$:

a) $y = e^{x}$

b) $y = e^{x} - 2$

c) $y = 2e^{x} - 4$

d) Решений нет

15. Найти решение уравнения $y' + y = 2x - \pi$, удовлетворяющего краевым условиям $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$:

a) $y = 2x - \pi + \pi\cos x + C\sin x$, где С – произвольное

b) $y = 2x - \pi$

c) $y = 2x - \pi + \pi\cos x$

d) Решений нет

16. Найти решение уравнения $y'' - y' - 2y = 0$, удовлетворяющего краевым условиям $y'(0) = 2$, $y(+\infty) = 0$:

a) $y = -2e^{-x}$

b) $y = 2e^{-x}$

c) $y = -2e^{x}$

d) Решений нет

17. Найти решение уравнения $y'' + y = 1$, удовлетворяющего краевым условиям $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$:

a) $y = 2e^{-x}$

b) $y = e^{x}$

c) $y = 2x$

d) Решений нет

18. Найти решение уравнения $y''-y=1$, удовлетворяющего краевым условиям $y(0)=0$, $y(x)$ ограничено при $x\to+\infty$:
   a) $y=e^{-x}$
   b) $y=e^{-x}-1$
   c) $y=e^{-x}-5e$
   d) Решений нет

19. Построить функцию Грина для $y''+y'=f(x), y(0)=0, y'(1)=0$
   a) $G=e^{s}(e^{-x}-1),(0\le x\le s)$
   $G=1-e^{s},(s\le x\le 1)$

   b) $G=e^{-s}(e^{x}-1),(0\le x\le s)$
   $G=1-e^{-s},(s\le x\le 1)$

   c) $G=e^{s}(e^{-x}+1),(0\le x\le s)$
   $G=1-e^{-s},(s\le x\le 1)$

   d) $G=e^{s}(e^{x}-1),(0\le x\le s)$
   $G=1-e^{s},(s\le x\le 1)$

20. Построить функцию Грина для $y''-y=f(x), y'(0)=0, y'(2)+y(2)=0$
   a) $G=-e^{s}ch(x),(0\le x\le s)$
   $G=-e^{x}ch(s),(s\le x\le 2)$

   b) $G=e^{s}ch(x),(0\le x\le s)$
   $G=e^{x}ch(s),(s\le x\le 2)$

   c) $G=-e^{-s}ch(x),(0\le x\le s)$
   $G=-e^{-x}ch(s),(s\le x\le 2)$

   d) $G=-e^{-s}sh(x),(0\le x\le s)$
   $G=-e^{-x}sh(s),(s\le x\le 2)$

21. Построить функцию Грина для $y''=f(x), y(0)=0, y(1)=0$
   a) $G=(s-1)x,(0\le x\le s)$
   $G=s(x-1),(s\le x\le 1)$

   b) $G=(s-1)x,(0\le x\le s)$
   $G=s(x-1),(s\le x\le 1)$

   c) $G=(s-1)x,(0\le x\le s)$
   $G=s(x-1),(s\le x\le 1)$

d) $G=(s-1)x,(0\le x\le s)$
$G=s(x-1),(s\le x\le 1)$

22. Построить функцию Грина для $x^2y''-2y=f(x), y(1)=0, y(2)+2y'(2)=0$

a) $G=\frac{1-x^3}{3s^3x},(0\le x\le s)$
$G=\frac{1-s^3}{3s^3x},(s\le x\le 2)$

b) $G=\frac{1-x^3}{3s^3x},(1\le x\le s)$
$G=\frac{1-s^3}{3s^3x},(s\le x\le 2)$

c) $G=\frac{1+x^3}{3s^3x},(0\le x\le s)$
$G=\frac{1-s^3}{3s^3x},(s\le x\le 2)$

d) $G=\frac{1-x^3}{3x^3s},(1\le x\le s)$
$G=\frac{1+s^3}{3s^3x},(s\le x\le 2)$

23. Найти собственные значения и собственные функции $y''=\lambda y, y(0)=0, y(l)=0$

a) $\lambda_k=\frac{-k^2\pi^2}{l^2},$ $y_k=\sin(\frac{k\pi x}{l}),$ k=1,2,…

b) $\lambda_k=\frac{k\pi}{l},$ $y_k=\cos(\frac{k\pi x}{l}),$ k=1,2,…

c) $\lambda_k=\frac{-k^2\pi^2}{l^2},$ $y_k=\cos(\frac{k\pi x}{l}),$ k=1,2,…

d) $\lambda_k=\frac{-k^2\pi^2}{l^2},$ $y_k=\sin(\frac{k^2\pi^2}{l^2}),$ k=1,2,…

24. Найти собственные значения и собственные функции $y''=\lambda y, y(0)=0, y'(l)=0$

a) $$\lambda_k = (k-\frac{1}{2})^2\frac{\pi^2}{l^2}, \quad y_k = \sin(k-\frac{1}{2})\frac{\pi x}{l}, \quad k=1,2,\dots$$

b) $$\lambda_k = -(k-\frac{1}{2})\frac{\pi}{l}, \quad y_k = \sin(k-\frac{1}{2})\frac{\pi x}{l}, \quad k=1,2,\dots$$

c) $$\lambda_k = -(k-\frac{1}{2})\frac{\pi}{l}, \quad y_k = \sin(k-\frac{1}{2})^{1/2}(\frac{\pi x}{l})^{1/2}, \quad k=1,2,\dots$$

d) $$\lambda_k = -(k-\frac{1}{2})^2(\frac{\pi}{l})^2, \quad y_k = \sin(k-\frac{1}{2})\frac{\pi x}{l}, \quad k=1,2,\dots$$

25. Найти собственные значения и собственные функции $x^2y''=\lambda y, y(1)=0, y(a)=0, a>0$

a) $$\lambda_k = -(\frac{k\pi}{\ln(a)})^2-\frac{1}{8}, \quad y_k = \sqrt{a}\sin(k\pi\frac{\ln(a)}{\ln(x)}), \quad k=1,2,\dots$$

b) $$\lambda_k = (\frac{k\pi}{\ln(a)})^2+\frac{1}{4}, \quad y_k = \sqrt{x}\sin(k\pi\frac{\ln(a)}{\ln(x)}), \quad k=1,2,\dots$$

c) $$\lambda_k = -(\frac{k\pi}{\ln(a)})^2-\frac{1}{4}, \quad y_k = \sqrt{x}\sin(k\pi\frac{\ln(x)}{\ln(a)}), \quad k=1,2,\dots$$

d) $$\lambda_k = -(\frac{k\pi}{\ln(a)})^2-\frac{1}{4}, \quad y_k = \sqrt{a}\sin(k\pi\frac{\ln(x)}{\ln(a)}), \quad k=1,2,\dots$$

Текущий контроль за аудиторной и самостоятельной работой обучаемых осуществляется во время проведения практических занятий посредством устного опроса по контрольным вопросам соответствующего раздела, а также проверки домашних задач, проверкой контрольных работ. Промежуточный контроль осуществляется три раза в семестр в виде контрольных точек при анализе оценок и посещаемости студента. Приведем примеры аудиторных контрольных работ по всем разделам изучаемой дисциплины.

Варианты контрольных заданий

5 семестр: Решить задачу Коши (1час). Решить смешанную задачу для волнового уравнения (1час).

6 семестр: Решить смешанную задачу для уравнения параболического типа (1 час). Решить уравнение Лапласа (1 час).

1) Контрольная работа №1. Решить задачу Коши (1час).

Вариант 1

Решить задачу Коши:

$$3U_{xx} - 4U_{xy} + U_{yy} - 3U_x + U_y = 0,$$

$$U(x,y)\big|_{y=0} = \varphi(x),$$

$$U_y(x,y)\big|_{y=0} = \phi(x)$$

Вариант 2

Решить задачу Коши:

$$e^y U_{xy} - U_{yy} + U_y = 0,$$

$$U(x,y)\big|_{y=0} = -\frac{x^2}{2},$$

$$U_y(x,y)\big|_{y=0} = -\sin x$$

Вариант 3

Решить задачу Коши:

$$U_{xx} - 2\sin x U_{xy} - (3+\cos^2 x)U_{yy} - \cos x U_y = 0,$$

$$U(x,y)\big|_{y=\cos x} = \sin x,$$

$$U_y(x,y)\big|_{y=\cos x} = e^{\frac{x}{2}}$$

Вариант 4

Решить задачу Коши:

$$U_{xx} - 2\sin x U_{xy} - (3+\cos^2 x)U_{yy} + U_x + (2-\sin x - \cos x)U_y = 0,$$

$$U(x,y)\big|_{y=\cos x} = 0,$$

$$U_y(x,y)\big|_{y=\cos x} = e^{\frac{-x}{2}} \cos x$$

Вариант 5

Решить задачу Коши:

$$U_{xx} + 2\sin x U_{xy} - \cos^2 x U_{yy} + U_x + (\sin x + \cos x + 1)U_y = 0,$$

$$U(x,y)\big|_{y=-\cos x} = 1 + 2\sin x,$$

$$U_y(x,y)\big|_{y=-\cos x} = \sin x$$

Вариант 6

Решить задачу Коши:

$$U_{xx}+2\cos xU_{xy}-\sin^2 xU_{yy}+U_x+(-\sin x+\cos x+1)U_y=0,$$
$$U(x,y)\big|_{y=\sin x}=\cos x,$$
$$U_y(x,y)\big|_{y=-\sin x}=\sin x$$

Вариант 7
Решить задачу Коши:
$$e^yU_{xy}-U_{yy}+U_y=xe^{2y},$$
$$U(x,y)\big|_{y=0}=\sin x,$$
$$U_y(x,y)\big|_{y=0}=\frac{1}{1+x^2}$$

Вариант 8
Решить задачу Коши:
$$3U_{xx}-5U_{xy}+2U_{yy}=0,$$
$$U(x,y)\big|_{y=x}=\frac{x}{1+x^2},$$
$$U_y(x,y)\big|_{y=x}=\sin x$$

2) Контрольная работа №1).
Вариант 1
Решить смешанную задачу для волнового уравнения (1час)
$$u_{tt}=a^2u_{xx}+4\cos\frac{3\pi x}{2},\ x\in[0,1],\qquad t>0;$$
$$u_x\big|_{x=0}=u\big|_{x=1}=0,$$
$$u\big|_{t=0}=\cos\frac{3\pi}{2}x+\cos\frac{\pi}{2}x,\quad u_t\big|_{t=0}=2\cos\frac{3\pi}{2}x.$$

Вариант2
Решить смешанную задачу для волнового уравнения (1час)
$$u_{tt}+3\pi^2u=u_{xx}+(x-x^2)\sin 2\pi t,\qquad x\in[0,1],\qquad t>0;$$
$$u\big|_{x=0}=u\big|_{x=1}=0,$$
$$u\big|_{t=0}=0,\qquad u_t\big|_{t=0}=0.$$

3) Контрольная работа №2.

Вариант 1
Решить смешанную задачу для уравнения параболического типа (1 час).

$$u_t=u_{xx}+u+xt(2-t)+2\cos t,\quad x\in[0,\pi],\ t>0,$$

$$u_x\big|_{x=0} = t^2,\ u_x\big|_{x=\pi} = t^2, \quad u\big|_{t=0} = \cos 2x.$$

Вариант 2
Решить смешанную задачу для уравнения параболического типа (1 час).

$$u_t = u_{xx} - 2u_x + u + e^x \sin x - t, \quad x \in [0, \pi],\ t > 0,$$

$$u\big|_{x=0} = 1 + t,\ u\big|_{x=\pi} = 1 + t, \quad u\big|_{t=0} = 1 + e^x \sin 2x.$$

2) Контрольная работа №2. Решить уравнение Лапласа (1 час).
Вариант 1
Найти решение уравнения Лапласа в прямоугольнике

$0 < x < a,\ 0 < y < b,$ если на границе $u(x, y)$ удовлетворяет условиям:

$$u\big|_{x=0} = 0; \quad u\big|_{x=a} = 0; \quad u\big|_{y=0} = 0; \quad u\big|_{y=b} = \sin\frac{2\pi x}{a}$$

Вариант 2.
Найти решение уравнения Лапласа в прямоугольнике

$$u\big|_{x=0} = 0; \quad u\big|_{x=a} = 0; \quad u\big|_{y=0} = \cos\frac{2\pi x}{a}; \quad u\big|_{y=b} = 0$$

Вариант 3
Вне круга $0 \le r \le R$ найти решения $u = u(r, \varphi)$ следующих краевых задач для уравнения Лапласа:

$$u_r(R, \varphi) = \frac{1}{2} + \varphi \sin 2\varphi;$$

Вариант 4
Вне круга $0 \le r \le R$ найти решения $u = u(r, \varphi)$ следующих краевых задач для уравнения Лапласа:

$$u(R, \varphi) = \sin\frac{\varphi}{2}.$$

Оценочные средства для текущего контроля успеваемости и для промежуточной аттестации: зачетная система оценки знаний учащихся.

Текущий контроль за аудиторной и самостоятельной работой обучаемых осуществляется во время проведения практических занятий посредством устного опроса по контрольным вопросам соответствующего раздела, а также проверки домашних задач. Промежуточный контроль осуществляется три раза в семестр в виде контрольных точек при анализе оценок и посещаемости студента. Для заключительной аттестации студентов в конце второго семестра обучения проводится контрольное тестирование по вариантам (которое является составной частью зачета по практической части курса).

Пример теста

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Тестовые задания по проверке остаточных знаний по дисциплине
«УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ»
для специальности 010500.62
20 заданий
время тестирования – 80 минут

1.Дифференциальное уравнение $U_y U_{xx} + 3x^2 U U_{xy} - 2U_x + x = 0$ является
1)линейным однородным;
2)квазилинейным;
3)линейным неоднородным;
4)нелинейным.

2.Общее решение дифференциального уравнения $\dfrac{\partial^3 U}{\partial x \partial y^2} = 3y$ имеет вид

1) $\dfrac{y^3 x}{2} + f_1(x)y + f_2(x) + f_3(y)$;
2) $\dfrac{y^3 x}{3} + f_1(x)x + f_2(y) + f_3(x)$;
3) $\dfrac{y^3 x}{6} + f_1(y)x + f_2(x)$;
4) $\dfrac{y^2 x^2}{4} + f_1(x) + f_2(y)$;

3.Тип дифференциального уравнения $U_{xx} + 6U_{xy} + 8U_{yy} = 0$ является
1)эллиптическим;
2)параболическим;
3)смешанным;
4)гиперболическим.

4.Канонический вид дифференциальных уравнений параболического типа …
1) $U_{\xi\eta} = 0$;
2) $U_{\xi\xi} - U_{\eta\eta} = 0$;
3) $U_{\xi\xi} = f(\xi, \eta, U_\xi, U_\eta, U)$;
4) $U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} = f(\xi, \eta, U_\xi, U_\eta, U)$.

5.Канонический вид дифференциального уравнения $U_{xx} - 4U_{xy} - 12U_{yy} = 0$.
1) $U_{\xi\eta} = 0$;
2) $U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} = 0$;
3) $U_{\xi\xi} - U_{\eta\eta} = 0$;
4) $U_{\xi\xi} = 0$.

6.Канонический вид волнового уравнения
1) $U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} = 0$;
2) $U_{\xi\eta} = 0$;
3) $U_{\eta\eta} = 0$;
4) $U_{\xi\xi} - U_{\eta\eta} = 0$.

7.Решение задачи Коши для одномерного уравнения теплопроводности имеет вид

1) $u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}d\xi$; 2) $u(x,t)=2a\sqrt{\pi t}e^{-x^2}$;

3) $u(x,t)=\frac{1}{2a}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x} f(\xi)d\xi$; 4) $u(x,t)=e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}$.

8.Решение задачи Коши для одномерного волнового уравнения имеет вид

1) $\frac{f(x-at)+f(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}F(\xi)d\xi$; 2) $\frac{1}{2}[f(x-at)+f(x+at)]$;

3) $\int\limits_{x-at}^{x+at}F(\xi)d\xi$; 4) $f(x-at)+\frac{1}{2}\int\limits_{x-at}^{x+at}F(\xi)d\xi$.

9.Метод Даламбера для уравнения $U_{tt}=a^2U_{xx}$ при начальных условиях $U(x,0)=x^2$, $U_t(x,0)=\cos x$ дает решение

1) $(x-at)+(x+at)+\sin(x-at)+\sin(x+at)$;

2) $(x-at)+\cos(x+at)$;

3) $(x-at)^2+\cos(x+at)$;

4) $\frac{1}{2}[(x-at)^2+(x+at)^2]+\frac{1}{2a}[\sin(x+at)+\sin(x-at)]$.

10.Метод Фурье для уравнения $U_{tt}=a^2U_{xx}$ при начальных краевых условиях $U(o,t)=U(l,t)=U(x,o)=0$; $U_t(x,0)=\sin\frac{2\pi x}{l}$ дает ответ

1) $\sin\frac{2\pi x}{l}\cos\frac{2\pi at}{l}$; 2) $\frac{2\pi a}{l}\sin\frac{2\pi x}{l}\cos\frac{2\pi at}{l}$;

3) $\frac{l}{2\pi a}\sin\frac{2\pi x}{l}\sin\frac{2\pi at}{l}$; 4) $\frac{l}{2a}\cos\frac{2\pi x}{l}\cos\frac{2\pi at}{l}$.

11.Решение задачи Штурма – Лиувилля для уравнения $y''+\lambda y=0$ при условиях $y'(0)=y(l)=0$ имеет вид

1) $y_n(x)=C_n\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}$; 2) $y_n(x)=C_n\cos\frac{n\pi x}{l}$;

3) $y_n(x)=C_n\sin\frac{n\pi x}{l}$; 4) $y_n(x)=C_n\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2l}$.

12.Собственные функции и собственные значения для уравнения $y''+\lambda y=0$ при условиях $y'(0)=y(l)=0$ имеет вид

1) $y_n(x)=C_n\cos\frac{n\pi x}{l}$ 2) $y_n(x)=C_n\sin\frac{n\pi x}{l}$

$\lambda_n=\left(\frac{n\pi x}{l}\right)^2$; $\lambda_n=\frac{n\pi}{l}$;

3) $y_n(x)=C_n\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}$ 4) $y_n(x)=C_n\cos\frac{(2n+1)\pi x}{l}$

$$\lambda_n = \frac{(2n+1)^2\pi^2}{4l^2}; \qquad \lambda_n = \frac{(2n+1)\pi}{l}.$$

13.Вычисление интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)dx$ дает ответ

1)1; 2) -1; 3)0; 4)π.

14.Метод Фурье для уравнения $U_{tt} = a^2U_{xx}$ при начальных краевых условиях $U(o,t) = U(l,t) = 0$; $U(x,0) = Ax$ в полуполосе $0 < x < l$, $t > 0$ дает ответ

1) $U(x,t) = \frac{2l}{A}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}e^{\left(-\frac{ak\pi}{l}\right)^2 t}\sin\frac{k\pi x}{l}$;

2) $U(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k}}{k}e^{\left(-\frac{ak\pi}{l}\right)^2 t}\cos\frac{k\pi x}{l}$;

3) $U(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}e^{\frac{ak\pi}{l}t}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{l}$;

4) $U(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k}}{2k}e^{\frac{ak\pi}{l}t}\cos\frac{k\pi x}{2l}$.

15.Внутренняя задача Дирихле для уравнения Лапласа в круге при $U(a,\varphi) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\varphi$ имеет решение

1) $r^2\cos 2\varphi$; 2) $ra\cos 2\varphi$;

3) $1 + r^2\cos 2\varphi$; 4) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{r}{a}\right)^2\cos 2\varphi$.

16.Внутренняя задача Неймана для уравнения Лапласа в круге при $U_r(a,\varphi) = 2\cos 3\varphi$ имеет решение

1) $C + \frac{2}{3}\left(\frac{r^3}{a^2}\right)\cos 3\varphi$; 2) $\frac{2}{3}\left(\frac{r}{a}\right)^2\cos 3\varphi$;

3) $C + \frac{r}{a}\cos 3\varphi$; 4) $C + \frac{2}{3}\cos 3\varphi$.

17.Внутренняя задача Дирихле для уравнения Лапласа в кольце при $U|_{r=1} = 7$, $U|_{r=2} = 3 + \cos 2\varphi$ дает ответ

1) $7 + 3\cos 2\varphi$; 2) $7 + \frac{4\ln r}{\ln 2} + \cos 2\varphi$;

3) $7 - \frac{4\ln r}{\ln 2} + \frac{4}{15}\left(r^2 - \frac{1}{r}\right)\cos 2\varphi$; 4) $7 - 3\cos 2\varphi$.

18.Внутренняя задача Дирихле для уравнения Лапласа в шаре при $U(a,\theta) = 1 + \cos\theta$ дает ответ

1) $U(r,\theta) = r\cos\theta$; 2) $U(r,\theta) = 1 + ra\cos\theta$;

3) $U(r,\theta) = ar\cos\theta$; 4) $U(r,\theta) = 1 + \frac{r}{a}\cos\theta$.

19.Внутренняя задача Неймана для уравнения Лапласа в шаре при $U_r(a,\theta)=7\cos\theta$ дает ответ

1) $C+7\frac{r}{a}\cos\theta$; 2) $C+7r\cos\theta$;

3) $7ar\cos\theta$; 4) $7r\cos\theta$.

20.Внутренняя задача Дирихле для уравнения Лапласа в шаровом слое при $U(1,\theta)=2$, $U(2,\theta)=1+\cos\theta$ дает ответ

1) $U=\frac{1}{7}\left(r^2-\frac{1}{r^2}\cos\theta\right)$; 2) $U=2r+\frac{4}{7}\left(r^2+\frac{1}{r^2}\right)\cos\theta$;

3) $U=2r+\cos\theta$; 4) $U=\frac{2}{r}+\frac{4}{7}\left(r^2-\frac{1}{r^2}\right)\cos\theta$.

4.2 Итоговый контроль знаний

Итоговый контроль осуществляется после успешного прохождения студентами текущего и промежуточного контроля в виде экзамена в первом семестре изучения дисциплины и экзамена – во втором.

Необходимым условием допуска на экзамен является сдача всех практических и расчетных работ. В билет входят два вопроса и две задачи. Студент должен дать развернутый ответ на основные вопросы и краткий – на дополнительные, решить обе задачи.

Оценка «отлично» ставиться при полном изложении теоретического материала экзаменационного билета, ответах на дополнительные вопросы, подтверждающие знание материала, и при правильном решении задач.

Оценка «хорошо» ставится при твердых знаниях студентом материала (в пределах конспектов лекций), при решении задач допущены небольшие недочеты и ошибки вычислительного характера.

Оценка «удовлетворительно» ставиться, если правильно решена только одна из задач и на теоретические вопросы даны неполные ответы, показывающие поверхностное знание излагаемого материала.

Оценка «неудовлетворительно» ставиться, если не решены обе задачи и студент дал ответ без доказательства теорем.

Форма сдачи экзамена – устная. Экзамен проходит в письменной форме с последующей индивидуальной беседой преподавателя со студентом. На письменную работу над билетом отводится 2 часа. Каждый пункт оценен определенным количеством баллов.

Вопросы к экзамену приведены в рабочей программе пункт 1.8.

Приведем примеры экзаменационных билетов для 3 и 4 семестров. В скобках количество баллов за каждый вопрос или задачу.

Примеры экзаменационных билетов:

Экзаменационный билет № 1

1. Решение задачи Коши для уравнения гиперболического типа (2 балла).
2. Постановка краевых задач для уравнения теплопроводности. (1 балл).

3.Решить уравнение

$u_{tt}=a^2u_{xx}$, $0<x<l$, $t>0$

$u(0,t)=u_x(l,t)=0$, $u(x,0)=\sin\frac{5\pi}{2l}x$, $u_t(x,0)=\cos\frac{\pi}{2l}x$.(2 балла).

Экзаменационный билет №__2___

1. Уравнения эллиптического типа. Задачи, приводящие к уравнениям Лапласа. (1 балла).
2. Уравнения колебания в пространстве. (2 балла).
3. В круге $x^2+y^2=r^2<R^2$ решить задачу Дирихле

$$\Delta u(x,y)=0,\ 0\le r<R,$$
$$u(x,y)=g(x,y),\ r=R,$$

если: $g(x,y)=4xy^2$. (2 балла).

Экзаменационный билет №__3___

1. Уравнения Лапласа в криволинейной системе координат (3 типа: в сферической, полярной, цилиндрической). (2 балла).
2. Метод спуска. Сферические, цилиндрические, плоские волны(1 балла).
3. В круге $x^2+y^2=r^2<R^2$ решить задачу Дирихле для уравнения Пуассона

$$\Delta u(x,y)=f(x,y),\ 0\le r<R,$$
$$u(x,y)=g(x,y),\ r=R,$$

если: $f(x,y)=-1,\ g(x,y)=y^2/2$.(2 балла).

5 Интерактивные технологии и инновационные методы, используемые в образовательном процессе

При преподавании дисциплины «Уравнения математической физики» используются следующие инновационные технологии и методы: применение мультимедийного проектора при чтении лекций, использование ресурсов сети Internet и электронных учебников при самостоятельной работе студентов, дискуссии в обсуждении проблемных ситуаций.

Занятия, проводимые в интерактивных формах, используются на лекциях и практических занятиях, темы которых приведены в таблице

Наименование тем:	Лек.	Прак.	Σ
1. Методы решения краевых задач. Метод разделения переменных. Собственные значения и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля. Неоднородное волновое уравнение. (Метод группового решения задач).		2	2
2. Метод разделения переменных. Однородная краевая задача. Функция источника. Неоднородное уравнение теплопроводности. Общая первая краевая задача. (Метод группового решения задач); (Мозговой штурм).	2	2	4
3.Решение краевых задач для простейших областей методами разделения переменных. Первая краевая задача для круга (внешняя и внутренняя задачи Дирихле). Интеграл Пуассона. (Метод группового решения задач).		2	2
4.Решение уравнения Лапласа в круге и вне круга. Для кольца, кругового сектора найти гармонические функции. (Метод группового решения задач); (Мозговой штурм).	2	2	4
5. Распространение тепла в_неограниченном пространстве. Функция температурного влияния. Диффузионный процесс в активной среде с размножением (Проблемная лекция).	2		2
Всего	6	8	14