Федеральное агентство по образованию
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
(ГОУВПО «АМГУ»)

УТВЕРЖДАЮ
Зав. кафедрой МАиМ
В.В. Сельвинский
«13» сентября 2010 г.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГРУПП И СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС ПО ДИСЦИПЛИНЕ

для специальностей 010101 – «Математика»

Составитель: Павлюк А.П.

Благовещенск
2010

ББК
*П***

Печатается по решению
редакционно-издательского совета
факультета математики и информатики
Амурского государственного
университета

Павлюк А.П.

Учебно-методический комплекс по дисциплине "Представление групп и специальные функции" для студентов очной формы обучения специальностей 010101 – «Математика». – Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2010. – 34 с.

Учебно-методический комплекс по дисциплине содержит краткий курс лекций, варианты индивидуальных заданий к практическим занятиям, а также контролирующие материалы для осуществления контроля усвоения знаний учащимися.

СОДЕРЖАНИЕ

1 ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ, ЕЕ МЕСТО В УЧЕБНОМ ПРОЦЕССЕ

1.1 Цель преподавания учебной дисциплины

Основная цель, преследуемая при прочтении данного спецкурса - дать представления слушателям об основных положениях теории представлений компактных групп, определения специальных функций и изучения их свойств на основе этой теории. Ввести необходимый объем терминов для понимания литературы по смежным вопросам при последующем самостоятельном изучении предмета.

1. 2 Задачи изучения дисциплины

Основной задачей спецкурса "Представления групп и специальные функции" является ознакомление студентов с:

Классическая теория групп: определение группы, примеры групп, подгруппы, примеры подгрупп, смежные классы, нормальный делитель, фактор-группа, центр, отображения множеств, отображения групп, изоморфизмы и гомоморфизмы групп.

Основы теории представлений групп: определение представления группы, примеры, матрица представления и матричные элементы, эквивалентность представлений, сопряженные представления, эрмитово-сопряженное представление, унитарные представления, инвариантные подпространства, неприводимые представления, разложение представлений в прямую сумму, полная приводимость унитарных представлений, характеры представлений, инфинитезимальные операторы представления, представления компактных групп, теорема Петера-Вейля.

1.3 Перечень дисциплин, усвоение которых студентами необходимо при изучении данной дисциплины

Данный курс базируется на ранее изученных дисциплинах: «Математический анализ», «Алгебра», «Функциональный анализ».

2 СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

2.1 Наименование тем, их содержание, объем в лекционных часах

ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН ЛЕКЦИОННЫХ ЗАНЯТИЙ
ДЛЯ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ 010101 – «МАТЕМАТИКА»

Курс 3, VI семестр

Тема 1. Введение. Исторический обзор – 2 часа

Этапы развития теории групп, ее основоположники. Значение данной теории в изучении других отраслей науки.

Тема 2. Группы – 6 часов

Определение групп, примеры групп, подгруппы, смежные классы.

Тема 3. Основные понятия и определения представлений групп – 8 часов

Определение представления, матричные элементы представления, подгруппы, смежные классы, прямая сумма представлений, сумма представлений, унитарное представление, характер представления, зацепление (полупрямая сумма), эквивалентные представления, тензорное произведение групп.

Тема 4. Конечное представление прямого произведения групп – 2 часа

Тема 5. Конечномерные представления топологических групп – 6 часов

Непрерывные функции на топологической группе, представление топологической группы, конечномерные представления простейших коммутативных групп.

Тема 6. Представление группы SU(2) – 8 часов

Описание группы *SU(2)*, подгруппы *SU(2)*, углы Эйлера, произведение элементов группы, представление группы *SU(2)* в пространстве однородных полиномов двух переменных.

2.2 Практические занятия, их содержание, объем в часах

Практика – 36 часов

1. Параметризация группы *SU(2)* парой комплексных чисел.
2. Параметризация группы *SU(2)* углами Эйлера.
3. Углы Эйлера произведения 2-х матриц группы *SU(2)*.
4. Представления группы *SU(2)* в пространстве однородных многочленов.
5. Представления группы *SU(2)* в пространстве многочленов степени *2l*.
6. Инфинитезимальные операторы представлений группы *SU(2)*.
7. Неприводимость представлений группы *SU(2)*.
8. Вычисление матричных элементов представлений группы *SU(2)*.
9. Полиномы Якоби, Лежандра
10. Теоремы сложения и умножения для полиномов Якоби и Лежандра.
11. Параметризация группы *SO(3)* углами Эйлера.
12. Углы Эйлера произведения 2-х матриц группы *SO(3)*.
13. Представления группы *SO(3)* в пространстве однородных многочленов.
14. Представления группы *S0(3)* в пространстве многочленов степени *2l*.
15. Инфинитезимальные операторы представлений группы *SO(3)*.
16. Неприводимость представлений группы *SO(3)*.
17. Вычисление матричных элементов представлений группы *SO(3)*.
18. Полиномы Гегенбаура.
19. Теоремы сложения и умножения для полинома в Гегенбаура.

2.3 Самостоятельная работа студентов

1. Подготовка к практическим занятиям – 36 час.
2. Подготовка к зачету – 12 час.
3. Написание рефератов – 6 час.

2.4 Темы докладов

1. Гамма функция
2. Бета функция
3. Полином Якоби. Выражение матричных элементов представлений группы *SU(2)* через полиномы Якоби.
4. Полином Лежандра
5. Полиномы Гегенбаура

2.5 Вопросы к зачету по спецкурсу «Представления компактных групп и специальных функций».

1. Определение алгебраической группы. Примеры конечных, бесконечных и матричных групп.
2. Подгруппы. Смежные классы. Доказать, что группа распадается на попарно не пересекающие правые смежные классы.
3. Нормальный делитель. Фактор-группа. Доказать, что $SL(n,C)$ нормальный делитель в группе $GL(n,C)$. Найти фактор-группу $GL(n,C)$ по $SL(n,C)$.
4. Центр в группе. Найти в группе $GL(n,C)$ центр.
5. Гомоморфизм и изоморфизм групп. Доказать, что образ подгруппы гомоморфизма есть подгруппа.
6. Группы преобразований. Доказать, что пространство на котором действует группа распадается на попарно не пересекающие орбиты.
7. Каноническая реализация однородного пространства.
8. Определение алгебраического представления алгебраической группы. Понятие матрицы представления. Единичное и тождественное представление.
9. Понятие неприводимого представления. Неприводимость единичного представления.
10. Понятие сужения представления на подгруппу и ограничения представления на подпространство. Доказать, что для любого конечномерного представления существует неприводимое подпредставление.
11. Эквивалентность представлений. Доказать, что размерности пространств конечномерных представлений имеют одну размерность.
12. Доказать лемму Шура.
13. Доказать следствие из леммы Шура о скалярности оператора перестановочного с неприводимым представлением.
14. Прямая сумма представлений. Доказать, что матрица представления, которое есть прямая сумма подпредставлений, имеет блочно-диагональный вид.
15. Полупрямая сумма представлений. Матрица такого представления. Привести пример.
16. Унитарные представления. Доказать, что дополнение к инвариантному пространству унитарного представления также инвариантно для этого представления.
17. Доказать, что матрица унитарного представления – унитарная.
18. Понятие вполне приводимого представления. Доказать, что представление эквивалентное унитарному вполне приводимо.
19. Характер представления. Свойство характеров (доказать одно из них).
20. Понятие топологической группы. Привести пример.
21. Понятие компактной группы. Привести пример.
22. Определение представления топологической группы. Сравнить с определением алгебраической группы.
23. Определение неприводимого представления топологической группы. Сравнить с определением алгебраической группы.
24. В чем заключается утверждение о полной приводимости представлений компактных групп.

25. Понятие правого и левого регулярного представлений и их эквивалентность.
26. Ортогональность матричных элементов неприводимых представлений компактных групп.
27. Разложение регулярного представления компактной группы на неприводимые представления.
28. Разложение Эйлера группы *SU(2)* унитарных матриц 2 порядка.
29. Представления группы *SU(2)* в пространстве однородных многочленов.

3 КРАТКИЙ КУРС ЛЕКЦИЙ

ТЕМА 1. ВВЕДЕНИЕ. ИСТОРИЧЕСКИЙ ОБЗОР

1 ЭТАПЫ РАЗВИТИЯ ТЕОРИИ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУПП И ЕЕ ОСНОВОПОЛОЖНИКИ

Понятие группы возникло при изучении конкретных «операций», связанных законом «умножения», или «композиции». Группа относится к числу основных алгебраических структур (алгебра, поле, кольцо и т. д.), наделенных бинарной операцией умножения. Частные случаи этого понятия – главным образом группы преобразований – играют принципиальную роль во многих задачах геометрии и физики.

Первоначально простейшие (конечные) группы были введены в математику Эваристом Галуа (1832 г.) в связи с вопросами симметрии алгебраического уравнения относительно подстановок его корней.

Софус Ли имел своей целью построение аналогичной теории для дифференциальных уравнений с непрерывными группами преобразований; в результате возникла специальная теория определенного класса непрерывных групп, называемых теперь группами Ли.

Теория групп Ли в современном понимании в значительной степени связана с теорией линейных представлений. Понятие представления, или «обобщенной экспоненты», позволяет проследить глубокую связь между такими, казалось бы, различными вопросами, как теория тензоров и гармонический анализ (ряды и интегралы Фурье). Алгебраические основы этой теории были заложены на рубеже XX века; уже тогда было ясно, что эта теория имеет тесную связь с теорией ассоциативных алгебр, которая постепенно занимает одно из главнейших мест в современной математике.

Первый период развития теории представлений групп (приблизительно 1890-1920 гг.) связан с именами Г. Фробениуса, И. Шура, В. Бернсайда и Ф. Молина. В работах этого периода рассматриваются только конечные группы и конечномерные представления.

Исходным толчком для возникновения теории представлений послужило придуманное Фробениусом по предложению Дедекинда обобщение понятия характера. Вскоре было обнаружено, что этот характер можно определить так же, как след матричного представления. Тем самым теория Фробениуса и существовавшая ранее теория характеров коммутативных групп включилась в новую единую теорию представлений.

Крупным достижением было систематическое использование И. Шуром операции усреднения по группе и его знаменитая лемма о сплетающих операторах для неприводимых представлений. В работах Бернсайда были получены в общем виде соотношения ортогональности и выяснена структура неприводимых матричных алгебр. Этот результат, а также теорема Ф.Э. Молина о полупростате групповой алгебры связали теорию представлений конечных групп с теорией конечномерных алгебр.

Кроме перечисленных общих результатов в течении первого периода было накоплено много конкретных фактов о представлениях конкретных групп или некоторых специальных классов групп.

Второй период – это создание теории представлений компактных топологических групп. Наиболее важные общие результаты этого периода – теорема Хаара – фон Неймана о существовании конечной инвариантной меры и теорема Ф. Петера – Г. Вейля о полноте системы конечномерных представлений. В это же время Г. Вейль и Э. Картан построили теорию конечномерных представлений полупростых групп Ли. Эти результаты не только поражали своей красотой, но и нашли широкие применения в разных областях математики и физики (теория симметрических пространств, теория моментов в квантовой механике). Теория представлений групп становится прикладной наукой и ее популярность быстро возрастает.

Довольно скоро выяснилась потребность в рассмотрении некомпактных групп и их бесконечномерных представлений. Так, известная теорема Стоуна – фон Неймана о единственности оператора Шредингера, по существу, равносильна классификации бесконечномерных унитарных представлений простейшей нильпотентной группы (так называемой группы Гейзенберга). В работе Е. Вигнера была сделана первая попытка построить теорию элементарных частиц на основе теории бесконечномерных представлений.
Систематическое изучение бесконечномерных представлений групп, составляющее основное содержание третьего периода, начинается в 40-е годы. Началом этого периода естественно считать работу И. Гельфанда и Д.А. Райкова (1943 г.) о полноте системы унитарных неприводимых представлений для локально компактных групп. В это время Меррей и фон Нейман завершают свое фундаментальное исследование операторных алгебр. Теория алгебр Неймана соединяется с теорией представлений групп в диссертации Г.М. Адельсона – Вельского, в работах Ф. Маутнера и Р. Годмана.

Первые классификационные теоремы для бесконечномерных представлений были получены в 1947 г. И.М. Гельфандом, М.А. Наймарком и В. Баргманном. В 1950 г. появилась монография И.М. Гельфанда и М. А. Наймарка, в которой были построены бесконечномерные представления групп $SL(n, C)$, $SO(n, C)$ и $Sp(n, C)$ для произвольного n.

Эта работа получила широкую известность и с тех пор поток исследований по теории бесконечномерных представлений непрерывно возрастал. Дальнейшие исследования можно разделить на несколько этапов.

1 Общая теория. Одно из главных достижений – разбиение групп на классы (выделение класса ручных групп). Основные результаты принадлежат Г.

Макки, Дж. Феллу, Ж. Диксмье и Дж. Глимму. Итог этой деятельности подведен в монографии Ж. Диксмье.

2 Индуцированные представления. Теория двойственности Фробениуса была перенесена на компактные группы. Наиболее значительный вклад здесь внесли А. Вейль, Е. Вигнер, И. Гельфанд и М. Наймарк. Систематическое исследование этой конструкции для локально компактных групп было предпринято Г. Макки. Он получил критерий индуцированности, с помощью которого, указал удобный алгоритм для построения и исследования унитарных представлений расширений групп.

3 Представления полупростых групп Ли. Основные черты теории бесконечномерных представлений полупростых групп были выяснены М. А. Наймарком, Д. П. Желобенко, Ф. А. Березиным, Хариш–Чандрой, И. Гельфандом. Оказалось, что полупростые группы обладают дополнительной серией представлений, не входящих в замыкание регулярного представления. Впервые И. Гельфандом и М. Граевым была получена серия представлений для группы *SU(2, 1)*, не являющихся элементарными. Она получила название «странной» серии. Хариш–Чандра завершил цикл исследований, содержащих полную классификацию так называемых дискретных серий.

Теория бесконечномерных представлений полупростых групп привела к новым существенным достижениям в классических вопросах конечномерной теории. Были получены явные формулы для конечномерных представлений линейной и ортогональной группы.

Метод орбит. Впервые метод орбит появился в работе А. Кирилова. Дальнейшее развитие этого метода рассматривали П. Берн, Б. Костант, Л. Пуканский, М. Дюфло. Была установлена связь метода орбит с механикой и получена классификация однородных симплектических многообразий.
Метод орбит породил новое направление в математической физике – так называемое геометрическое квантование.

В настоящее время третий период развития теории представлений в идейном отношении завершен (хотя многие трудные конкретные задачи еще ждут своего решения).

Развитие теории представлений групп дало в настоящее время возможность охватить теорию наиболее важных классов специальных функций. Связь между специальными функциями и представлениями групп была открыта Э. Картаном. Как оказалось, специальные функции гипергеометрического типа, возникают как матричные элементы неприводимых представлений. Например полиномы Якоби выражаются через матричные элементы неприводимых представлений компактной группы *SU(2)*, а гипергеометрическая функция Гаусса выражается через матричные элементы неприводимых представлений некомпактной группы *SU(1,1)*.

Значительную роль в исследовании этих связей сыграло применение теории представлений в квантовой механике.

Дальнейшие работы в этой области стимулировались исследованиями И.М. Гельфанда, М.А. Наймарка, М.М. Граева и их учеников и сотрудников в области бесконечномерных представлений групп. В ходе этих исследований была установлена связь теории представлений групп с автоморфными функциями, построена теория специальных функций над конечными полями, специальных функций в однородных областях и т. д.

Теорию представлений нельзя считать законченной наукой. Уже сейчас можно указать направления, которые, по – видимому, составят основу следующего, четвертого этапа. Это прежде всего изучение представлений супергрупп и супералгебр.

ТЕМА 2. ГРУППЫ

1 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГРУППЫ

Определение. Группой (алгебраической группой) называется множество G, в котором для любых элементов g_1 и g_2 задано умножение такое что:
оно ассоциативно, т.е.

$$g_1 * (g_2 * g_3) = (g_1 * g_2) * g_3;$$

также существует единичный элемент e и, причем единственный:

$$\forall g \in G, \exists e : e * g = g * e = g;$$

Доказательство.

Докажем, что единичный элемент e_1 единственный, для этого предположим, что существует второй единичный элемент e_2, тогда по определению получаем, что если за единичный элемент возьмем e_1, то $e_1 * e_2 = e_2 * e_1 = e_2$. А если за единичный элемент возьмем e_2, то $e_1 * e_2 = e_2 * e_1 = e_1$. Следовательно $e_1 = e_2 = e$, значит единичный элемент единственный. Что и требовалось доказать.
И для любого элемента группы существует обратный элемент g^{-1}, т.е.

$$\forall g \in G,\ \exists g^{-1}:\ g * g^{-1} = g^{-1} * g = e.$$

Определение. Группа G - *коммутативна*, если для любых элементов g_1 и g_2 группы G выполняется условие:

$$g_1 * g_2 = g_2 * g_1.$$

Для коммутативной группы "$*$" заменяется "+".

Если в группе конечное число элементов, то группа является *конечной*, иначе *бесконечной*. Число элементов – это *порядок группы*, например,

$|G| = n,$ где n - *порядковое число.*

2 ПРИМЕРЫ ГРУПП

1. R^2 - множество действительных чисел. Зададим операцию $*$ как “+” и проверим, является множества действительных чисел по этой операции группой.

a) ассоциативность: $x + (y + z) = (x + y) + z$

b) $\exists$ единичного элемента (в данном случаи 0): $0+x=x+0=x$

c) $\exists\, x^{-1}$ - обратный элемент ($x^{-1} = -x$): $x + (-x) = (-x) + x = 0$

Следовательно, множество R^2 является группой по сложению.

2. C^1 – Множество комплексных чисел,

$$C^1 = \{x + iy : x, y \in R^1\}.$$

Данное множество является группой по сложению, так как сложение комплексных чисел, также является комплексное число. Существует обратный элемент в виде сопряженного и единичный или нулевой элемент: $z = 0 + i0$.

E – конечное пространство размерности n. Пусть e_1, $e_2, \ldots$, e_n – базис в E. Возьмем оператор A и подействуем на x, разложим x по базису:

$$Ax = A(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n) = \alpha_1 A e_1 + \ldots + \alpha_n A e_n.$$

Надо определить действия (n - штук):

$$\left.\begin{array}{l} Ae_1 = \alpha_{11} e_1 + \alpha_{21} e_1 + \ldots + \alpha_{n1} e_n \\ Ae_2 = \alpha_{12} e_1 + \alpha_{22} e_1 + \ldots + \alpha_{n2} e_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Ae_n = \alpha_{1n} e_1 + \alpha_{n2} e_1 + \ldots + \alpha_{nn} e_n \end{array}\right\} \Rightarrow \tilde{A} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

Однозначно $\tilde{A}$ определяет линейный оператор A, следовательно вместо линейного оператора можно рассматривать матрицы.

Из линейной алгебры имеем, что композиция матрицы сводится к умножению матриц, т.е.

$$A * B \leftrightarrow \tilde{A} \cdot \tilde{B}$$

$$E \leftrightarrow \tilde{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

Обозначения.

1) Если E^n - вещественное пространство, то $G = GL(n, R)$ - полная линейная вещественная матричная группа.

2) Если E^n - комплексное пространство, то $G = GL(n, C)$ - комплексная матричная группа.

Частные случаи:

n=1, $G = GL(1, R) = R_0^1$

n=2, $G = GL(2, R) = \left\{ q = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in R, \det q \neq 0 \right\}$.

3. Пусть E – линейное пространство и на нем задана билинейная форма:

$B(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$ - скалярное произведение.

Рассмотрим G {множество линейных операторов на E и сохраняющих $B(x, y)$ }. Сохраняет форму, т.е.

$$B(Ax, By) = B(x, y) \qquad (*)$$

а) Если E – вещественное пространство, как R^n. Запишем $(*)$ в матричной форме:

$$AA^t = E \qquad (**)$$

Матрица удовлетворяющая $(**)$ - *ортогональная матрица*, следовательно $G = O(n)$ - т.е. множество ортогональных матриц.

b) Если E – комплексное пространство, $B(x,y)=x_1\tilde{y}_1+x_2\tilde{y}_2+\ldots+x_n\tilde{y}_n$ - эрмитова форма, где $\tilde{y}_i$ - комплексное сопряжение ($\bar{z}=a-ib$). Рассмотрим G {линейный оператор A, взаимнооднозначный $B(Ax,By)=B(x,y)$ }

$$AA^{*}=E, \qquad (***)$$

где $*$ - транспонирование и комплексное сопряжение.
Если матрица удовлетворяет $(***)$, то она унитарна. Обозначается $G=U(n)$.

Рассмотрим вещественные матрицы n – го порядка удовлетворяющие условию

$$qIq^t=I,$$

где $I=\begin{pmatrix} \left.\begin{matrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \end{matrix}\right\} p \\ \left.\begin{matrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & -1 \end{matrix}\right\} q \end{pmatrix}$, причем $p+q=n$.

Называются псевдоортогональной группой и обозначается *O(p,q).*

Например, группа *O(1, 2),* это такая группа третьего порядка, которая имеет вид

$$I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. Рассмотрим предыдущий пример под буквой b, и возьмем комплексные n – мерные матрицы, удовлетворяющие равенству:

$$qIq^{*}=I.$$

Можно доказать, что они образуют группу, которая называется псевдоунитарной. Обозначается *U(p,q).*

Замечание. В квантовой физике и в теории углового момента нашли широкое применение представленные следующие группы:
U(1, 2), O(1, 2), U(2, 3), O(2, 3), если точнее с помощью этих групп классифицируют частицы.

3 ПОДГРУППЫ. СМЕЖНЫЕ КЛАССЫ

Определение. Пусть *G* – группа, подмножество *H* называется подгруппой, если она принадлежит группе *G,* и удовлетворяет условиям определения группы.

Пример:

1 $G=R^1\supset Z$, Z – подгруппа.

2 $GL(n,R)$- группа вещественных матриц n – го порядка. $GL(n,R) \supset GL(k,R)$, подгруппой является группа матриц меньшего порядка.

3 $SL(n,R) = \{q \in GL(n,R), det\, q = 1\}$, Special – специальные. Пусть G – группа, H – подгруппа, рассмотрим множество вида:

$Hg = \{hg, g \in G -$ фиксированный элемент, h – произвольный элемент подгруппы $H\}$- такое множество будем называть правым смежным классом группы G по подгруппе H. Аналогично можно дать понятие левому смежному классу:

$\{gh, g \in G -$ фиксированный элемент, h – изолированный элемент $H\}$.

Теорема: Два различных класса не имеют общих элементов (либо левые, либо правые).

Доказательство.

Пусть Hg и $H\tilde{g}$ два различных класса и имеют общий элемент g_0 и пусть он принадлежит обоим классам, т.е. $Hg = \{hg\}$, $H\tilde{g} = \{h\tilde{g}\}$, следовательно $g_0 = h_1 g$, $g_0 = h_2 \tilde{g}$, значит $h_1^{-1} g_0 = g$ и $h_2^{-1} g_0 = \tilde{g}$, таким образом g и $\tilde{g} \in Hg, H\tilde{g}$, получаем, что $Hg = H\tilde{g}$, а это противоречие. Теорема доказана.

Определение. Пусть G – группа и H ее подгруппа, тогда множество правых (левых) классов рассматриваемых элементов называется *правым (левым)- фактор* пространством и обозначается G/H (H/G). Таким образом фактор пространства G/H состоит из элементов вида Hg, где меняется g, образуя разные классы. При этом g называется, *представитель класса*.

Пример:

$G=R^1$ группа по сложению, $H=Z$ (группа целых чисел). Описать фактор пространство G/H.

G/H ={$Z+x$, Z – группа целых чисел, x – фиксированное вещественное число}={ $x = n, \alpha = n + 0,\alpha$; $0 \le 0,\alpha \le 1$, $n, \alpha -$ число, где n – целая часть, $\alpha -$ дробная часть}={ $Z + n + 0,\alpha$; $0 \le 0,\alpha \le 1$}$= Z + 0,\alpha$; где $0 \le 0,\alpha \le 1$.

Следовательно, множество классов отображаются на действительные числа между 0 и 1, т.е. $G/H = [0,1[$.

Определение. Подгруппа H называется *нормальным делителем* G, если для $\forall g \in G$ выполняется $gH = Hg$ или $H = g^{-1}Hg$.

Теорема. Если подгруппа H – нормальный делитель G, то G/H (H/G) образуют группу.

Доказательство.

Рассмотрим классы Hg_1 и Hg_2. $Hg_1 \cdot Hg_2$, по определению $H = g_1^{-1}Hg_1$, следовательно,

$$Hg_1 \cdot Hg_2 = Hg_1 \cdot g_1^{-1}Hg_1 \cdot g_2 = HeHg_1 g_2 = Hg_1 g_2.$$

Теорема доказана.

Определение. Умножением двух классов Hg_1 и Hg_2 называется класс вида $Hg_1 g_2$.

$$Hg_1 \cdot Hg_2 = Hg_1 \cdot g_2.$$

Единицей *e* будет являться *H* – нормальный делитель.

Замечание. В теории групп ставится задача, об описании всех подгрупп, надо найти все нормальные делители и фактор группы.

Определение. *G* – группа, множество $Z(G)=\{Z\colon\ Z\in G,\ Zg=gZ,\ \forall g\in G\}$ называется центром группы.

Пример:

1 Пусть дана группа R^1, найдем центр по сложению.
$Z+y=y+Z$ для $\forall z, y\in R^1$, следовательно $Z(R^1)=R^1$.

2 Рассмотрим теперь группу

$$G=CL(2,R)=\{g=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix},\ \det g\neq 0; a,b,c,d\in \mathrm{R}^1\}$$, найти $Z(G)$-?

$$Z\cdot g=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}=(\text{для простаты пусть } c=b=0)=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & d\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} a\alpha & d\beta\\ a\gamma & d\delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a\alpha & d\beta\\ a\gamma & d\delta\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} d\beta=a\beta\\ a\gamma=d\gamma\end{matrix} \Rightarrow \beta=\gamma=0.$$

Значит

$$Z=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \alpha\end{pmatrix} \Rightarrow g=\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$Z\cdot g=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & \alpha\\ \delta & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & \alpha\\ \delta & 0\end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\alpha=\delta,$$

и получаем, что

$$\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha a & \alpha b\\ \alpha c & \alpha d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}.$$

Значит, имеем, что

$$Z(G)=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}.$$

ТЕМА 3. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУПП

1 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Определение. Отображение *A* называется линейным оператором линейного пространства *X*, если оно удовлетворяет двум условиям:

1) $\forall x\in X\ \ Ax\in X$

2) Для любых чисел α, β и $x, y\in X$ $A(\alpha x+\beta y)=\alpha Ax+\beta By$ (линейность и однородность).

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\ X = \{x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\}$$

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 a_{11} & x_2 a_{12} \\ x_1 a_{21} & x_2 a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{\bullet} \\ x_2^{\bullet} \end{pmatrix} = x^{\bullet}$$

Определение. Пусть X – линейное комплексное пространство, G – группа. Отображение T элементов группы G во множество линейных операторов (обозначаемых $T(g)$) пространства X называется *представлением* группы G в пространстве X, если выполняется два условия:

1) $T(e) = I$ – единичный оператор в X.
2) $\forall g_1, g_2 \in G \quad T(g_1 \cdot g_2) = T(g_1) \cdot T(g_2)$.

т.е. коротко можно записать

$T : G \to G_x$ ($T : g \to T(g)$).

Пример: Пусть $G = GL(n, C)$, $G_x = C_0^1$ - мультипликативная группа комплексных чисел.

$T : GL(n, C) \to C_0^1$.

Определение. Пусть G – группа, $H \subset G$ и $T : G \to G_x$. Рассмотрим множество операторов $\{T(h), h \in H\} = H_x$ - подгруппа линейных операторов G_x. $T/_H : H \to H_x$ является представлением группы H и называется *сужением* представления T на подгруппу H, X – пространство представления.

Если – X конечномерное пространство ($dim\ X = n$), то $T : G \to G_x$ называется *конечномерным* и n – его размерность.

2 МАТРИЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Пусть X – конечномерное пространство, A – линейный оператор в X, $\{e_i\}_{i=1}^n$ - базис.

$$Ae_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} \cdot e_j\ ,\ a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Пусть $T : G \to G_x$, тогда оператор $T(g)$ имеет в $\{e_i\}_{i=1}^n$ матрицу

$$t(g) = \begin{pmatrix} t_{11}(g) & t_{12}(g) & \dots & t_{1n}(g) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{n1}(g) & t_{n2}(g) & \dots & t_{nn}(g) \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

где

$$T(g)e_j = \sum_{i=1}^{n} t_{ij}(g)\cdot e_i \ , j = \overline{1,n}, \tag{2}$$

$$t_{ij}(e) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}. \tag{3}$$

$$t_{ij}(g_1 \cdot g_2) = \sum_{i=1}^{n} t_{ik}(g_1)\cdot t_{kj}(g_2) \ , j = \overline{1,n}. \tag{4}$$

Замечание. Условие (3) используют для получения нормировки (частных значений специальных функций), условие (4) – получения теоремы сложения специальных функций.

3 НЕПРИВОДИМОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

Определение. Пусть $T: G \to G_x$, $M \subset X$ - называется *инвариантным*, если $\forall x \in M, \forall g \in G \quad T(g)x \in M$.

Определение. $T: G \to G_x$ в пространстве X называется *неприводимым*, если в X отсутствуют инвариантные подпространства от тривиальных.

Определение. $T: G \to G_x$ называется *единичным*, если $\forall g \in G \quad T(g) = I$.

Пример: $T: g \to \det g$, $g \in SL(n, C)$ - матрицы порядка *n* с *det=1*, следовательно, *T*– единичное представление.

Определение. $T: G \to G_x$ называется *тождественным*, если $T(g) = g$.

Пример:

1. $G = GL(2, C)$, $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

2. $G = GL(n, R)$, $T(g) = g$.

Теорема. Если *T* - приводимое пространство в конечномерном пространстве *X*, то в *X* всегда существует инвариантное подпространство.

Для бесконечномерных пространств это не всегда верно.

4 ПРЯМАЯ СУММА ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

Определение. Пусть *X*, *Y* – два линейных пространства, тогда их *прямой суммой* называется пространство $Z = X \dot{+} Y$, в котором каждый элемент $z \in Z$ единственным образом представим в виде $z = x + y$, $x \in X$, $y \in Y$.

Определение. Пусть $Z = X \dot{+} Y$, $T^1: G \to G_x$, $T^2: G \to G_y$, тогда отображение, определяемое формулой $T(g)z = T^1(g)x + T^2(g)y$, где $z = x + y$ называется *прямой суммой* представлений T^1 и T^2 и обозначается $T = T^1 \dot{+} T^2$.

Говорят, что представление *T* разлагается в сумму двух представлений, при этом T^1 и T^2 называется *подпредставлениями* *T* или T^1 - сужение представления *T* на *X*, T^2 – на *Y*.

Определение. $T: G \to G_x$, называется *вполне приводимым*, если его можно записать в виде конечной прямой суммы неприводимых представлений

$$T = T^1 \dotplus T^2 \dotplus \ldots \dotplus T^n \quad .$$

5 СУММА ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

Определение. E – линейное пространство и X, Y его линейные подпространства. Если же для $\forall e \in E$ существует однозначное разложение: $e = x + y$, $x \in X, y \in Y$, то пространство E называют прямой суммой подпространств X и Y, и обозначают $E = X \dotplus Y$.

Определение. Пусть дано представление T в пространстве X и представление S в пространстве Y группы G. Формула

$$Q(g)x = T(g)x_1 + S(g)x_2 \qquad (5)$$

$$\forall x \in E, x_1 \in X, x_2 \in Y, g \in G$$

задает представление группы G и называется *прямой суммой представлений* T и S и обозначается в виде $Q = T \dotplus S$.

Проверим, что формула (5) представляет линейное представление. Из (5) следует, что $Q(g)x$ - линейный оператор, т.к. равен сумме операторов,

$$Q(e)x = T(e)x_1 + \mathrm{S}(\mathrm{e})x_2 = x_1 + x_2 = x,$$

т.о.

$$Q(e) = I;$$

$$Q(g_1 \cdot g_2) = Q(g_1) \cdot Q(g_2).$$

Теперь ответим на такой вопрос: «*Как выглядит матрица представления Q?»*

Пусть X и Y – конечномерные представления, конечномерного пространства E. И $E = X \dotplus Y$, и $Q = T \dotplus S$, матрица *q(g) -?*

$\{e_i\}_{i=1}^n$ - базис в X;

$\{f_j\}_{j=1}^m$ - базис в Y, значит базис для E имеет вид $\{e_1, e_2, \ldots, e_n, f_1, f_2, \ldots, f_m\}$.

$$T(g)e_j = \sum_{i=1}^n t_i^j(g)e_i \text{, т.е. } t(g) = \left\| t_i^j(g) \right\|$$

$$S(g)f_j = \sum_{i=1}^n s_i^j(g)f_i \text{, т.е. } s(g) = \left\| t_i^j(g) \right\|$$

Определим Q, подействовав базисом:

$$Q(g)e_j = T(g)e_j \dotplus S(g) \cdot 0 = T(g)e_j = \sum_{i=1}^n t_i^j(g)e_i$$

$$Q(g)f_j = T(g) \cdot 0 \dotplus S(g)f_j = S(g)f_j = \sum_{i=1}^m s_i^j(g)f_i$$

Следовательно,

$$q(g) = \begin{Vmatrix} t(g) & 0 \\ 0 & s(g) \end{Vmatrix}.$$

Таким образом, матрица прямого представления имеет в базисе диагональный вид.

Определение. Представление T в группе G, называется *вполне проводимым*, если оно представимо в виде конечной суммы неприводимых представлений, т.е.

$$T = T_1 \dot{+} T_2 \dot{+} \ldots \dot{+} T_n \tag{6}$$

где T_i - неприводимые представления.

Замечание. В будущем докажем, что всякое представление компактной группы вполне проводимо.

Из последнего определения следует, что всякое неприводимое представление называется вполне приводимым

$$T = n_1 T_1 + n_2 T_2 + \ldots + n_m T_m.$$

Из этого возможно следующее, если $T_i \sim T_1$, что T_1 входит в T с кратностью n (n – кратность вхождения).

$$T = nT_1$$

и возможна ситуация, когда

$$T = n_1 T_1 \dot{+} n_2 T_2 \dot{+} \ldots \dot{+} n_k T_k,$$

тогда говорят, что T_1 входит с кратностью n_1, T_2 с кратностью n_2 и т.д.

Рассмотрим такой пример (1) невполне приводимого представления:

Возьмем группу $G = R^1$- аддитивная группа по сложению. Рассмотрим представление T, которое задается в пространстве $X = C^2 = \left\{ \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}, \xi_1, \xi_2 \in C \right\}$ двумерной матрицей $t(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$, т.е. $T : \alpha \to T(\alpha)$.

$$T(\alpha)\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \alpha\xi_1 + \xi_2 \end{pmatrix}, \qquad T(0)\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix},$$

следовательно, $T(0) = I$.

Пусть $T(\alpha_1 + \alpha_2) = T(\alpha_1) \cdot T(\alpha_2)$ справедливо, значит

$$T(\alpha_1 + \alpha_2)\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ (\alpha_1 + \alpha_2)\xi_1 + \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_1 + \xi_2 \end{pmatrix},$$

с другой стороны

$$T(\alpha_1) \cdot T(\alpha_2)\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = T(\alpha_1) \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \alpha_2\xi_1 + \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_1 + \xi_2 \end{pmatrix},$$

действительно, предположение верно.

Найдем одномерное инвариантное подпространство $M \subset X$, где $\dim M = 1$.

$T(\alpha)\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \lambda(\alpha)\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$, следовательно $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \alpha_1\xi_1 + \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(\alpha)\xi_1 \\ \lambda(\alpha)\xi_2 \end{pmatrix}$, т.о.

$$\begin{matrix} \xi_1 = \lambda(\alpha)\xi_1 \\ \alpha_1\xi_1 + \xi_2 = \lambda(\alpha)\xi_2 \end{matrix} \quad => \quad \begin{matrix} \lambda(\alpha) = 1, \xi_1 = 0 \\ \alpha\xi_1 = 0, \xi_1 = 0 \end{matrix}$$

Пространство M образовано векторами $0, \xi$, т.о.

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \xi \end{pmatrix}, \xi \in C \right\} \subset X = C^2$$

$$X = M \dotplus N, N = \left\{ \begin{pmatrix} \eta \\ 0 \end{pmatrix}, \eta \in C \right\}.$$

Проверим, инвариантно ли N?

$$\forall \begin{pmatrix} \eta \\ 0 \end{pmatrix} \in N => T(\alpha) \begin{pmatrix} \eta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta \\ \alpha\eta \end{pmatrix} \notin N,$$

следовательно N – неинвариантное, значит T – невполне приводимое.

6 УНИТАРНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ. ХАРАКТЕР ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Определение. Пусть E – евклидовое, конечномерное линейное пространство и пусть T – представление группы G в пространстве E, удовлетворяющее условию

$$\forall g \in G \ \ (T(g)x, T(g)y) = (x, y), \forall x, y \in E,$$

тогда T – *унитарное представление* группы G в пространстве E.

$$(T(g)x, y) = (x, T(g^{-1})y) \tag{7}$$

из равенства (5) следует,

$$t(g) \cdot t^*(g) = I => t_i^j(g^{-1}) = \overline{t_j^i(g)}, \quad (i, j = \overline{1,n})$$

Определение. Числовая функция вида

$$\lambda^T(g) = t_1^1(g) + t_1^2(g) + \ldots + t_n^n(g)$$

называется *характером представления* T группы G с матрицей

$$t(g) = \left\| t_j^i(g) \right\|, \ \ \left(i, j = \overline{1,n}\right)$$

Характер представления – это следствие матрицы представления.

7 ЗАЦЕПЛЕНИЕ (ПОЛУПРЯМАЯ СУММА)

Определение. Представление T группы G в пространстве X, называется *зацеплением* представления T^k в пространстве X_k, при $k = \overline{1,m}$ и пишут $T = T^1 \to T^2 \to \ldots \to T^m$, если в X существует такая система инвариантных относительно T подпространств $M_1 \subset M_2 \subset \ldots \subset M_m = X$, что сужение T на M_1 эквивалентно T^1, представление $\tilde{T}^2$, порожденное представлением Т на M_2/M_1, эквивалентно T^2, представление $\tilde{T}^3$, порожденное представлением Т на M_3/M_2, эквивалентно T^3, …, представление $\tilde{T}^m$, порожденное представлением T на X/M_{m-1}, эквивалентно T^m.

Прямая сумма частный случай зацепления, т.е. если T прямая сумма представлений T^1, T^2,…, T^m, то T есть также зацепление этих представлений (т.е. $T = T^1 \to T^2 \to \ldots \to T^m$); в качестве подпространств $M_1, M_2, \ldots, M_m$ можно взять $M_1=X_1$, $M_2 = X_1 \dotplus X_2$, ..., $M_m = X_1 \dotplus \ldots \dotplus X_m = X$. Обратное, вообще говоря, неверно.

Чтобы в этом убедиться, достаточно рассмотреть представление T, это представление задается формулами

$$T(\alpha)\begin{Vmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}\xi_1\\ \alpha\xi_1+\xi_2\end{Vmatrix}. \qquad (8)$$

В пространстве X этого представления есть только одно нетривиальное инвариантное подпространство, $M=\left\{\begin{Vmatrix}0\\ \xi_2\end{Vmatrix}, \xi_2\in C^1\right\}$; для $\xi=\begin{Vmatrix}0\\ \xi_2\end{Vmatrix}\in M$,

$$T(\alpha)\xi=\xi,$$

Т.е. $T(\alpha)=1$ на *M*. Каждый вектор $\tilde{\xi}$ фактор-пространства C^2/M есть совокупность всех $\begin{Vmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{Vmatrix}$, где ξ_1 - фиксировано, а ξ_2 пробегает все C^1. Поэтому из (1) следует, что представление $\tilde{T}$, порожденное в C^2/M представлением Т, задается формулой $\tilde{T}(\alpha)=1$.

Следовательно, рассматриваемое представление Т есть зацепление двух единичных представлений группы R^1, но не есть прямая сумма этих представлений.

Т.к. $T=T^1\to T^2\to\ldots\to T^m$, где $T^1,\ldots,T^m$ - конечномерные, то матрица $t(g)$ оператора $T(g)$ имеет вид:

$$t(g)=\begin{Vmatrix}t^1(g) & 0 & \ldots & 0\\ * & t^2(g) & \ldots & 0\\ * & * & \ldots & 0\\ * & * & \ldots & t^m(g)\end{Vmatrix}, \qquad (9)$$

где $t^k(g)$ - матрица представления T^k, а $*$ обозначаются некоторые матрицы (зависящие, вообще говоря, от g).

В дальнейшем будем рассматривать представления вида:

$T=T^1\dotplus T^2\dotplus\ldots\dotplus T^k$.

8 ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Определение. Два представления *T* и *S* группы *G* действующие соответственно в пространствах *X, Y* называется *эквивалентными*, если существует линейный оператор $A: X\to Y$,

$$AT(g)=S(g)A, \forall g\in G \qquad (10)$$

или

$$T(g)=A^{-1}S(g)A. \qquad (11)$$

Свойства эквивалентных представлений:

1) Если *T* – неприводимое представление и *T* – эквивалентно *S (T~S)* , то *S* - неприводимое представление.

2) Если *T* – приводимое представление и *T* – эквивалентно *S (T~S)*, то *S* - приводимое представление.

3) *T* в $\{e_i\}_{i=1}^n$, $t(g)=(t_{ij}(g))$ и $T(g)=A^{-1}S(g)A\Leftrightarrow T\sim S$, тогда в базисе $\{Ae_i\}$ оператор $S(g)$ имеет матрицу равную $t(g)$.

Теорема. Для того чтобы два конечномерных представлений T и S были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы их размерности были равны и в некоторых базисах они совпадали.

Доказательство.

Докажем только необходимость. Пусть T и S – эквивалентные представления, действующие соответственно в пространствах X, Y (линейные пространства над полем комплексных чисел). По определению $AT(g) = S(g)A$.

$\{e_i\}_{i=1}^{n}$ – базис в X, $\{f_i = ae_i\}_{i=1}^{n}$ – базис в Y.

Докажем, что

1. f_i - линейно независимы
2. что максимально линейно независимы.

1. Предположим, что f_i - линейно зависимы, значит $\exists \alpha_i \neq 0$ и $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_n f_n = 0$ или $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i A e_i = 0$. Из линейности следует, что $A(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i) = 0$, т.к. A – обратимый, ядро равно нулю, значит $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = 0$, тогда вектора e_i – линейно зависимые, а это противоречит условию.

2. Докажем, что $\{ f_i \}$ – максимальное число линейно независимых векторов. Предположим, что $\{ f_i \}$ не максимальна, следовательно существует некоторое $f_0 : \{ f_0, f_1, .., f_n \}$ – линейно независимые. $A: X \to Y => A^{-1}: Y \to X$, значит для f_0 $\exists x_0 = A^{-1} f_0$, но $x_0 \in X$, а в X есть базис, следовательно x_0 разложится поэтому базису. Причем одно из $\beta_i \neq 0$, получаем: $x_0 = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \ldots + \beta_n e_n$.

На x_0 подействуем оператором А:

$$Ax_0 = \sum_{i=1}^{n} \beta_i A e_i => f_0 = \sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i ,$$

значит $\{ f_i \}$ – линейно зависимые, что опять противоречит условию.

Таким образом $\{ f_i \}$ – базис в Y и его размерность равна n. А значит размерность представления S равна n.

Теперь докажем, что в базисах $\{e_i\}$ и $\{ f_i \}$ матрицы представлений T и S совпадают. На оператор $T(g)$ подействуем $\{e_i\}$ и разложим по базису:

$$T(g) = \sum_{i=1}^{n} t_i^j (g) e_i . \qquad (12)$$

Значит

$$tg = \left\| t^j(g) \right\| = \begin{vmatrix} t_1^1(g) & t_1^2(g) & \ldots & t_1^n(g) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ t_n^1(g) & t_n^2(g) & \ldots & t_n^n(g) \end{vmatrix}$$

$T: g \to T(g)$ - гомоморфизм, $T(g)$ - линейный оператор в X, $t(g)$– матрица.

На равенство (3) подействуем оператором A:

$$AT(g)e_j = \sum_{i=1}^{n} t_i^j(g) Ae_i ,$$

используем (1) и $f_i = Ae_i$,

$$S(g) f_i = \sum_{i=1}^{n} t_i^j(g) f_i \tag{13}$$

Следовательно, $S(g) = t(g)$. Что и требовалось доказать (необходимость).

Обозначения. Если T и S - эквивалентны, т.е. T~S (обладает всеми свойствами эквивалентности). Таким образом, теория представлений одна из основных задач, которой заключается в том, чтобы найти все представления (конечные, бесконечные) с точностью до эквивалентности.

Лемма Шура. Если для двух неприводимых представлений действующих соответственно в пространствах X и Y, существует линейный оператор $A: X \to Y: AT(g) = S(g)A$ для всех $g \in G$,то либо $A=0$ (нулевой оператор), либо A – обратимый (т.е. T~S).

Доказательство.

Пусть $M=AX$, т.к. А – линейный оператор, то:

M – линейное подпространство Y;

M – инвариантное подпространство относительно представления S.

Возьмем $\forall y \in M$ и подействуем на него

$$S(g)y = S(g)Ax = AT(g)x,$$

следовательно, М – инвариантно относительно S.

Так как T и S – неприводимые представления, значит $M=0$, либо $M=Y$.

Если $M=0$, то $A=0$.

Если $M=Y=AX$, значит A – сюръективное отображение.

Теперь рассмотрим ядро оператора A.

$KerA=N\subset X$, очевидно N – линейное подпространство, покажем, что N – инвариантно относительно T.

Возьмем $\forall x \in N$ и подействуем оператором $T(g)$. Подействовав оператором A на $T(g)x$, получим

$$AT(g)x = S(g)Ax = 0,$$

тогда $T(g)x \in N$, т.о. N – инвариантно относительно T.

Т.к. T – непрерывное представление, значит либо $N=0$, либо $N=X$.

Если $N=X$, тогда ядро оператора есть всё X, а $A=0$.

Если $N=0$, т.е. $kerA=0$, следовательно, A – инвариантное отображение, а т.к. оно сюръективно, то и биективно, а значит $\exists A^{-1}$ => T~S (по определению эквивалентности). Лемма доказана.

Следствие 1. Всякий оператор, коммутирующий с конечномерным непрерывным представлением, кратен единичному.

Доказательство. Пусть T – конечномерное неприводимое представление группы G пространства X и A – линейный оператор: $AT(g) = T(g)A, \forall g \in G$. Из курса линейной алгебры имеем, что оператор A в конечном пространстве X

имеет $x_0 : Ax_0 = \lambda x_0, \lambda \neq 0, x_0 \neq 0$. Рассмотрим оператор $B = A - \lambda I$, где I – единичный оператор в *X*.

Не существует обратного оператора B^{-1}, т.к. он обращает вектор x_0 в ноль, а значит не инвариантен. В $T(g) = T(g)B$.

Из леммы Шура, следует, что *B=0*, тогда $A = \lambda I$ (т.е. кратен единичному оператору).

Следствие 2. Всякое конечномерное неприводимое представление группы конечномерно.

9 ТЕНЗОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ГРУПП

Пусть X_1, X_2 - конечномерные линейные пространства, а X_1', X_2' - сопряженные к ним пространства X_1, X_2.

Определение. Тензорным произведением пространств X_1, X_2 называют линейное пространство $L(X_2', X_1)$ элементами, которого являются линейные отображения. *Обозначается:* $X_1 \otimes X_2$.

Тензорное умножение обладает свойствами:

1. $x_1 \otimes x_2 = x_2 \otimes x_1$;
2. $(x_1 \otimes x_2) \otimes x_3 = x_1 \otimes (x_2 \otimes x)$;
3. $(\alpha x_1 + \beta x_2) \otimes y = \alpha x_1 \otimes y + \beta x_2 \otimes y$.

Пример:

$$C^2 \otimes C^2 = L(C'^2, C^2) => C^2 = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \right\}, \text{ а}$$

$$C'^2 = \{ f = (z_1, z_2) \} = \left\{ A, A : (z_1, z_2) \to \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} \right\}$$

Это множество матриц второго порядка.

Теперь рассмотрим базисы в X_1, X_2:

Пусть $\{e_i\}$ - базис в пространстве X_1 $(i = \overline{1,n})$, $\{f_j\}$ - базис в пространстве X_2 ($j = \overline{1,m}$), тогда $h_{ij} = e_i \otimes f_j$, если $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, а $y = \sum_{j=1}^{m} \beta_j f_j$, тогда

$$X \otimes Y = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \beta_j e_i \otimes f_j = \alpha_i \beta_j \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} e_i \otimes f_j .$$

Теперь перейдем непосредственно к понятию тензорного произведения представлений. Пусть даны представления T_1 и T_2 группы *G* в конечномерных пространствах X_1, X_2.

Определение. Тензорным произведением представлений T_1 и T_2, называется

$$X = x_1 \otimes x_2,$$

задаваемое оператором $T(g)$ на $x_1 \otimes x_2$, где $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$, задаются формулой

$$T(g)(x_1 \otimes x_2) = T_1(g) x_1 \otimes T_2(g) x_2 . \qquad (14)$$

Рассмотрим свойства тензорного умножения представлений:

1. $T(e)(x_1 \otimes x_2) = T_1(e)x_1 \otimes T_2(e)x_2 = (x_1 \otimes x_2)$, значит $T(e) = I$ в пространстве $X = x_1 \otimes x_2$.

2. $\forall g_1, g_2 \in G$, $T(g_1, g_2)(x_1 \otimes x_2) = T_1(g_1)T_1(g_2)x_1 \otimes T_2(g_1)T_2(g_2)x_2 =$
$= T(g_1)x_1 \otimes T(g_1)x_2$, значит $T(g_1, g_2) = T(g_1) \cdot T(g_2)$

Запишем матрицу этого представления:

Пусть $\{e_i\}$ - базис в пространстве x_1 $\dim x_1 = n_1$, $\{f_j\}$ - базис в пространстве x_2 $\dim x_2 = n_2$, тогда

$$t_{\mu\nu jk}(g) = t^1_{\mu j}(g) t^2_{\nu k}(g), \text{ где } \mu = \overline{1, n_1},\ \nu = \overline{1, n_2},\ j = \overline{1, n_1},\ k = \overline{1, n_2}. \tag{15}$$

Определение. *Тензорным представлением* $T^1 \otimes T^2 \otimes \ldots \otimes T^m$ конечномерных представлений $T^1, \ldots, T^m$ группы G в пространствах $X_1, \ldots, X_m$ называется представление T в пространствах $X_1 \otimes X_2 \otimes \ldots \otimes X_m$, операторы $T(g)$ которого на векторах $x_1 \otimes x_2 \otimes \ldots \otimes x_m$, $x_1 \in X_1, \ldots x_m \in X_m$ задаются формулой

$$T(g)(x_1 \otimes x_2 \otimes \ldots \otimes x_m) = T^1(g)x_1 \otimes T^2(g)x_2 \otimes \ldots T^m(g) \otimes x_m \tag{16}$$

ТЕМА 4. КОНЕЧНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПРЯМОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ГРУПП

Пусть $G = G_1 \times G_2$ - прямое произведение групп G_1 и G_2, где $G_1 \times G_2 = G = \{(g_1, g_2), g_1 \in G_1, g_2 \in G_2, (g_1, g_2) \cdot (\tilde{g}_1, \tilde{g}_2) = (g_1, \tilde{g}_1) \cdot (g_2, \tilde{g}_2)\}$,
T^1 - конечномерное представление группы G_1 в пространстве X_1, T^2 - конечномерное представление группы G_2 в пространстве X_2. По этим двум представлениям можно построить представление T группы G в пространстве $X = X_1 \otimes X_2$, пологая

$$T(g)(x_1 \otimes x_2) = T^1(g_1)x_1 \otimes T^2(g_2)x_2 \text{ при } g = g_1 \times g_2 \tag{1}$$

Нетрудно убедится, что соответствие $g \to T(g)$ есть представление группы G. Оно обозначается $T^1_{G_1} \otimes T^2_{G_2}$.

Рассмотрим случай когда $G_1 = G_2$, так что T^1 и T^2 - представления одной и той же группы G_1. Группа G содержит подгруппу G_0, состоящую из всех $g = g_1 \times g_2$, $g_1 \in G_1$, очевидно изоморфную группе G_1. Поэтому сужение представления $T^1_{G_1} \otimes T^2_{G_2}$ на группу G_0 есть представление группы G_1. С другой стороны, из (1) следует

$$T(g)(x_1 \otimes x_2) = T^1(g_1)x_1 \otimes T^2(g_2)x_2 \text{ при } g = g_1 \times g_2 \in G_0 \tag{2}$$

1) Сужение представления $T^1_{G_1} \otimes T^2_{G_2}$ группы $G \times G$ на группу G_0 всех $g_1 \times g_1$, $g_1 \in G$ совпадает с тензорным произведением $T^1 \otimes T^2$ представлений T^1 и T^2 группы G.

Очевидно, утверждение предложения 1) остается справедливым для прямого произведения $G = G \times \ldots \times G$ любого конечного числа экземпляров группы G. В этом случае роль группы играет совокупность всех $g_1 \times g_1 \times \ldots \times g_1, g_1 \in G_1$.

2) Всякое одномерное представление

$$g_1 \times g_2 \times \ldots \times g_n \to f(g_1, g_2, \ldots, g_n), g_1 \in G_1, \ldots g_n \in G_n \qquad (3)$$

прямого произведения $G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_2$ групп $G_1, \ldots, G_n$ задается формулой

$$f(g_1, g_2, \ldots, g_n) = f(g_1) \cdot f(g_2) \ldots \cdot f(g_n). \qquad (4)$$

- одномерное представление групп $G_1, \ldots, G_n$.

3) Всякое неприводимое конечномерное представление T группы $G = G_1 \times G_2$ эквивалентно тензорному произведению неприводимых представлений T^1 и T^2 групп G_1 и G_2 соответственно, причем T^1 и T^2 являются подпредставлениями ограничений представления T на группы $G_1 \approx G_1 \times \{e_2\}$ и $G_2 \approx \{e_1\} \times G_2$ соответственно, где e_1, e_2 - единичные элементы групп G_1 и G_2.

ТЕМА 5. КОНЕЧНОМЕРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ГРУПП

1 НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ НА ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ГРУППЕ

Пусть G – группа и $f: G \to G$.

Определение. Комплекснозначная функция на топологической группе называется *непрерывной*, если она непрерывна на топологическом пространстве, которая определяет группу. Т.е. если $f^{-1}(A)$ открыто для любого открытого $A \subset G$.

Пусть X – конечномерное комплексное пространство, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – базис в X.

$$f: G \to X, \ f(g) = (f_1(g), f_2(g), \ldots, f_n(g)),$$

где $f_i(g)$ – компоненты вектора и в то же время комплекснозначные функции.

Определение. Векторнозначная функция $f: G \to X$ на топологической группе G называется *непрерывной*, если её компоненты $f_i(g)$ непрерывны на G.

Замечание. Т.к. компоненты вектора зависят от выбора базиса, но при переходе к другому базису они выражаются через линейные комбинации коэффициентов в первом базисе, следовательно, определение непрерывности не зависит от выбора базиса (исходя из свойств непрерывной функции и конечномерной линейной комбинации).

Пусть A есть отображение топологической группы G во множество Gx – множество линейных операторов на пространстве X, т.е. $A: G \to Gx$. $A(g)$ – означает оператор в X.

Определение. Операторнозначная функция $A: G \to Gx$ топологической группы G во множество Gx операторов пространства X называется *непрерывной* на топологической группе, если для любых $x \in X$, $g \in G$, $A(g)x$ – непрерывный.

Выберем в X базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ $\quad A(g)e_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(g) \cdot e_i$, где a_{ij} – матричные элементы.

Определение. Операторнозначная функция $A\!:\!G \to Gx$ топологической группы G во множество Gx операторов пространства X называется *непрерывной* на топологической группе, если a_{ij} непрерывны на G.

2 ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ГРУППЫ

Определение. Отображение T топологической группы G в линейном комплексном пространстве $X \neq 0$ называется представление топологической группы G, если операторы $T(g)$ удовлетворяет условиям:

$T(e) = I,$

где e – единица группы G, I – единичный оператор в X.

$T(g_1)\, T(g_2) = T(g_1 g_2),\ \forall g_1, g_2 \in G$.

$T(g)$ – непрерывная операторная функция на G.

Замечание:

1. Условие 3) выделяет из всех алгебраических представлений топологических представлений – непрерывные.

2. Условие 3) означает, что непрерывная векторнозначная функция $T(g)x$ для $\forall\ x \in X,\ g \in G$ и $t_{ij}\,(g)$ – матричных элементов матрицы оператора $T(g)$.

Теорема. Если T - топологическое представление топологической группы G в пространстве X и H – подгруппа G, M – инвариантное подпространство X, то представления которые получаются сужением на H и M также являются топологическими представлениями (называются под представлениями представления T).

Теорема. Каждое одномерное представление топологической группы $G = G_1 x\ \times G_2 x\ \times \ldots \times G_n x$ (прямое произведение топологических групп) есть произведение одномерных представлений каждой группы, т.е.

$$T(g_1, g_2, \ldots, g_n) = T^1(g_1) \cdot T^2(g_2) \cdot \ldots \cdot T^n(g_n), \qquad (1)$$

$T^i(g_i)$ - одномерные представления группы G_i, где $i = 1, 2, \ldots, n$.

Представление (1) является унитарным тогда и только тогда, когда унитарны все $T^i(g_i)$.

3 КОНЕЧНОМЕРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПРОСТЕЙШИХ КОММУТАТИВНЫХ ГРУПП

Любое конечномерное представление простейших коммутативных групп одномерно.

1. Аддитивная группа вещественных чисел R^1 имеет вид:

$$T(\alpha) = e^{\rho \cdot \alpha}\ , \qquad (2)$$

$\alpha \in \mathrm{R}^1,\ \rho \in \mathrm{C}^1$.

Доказательство. $G = R^1$ – топологическая группа. $T\!:\!G \to C^1$ (или $T\!:\!\alpha \to z$, где α- вещественное число, z – комплексное число). $X = C^1$, операторами на X являются комплекснозначные функции.

Таким образом, чтобы найти все представления надо из множества комплекснозначных функций найти такую, которая удовлетворяет:

1) $T(0)=1$ (0 – единица в $R^1 = G$, 1 – единичный оператор в $X = C^1$).

2) $T(x+y)=T(x)\cdot T(y)$

3) T – непрерывная комплекснозначная функция.

Этим условия удовлетворяет только показательная функция.

$T(-1)\ T(1) = T^{-1}(1)\ T(1) = 1= T(0) \neq 0.$

Пусть f - непрерывная функция, покажем, что она дифференцируема, т.е. имеет производную и она тоже непрерывна.

Пусть $w(x)$ – финитная функция, т.е. не равна нулю в конечном промежутке числовой прямой. Рассмотрим

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x+y)\cdot w(x)dx = \int_{a}^{b} f(x+y)\cdot w(x)dx = \begin{vmatrix} x+y=z \\ dz=dx \end{vmatrix} = \int_{-\infty}^{\infty} f(z)\cdot w(z-y)dz$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x+y)\cdot w(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot f(y)w(x)dx = f(y)\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot w(x)dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(z)\cdot w(z-y)dz.$$

Если $w(x)$ имеет производную, то $f(y)$ также имеет производную, т.е. дифференцируема.

Таким образом $T(x+y)=T(x)\cdot T(y)$ можно дифференцировать по x или по y. Продифференцируем по y и пусть $y = 0$.

$T'(x)=T'(0)\cdot T(x)$,

$$\frac{dT(x)}{dx}=c\cdot T(x),$$

решая дифференциальное уравнение, получаем

$$\frac{dT(x)}{T(x)}=c\cdot dx,$$

$$\int\frac{dT(x)}{T(x)}=c\cdot\int dx,$$

$ln|T(x)|=cx+c_0$,

$T(x)=e^{cx+c_0}$; $c_0 = 0$, $c =\ T'(0)=\rho$.

$T(\alpha)=e^{\rho\cdot\alpha}$. Теорема доказана.

Замечание. Каждое одномерное представление группы R^1 задаётся комплексным числом ρ.

2. Аддитивная группа R^n имеет вид:

$$T(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)=e^{\rho_1\cdot\alpha_1+\rho_2\cdot\alpha_2+...+\rho_n\cdot\alpha_n}, \tag{3}$$

$\alpha_i \in R^1$, $\rho_i \in$ C, $i = 1,2,\ldots n$.

3. Аддитивная группа C^1 имеет вид:

Если $z=x+iy$, $\bar{z}=x-iy$, то

$$x=\frac{z+\bar{z}}{2},\ \ y=\frac{z-\bar{z}}{2i}. \tag{4}$$

$$T(z)=T(x,y)=e^{\rho_1 x+\rho_2 y}=e^{\rho_1\cdot\frac{z+\bar z}{2}+\rho_2\cdot\frac{z-\bar z}{2i}}=e^{\rho_1\cdot\frac{z+\bar z}{2}-i\rho_2\cdot\frac{z-\bar z}{2}}=e^{\lambda_1\cdot z+\lambda_2\cdot\bar z}, \quad (5)$$

где $\lambda_1=\dfrac{\rho_1-i\rho_2}{2}$, $\lambda_2=\dfrac{\rho_1+i\rho_2}{2i}$.

ТЕМА 6. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГРУППЫ SU(2)

1 ОПИСАНИЕ ГРУППЫ SU(2)

Рассмотрим группу

$$SU(2)=\{u=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\bar\beta & \bar\alpha\end{pmatrix}, \text{ где } \alpha,\beta\in C: |\alpha|^2+|\beta|^2=1\}.$$

Каждый элемент из группы *SU(2)* однозначно определяется парой комплексных чисел (α,β), таких, что $|\alpha|^2+|\beta|^2=1$.

Если положить, что $\alpha=x+iy, \beta=a+ib$, то из равенства $|\alpha|^2+|\beta|^2=1$ следует, что $|x|^2+|y|^2+|a|^2+|b|^2=1$. Отсюда получаем, что группа SU(2), как топологическое пространство, гомеоморфна сфере в четырехмерном вещественном пространстве, следовательно, группа SU(2) – компактное множество.

Аналогично доказывается, что *SU(n)* - компактная группа (*n*=1,2,…*)*.

2 ПОДГРУППЫ SU(2)

Рассмотрим такую группу $M_1=\left\{\begin{pmatrix}\cos\frac{t}{2} & i\sin\frac{t}{2}\\ i\sin\frac{t}{2} & \cos\frac{t}{2}\end{pmatrix},\ t\in R\right\}$ и докажем, что она является подгруппой группы *SU(2)*. По определению:

1) $\alpha=\cos\frac{\mathrm{t}}{2}$, $\beta=i\sin\frac{t}{2}$, значит

$$M_1=\left\{\begin{pmatrix}\cos\frac{t}{2} & i\sin\frac{t}{2}\\ i\sin\frac{t}{2} & \cos\frac{t}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\bar\beta & \bar\alpha\end{pmatrix}, t\in R\right\}.$$

2) Пусть $m_1,m_2\in M_1$, тогда $m_1\cdot m_2$ должно принадлежать M_1, проверим это:

$$m_1\cdot m_2=\begin{pmatrix}\cos\frac{t_1}{2} & i\sin\frac{t_1}{2}\\ i\sin\frac{t_1}{2} & \cos\frac{t_1}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos\frac{t_2}{2} & i\sin\frac{t_2}{2}\\ i\sin\frac{t_2}{2} & \cos\frac{t_2}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\frac{t_1+t_2}{2} & i\sin\frac{t_1+t_2}{2}\\ i\sin\frac{t_1+t_2}{2} & \cos\frac{t_1+t_2}{2}\end{pmatrix}\Rightarrow m_1\cdot m_2\in M_1$$

3) Если возьмем $t=1$, то получим матрицу вида:

$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=e\in M_1$, т.е. единичную матрицу.

4) Если $m=\begin{pmatrix}\cos\frac{t}{2} & i\sin\frac{t}{2}\\ i\sin\frac{t}{2} & \cos\frac{t}{2}\end{pmatrix}$, тогда $m^{-1}=\begin{pmatrix}\cos\frac{t}{2} & -i\sin\frac{t}{2}\\ -i\sin\frac{t}{2} & \cos\frac{t}{2}\end{pmatrix}$.

Таким образом мы доказали, что группа матриц вида M_1, является подгруппой группы *SU(2).*

3 УГЛЫ ЭЙЛЕРА

Т.к группа $SU(2)=\{u=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha}\end{pmatrix}$, где $\alpha,\beta\in C:|\alpha|^2+|\beta|^2=1\}$.

Комплексные числа (α,β), такие, что $|\alpha|^2+|\beta|^2=1$, задаются тремя параметрами. В качестве этих параметров можно взять, например, $|\alpha|,\arg\alpha,\arg\beta$.

$$\alpha=|\alpha|\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)=|\alpha|e^{i\arg\alpha}$$

$$\beta=|\beta|\cdot(\cos\theta+i\sin\theta)=|\beta|e^{i\arg\beta}$$

Если $\alpha\cdot\beta\neq 0$, то вместо этих параметров удобнее взять другие, называемые углами Эйлера. Значит:

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}|\alpha|e^{i\arg\alpha} & |\beta|e^{i\arg\beta}\\ -|\beta|e^{-i\arg\beta} & -|\alpha|e^{i\arg\alpha}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}e^{\frac{i\varphi}{2}} & 0\\ 0 & e^{-\frac{i\varphi}{2}}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2} & i\sin\frac{\theta}{2}\\ i\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}e^{\frac{i\psi}{2}} & 0\\ 0 & e^{-\frac{i\psi}{2}}\end{pmatrix}\equiv$$

$$\equiv u(\varphi,0,0)\cdot u(0,\theta,0)\cdot u(0,0,\psi) \qquad (1)$$

Параметры φ,θ,ψ связаны с $|\alpha|,\arg\alpha,\arg\beta$ следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}&|\alpha|=\cos\frac{\theta}{2},\quad |\beta|=\sin\frac{\theta}{2}\\ &Arg\alpha=\frac{\varphi+\psi}{2},\quad Arg\beta=\frac{\varphi-\psi+\pi}{2}.\end{aligned} \qquad (2)$$

Значения параметров φ,θ,ψ не определены однозначно равенствами (2).

Потребуем дополнительно, чтобы эти параметры принадлежали области

$$\begin{aligned}&0\le\varphi<2\pi,\\ &0<\theta<\pi,\\ &-2\pi\le\psi<2\pi\end{aligned} \qquad (3)$$

4 *ПРОИЗВЕДЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ГРУППЫ*

Пусть $u=u_1\cdot u_2$ - произведение двух матриц u_1 и u_2 из *SU(2)*. Обозначим углы Эйлера матрицы u через φ,θ,ψ, матрицы u_1 через $\varphi_1,\theta_1,\psi_1$, и матрицы u_2 через $\varphi_2,\theta_2,\psi_2$. Выразим углы Эйлера матрицы u через углы Эйлера сомножителей.

Рассмотрим сначала случай, когда $\varphi_1 = \psi_1 = \psi_2 = 0$. В этом случаи имеем

$$u = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_1}{2} & i\sin\frac{\theta_1}{2} \\ i\sin\frac{\theta_1}{2} & \cos\frac{\theta_1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_2}{2}\cdot e^{\frac{i\varphi_2}{2}} & i\sin\frac{\theta_2}{2}\cdot e^{\frac{i\varphi_2}{2}} \\ i\sin\frac{\theta_2}{2}\cdot e^{-\frac{i\varphi_2}{2}} & \cos\frac{\theta_2}{2}\cdot e^{-\frac{i\varphi_2}{2}} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Перемножим в правой части матрицы и применив формулы $\cos\theta = 2|\alpha|^2 - 1$, $e^{i\varphi} = -\frac{\alpha\beta i}{|\alpha|\cdot|\beta|}$, получим

$$\cos\theta = \cos\theta_1\cdot\cos\theta_2 - \sin\theta_1\cdot\sin\theta_2\cdot\cos\varphi_2, \tag{5}$$

$$e^{i\varphi} = \frac{\sin\theta_1\cdot\cos\theta_2 + \cos\theta_1\cdot\sin\theta_2\cdot\cos\varphi_2 + i\sin\theta_2\sin\varphi_2}{\sin\theta}, \tag{5'}$$

$$e^{\frac{i(\varphi+\psi)}{2}} = \frac{\cos\frac{\theta_1}{2}\cdot\cos\frac{\theta_2}{2}\cdot e^{\frac{i\varphi_2}{2}} - \sin\frac{\theta_1}{2}\cdot\sin\frac{\theta_2}{2}\cdot e^{-\frac{i\varphi_2}{2}}}{\cos\frac{\theta}{2}}. \tag{5''}$$

Из равенств $(5')$ и $(5'')$ после несложных преобразований, вытекает, что

$$tg\varphi = \frac{\sin\theta_2\cdot\sin\varphi_2}{\cos\theta_1\cdot\sin\theta_2\cdot\cos\varphi_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2}, \tag{6'}$$

$$tg\psi = \frac{\sin\theta_1\cdot\sin\varphi_2}{\sin\theta_1\cdot\cos\theta_2\cdot\cos\varphi_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2}, \tag{6''}$$

Однако равенства $(6')$ и $(6'')$ не определяют однозначно φ и ψ в области $0 \le \varphi < 2\pi,\ -2\pi \le \psi < 2\pi.$

Итак, поставленная задача решена в частном случае, когда $\varphi_1 = \psi_1 = \psi_2 = 0$. Переход к общему случаю не составляет никакого труда. В самом деле, в силу равенства (1) имеем

$$u(\varphi_1,\theta_1,\psi_1)\cdot u(\varphi_2,\theta_2,\psi_2) = u(\varphi_1,0,0)\cdot u(0,\theta_1,0)\cdot u(0,0,\psi_1)\cdot u(\varphi_2,0,0)\cdot u(0,\theta_2,0)\times$$
$$\times u(0,0,\psi_2)$$

Но очевидно, что

$$u(\varphi_1,0,0)\cdot u(\varphi_2,0,0) = u(\varphi_1+\varphi_2,0,0),$$
$$u(0,\theta_1,0)\cdot u(0,\theta_2,0) = u(0,\theta_1+\theta_2,0),$$
$$u(0,0,\psi_1)\cdot u(0,0,\psi_2) = u(0,0,\psi_1+\psi_2),$$

а так же:

$$u(\varphi_1,0,\psi_1)\cdot u(\varphi_2,0,\psi_2) = u(\varphi_1+\varphi_2,0,\psi_1+\psi_2),$$
$$u(0,\theta_1,\psi_1)\cdot u(0,\theta_2,\psi_2) = u(0,\theta_1+\theta_2,\psi_1+\psi_2),$$
$$u(\varphi_1,\theta_1,0)\cdot u(\varphi_2,\theta_2,0) = u(\varphi_1+\varphi_2,\theta_1+\theta_2,0).$$

5 ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГРУППЫ SU(2) В ПРОСТРАНСТВЕ ОДНОРОДНЫХ ПОЛИНОМОВ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Рассмотрим полином, т.е. пусть z_1, z_2 - переменные и $z_1 \cdot z_2 = p(z_1, z_2)$ или $\alpha z_1^2 + \beta z_1 z_2 + \gamma z_2^2$.

Определение. Полином от двух переменных $p(z_1, z_2)$ называется *однородным*, степени однородности l, если для любого $\lambda \neq 0$ выполняется равенство:

$$p(\lambda z_1, \lambda z_2) = \lambda^l p(z_1, z_2).$$

Пусть B^{2l} - множество полиномов степени однородности *2l.*

$$B^{2l} = \{p(z_1, z_2) : p(\lambda z_1, \lambda z_2) = \lambda^{2l} p(z_1, z_2)\}$$

Теорема. B^{2l} - линейное пространство, размерности *2l+1*.

Доказательство.

Докажем, что B^{2l} - линейное пространство:

$\forall p_1(z_1, z_2)$ и $p_2(z_1, z_2)$, тогда $p_1(z_1, z_2) + p_2(z_1, z_2) = p(z_1, z_2)$, а $p(\lambda z_1, \lambda z_2) = p_1(\lambda z_1, \lambda z_2) + p_2(\lambda z_1, \lambda z_2) = \lambda^{2l} p_1(z_1, z_2) + \lambda^{2l} p_2(z_1, z_2) = \lambda^{2l} p(z_1, z_2)$.

Если *l* принимает значение $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \ldots$, тогда *2l* = 0, 1,2, 3,….

Пусть *l=0*, тогда $B^0 = \{R, C\} \Rightarrow \dim B^0 = 1$,

$l = \frac{1}{2}$, тогда $B^1 = \{p(z_1, z_2) = \alpha z_1 + \beta z_2\} \Rightarrow \dim B^1 = 2$, базисом в этом пространстве является: $p_1 = z_1, p_2 = z_2$.

Рассмотрим произвольный полином $p \in B^{2l}$ и он имеет вид:

$$p(z_1, z_2) = \sum_{k=-l}^{l} \alpha_k z_1^{l-k} z_2^{l+k}, \alpha_k \in C \tag{7}$$

базис этого пространства есть $\{z_1^{l-k}, z_2^{l+k}\}_{k=-l}^{l}$ и его размерность *2l+1*, где $l = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \ldots$. Теорема доказана.

Зададим операторы в пространстве B^{2l} формулой

$$T^l(g) p(z_1, z_2) = p_g(z_1, z_2), \tag{8}$$

которые определяются следующим образом:

$$p_g(z_1, z_2) = p\left((z_1, z_2) \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \right) = p(\alpha z_1 - \bar{\beta} z_2, \beta z_1 + \bar{\alpha} z_2),$$

где $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$.

Формулу (8) можно записать в виде

$T^l(g) : p \to p_g$, где $p \in B^{2l}$,

утверждаем, что:

1. $T^l(g)$ - линейный оператор в B^{2l};
2. $T^l(g)$ задает уравнение в группе *SU(2)*.

Из (8) очевидно, что $p_g \in B^{2l}$, проверим это

$$p_g(\lambda z_1, \lambda z_2) = p(\lambda\alpha z_1 - \lambda\bar{\beta} z_2, \lambda\beta z_1 + \lambda\bar{\alpha} z_2) = \lambda^{2l} p_g(z_1, z_2)$$

значит $T^l(g): B^{2l} \to B^{2l}$.

$$T^l(g)[\alpha p_1 + \beta p_2] = \alpha T^l(g) p_1 + \beta T^l(g) p_2,$$

следовательно, T^l - линейный оператор в B^{2l}.

Теперь покажем, что $T^l(g)$ задают представление группы *SU(2)*:

$T^l(g)p(z_1, z_2) = p_g(z_1, z_2)$, где $g = g_1 \cdot g_2$.

Положим, что

$$T^l(g_1 \cdot g_2) p(z_1, z_2) = p_{g_1 \cdot g_2}(z_1, z_2)$$

или

$$p_{g_1 \cdot g_2}(z_1, z_2) = p((z_1, z_2) \cdot g_1 \cdot g_2).$$

$$T^l_{g_1} T^l_{g_2} p(z_1, z_2) = (T^l_{g_1} T^l_{g_2} p)(z_1, z_2) = (T^l_{g_1} p_{g_2})(z_1, z_2) = p_{g_1 \cdot g_2}(z_1, z_2) =$$
$$= p((z_1, z_2) \cdot g_1 \cdot g_2)$$

$$T^l_{g_1 \cdot g_2} = T^l_{g_1} \cdot T^l_{g_2},$$

следовательно

$$T_{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} = I.$$

Таким образом, в пространстве B^{2l} построено представление T^l группы *SU(2)*.

4 УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

4.1 Задачи для самостоятельного решения на тему «Группы, подгруппы и разложения групп»

1. Доказать, что множество невырожденных преобразований конечномерного (*n*-мерного) пространства над полем *K* образует группу (обозначается *GL(n,K)*).
2. Найти в группе *GL(2,C)*, центр (*sI*, *s*-комплексное число, *I* – единичная матрица), 25 различных подгрупп (*GL(2,R), SL(2,K), U(2), SU(2), O(2), SO(2), U(1,1), SU(1,1), O(1,1), SO(1,1),* $T_+(2,K)$, $T_-(2,K)$, $N_+(2,K)$, $N_-(2,K)$, *Z(2,K), D(2,K),* $D_1(2,K)$), нормальный делитель *(SL(2,C))*, фактор группу (*GL(2,C)/SL(2,C)=*C_0) и фактор пространство *(GL(2,C)/U(2)=P* – множество эрмитовых положительно-определенных матриц).
3. Доказать, что *GL(2,C)=U(2)*P, GL(2,R)=O(2)*S* (*S* – множество симметрических матриц).
4. Доказать, что $GL(2,K)= N_-(2,K)*D(2,K)*N_+(2,K)$.
5. Доказать, что $GL(2,C)= N_-(2,C)*D(2,C)*U(2)$.
6. Доказать, что $GL(2,R)= N_-(2,R)*D(2,R)*O(2)$.
7. Доказать, что *SL(2,C)=S(2)*P, SL(2,R)=SO(2)*S* (*S* – множество симметрических матриц).
8. Доказать, что $SL(2,K)= N_-(2,K)*D_1(2,K)*N_+(2,K)$ ($D_1(2,K)$ – диагональные матрицы с определителем равным 1).
9. Доказать, что $SL(2,C)= N_-(2,C)* D_1(2,C)*SU(2)$.
10. Доказать, что $SL(2,R)= N_-(2,R)* D_1(2,R)*SO(2)$.

11. Доказать, что любую унитарную матрицу g из $SU(2)$, можно однозначно представить в виде

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix},$$

где a, b – комплексные числа и $det(g) = |a|^2 + |b|^2 = 1$.

Примечание: воспользоваться равенством $g^*g=e$ или $g^* = g^{-1}$.

12. Доказать, что любую матрицу g из $SU(2)$ можно однозначно представить в виде произведения 3 матриц.

13. Показать, что совокупность т.н. аффинных преобразований прямой R^1 вида $A(a,b)$: $x = ax + b$, где $a \neq 0$ и b - вещественные параметры, образует группу. Вывести закон умножения двух преобразований $A(a, b)$ и $A(c, d)$ и установить вид обратного преобразования $A(a, b)$-1.

14. Доказать, что унитарный оператор в n - мерном комплексном евклидовом пространстве имеет ровно n попарно ортогональных собственных векторов. Почему для ортогонального оператора в вещественном евклидовом пространстве данная теорема, вообще говоря, неверна?

15. Проверить, что матрица двумерного поворота на угол (не имеет вещественных собственных значений и собственных векторов. Найти ее собственные значения и собственные векторы над полем комплексных чисел.

16. Пользуясь второй леммой Шура, показать, что все неприводимые представления абелевой группы одномерны (любое ее многомерное представление приводимо).

17. Проверить, что характер μ любого (унитарного!) представления группы G удовлетворяет соотношению: $\mu(s\text{-}1) = {}^*\mu(s)$, $s \in G$. Верно ли это для неунитарных представлений?

18. Разложение группы движений евклидового пространства в полупрямое произведение группы параллельных переносов и ортогональной группы.

19. Связность унимодулярной группы.

20. Связность группы $SO(n)$.

21. Связность групп $U(n)$ и $SU(n)$.

22. Гомоморфизм из $SU(2)$ в $SO(3)$.

23. Построить представление группы вращений в пространстве однородных полиномов третьей степени.

24. Разложить на неприводимые представление группы вращений $SO(3)$ на тензорах третьего ранга в трехмерном пространстве. Рассмотреть полностью симметричную часть. Приводима ли она?

4.2 ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Голод П.И., Климык А.У. Математические основы теории симметрии. М.: Наука, 2000.
2. Годунов С.К., Михайлова Т.Ю. Представление группы вращений и сферические функции. Новосибирск, 1998.
3. Барут А., Рончка Р. Теория представлений групп и ее приложения.М.: Мир,1998, т.1-2.

4.3 ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Бейтмен Г. Высшие трансцендентные функции / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. - М.: Наука, 1973. - Т. 1-3.
2. Виленкин Н.Я. Специальные функции и теория представлений групп. М.: Наука, 1965.
3. Грандштейн И.С. Таблицы интегралов, сумм и произведений / И.С. Грандштейн, И.М. Рыжик. М.: Физматгиз, 1962. - 360с.
4. Гельфанд И.М., Минлос Р.А., Шапиро *З.Я.* Представления группы вращений и группы Лоренца. М.: Физматгиз, 1958.
5. Желобенко Д.П. Компактные группы Ли и их представления. М.: Наука, 1970.
6. Желобенко Д.Ф., Штерн А.И. Представления групп Ли. М.: Наука, 1983.
7. Климык А.У. Матричные элементы и коэффициенты Клебша-Гордана представлений групп. М.: Наука, 1980.
8. Колмогоров А.Н., Фомин СВ. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981.-414с
9. Любарский Г.Я. Теория групп и ее применение в физике. М.: Наука, 1958.
10. Наймарк М.А. Теория представлений групп. М.: Наука, 1976.
11. Никифоров А.Ф. Основы теории специальных функций. М.: Наука, 1974. - 304с.
12. Понтрягин Л.С. Непрерывные группы. М.: Наука, 1974.
13. Хамермеш М. Теория групп и ее применение к физическим проблемам. М.: Мир, 1966.

5 КАРТА ОБЕСПЕЧЕННОСТИ ДИСЦИПЛИНЫ КАДРАМИ ПРОФЕССОРСКО-ПРЕПОДАВАТЕЛЬСКОГО СОСТАВА

Лекционные занятия по дисциплине "Представление групп и специальные функции" для специальностей 010101 – "Математика" проводит доцент кафедры математического анализа и моделирования, к.ф.-м.н. Павлюк А.П. Практические занятия проводят доцент кафедры математического анализа и моделирования, к.ф.-м.н. Павлюк А.П.