Министерство образования и науки Российской Федерации
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

А.П. Филимонова, С.В. Костенко,
А.В. Павельчук, А.В. Голик

МАТЕМАТИКА: ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Практикум

Благовещенск
Издательство АмГУ
2011

ББК 22.161.5 я73
Ф53

Рекомендовано
учебно-методическим советом университета

Рецензенты:
С.В. Ланкин, д-р физ.-мат. наук, профессор,
зав. кафедрой общей физики БГПУ;
А.М. Емельянов, д-р. техн. наук, профессор,
зав. кафедрой высшей математики ДальГАУ.

Филимонова А.П., Костенко С.В., Павельчук А.В., Голик А.В.
Ф53 Математика: Дифференциальное исчисление функции одной переменной. Практикум / А.П. Филимонова, С.В. Костенко, А.В. Павельчук, А.В. Голик. – Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2011. – 84 с.

Пособие предназначено для студентов инженерно-технических специальностей университета и содержит краткие теоретические сведения раздела математики «Дифференцирование функций одной переменной с приложениями», а также материалы для проведения практических занятий. Основные понятия иллюстрируются профессионально-ориентированными примерами, которые помогут студентам в самостоятельной работе при изучении данного радела математики. Пособие содержит 10 вариантов расчетно-графической работы. Предназначено для студентов специальности «220301».

§ 1. Некоторые задачи, приводящие к понятию производной

К понятию производной приводит ряд задач из различных областей знаний.

1. Задача о касательной.

Пусть дана непрерывная функция $y = f(x)$. Графиком её будет кривая AB (рис. 1).

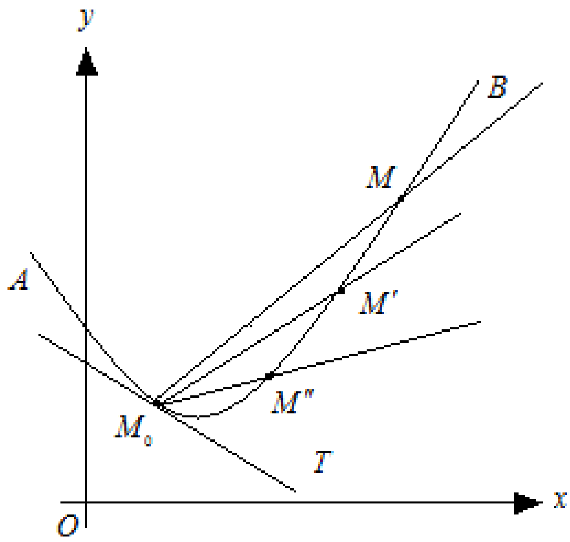


Рисунок 1.

Выберем на данной кривой какую-либо точку M_0 и, зафиксировав её, возьмём на этой же кривой произвольным образом ещё одну точку M. Проведем секущую M_0M. Затем станем приближать точку M к M_0 по кривой AB. Секущая будет при этом поворачиваться. Может случиться, что при неограниченном приближении точки M к M_0 по кривой (с любой стороны) секущая M_0M будет стремиться к некоторому предельному положению. Тогда предельное положение M_0T секущей M_0M и называется касательной к кривой AB в данной её точке M_0.

Вводя это определение, рассмотрим задачу о проведении касательной к данной кривой $y = f(x)$. Положим, что кривая AB (рис.2) имеет в данной тачке $M_0(x_0; y_0)$ касательную M_0T, которая образует с положительным лучом оси

OX угол $\alpha \neq \pm\frac{\pi}{2}$. Задача будет решена, если найдём угловой коэффициент $k = tg\alpha$ касательной M_0T.

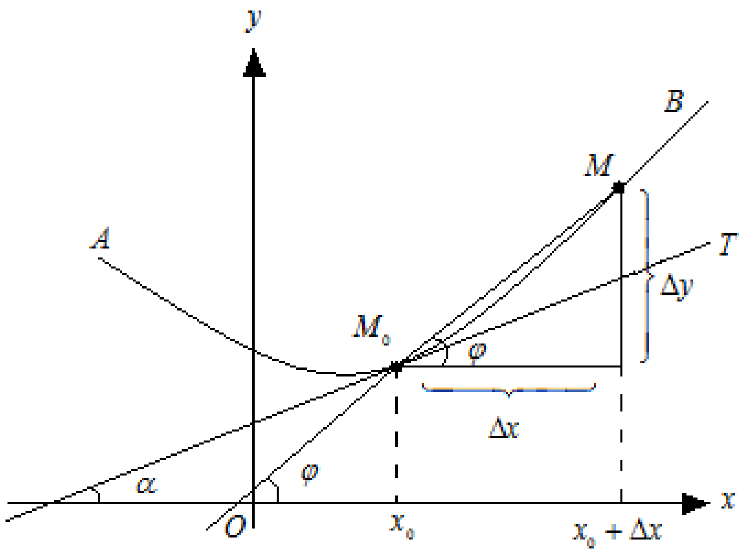


Рисунок 2.

Оказывается, что $k = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$, следовательно, для нахождения углового коэффициента касательной в точке M_0 кривой $y = f(x)$ достаточно уметь находить предел вида $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

2. Задача о скорости прямолинейного движения.

Пусть зависимость пути S от времени t в прямолинейном движении материальной точки выражается уравнением: $S = f(t)$.

Пусть t_0 - некоторый момент времени. Рассмотрим другой момент времени t. Обозначим $t - t_0 = \Delta t$ тогда $\Delta S = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$.

Отношение $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ меняется с изменением Δt и называется средней скоростью движения за время Δt. Скоростью v прямолинейного движения, с законом $S = f(t)$, в данный момент времени t_0 называется предел средней скорости

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$$

(если он существует), когда промежуток времени Δt стремится к нулю, то есть по определению

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}.$$

Таким образом, чтобы уметь находить скорость прямолинейного движения в данный момент времени t_0, мы должны научиться вычислять предел указанного вида.

Итак, при решении некоторых важных задач мы сталкиваемся с необходимостью отыскания предела отношения приращения некоторой функции к соответствующему приращению её аргумента (когда последнее стремиться к нулю).

§ 2. Понятие производной функции.

Производной функцией от данной функции $y = f(x)$ называется (при переменной x) предел отношения приращения функции $f(x)$ к приращению её аргумента, когда последнее стремится к нулю:

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Операция отыскания производной функции от данной функции называется дифференцированием.

Пример 1. Пусть функция задана на $(-\infty;\infty)$ соотношением $y = f(x) = c$, где $c = const$. Найти производную функции.

Решение. Возьмём любое число x. Дадим ему произвольное приращение Δx и вычислим Δy. Так как $f(x) = c$, то и $f(x + \Delta x) = c$; поэтому $\Delta y = c - c = 0$. Составим отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0$. Переходя здесь к пределу при $\Delta x \to 0$, находим при произвольном y: $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$, то есть $f'(x) = 0$. Таким образом, производная от функции, сохраняющей постоянное значение, тождественно равна нулю: $c' = 0$.

Пример 2. Найти производную от функции $y = f(x) = x$.

Решение. $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x) - x}{\Delta x} = 1$

Итак, производная от функции, численно равной в каждой точке значению своего аргумента, тождественно равна единице: $x' = 1$.

Пример 3. Найти производную от функции $f(x) = \sqrt{x}$.

Решение. Дадим x ($x \geq 0$) приращение Δx и вычислим соответствующее приращение функции (обозначим его через $\Delta f(x)$): $\Delta f(x) = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}$, где $x + \Delta x \geq 0$. Далее,

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}.$$

Умножим числитель и знаменатель дроби на $\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}$. Тогда получим:

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{\left(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}\right)}{\Delta x\left(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}\right)} = \frac{x + \Delta x - x}{\left(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}\right)\Delta x} = \frac{1}{\left(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}\right)}.$$

Если $x > 0$, то предел последней дроби существует и равен

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Если же $x = 0$, то дробь $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ равна $\frac{1}{\sqrt{\Delta x}}$ и при $\Delta x \to 0$ ни к какому конечному предельному значению не стремится. Следовательно, в точке $x = 0$ функция $f(x) = \sqrt{x}$ производной не имеет.

Итак, данная функция $f(x) = \sqrt{x}$, определённая на $[0;\infty)$, имеет производную лишь в $(0;\infty)$, где последняя равна $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Иначе: $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Упражнения для самостоятельной работы.

1. Пользуясь определением производной, найти производную функцию от функций а) $y = \frac{1}{x}$, б) $y = x^2$, в) $y = x^3$.

2. Обобщить результат упражнения 1 на случай $y = x^n, n \in N$.

§ 3. Геометрическое и механическое истолкование производной.

1. Геометрическое истолкование понятия производной.

Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 производную, то кривая $y = f(x)$ имеет в точке $M_0(x_0; f(x_0))$ касательную и производная от $f(x)$ в точке x_0 геометрически означает угловой коэффициент k касательной к кривой $y = f(x)$ в точке M_0.

2. Механическое истолкование понятия производной.

Пусть уравнение $S = f(t)$ характеризует зависимость пути S от времени t в прямолинейном движении. Тогда скорость v прямолинейного движения есть производная от пути S по времени t: $v = f'(t) = \dfrac{ds}{dt}$,

§ 4. Скорость изменения функции.

Пусть $y = f(x)$ – данная функция. Отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ называют средней скоростью функции $y = f(x)$ в зависимости от аргумента, а $f'(x) = \dfrac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ (если он существует) называют скоростью изменения функции $y = f(x)$ в данной точке x.

<u>Пример 1</u>. Скорость v прямолинейного движения зависит от времени t по закону: $v = \varphi(t)$, где функция $\varphi(t)$ имеет производную (в каждой точке рассматриваемой области). Найти скорость W изменения функции v в данный момент времени t.

Решение. Имеем: $W = \lim\limits_{\Delta t} \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{dv}{dt}$. Этот предел, то есть скорость изменения скорости движения, называется в физике ускорением прямолинейного движения в данный момент времени t. Таким образом, ускорение есть производная от скорости по времени.

Пример 2. Тело в процессе нагревания получает тепло, количество Q которого зависит от температуры τ по закону: $Q = f(\tau)$ (где $f(\tau)$ - функция, имеющая производную). Найти скорость $\mathbb{C}$ изменения функции Q в зависимости от изменения температуры τ.

Решение. По сказанному выше $\mathbb{C} = \dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}\tau}$. $\mathbb{C}$ называется в физике теплоёмкостью тела. Если m - масса тела, то величина $c = \dfrac{\mathbb{C}}{m}$ называется удельной теплоемкостью этого тела.

§ 5. Непрерывность функции, имеющей производную.

Справедливо утверждение. Функция $y = f(x)$, имеющая в данной точке x_0 производную, непрерывна в этой точке. Обратное утверждение не верно.

Пример. Дана функция $f(x) = |x| = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$ (рис.3).

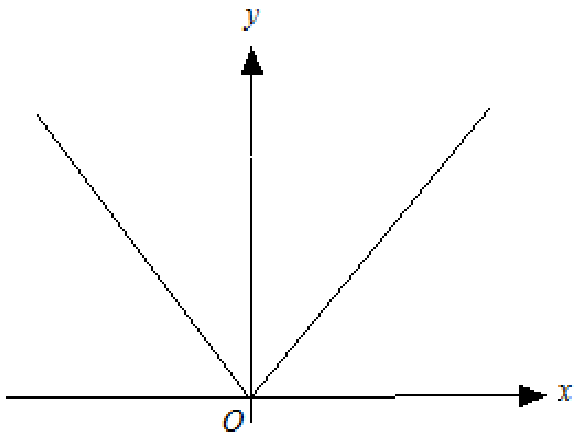


Рисунок 3.

Известно, что эта функция непрерывна в точке $x = 0$. Между тем в этой точке $f(x)$ не имеет производной. В самом деле,

$$\frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} 1, x > 0 \\ -1, x < 0 \end{cases}.$$

Отсюда очевидно, что

$\lim\limits_{\Delta x \to 0+} \dfrac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = 1$, а $\lim\limits_{\Delta x \to 0-} \dfrac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = -1$, следовательно,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x}$$

не существует, то есть для данной функции не существует производной в точке $x = 0$. С геометрической точки зрения это означает, что график функции $y = f(x)$ не имеет в точке $x_0 = 0$ касательной.

§6. Общие правила дифференцирования.

Пусть $u = u(x)$ $v = v(x)$ - дифференцируемые функции. Тогда:

$(u \pm v)' = u' \pm v'$;

$(uv)' = u'v + uv'$;

$(cu)' = cu'$;

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, v \neq 0.$$

Пример 1. Найти производную функции $y = x^2 + x - \sqrt{x} + 3$.

Решение.

$$y' = (x^2 + x - \sqrt{x} + 3)' = (x^2)' + x' - (\sqrt{x})' + 3' = 2x + 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

(см. §2).

Пример 2. Найти производную функции $y = (5 - 4x^2)(4x + 1)$.

Решение.

$$y = ((5 - 4x^2)(4x + 1))' = (5 - 4x^2)'(4x + 1) + (5 - 4x^2)(4x + 1)' =$$
$$(5' - (4x^2)')(4x + 1) + (5 - 4x^2)((4x)' + 1') = -8x(4x + 1) + 4(5 - 4x^2) =$$
$$-32x^2 - 8x + 20 - 16x^2 = -48x^2 - 8x + 20.$$

Пример 3. Найти производную функции $y = \dfrac{2}{x^3}$.

Решение. $y' = \left(\dfrac{2}{x^3}\right)' = \dfrac{2' \cdot x^3 - 2 \cdot (x^3)'}{x^6} = \dfrac{0 - 6x^2}{x^6} = \dfrac{-6}{x^4}$.

Пример 4. Найти производную функции $y = \dfrac{3x^2 - 8x + 2}{x^3 - 3}$.

Решение.

$$y' = \left(\frac{3x^2-8x+2}{x^3-3}\right)' = \frac{(3x^2-8x+2)'\cdot(x^3-3)-(3x^2-8x+2)(x^3-3)'}{(x^3-3)^2} =$$

$$= \frac{(6x-8)(x^3-3)-(3x^2-8x+2)\cdot 3x^2}{(x^3-3)^2} = \frac{6x^4-8x^3-18x+24-9x^4+24x^3-6x^2}{(x^3-3)^2} =$$

$$= \frac{-3x^4+16x^3-6x^2-18x+24}{(x^3-3)^2}.$$

В рассмотренных примерах использовались производные функций, найденные в §2 (включая упражнения).

Упражнения для самостоятельной работы.

1. Найти y', если

а) $y = 2x^3 - x^2 + 4\sqrt{x} + 7$; б) $y = (3\sqrt{x} + x)(7x^2 - x)$; в) $y = \dfrac{2x^3+4x^2}{3x^2-2}$;

г) $y = \dfrac{-8}{x^2}$; д) $y = \dfrac{1}{6x}$; е) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{5}$.

§7. Производные первичных элементарных функций. Таблица производных элементарных функций.

<u>Пример 1</u>. Найти производную функции $y = \sin x$, пользуясь определением производной и правилами дифференцирования.

Решение. Имеем $\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\sin\dfrac{\Delta x}{2}\cdot\cos(x+\dfrac{\Delta x}{2})$;

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}\cdot\cos(x+\frac{\Delta x}{2}) = \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\cos(x+\frac{\Delta x}{2}),$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\cos(x+\frac{\Delta x}{2})\right] = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\lim_{\Delta x\to 0}\cos(x+\frac{\Delta x}{2}) = 1\cdot\cos x = \cos x.$$

Итак, $(\sin x)' = \cos x$

Поступая аналогичным способом, мы получим производные остальных элементарных функций.

Обычно производные элементарных функций оформляются в виде таблицы:

$y = f(x)$		$y' = f'(x)$
1	$y = x^{\alpha}, \alpha \in R$	$y' = \alpha x^{\alpha - 1}$
2	$y = x$	$y' = 1$
3	$y = \sqrt{x}$	$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
4	$y = \dfrac{1}{x}$	$y' = -\dfrac{1}{x^2}$
5	$y = \sin x$	$y' = \cos x$
6	$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
7	$y = tgx$	$y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
8	$y = ctgx$	$y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
9	$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$
10	$y = e^x$	$y' = e^x$
11	$y = \ln x$	$y' = \dfrac{1}{x}$
12	$y = \arcsin x$	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
13	$y = \arccos x$	$y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
14	$y = arctgx$	$y' = \dfrac{1}{1 + x^2}$
15	$y = arcctgx$	$y' = -\dfrac{1}{1 + x^2}$
16	$y = c$	$y' = 0$

Пример 2. Найти производную функции

$$y = x^4 e^x - (1+x^2)\arcsin x + \sqrt[3]{x}\cos x .$$

Решение.

$$y' = (x^4)' e^x + x^4 (e^x)' - (1+x^2)'\arcsin x - (1+x^2)(\arcsin x)' + (\sqrt[3]{x})'\cos x + \sqrt[3]{x}(\cos x)' =$$

$$= 4x^3 e^x + x^4 e^x - 2x\cdot\arcsin x - (1+x^2)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{3}\cdot x^{\frac{-2}{3}}\cos x + \sqrt[3]{x}(-\sin x) =$$

$$= 4x^3 e^x + x^4 e^x - 2x\cdot\arcsin x - \frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\cos x}{3\sqrt[3]{x^2}} - \sqrt[3]{x}\sin x.$$

Пример 3. Найти производную функции

$$y = \frac{tgx-1}{ctgx+2} - \frac{1}{\sin x} + 2x^7\ln x + 4\frac{arctgx}{2^x}.$$

Решение.

$$y' = \left(\frac{tgx-1}{ctgx+2}\right)' - \left(\frac{1}{\sin x}\right)' + \left(2x^7\ln x\right)' + \left(4\frac{arctgx}{2^x}\right)' =$$

$$= \frac{(tgx-1)'(ctgx+2)-(tgx-1)(ctgx+2)'}{(ctgx+2)^2} - \frac{1'\cdot\sin x - 1\cdot(\sin x)'}{\sin^2 x} + (2x^7)'\ln x +$$

$$+ 2x^7(\ln x)' + \frac{(4arctgx)'2^x - 4arctgx\cdot(2^x)'}{2^{2x}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{\cos^2 x}(ctgx+2) - (tgx-1)\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)}{(ctgx+2)^2} + \frac{\cos x}{\sin^2 x} + 14x^6\ln x + 2x^7\frac{1}{x} +$$

$$+ \frac{\frac{4}{1+x^2}\cdot 2^x - 4arctgx\cdot 2^x\ln 2}{4^x} = \frac{\sin^2 x(ctgx+2)+\cos^2 x(tgx-1)}{\cos^2 x\sin^2 x(ctgx+2)^2} + \frac{\cos x}{\sin^2 x} +$$

$$+ 2x^6(7\ln x+1) + \frac{2^{2-x}(1+(1+x^2)arctgx\cdot\ln x)}{1+x^2}.$$

Упражнения для самостоятельной работы.

1. Пользуясь производными $(\sin x)' = \cos x$ и $(\cos x)' = -\sin x$ и правилом дифференцирования частного двух функций, вывести формулу: $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

2. Найти производную y', если:

а) $y=\frac{2}{x^3}-\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}+\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^2}$; б) $y=3^x(\sin x+\cos x)+\frac{2\arccos x}{1-x^2}-2x^3 arctgx$;

в) $y=2\left(\frac{1}{4}x^8+x^2\right)\ln x-\frac{\sqrt{x}}{3\arcsin x}$.

3. Найти значение производной функции $f(x)=\sqrt[4]{x}$ в точке $x=1$.

4. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y=\sqrt{x}$ в точке с абсциссой $x=4$.

5. Показать, что (при переменном радиусе R) поверхность шара S есть производная от его объёма V по радиусу R, то есть $S=\frac{dV}{dR}$.

6. Зависимость пути S от времени t в прямолинейном движении даётся формулой: $S=t^4$. Найти скорость движения:

а) в произвольный момент времени;

б) в момент времени $t=3$.

Найти ускорение движения в момент времени $t=2$.

§8. Производная сложной функции.

Если функция $u=\varphi(x)$ имеет в данной точке производную, а функция $y=f(u)$ в соответствующей точке «u» также имеет производную (по аргументу «u»), то и сложная функция $y=f[\varphi(x)]$ имеет в точке x производную, причём

$$y'_x=f'_u(u)\cdot\varphi'_x(x)$$

(индексы внизу у характеристик указывают, по какому аргументу ведётся дифференцирование).

Коротко записывают так: $y'_x=y'_u\cdot u'_x$ или $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$.

Пример 1. Найти производную функции $y=2^{\sin x}$.

Решение. Мы имеем сложную функцию. Здесь $y=f(u)=2^u$, где $u=\varphi(x)=\sin x$. Так как $y'_u=(2^u)'=2^u\ln 2$, а $u'_x=\cos x$, то

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x=2^u\ln 2\cdot\cos x=2^{\sin x}\ln 2\cdot\cos x,$$

то есть $(2^{\sin x})' = 2^{\sin x}\ln 2\cdot\cos x$.

Нужно иметь в виде, что не следует злоупотреблять записью, с *фактическим* обозначением промежуточного аргумента. При навыке действия по формуле $y'_x = y'_u \cdot u'_x$ должны производиться в уме. Например, для функции $y = \ln\sin x$ имеем $y' = \frac{1}{\sin x}\cdot\cos x = ctgx$.

<u>Пример 2.</u> Найти производную от функции $y = \ln^3(6x^2+1)$.

Решение. Вводя обозначения $\ln(6x^2+1) = u$, мы получим: $y = u^3$. Тогда $y'_x = y'_u \cdot u'_x = 3u^2 u'_x$. Но здесь функция $u = \ln(6x^2+1)$ сама является сложной функцией. Обозначив $6x^2+1$ через v, можем написать: $u = \ln v$, $v = 6x^2+1$. Тогда $u'_x = u'_v v'_x = \frac{1}{v}\cdot 12x = \frac{12x}{6x^2+1}$. Подставляя найденное значение u'_x в выражение для y'_x, найдем: $y'_x = 3u^2\frac{12x}{6x^2+1} = \frac{36x}{6x^2+1}\ln^2(6x^2+1)$.

<u>Пример 3.</u> Найти производную гиперболического синуса $y = shx$.

Решение. $(shx)' = \frac{e^x-(e^{-x})'}{2} = \frac{e^x - e^{-x}(-1)}{2} = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$, то есть $(shx)' = chx$.

Аналогично получаем $(chx)' = shx$. Для гиперболического тангенса имеем $(thx)' = \left(\frac{shx}{chx}\right)' = \frac{(shx)'chx - shx(chx)'}{ch^2x} = \frac{ch^2x - sh^2x}{ch^2x} = \frac{1}{ch^2x}$, а для котангенса: $(cthx)' = -\frac{1}{sh^2x}$.

Упражнения для самостоятельной работы.

1. Найти y', если:

а) $y = \sin 4x$; б) $y = \cos\frac{x}{2}$; в) $y = e^{-3x+1}$; г) $y = \arcsin 2x$.

2. Найти производные следующих функций:

а) $y = \ln^3 x$; б) $y = tg^2x$; в) $y = \arcsin^4 x$; г) $y = arctg^5x$;

д) $y = ctgx^2$; е) $y = \sin x^3$.

3. Найти y' для функций:

а) $y = \sqrt[3]{\arcsin 3x}$; б) $y = \sqrt{\ln^3 4x}$; в) $y = \sqrt[4]{ctg^3 2x}$; г) $y = \sqrt{\sin^5 3x}$;

д) $y = arctg\sqrt{6x}$; е) $y = ctg\sqrt[3]{x}$.

4. Найти y',если:

а) $y = (x^2+4)^4 \sin 2x$; б) $y = (3x^3+2x)^3 e^{2x}$;в) $y = (4x^6+x^5+1)^6 arctg 3x$.

5. Найти производные функции:

а) $y = \dfrac{e^{4x+3}}{\sqrt{5x+2}}$; б) $y = \dfrac{\ln(5x+6)}{(x^2+4x)^3}$; в) $y = \dfrac{\cos(7x+\varphi)}{(2x+3)^2}$; г) $y = \dfrac{\sin\left(6x - \dfrac{\pi}{4}\right)}{\sqrt[3]{2x^2+7}}$.

6. Найти y' для следующих функций:

а) $y = sh^2 2x$; б) $y = ch^3 x\sqrt{3x+8}$; в) $y = \dfrac{tg(3x+2)}{\ln^2(2x+1)}$; г) $y = \dfrac{1}{\sqrt{3x}} cth 5x$;

д) $y = \sqrt{chx} \cdot e^{2x+9}$; е) $y = \sqrt[3]{\ln(shx)}$.

§9. Логарифмическое дифференцирование.

Общие основы приёма логарифмического дифференцирования таковы. Пусть дана функция $y = f(x)$, имеющая в своей области определение $f'(x)$ и не обращаясь в этой области ни раз в нуль. Пусть $z = \ln|f(x)| = \ln|y|$. Тогда $z' = \dfrac{1}{y} \cdot y'$, $y' = z'y$. Таким образом, вычисление y' может быть сведено к вычислению z'. Такое сведение нередко применяют в тех случаях, когда вычисление z' производится проще, чем непосредственное вычисление y'.

Пример 1. Дана функция $y = \sqrt[3]{\dfrac{x^2(x^3+1)}{\sqrt[5]{1-x}}}$. Найти y'.

Решение.

$z = \ln|y| = \ln\sqrt[3]{\dfrac{x^2|x^3+1|}{\sqrt[5]{|1-x|}}}$. Логарифмирование даёт:

$z=\frac{2}{3}\ln|x|+\frac{1}{3}\ln|x^3+1|-\frac{1}{15}\ln|1-x|$. Тогда

$$z'=\frac{2}{3x}+\frac{1}{3(x^2+1)}\cdot 3x^2-\frac{1}{15(1-x)}\cdot(-1)=\frac{-24x^4+25x^3-9x+10}{15x(1-x)(x^3+1)}.$$

Отсюда $y'=\frac{-24x^4+25x^3-9x+10}{15x(1-x)(x^3+1)}\sqrt[3]{\frac{x^2(x^3+1)}{\sqrt[5]{1-x}}}$.

Метод логарифмического дифференцирования применим к отысканию производной показательно-степенной функции $y=[u(x)]^{v(x)}$. Результатом является формула $(u^v)'=v\cdot u^{v-1}u'+u^v\ln u\cdot v'$.

Эту формулу легко запомнить, если заметить, что, полагая в равенстве $y=u^v$, $v=const$, мы для y' получаем выражение равное первому слагаемому правой части формулы, а, полагая $u=const$,найдём для y' второе слагаемое.

Итак, производная показательно-степенной функции получается, если эту функцию один раз продифференцировать как степенную, а другой раз как показательную, и результаты сложить.

<u>Пример 2.</u> Найти y' для $y=x^x$.

Решение. $y'=x\cdot x^{x-1}\cdot x'+x^3\ln x\cdot x'=x^x\cdot 1+x^x\ln x\cdot 1=x^x(1+\ln x)$.

<u>Пример 3.</u> Найти y' для $y=(\sin x)^{\cos x}$, $\sin x>0$.

Решение.

$$y'=\cos x\cdot(\sin x)^{\cos x-1}\cdot\cos x+(\sin x)^{\cos x}\cdot\ln\sin x\cdot(-\sin x)=$$
$$=(\sin x)^{\cos x-1}(\cos^2 x-\sin^2 x\ln\sin x).$$

§10. Производные высших порядков.

Производной n-ого порядка (n-й производной) от данной функции называется производная от её (n-1)-й производной (в предположении, что эти производные существуют). Её обозначают через $\frac{d^n y}{dx^n}=y^{(n)}=(y^{(n-1)})'$. В частности, $y''=f''(x)=(y')''=(f'(x))'=\frac{d^2y}{dx^2}$- производная второго порядка (вторая производная). При $k>1$ $y^{(n)}=f^{(n)}(x)$ называется производной высшего порядка от $y=f(x)$. Процесс отыскания всех производных функции до данного порядка включительно называется последовательным дифференцированием функции.

Если прямолинейное движение задано законом $S=f(t)$, а скорость этого движения $v=\varphi(t)=f'(t)$, то ускорение прямолинейного движения:

$$W=\frac{dv}{dt}=\varphi'(t)=f''(t)=\frac{d^2S}{dt^2}.$$

В этом и состоит смысл второй производной.

Пример 1. $y=(6-x^2)\sin x-4x\cos x$. Найти y''.

Решение. Вычислим сначала y':

$$y'=-2x\sin x+(6-x^2)\cos x-4\cos x+4x\sin x=2x\sin x+(2-x^2)\cos x.$$

Теперь находим y'':

$$y''=(y')'=2\sin x+2x\cos x-2x\cos x-(2-x^2)\sin x=x^2\sin x.$$

Итак, $y''=x^2\sin x$.

Пример 2. $y=\sin x$. Найти $y^{(n)}$.

Решение. Имеем: $y'=\cos x$, $y''=-\sin x$, $y'''=-\cos x$, $y^{IV}=\sin x$. Так как $y^{IV}=y$, то дальше производные начнут периодически повторяются: $y^{V}=y'$, $y^{VI}=y''$, $y^{VII}=y'''$, $y^{VIII}=y^{IV}=y$. Вообще $y^{(4k)}=y$, $y^{(4k+1)}=y'$, $y^{(4k+2)}=y''$, $y^{(4k+3)}=y'''$ ($k=0,1,2,3...$), причем под $y^{(0)}$ понимается сама функция y.

$$(uv)^{(n)}=u^{(n)}v+\frac{n}{1}u^{(n-1)}v'+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}u^{(n-2)}v''+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}u^{(n-3)}v'''+...+$$
$$+\frac{n(n-1)...[n-(k-1)]}{1\cdot 2\cdot ...\cdot k}u^{(n-k)}v^{(k)}+...+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}u''v^{(n-2)}+\frac{n}{1}u'v^{(n-1)}+u\cdot v^{(n)}.$$

Если $u=f(x)$, $v=\varphi(x)$, то для $(uv)^{(k)}$ имеет место формула Лейбница:

$$(uv)^{(n)}=u^{(n)}v+\frac{n}{1}u^{(n-1)}v'+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}u^{(n-2)}v''+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}u^{(n-3)}v'''+...+$$
$$+\frac{n(n-1)...[n-(k-1)]}{1\cdot 2\cdot ...\cdot k}u^{(n-k)}v^{(k)}+...+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}u''v^{(n-2)}+\frac{n}{1}u'v^{(n-1)}+u\cdot v^{(n)}.$$

Пример 3. $y=x^2e^x$. Найти $y^{(n)}$.

Решение. Полагая $u = x^2$ и $v = e^x$, находим:

$u' = 2x$, $u'' = 2$,

$u''' = u^{IV} = ... = u^{(n)} = 0 \ (n > 2)$,

$v' = e^x$, $v'' = e^x$, …, $v^{(n)} = e^x$.

Применяя формулу Лейбница, получим:

$$y^{(n)} = \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}u''v^{(n-2)} + \frac{n}{1}u'v^{(n-1)} + uv^{(n)} = \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}2e^x + n\cdot 2xe^x + x^2e^x + (x^2 + 2nx + n^2 - n)e^x.$$

Упражнения для самостоятельной работы.

1. $y = 7x^4 - 11x^3 + 9x^2 - 4x + 3$. Найти $y^{(n)}$.

2. $f(x) = \ln\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$. Найти $f''\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

3. Доказать, что функция $y = ae^{2x} + be^{3x}$ удовлетворяет условию $y'' - 5y' = -6y$.

4. Найти $y^{(n)}$ для функции:

а) $y = ae^{bx}$; б) $y = \sin^2 x$; в) $y = x^3 \ln x$.

5. Движение происходит прямолинейно по закону $S = t^3 - 6t^2 + 9t$, где S выражается в метрах, а время t - в секундах. Найти ускорение движения в моменты времени $t = 1$ и $t = 2$.

§11. Дифференцирование функций, заданных параметрически.

Пусть функция $y = f(x)$ задана параметрически системой: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ - функции, имеющие на данном промежутке производные, причём $\varphi'(t) \neq 0$. Тогда $f'(x) = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$.

Пример 1. Функция $y = f(x)$ задана параметрически системой: $x = 2\sin t$, $y = 2\cos t$ $\left(-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}\right)$. Областью определения $f(x)$ является сегмент $[-2;2]$. Так как функции $\varphi(t) = 2\sin t$ и $\psi(t) = 2\cos t$ имеют производные в каждой точке t, причём $\varphi'(t)\neq 0$ на $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, то можно утверждать, что определяемая данной системой функция $y=f(x)$ имеет в каждой точке интервала $(-2;2)$ производную:

$$f'(x)=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}=\frac{(2\cos t)'}{(2\sin t)'}=-\frac{\sin t}{\cos t}=-tgt\,.$$

В точках $t=\pm\frac{\pi}{2}$ имеем: $\varphi'(t)=0$. В соответствующих точках $x=\pm 2$ функция $f(x)$ не имеет производной.

Предположим, что на данном промежутке функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имеют производные как первого, так и второго порядков и что на нём $\varphi'(t)\neq 0$. Тогда

$$f''(x)=\frac{[f'(x)]'_t}{\varphi'(t)}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\varphi''(t)\psi'(t)}{[\varphi'(t)]^2}\,.$$

Пример 2. Найти $f'(x)$ и $f''(x)$ для функции $y=f(x)$, заданной в параметрической форме уравнениями:

$$x=\varphi(t)=t-2\sqrt{t}\,,\ x=\psi(t)=t+2\sqrt{t}\,,\ (1<t<\infty)\,.$$

Решение. Прежде всего здесь существует $\varphi'(t)\neq 0$. Следовательно, данная система определяет y как функцию от x. Областью определения этой функции будет $(-1;\infty)$. Далее, на $(1;\infty)$ существует и $\psi'(t)$, значит на $(-1;\infty)$ существует $f'(x)$:

$$f'(x)=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}=\frac{1+\frac{1}{\sqrt{t}}}{1-\frac{1}{\sqrt{t}}}=\frac{\sqrt{t}+1}{\sqrt{t}-1}=1+\frac{2}{\sqrt{t}-1}$$

для $t>1$, или, что то же, для $x>-1$. Но производные $\varphi''(t)$ и $\psi''(t)$ также существуют на $(1;\infty)$. Следовательно, существует на $(-1;\infty)$ функция

$$f''(x)=\frac{d}{dt}\left(1+\frac{2}{\sqrt{t}-1}\right)\frac{1}{(t-2\sqrt{t})'}=\frac{-\frac{1}{\sqrt{t}}}{(\sqrt{t}-1)^2}\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{t}}}=-\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t}(\sqrt{t}-1)^3}=-\frac{1}{(\sqrt{t}-1)^3}\,.$$

Упражнения для самостоятельной работы.

1. Проверить, что система $x = 2t^2 + 1$, $y = 4 - t^3$ $(t \geq 0)$ определяет y как функцию от x на $[1;\infty)$, и найти явное выражение y через x.

2. Найти y'_x и y''_x для функции, заданной уравнениями: $x = t - \ln t$, $y = t + \ln t$ $(1 < t < \infty)$.

§12. Понятие дифференциала функции.

Пусть дана функция $y = f(x)$, имеющая в данной точке x производную $f'(x)$. Дифференциалом функции $y = f(x)$ в данной точке x называется произведением этой функции в выбранной точке на приращение Δx независимого переменного: $dy = f'(x)\Delta x$.

При достаточно малом Δx можно пользоваться приближенным равенством: $\Delta y \approx dy$, которое дает тем лучшее приближение для Δy, чем меньше Δx. Это соотношение широко применяется в теории приближенных вычислений. Итак, $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$.

<u>Пример 1.</u> Дана функция $y = f(x) = x^3 - 12x^2 + 57x - 33$. Вычислить приращение функции, получаемое ею при переходе аргумента от значения $x = 4$ к значению $x = 4{,}0003$.

Решение. Находим: $f'(x) = 3x^2 - 24x + 57$, $f'(4) = 3 \cdot 16 - 24 \cdot 4 + 57 = 9$, $\Delta x = 4{,}0003 - 4 = 0{,}0003$. Следовательно, $dy = f'(4) \cdot \Delta x = 9 \cdot 0{,}003 = 0{,}0027$, а $\Delta y \approx 0{,}0027$.

<u>Пример 2.</u> Вычислить без помощи таблицы $\sin 45^\circ 6'$.

Решение. Здесь $f(x) = \sin x$, $x = \dfrac{\pi}{4}$, $\Delta x = \dfrac{\pi}{1800}$ ($\dfrac{\pi}{1800}$ - радианная мера угла в $45^\circ 6'$), тогда получим, учитывая, что $f'(x) = \cos x$;

$$\sin 45^\circ 6' = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{1800}\right) \approx \sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} \cdot \frac{\pi}{1800}.$$

Но $\sin\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 0{,}70711$, а $\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\pi}{1800}\approx 0{,}001233$, поэтому

$$\sin 45^{\circ}6'=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{1800}\right)\approx 0{,}70711+0{,}00123\approx 0{,}7083 .$$

Пример 3. Ход стенных часов регулируется маятником, период качания которого T (в секундах) определяется по формуле: $T=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, где l - длина маятника (в сантиметрах), g - ускорение силы тяжести ($g\approx 980\frac{см}{сек^2}$). Перемещая с помощью винта груз маятника, можно изменить длину маятника. Часы отстают, и маятник совершает одно качание в течение 0,602 секунды, вместо того, чтобы совершать его в течение 0,6 секунд. На сколько следует уменьшить длину маятника, чтобы часы шли верно?

Решение. Из формулы, связывающей T и l, находим: $l=\frac{gT^2}{\pi^2}$. Речь идет о том, чтобы вычислить то приращение Δl длины l маятника, которое соответствует уменьшению периода T от значения $T_1=0{,}602$ до значения $T_2=0{,}6$.

Имеем $dl=\frac{2gT}{\pi^2}\Delta T$, что при $T=T_1=0{,}602$ и $\Delta T=-0{,}002$ даёт:

$$dl=\frac{-2g\cdot 0{,}602\cdot 0{,}002}{\pi^2}\approx\frac{-2\cdot 980\cdot 0{,}602\cdot 0{,}002}{9{,}87}\approx -2{,}4(мм),$$

откуда и $\Delta l\approx -2{,}4(мм)$.

Дифференциалом dx независимого переменного x называется его приращение, то есть по определению $dx=\Delta x$. Тогда $dy=f'(x)dx$, откуда $f'(x)=\frac{dy}{dx}$.

Пример 4. Найти дифференциал функции $y=(x^2+1)(arctgx)^2$.

Решение. $y'=2x(arctgx)^2+(x^2+1)\cdot 2arctgx\cdot\frac{1}{1+x^2}=2x(arctgx)^2+2arctgx$, Дифференциал функции всегда выражается формулой $dy = f'_x(x)dx$, как в том случае, когда y - простая функция (то есть x - независимое переменное), так и в том случае, когда y - сложная функция (x - функция некоторого аргумента t). В этом и заключается свойство инвариантности (неизменяемости) дифференциала функции.

Упражнения для самостоятельной работы.

1. Найти дифференциал функции $y = \sqrt{x^2 - 1} + \arcsin\frac{1}{x}$.

2. Вычислить приращение функции $y = 2x^4 - 3x^3 - 4x - 43$, получаемое ею при переходе аргумента от значения $x = 3$ к значению $x = 3{,}0012$.

3. Найти без помощи таблиц приближенное значение для $tg 61^\circ 30'$.

4. При определении силы тока пользуются формулой: $J = ktg\varphi$, где J - сила тока, k - коэффициент пропорциональности (зависящий от прибора), φ - угол отклонения стрелки прибора. Определить относительную ошибку результата зависящую от неточности в отсчете угла φ. При каком положении стрелки прибора результаты получаются наиболее надёжными?

§ 13. Касательная и нормаль к кривой.

Пусть кривая задана уравнением $y = f(x)$, $f(x)$ - дифференцируемая функция. Точка $M_0(x_0; y_0)$ ($y_0 = f(x_0)$) – точка этой кривой. Тогда уравнением касательной к кривой в точке M_0 имеет вид: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$. Здесь $k = f'(x_0)$.- угловой коэффициент касательной в точке M_0.

Уравнение нормали к кривой в точке M_0, то есть перпендикуляр к кривой в точке M_0 запишется в виде: $y - y_0 = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$, ($f'(x_0) \neq 0$). Если $f'(x_0) = 0$, то уравнение нормали: $x = x_0$).

Пример 1. Провести касательную к параболе $y = f(x) = x^2$ в точке $M_0(2;4)$.

Решение. $f'(x) = 2x$, $f'(x_0) = 2x_0 = 2 \cdot 2 = 4$, следовательно, $k = 4$. Откуда уравнение касательной: $y - 4 = 4(x - 2)$, или $y = 4x - 4$.

Для построения искомой касательной укажем ещё одну какую-либо её точку, кроме M_0, например $B(0,-4)$. Соединив точки M_0 и B прямой линией, мы построим требуемую касательную (рис.4).

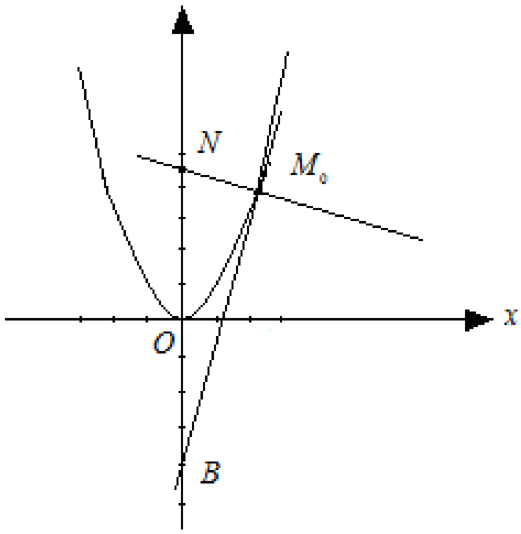


Рисунок 4.

Уравнение нормали M_0N будет: $y - 4 = -\frac{1}{4}(x - 2)$, или $x + 4y - 18 = 0$.

Если кривая задана параметрически: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, то уравнение касательной к этой кривой в точке $(x_0; y_0)$ будет:

$$y - y_0 = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}(x - x_0),$$

(точке $(x_0; y_0)$ соответствует значение $t = t_0$).

Нормаль же имеет уравнение:

$$y - y_0 = -\frac{\varphi'(t_0)}{\psi'(t_0)}(x - x_0), \text{ (при } \psi'(t_0) \neq 0\text{).}$$

Упражнения для самостоятельной работы.

1. Составить уравнения касательной и нормали к кривой $y = 3\sqrt{x}$ в точке $A(4;6)$.

2. Кривая задана уравнениями $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$ $(0 < t < 2\pi)$. Составить уравнения касательной и нормали в точке $t_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

§ 14. Раскрытие неопределенностей. Правило Лопиталя.

В этом параграфе рассматривается применение производной к нахождению пределов некоторых функций.

I. Неопределённость вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

Если бесконечно малые при $x \to a$ функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ имеют в некоторой окрестности точки a производные $f'(x)$ и $\varphi'(x)$ (за исключением, быть может, самой точки a), и $\varphi'(x) \neq 0$ для точек этой окрестности, то

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} \text{ (правило Лопиталя).}$$

<u>Пример 1.</u> Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x} - \ln(x+e)}{\arcsin x}$.

Решение. Здесь $\lim\limits_{x\to 0}[e^{2x} - \ln(x+e)] = 0$, $\lim\limits_{x\to 0}\arcsin x = 0$,

поэтому имеем неопределенность вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Далее, $f'(x)$ и $\varphi'(x)$ существуют в окрестности точка $x = 0$ (например, $(-1;1)$), причём $\varphi'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \neq 0$.

Тогда по правилу Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x} - \ln(x+e)}{\arcsin x} = \lim_{x\to 0}\frac{[e^{2x} - \ln(x+e)]'}{(\arcsin x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x} - \dfrac{1}{x+e}}{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = 2 - \frac{1}{e}.$$

II. Неопределенность вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

Правило Лопиталя в случае неопределенности $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ формулируется аналогично случаю $\left(\frac{0}{0}\right)$, если $f(x)$ и $\varphi(x)$ - бесконечно большие функции при $x \to a$.

Замечание. Правило Лопиталя может быть обобщено и на тот случай, когда $x \to \infty$ $(x \to +\infty, x \to -\infty)$.

<u>Пример 2.</u> Найти $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^3}{e^x}$.

Решение.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{e^x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{(x^3)'}{(e^x)'} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2}{e^x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{(3x^2)'}{(e^x)'} = \lim_{x \to +\infty} \frac{6x}{e^x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{(6x)'}{(e^x)'} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{6}{e^x} = 0.$$

III. Неопределенность вида $(0 \cdot \infty)$.

Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ и $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = \infty$,то вопрос о вычислении $\lim\limits_{x \to a} [f(x)\varphi(x)]$ сводится к раскрытию неопределенности вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ и $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, так как

$$f(x)\varphi(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}} = \frac{\varphi(x)}{\frac{1}{f(x)}}.$$

IV. Неопределенность вида $(\infty - \infty)$.

Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ $(+\infty; -\infty)$ и $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = \infty$ $(+\infty; -\infty)$, то отыскание предела $\lim\limits_{x \to a} [f(x) - \varphi(x)]$. сводится к раскрытию неопределенности $\left(\frac{0}{0}\right)$ в силу тождества (по крайней мере в достаточно малой окрестности точки $x = a$)

$$f(x) - \varphi(x) = \frac{\frac{1}{\varphi(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{\varphi(x) f(x)}}.$$

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

Решение. Имеем:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2x-\sin 2x}{2x\sin^2 x+x^2\sin 2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos 2x}{2\sin^2 x+4x\sin 2x+2x^2\cos 2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x}{3\sin 2x+6x\cos 2x-2x^2\sin 2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x}{12\cos 2x-16x\sin 2x-4x^2\cos^2 x}=\frac{1}{3}.$$

V. Неопределенность вида $1^\infty, 0^0, \infty^0$.

Пусть надо найти предел вида: $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\right]^{\varphi(x)}=0$, (где $f(x)>0$ в некоторой окрестности точки a) в одном из следующих случаев:

а) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$ (неопределенность вида 1^∞);

б) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$ (неопределенность вида 0^0);

в) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$ (неопределенность вида ∞^0).

Во всех случаях действуем однообразно: обозначаем $y=\left[f(x)\right]^{\varphi(x)}$ и находим $\ln y : \ln y=\varphi(x)\ln f(x)$.

Рассматривая правую часть этого равенства в окрестности точки a, имеем в первом случае: $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a}\ln f(x)=0$, во втором и третьем: $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a}\ln f(x)=\infty$, то есть во всех трёх случаях получаем при $x\to a$ неопределенность вида $0\cdot\infty$. Предположим, что нам удалось раскрыть эту неопределенность и найти $\lim\limits_{x\to a}\ln y=l$. Тогда в силу непрерывности логарифмической функции и $\lim\limits_{x\to a}\ln y=l$, откуда и находим искомый предел: $\lim\limits_{x\to a} y=e^l$.

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

Решение. Имеем неопределенность вида 1^{∞}. Пусть $y=\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$, тогда

$\ln y=\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}$ (неопределенность вида $(0\cdot\infty)$), или $\ln y=\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{x^2}$ (неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$).

Применяя правило Лопиталя, получаем:

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{3x^2}=$$

$$=-\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=-\frac{1}{6}.$$

Следовательно, $\lim_{x\to 0}\ln y=e^{-\frac{1}{6}}$, то есть $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{-\frac{1}{6}}$.

Упражнения для самостоятельной работы.

1. Вычислить пределы:

а) $\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$; б) $\lim_{x\to 0}\frac{2^x-3^x}{3^x-4^x}$.

2. Вычислить пределы:

а) $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln^3 x}{x^4}$; б) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{tg5x}{tg3x}$.

3. Вычислить предел $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\arcsin x}-\frac{1}{arctgx}\right)$.

4. Вычислить предел $\lim_{x\to 1}(1-x)tg\frac{\pi x}{2}$.

5. Вычислить предел $\lim_{x\to 0}(\sin x)^{\sin x}$.

§ 15. Условия монотонности.

Если в каждой точке некоторого промежутка производная функция $f'(x)$ существует и сохраняет на нем один и тот же знак, за исключением, быть может, отдельных точек, в которых она обращается в нуль, то в этом промежутке функция $f(x)$ монотонна. В частности, если на рассматриваемом промежутке $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$), то $f(x)$ монотонно возрастает (убывает) на этом промежутке.

<u>Пример 1.</u> Исследовать на монотонность функцию $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 7$.

Решение. Данная функция для всех x имеет производную:

$y' = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x-2)(x+1)$.

Корнями y' являются числа $x = -1$, $x = 2$; коэффициент при x^2 - положительное число. Тогда квадратный трёхчлен, то есть y', имеет положительное значение при $x < -1$ и $x > 2$, и отрицательное – внутри промежутка между этими корнями, то есть при $-1 < x < 3$. Следовательно, в интервалах $(-\infty;-1)$ и $(2;\infty)$ Даная функция монотонно возрастает, а в интервале $(-1;2)$ - монотонно убывает. График исследуемой функции изображен на рисунке 5.

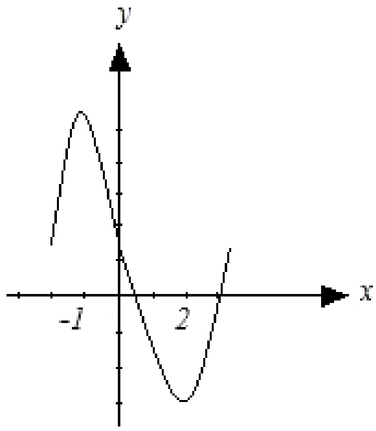


Рисунок 5.

<u>Пример 2.</u> Исследовать на возрастание и убывание функцию

$f(x) = x + \cos x$.

Решение. Находим $f'(x) = 1 - \sin x$. Так как $\sin x \le 1$, то $f'(x) \ge 0$, причём $f'(x) = 0$ только в отдельных точках: $x = 2k\pi + \dfrac{\pi}{2}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Таким образом, данная функция возрастает в интервале $(-\infty;+\infty)$. График функции изображён на рисунке 6.

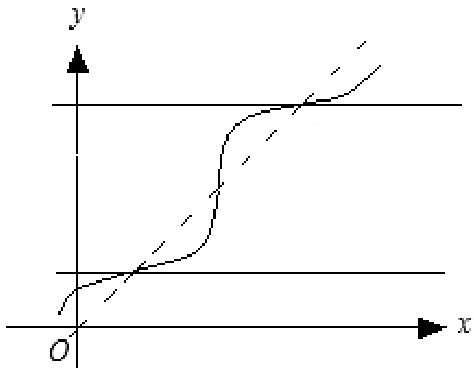


Рисунок 6.

В точках $x = 2k\pi + \dfrac{\pi}{2}$ касательная к кривой, являющейся графиком данной функции, параллельна оси OX.

Пример 3. Из орудия вертикально вверх выпускают снаряд с начальной скоростью $v_0 = 200 м/сек$. Узнать, поднимается ли снаряд вверх или падает вниз в момент:

а) $t = 15$ *сек.*; б) $t = 25$ *сек.*.

Решение. По условию задачи расстояние снаряда от земной поверхности выражается формулой: $S(t) = 200t - \dfrac{gt^2}{2}$, где t - время, отсчитываемое в секундах от момента $t = 0$, $g \approx 9{,}8\ м/сек^2$ - ускорение силы тяжести. Тогда $S'(t) = 200t - gt$. При $t < \dfrac{200}{g}$ имеем $S'(t) > 0$, а при $t > \dfrac{200}{g}$ $S'(t) < 0$, и поэтому $S(t)$ возрастает в $\left(0; \dfrac{200}{g}\right)$ и убывает в $\left(\dfrac{200}{g}; \infty\right)$. Так как $t = 15$ *сек.* принадлежит первому интервалу, а $t = 25$ *сек.* - второму, то в момент $t = 15$ *сек.* снаряд поднимается вверх, а в момент $t = 25$ *сек.* - опускается вниз.

Пример 4. Доказать справедливость неравенства $\dfrac{e^x}{x} > e$ при $x > 1$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{e^x}{x} - e$ и убедимся в том, что она при $x > 1$ положительна.

Найдём производную: $f'(x) = \frac{e^x}{x} - \frac{1}{x^2}e^x = \frac{e^x}{x^2}(x-1)$.

Для $x \ge 1$ $f'(x)$ неотрицательна, причём она равна нулю только для $x = 1$, значит, $f(x)$ возрастает на $[1;\infty)$. Но так как $f(1) = 0$, то при $x > 1$ имеем $f(x) > 0$, то есть $\frac{e^x}{x} - e > 0$, или $\frac{e^x}{x} > e$ для всех $x > 1$.

Упражнения для самостоятельной работы.

1. Найти промежутки возрастания и убывания следующих функций:

а) $y = 3x^4 - 8x^3 + 16$; б) $y = x^3 + 6x^2 + 12x - 13$;

в) $y = \frac{x^2 + x - 1}{x^2 - x + 1}$; г) $y = (x^2 - 3)e^{-x^2}$; д) $y = tgx - x$.

2. Доказать неравенства:

а) $e^x \ge 1 + x, \quad x > 0$; б) $\cos x > 1 - \frac{1}{2}x^2, \quad x > 0$.

3. Прямолинейное движение точки совершается по закону $S = t^3 - 12t^2 + 45t$, где S (см) – расстояние точки от начального положения в момент t (сек.). Определить промежутки времени, в которые расстояние S будем возрастать или убывать, и те моменты, в которые будет происходить смена направления движения, а также вычислить ускорение движения в эти моменты.

§ 16. Экстремумы функций одной переменной.

Пусть функция $f(x)$ определена в некотором промежутке и x_0 - внутренняя точка этого промежутка.

Говорят, что функция $f(x)$ имеет максимум (минимум) в точке x_0, если существует такая окрестность ($x_0 - \delta; x_0 + \delta$) данной точки, что для всякого x из этой окрестности выполняется соотношение:

$f(x) \le f(x_0)$, ($f(x) \ge f(x_0)$).

Само значение $f(x_0)$ принято называть максимумом (минимумом) функции и обозначать: $f_{\max}(x_0)$ ($f_{\min}(x_0)$) или $f_{\max}$ ($f_{\min}$).

Пример 1. Функция $f(x)=+\sqrt{1-x^2}$ в точке $x_0=0$ имеет максимум (строгий), $f_{\max}=f(0)=1$(рис. 7).

Пример 2. Функция $f(x)=\begin{cases}1, x<1\\ 2, x=1\\ 2x-1, x>1\end{cases}$ (рис. 8) имеет в точке $x_0=1$ максимум (строгий), $f_{\max}(1)=2$.

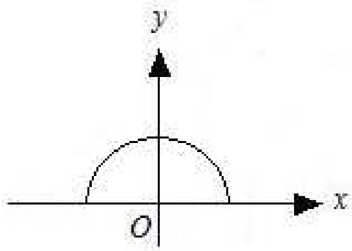


Рисунок 7.

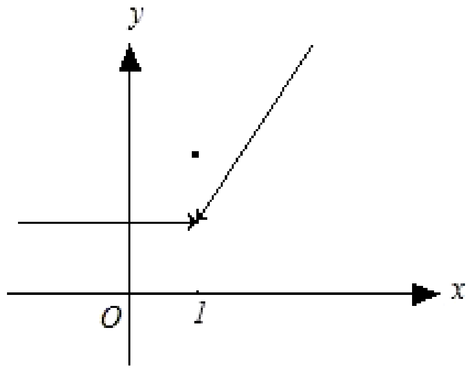


Рисунок 8.

Пример 3. Функция $f(x)=|x|$ в точке $x_0=0$ имеет минимум (строгий) (рис. 3). Одна и та же функция может в своей области иметь несколько различных максимумов и несколько различных минимумов.

Так, например, функция, график которой представлен на рисунке 9, имеет максимумы в точках x_2, x_4, x_6 и минимумы в точках x_1, x_3, x_5 (причем максимумы в точках x_4, x_6 меньше минимума в точке x_1).

Максимум и минимум функции объединяются под общим названием экстремума или экстремального значения функции.

Точки, в которых функция $f(x)$ достигает максимума или минимума (имеет экстремум), называются соответственно точками максимума или минимума (экстремума) функции.

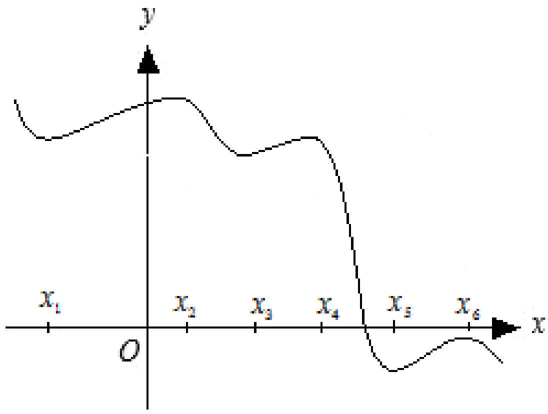


Рисунок 9.

Необходимое условие существования экстремума. Если функция $f(x)$, заданная на некотором промежутке, имеет экстремум в какой-либо внутренней точке x_0 этого промежутка, то производная $f'(x)$ при $x = x_0$ необходимо равна нулю (если она существует в рассматриваемой точке), то есть $f'(x_0) = 0$.

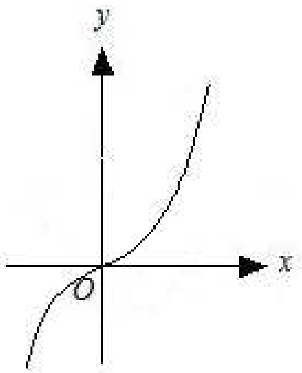
Функция может иметь экстремум и в таких точках, в которых производная вовсе не существует. Так, в примере 3 было показано, что $f(x) = |x|$ в точке $x_0 = 0$ имеет минимум. Однако эта функция в точке $x_0 = 0$ производной не имеет.

Кроме того, известно, что производная не может существовать в точках разрыва функции. Но в примере 2 мы видели, что экстремум может быть и в таких точках.

Точки, в которых производная функции равна нулю или не существует, будем называть критическими. Функция может иметь экстремум только в критических точках. Обратное утверждение неверно.

<u>Пример 4.</u> Для функции $f(x) = x^3$ (рис. 13) точка критическая точка, так как $f'(x) = 3x^2 = 0$, при $x = 0$. Но в этой точке $f(x)$ не имеет экстремума (рис. 10).

<u>Пример 5.</u> Для функции $f(x) = \sqrt[3]{x}$: $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ (для $x \neq 0$). При $x = 0$ производная не существует, $x_0 = 0$ - критическая точка. Однако в этой точке $f(x)$ не имеет экстремума (рис.11).



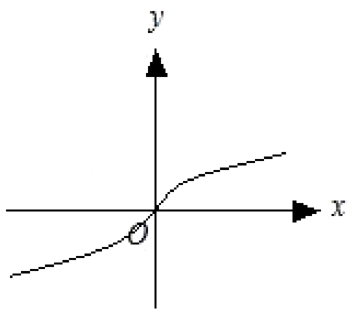


Рисунок 10. Рисунок 11

Сформулируем достаточные условия существования экстремума функции. При этом, говоря об экстремуме функции, мы будем подразумевать только строгий экстремум.

Пусть функция $f(x)$ в некоторой окрестности $(x_0-\delta; x_0+\delta)$ точки x_0 удовлетворяет следующим условиям:

1) имеет в каждой точке этой окрестности производную (за исключением, быть может, точки x_0, в которой, однако, $f(x)$ непрерывна);

2) производная $f'(x)$ сохраняет некоторый определенный знак при $x_0-\delta<x<x_0$, а также тот или иной определенный знак при $x_0<x<x_0+\delta$.

Тогда при $x=x_0$ функция $f(x)$:

а) Будет иметь максимум, если $f'(x)$ переходит от положительных значений к отрицательным, когда x, возрастая, переходит через значение x_0.

б) Будет иметь минимум, если $f'(x)$ переходит от отрицательных значений к положительным, когда x, возрастая, переходит через значение x_0.

в) Не будет иметь экстремума, если $f'(x)$ не меняет знак при переходе x через значение x_0.

<u>Пример 6.</u> Исследовать на экстремум функцию

$$y=f(x)=1+24x-22x^2+8x^3-x^4.$$

Решение. Эта функция имеет производную на интервале $(-\infty;\infty)$. Находим: $y'=24-44x+24x^2-4x^3$. Преобразуем выражение для y':

$$y' = 4(6 - 11x + 6x^2 - x^3) = 4(6 - 6x - 5x + 5x^2 + x^2 - x^3) =$$
$$= 4[6((1 - x) - 5x(1 - x) + x^2(1 - x)] = 4(1 - x)(6 - 5x + x^2) = 4(1 - x)(x - 2)(x - 3).$$

Отсюда корни производной: $x_1 = 1,\ \ x_2 = 2,\ \ x_3 = 3$.

Данная функция имеет производную в каждой точке, поэтому критическими точками являются здесь только корни производной.

Исследуем производную на изменение знака при переходе x через каждую критическую точку.

Взяв сначала наименьшее подозрительное на экстремум значение аргумента $x_1 = 1$, выберем произвольный сегмент, содержащий $x_1 = 1$, на не содержащий соседнюю критическую точку $x_2 = 2$, например, сегмент $0 \le x \le 1{,}5$. Пользуясь выражением для производной, определяем знаки её значений на концах взятого сегмента: $f'(0) > 0$, $f'(1{,}5) < 0$.

Итак, знак производной при переходе аргумента от значений, меньших чем 1, к значениям, больших чем 1, меняется с плюс анна минус. Следовательно, $x_1 = 1$ есть точка максимума данной функции. Максимум функции будет: $f_{\max}(1) = 10$.

Вслед за $x_1 = 1$ берём критическую точку $x_2 = 2$. Рассмотрим сегмент, содержащий $x_2 = 2$, но не содержащий $x_1 = 1,\ x_3 = 3$, например, сегмент: $1{,}5 \le x \le 2{,}5$.

Как уже было найдено выше, $f'(1{,}5) < 0$, в то время как $f'(2{,}5) > 0$, то есть при переходе x через значение $x_2 = 2$ производная меняет свой знак с минуса на плюс. Значит, $x_2 = 2$ - точка минимума функции, а $f_{\min}(2) = 9$.

Наконец, исследуем производную на изменение знака при переходе аргумента через последнюю критическую точку $x_3 = 3$. Берём промежуток: $2{,}5 \le x \le 4$. Находим: $f'(2{,}5) > 0$, $f'(4) < 0$. Производная меняет знак с плюса на минус. Следовательно, $x_3 = 3$ - точка максимума, а $f_{\max}(3) = 10$.

Результат оформим в виде таблицы:

x	$(-\infty;1)$	1	$(1;2)$	2	$(2;3)$	3	$(3;\infty)$
y'	$y'>0$	$y'=0$	$y'<0$	$y'=0$	$y'>0$	$y'=0$	$y'<0$
y	*Возрастает*	***max***	*убывает*	***min***	*возрастает*	***max***	*убывает*

График данной функции изображен на рисунке 12.

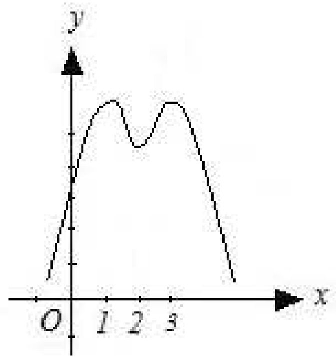


Рисунок 12.

Замечания.

1. Если c - некоторое положительное постоянное, то функция $cf(x)$ имеет максимум или минимум для таких и только таких значений переменного x, которые доставляют максимум или соответственно минимум функции $f(x)$.

2. Если c - некоторое отрицательное постоянное, то функция $cf(x)$ имеет максимум (минимум) для таких и только таких значений переменного x, которые доставляют минимум (максимум) функции $f(x)$.

3. Функция $\sqrt[n]{\varphi(x)}$ $(n \in N)$ имеет максимум (минимум) для тех и только тех значений x, которые доставляют максимум (минимум) функции $\varphi(x)$, рассматриваемой в области определения $f(x)$.

4. Если $f(x)=\dfrac{1}{\psi(x)}$, где $\psi(x)$ непрерывная в своей области определения функция, то $f(x)$ достигает максимума (минимума) при тех и только тех значениях x, при которых функция $\psi(x)$ достигает минимума (максимума), не обращаясь при этом в нуль.

5. Если непрерывная на данном промежутке функция $f(x)$ имеет в двух каких-либо его различных точках x_1 и x_2 максимум (минимум) (безразлично,

строгий или нет), то между этими точками найдется хоть одна точка, в которой $f(x)$ будет иметь минимум (максимум) (возможно, он окажется и нестрогим).

Пример 7. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x)=\frac{23}{25\sqrt{24x^7-70x^6+105x^4-56x^3+47}}.$$

Решение. Следуя только что сделанным указаниям, мы вместо данной функции $f(x)$ исследуем на экстремум функцию

$$\varphi(x)=24x^7-70x^6+105x^4-56x^3+47.$$

Имеем $\varphi'(x)=168x^6-420x^5+402x^3-168x^2$, или

$$\varphi'(x)=168x^2(x^4-\frac{5}{2}x^3+\frac{5}{2}x-1)=168x^2[(x^4-1)-\frac{5}{2}x(x^2-1)]=$$

$$=168x^2(x^4-1)(x^2+1-\frac{5}{2}x)=168x^2(x^2-1)(x-\frac{1}{2})(x-2).$$

Корни производной будут: $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=\frac{1}{2}$, $x_4=1$, $x_5=2$. При этих значениях x знаменатель функции $f(x)$ является действительным числом и не обращается в нуль. Следовательно, они являются критическими точками не только для $\varphi(x)$, но и для $f(x)$.

Как легко видеть, производная $\varphi'(x)$ при переходе аргумента x через значение $x_1=-1$ меняет знак с плюса на минус. Значит, при $x_1=-1$ функция $\varphi(x)$ имеет максимум. При переходе x через значение $x=\frac{1}{2}$ производная $\varphi'(x)$ меняет знак с минуса на плюс. Следовательно, при $x=\frac{1}{2}$ $\varphi(x)$ имеет минимум.

Так как $\varphi(x)$ непрерывна на $(-\infty;\infty)$ и имеет на нём лишь конечное число подозрительных на экстремум точек, а следовательно, и экстремумов, то, согласно п. 5 замечания максимальны и минимальны этой функции должны чередоваться. Но тогда в точке $x_2=0$ функция $\varphi(x)$ не имеет экстремума (так как в противном случае мы имеем для неё подряд или два максимума, иди два минимума).

Исследуя производную $\varphi'(x)$ на изменение знака при переходе аргумента через значение $x=2$, найдём, что при этом значении x функция $\varphi(x)$ имеет минимум, а тогда при $x=1$ эта функция получает максимум, так как иначе она имела бы по крайней мере два минимума подряд.

Тогда согласно п. 1, 3 и 4 замечания функция $f(x)$ имеет: при $x=-1$ - минимум, при $x=\frac{1}{2}$ - максимум, при $x=1$ - минимум, при $x=2$ - максимум.

Упражнения для самостоятельной работы.

Исследовать на экстремум следующие функции:

а) $y=4x^3-3x^2-18x+5$; б) $y=x^4-x^3+4$; в) $y=(3-x)^2(1+x)^3$;

г) $y=\dfrac{x}{x^2-5x+6}$; д) $y=\sqrt{x^2-8x}+7$;

е) $y=\dfrac{8}{\sqrt[3]{2x^6-9x^4+12x^2+4}}$.

§ 17. Наибольшее и наименьшее значения функции.

Если функция $f(x)$ непрерывна на данном сегменте $[a;b]$, то для того, чтобы найти наибольшее (наименьшее) значение $f(x)$ на этом сегменте, нужно найти все экстремумы (если это затруднительно, то можно обратиться к нахождению значений функции во всех критических точках этой функции, а также вычислить её значения $f(a)$ и $f(b)$ на концах сегмента и выбрать из всех этих чисел наибольшее (наименьшее).

Пример 1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=x^4-2x^2+1$ на [-2;2].

Решение. Находим: $f'(x)=4x^3-4x$. Корни первой производной есть $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=1$. Исследуя знак производной получаем $f_{\max}(0)=1$, $f_{\min}(\pm1)=0$. Вычислим значение функции $f(x)$ на концах сегмента [-2;2]: $f(\pm2)=9$.

Сопоставляя найденные значения экстремумов со значениями функции на концах сегмента находим, что наибольшее значение данной функции равно 9, а наименьшее есть нуль:

$$M = \max_{[-2;2]} f(x) = 9, \qquad m = \min_{[-2;2]} f(x) = 0.$$

Пример 2. Быстрота сигнализации по подводному кабелю пропорциональна выражению $x^2 \ln\frac{1}{x}$, где x - отношение радиуса металлической сердцевины кабеля к толщине его изолирующей оболочки. Каким должно быть это отношение, чтобы быстрота сигнализации была наибольшей?

Решение. Задача будет решена, если мы найдём в интервале $(0;\infty)$ значение x, при котором функция $f(x) = x^2 \ln\frac{1}{x}$ имеет наибольшее значение. Производная $f'(x)$ существует в каждой точке области определения $f(x)$. Находим: $f'(x) = 2x\ln\frac{1}{x} - x = x(2\ln\frac{1}{x} - 1)$. Корнем производной $f'(x)$ является только число $x = \frac{1}{\sqrt{e}} = e^{-\frac{1}{2}}$. Производная при переходе x через значение $x = e^{-\frac{1}{2}}$ меняет знак с плюса на минус. Следовательно, при $x = e^{-\frac{1}{2}}$ функция $f(x)$ имеет максимум. А так как на $(0;\infty)$ $f(x)$ не имеет других экстремумов, то этот единственный максимум, достигаемый в точке $x = e^{-\frac{1}{2}}$, и является наибольшим значением данной функции на $(0;\infty)$.

Таким образом, быстрота сигнализации по подводному кабелю будет наибольшей, когда отношение x радиуса металлической сердцевины к толщине его изолирующей оболочки равно $e^{-\frac{1}{2}}$.

Пример 3. При конструировании трансформатора переменного тока заполняют внутренность катушки круглого сечения железным сердечником, имеющим форму квадрата с вырезанными при его вершинах четырьмя равными малыми квадратами. При этом с технической точки зрения важно, чтобы сечение сердечника имело возможно большую площадь. Каким должен быть для этого угол φ, если радиус катушки равен R (рис. 13)?

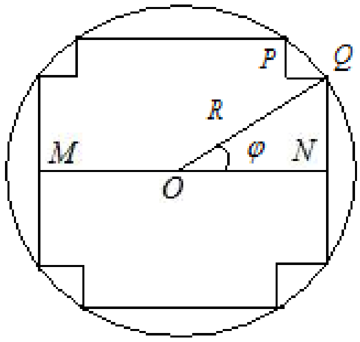


Рисунок 13.

Решение. Обозначая через S площадь сечения сердечника, находим: $S=(MN)^2-4(PQ)^2$.

Так как $MN=2ON=2R\cos\varphi$, $PQ=ON-NQ=R(\cos\varphi-\sin\varphi)$, то

$S=4R^2(\sin 2\varphi-\sin^2\varphi)$; $S'=4R^2(2\cos 2\varphi-2\sin\varphi\cos\varphi)$.

Решая уравнение $2\cos 2\varphi-2\sin\varphi\cos\varphi=0$, находим $tg2\varphi=2$, откуда $\varphi\approx 31^\circ 43'$. При этом значении угла φ функция будет иметь максимум. Вычисления дают: $S_{\max}\approx 2{,}472R^2$.

Упражнения для самостоятельной работы.

1. Исследовать на наибольшее и наименьшее значения функции:

а) $f(x)=3x^3-6x^2-5x+8$ на $[-1;4]$; б) $f(x)=2tgx-tg^2x$ на $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

2. Энергия, отдаваемая электрическим элементом, даётся формулой $P=\dfrac{E^2R}{(r+R)^2}$, где E - постоянная электродвижущая сила, r - постоянное внутреннее сопротивление, R - внешнее сопротивление. Показать, что P имеет наибольшее значение, когда сопротивление R внешней цепи равно внутреннему сопротивлению r самого элемента.

3. Цилиндрическая консервная банка должна иметь данный объём V. Каковы должны быть размеры банки, чтобы на изготовление её пошло наименьшее количество жести?

§ 18. Вогнутость и выпуклость кривой. Точки перегиба.

Пусть кривая AB задана уравнением $y = f(x)$, где $f(x)$ имеет на данном промежутке производную (рис.17), Если кривая AB вблизи точки M_0 (как слева, так и справа) лежит по ту сторону от касательной M_0T куда направлена ось OY, то говорят, что кривая AB в точке M_0 вогнута (рис.14).

Если же кривая AB вблизи точки M_0 (как слева, так и справа) лежит по одну сторону от касательной, но с противоположной стороны той, куда направлена ось OY, то говорят, что кривая AB в точке M_0 выпукла (рис. 15).

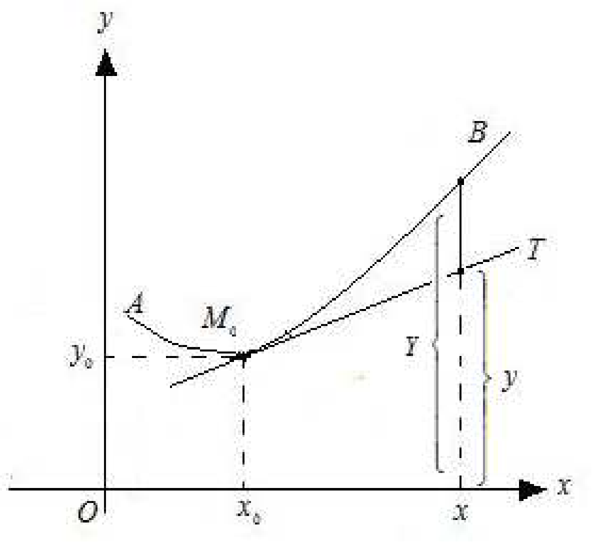


Рисунок 14.

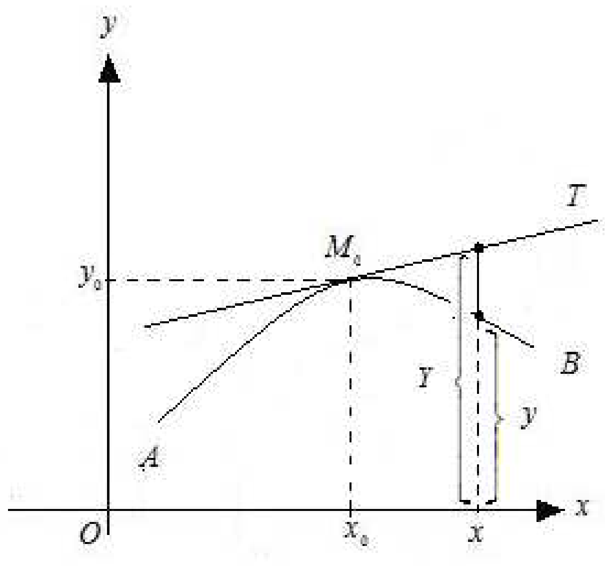


Рисунок 15.

Достаточный признак вогнутости выпуклости кривой в данной точке.

Если функция $y = f(x)$ имеет в некоторой окрестности точки x_0 производную, а в самой этой точке ещё и вторую производную, отличную от нуля, то кривая, являющаяся графиком данной функции, вогнута в точке x_0, если $f''(x_0) > 0$, и выпукла, если $f''(x_0) < 0$.

Точка M_0 кривой $y = f(x)$ (равно, как соответствующая ей абсцисса x_0) называется точкой перегиба этой кривой, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех x левой полуокрестности x_0, $y = f(x)$ вогнута (выпукла), а для всех x, правой полуокрестности x_0, она выпукла (вогнута) (рис.16).

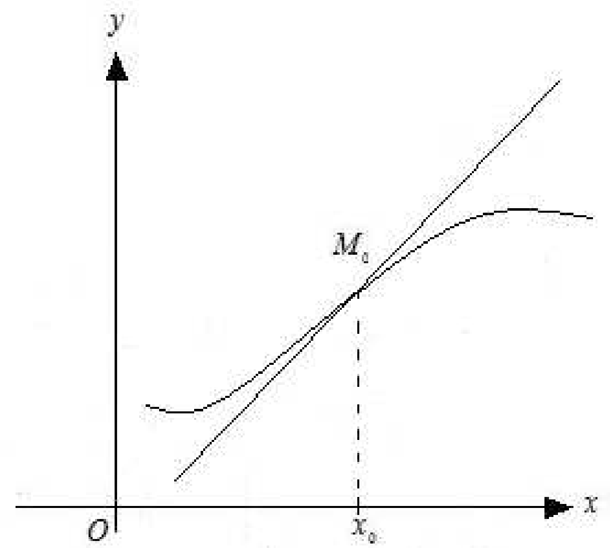


Рисунок 16.

<u>Пример 1</u>. Дана кривая $y = f(x) = x^3$ (рис. 17). Она в точке $x_0 = 0$ имеет перегиб. Действительно, $f''(x) = 6x$ отрицательна для всех $x < 0$ и положительна для всех $x > 0$, так что данная кривая при $x < 0$ (то есть в $(-\infty;0]$) выпукла, а при $x > 0$ (то есть в $(0;\infty)$) вогнута; так как, кроме того, кривая имеет касательную в точке $x_0 = 0$, то эта кривая имеет в данной точке перегиб.

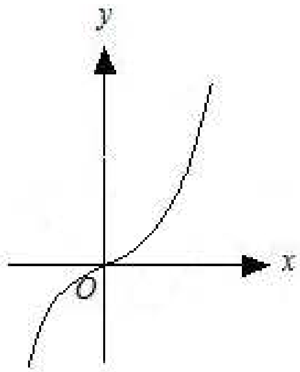


Рисунок 17.

Условие $f''(x_0) = 0$, являясь необходимым условием перегиба кривой $y = f(x)$ точки $x = x_0$, не является достаточным.

Например, для $y = f(x) = x^4$, $f''(x_0) = 0$. Однако в точке $x_0 = 0$ данная кривая перегиба не имеет (рис. 18).

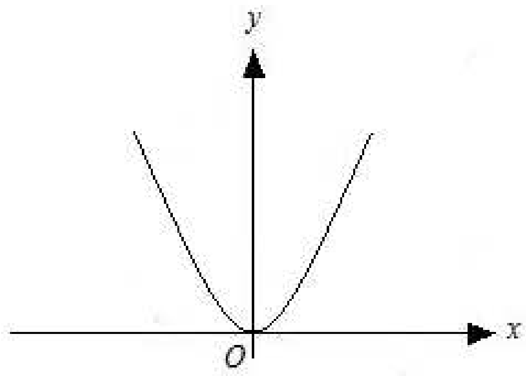


Рисунок 18.

С другой стороны, кривая может иметь перегиб в тех точках, где $f''(x)$ не существует.

Итак, точки перегиба данной кривой $y = f(x)$ следует искать только среди точек, в которых производная $f''(x)$ либо равна нулю, либо вовсе не существует. Такие точки будем называть подозрительными на перегиб.

Достаточный признак существования у данной кривой точки перегиба. Пусть $f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0 имеет вторую производную за исключением, быть может, самой точки x_0 (причём кривая $y = f(x)$ имеет касательную в точке $(x_0; f(x_0))$), и эта производная сохраняет тот или иной определенный знак в левой полуокрестности точки x_0, а так же некоторый определенный знак в правой окрестности x_0. Тогда если $f''(x)$ при переходе x через точку x_0 меняет знак, то эта точка будет точкой перегиба кривой $y = f(x)$.

Пример 2. Исследовать на выпуклость, вогнутость и точки перегиба кривую $y = x^4 - 6x^2 + 5$.

Решение. Функция y имеет во всех точках производную $y' = 4x^3 - 12x$, и, значит, рассматриваемая кривая имеет в каждой точке касательную.

Находим: $y'' = 12x^2 - 12 = 12(x-1)(x+1)$.

Корни уравнения $12(x-1)(x+1) = 0$ будут: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.

Точек, в которых вторая производная не существует, нет.

Исследуем вторую производную y'' на изменение знака при переходе x через каждой её корень.

Если $x < -1$, то $y'' > 0$ и кривая для этих значений x вогнута, а если $-1 < x < 1$, то $y'' < 0$, и кривая выпукла. Так как при переходе x через значение $x = -1$ вторая производная меняет знак, то $x = -1$ - точка перегиба данной кривой.

Далее, для $x > 1$ имеем $y'' > 0$, и кривая вогнута для этих x. Производная y'' меняет знак, когда x переходит через точку $x = 1$. Следовательно, и точка $x = 1$ - точка перегиба исследуемой кривой (рис. 19).

Результаты исследования оформим в виде таблицы:

x	$(-\infty;-1)$	-1	(-1;1)	1	$(1;\infty)$
y''	$y'' > 0$	$y'' = 0$	$y'' < 0$	$y'' = 0$	$y'' > 0$
y	*вогнута*	***перегиб***	*выпукла*	***перегиб***	*вогнута*

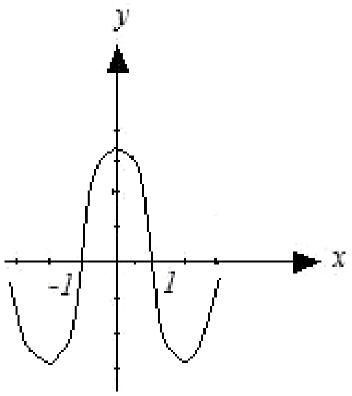


Рисунок 19.

Упражнения для самостоятельной работы.

Исследовать на выпуклость, вогнутость и точки перегиба кривые со следующими уравнениями:

а) $y = x^3 - 6x + 2$; б) $y = x^4 - 24x^2 + 70$; в) $y = \dfrac{x+1}{x^2+1}$; г) $y = x^4 e^{-x}$.

§ 19. Исследование функции. Построение графиков.

Приведем следующий примерный план исследования данной функции $f(x)$ и построения её графика:

1) Найти область определения функции (если она не указана прямо вместе с заданием функции).

2) Исследовать функцию на непрерывность и найти её точки разрыва (если они существуют).

3) Узнать, не является ли данная функция чётной ил нечётной, и, следовательно, не будет ли кривая, являющаяся графиком, данной функции, располагаться симметрично относительно оси OY или начала координат.

4) Выяснить, не является ли исследуемая функция периодической.

5) Исследовать функцию на экстремум, а также на возрастание и убывание.

6) Выяснить поведение функции при $x \to \infty$ $(+\infty; -\infty)$, если функция определена для как угодно больших по абсолютной величине значений аргумента.

7) Исследовать функцию на существование у её графика точек перегиба и промежутков вогнутости и выпуклости.

8) Исследовать функцию на наличие у её графика асимптот.

9) Найти (если это нетрудно) действительные корни функции $f(x)$ (когда они существуют) и тем самым определить точки пересечения соответствующего графика с осью OX.

10) Вычислить значение функции на одном или обоих концах промежутка задания функции, если областью определения функции является полусегмент или сегмент.

11) Вычислить дополнительно ещё несколько значений функции, назначая аргументу x произвольные, вообще говоря, значения (из области определения функции); в частности, вычислить значение $f(0)$, если оно существует. Тем самым будет найдено ещё несколько точек графика изучаемой функции (и, в частности, точка пересечения графика с осью ординат).

<u>Пример 1.</u> Исследовать функцию $y = f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ и построить её график.

Решение. Данная функция определена и непрерывна на интервале $(-\infty; +\infty)$. Так как $f(x) = f(-x)$, то функция $f(x)$ чётная (и, следовательно, график функции симметричен относительно оси OY). Поэтому данную функцию достаточно исследовать лишь на полусегменте $[0;\infty)$.

Находим последовательно первую и вторую производные от $f(x)$:

$$f'(x)=\frac{4x}{(x^2+1)^2},\ f''(x)=\frac{4(1-3x^2)}{(x^2+1)^3}.$$

Первая производная существует в любой точке x и обращается в нуль только при $x=0$. При $x=0$ $f(x)$ имеет минимум (равный -1), являющийся вместе с тем и наименьшим значением функции. Ввиду того, что при $x>0$ $f'(x)>0$, функция $f(x)$ возрастает на $[0;\infty)$.

Далее, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{x^2+1}=1$,

откуда следует, что прямая $y=1$ является горизонтальной асимптотой для кривой $y=f(x)$. При этом

$$f(x)-1=\frac{-2}{x^2+1}<0,$$

значит, кривая $y=f(x)$ лежит для всех x под асимптотой.

Вторая производная y'' существует в $[0;\infty)$ и обращается в нуль при $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$, причём для $0<x<\frac{1}{\sqrt{3}}$ $y''>0$, и, следовательно, для этих значений x кривая вогнута, а для $x>\frac{1}{\sqrt{3}}$ $y''<0$ и, значит, кривая для этих x выпукла. Отсюда при $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ данная кривая имеет перегиб. При этом $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{1}{2}$.

В силу чётности функции $f(x)$ на $(-\infty;+\infty)$ заключаем: функция $f(x)$ на $(-\infty;0)$ убывает; в точке $x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ кривая $y=f(x)$ имеет перегиб, причём на $(-\infty;-\frac{1}{\sqrt{3}})$ она выпукла, а на $(-\frac{1}{\sqrt{3}};0)$ - вогнута; $f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{1}{2}$.

Непосредственно ясно, что при $x=\pm1$ функция обращается в нуль. Значит, кривая пересекает ось OX дважды: в точке (-1;0) и в точке (1;0).

Вычислим дополнительно ещё несколько значений функции, например, при $x = \pm\frac{1}{2}$ $f\left(\pm\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{5}$; при $x = \pm 2$ $f(\pm 2) = \frac{3}{5}$; при $x = \pm 3$ $f(\pm 3) = \frac{4}{5}$.

Строим график функции (рис. 20).

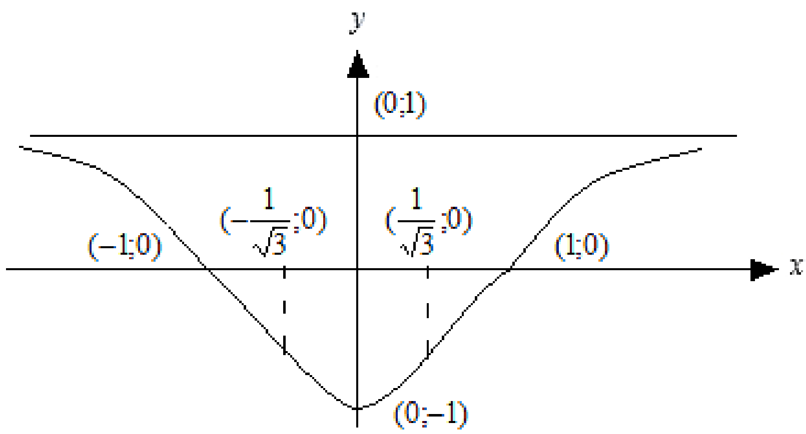


Рисунок 20.

Упражнения для самостоятельной работы.

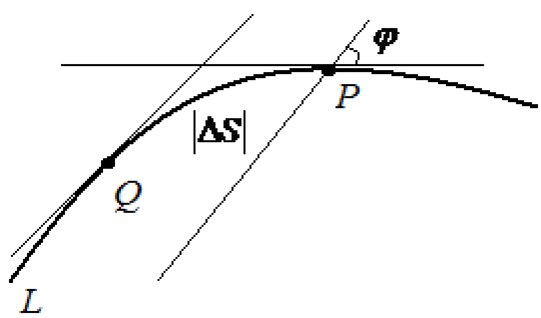
Исследовать приведенные ниже функции и построить соответствующие им графики:

а) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$; б) $y = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$; в) $y = e^{2x - x^2}$;

г) $y = x^2 \ln x$; д) $y = x\sqrt{1-x}$.

§20. Кривизна кривой.

Пусть L – плоская кривая. Возьмём точку P – произвольную точку кривой L и точку Q – точку кривой, близкую к точке P. Обозначим φ - угол между касательными кривой в точках P и Q, а $|\Delta S|$ - длину дуги отрезка PQ кривой L.



Определение. Кривизной k кривой L в точке P будем называть предел отношения $\frac{\varphi}{|\Delta S|}$, когда $Q \to P$, то есть когда $\Delta S \to 0$: $k = \lim\limits_{\Delta S \to 0} \frac{\varphi}{|\Delta S|}$.

1) Если плоская кривая L задана параметрически уравнениями $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = 0 \end{cases}$,

где функции $x(t)$ и $y(t)$ - дважды непрерывно дифференцируема , то формула для вычисления кривизны этой кривой имеет вид:

$$k(t) = \frac{|x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)|}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}}.$$

2) Если кривая L – плоская и задана явным уравнением: $y = f(x)$, где функция $y = f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема, то формула для вычисления кривизны имеет вид:

$$k(x) = \frac{|f''(x)|}{(1 + y'^2(t))^{3/2}}.$$

Определение. Величина ρ, обратная кривизне k кривой в точке, называется радиусом кривизны кривой в этой точке: $\rho = \frac{1}{k}$.

Геометрический смысл кривизны кривой: линия является прямой, либо отрезком прямой тогда и только тогда, когда кривизна её в каждой точке равна нулю.

<u>Пример 1.</u> Найти радиус кривизны эллипса: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ в одной из его вершин.

Решение. Перейдем к параметрическому заданию эллипса: $L: \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases}$; $t \in [0; 2\pi)$. Эллипс – плоская кривая, поэтому кривизну найдем по формуле:

$$k(x) = \frac{|x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)|}{((x')^2 + (y')^2)^{3/2}};$$

$x'(t) = (2\cos t)' = -2\sin t$; $x''(t) = (-2\sin t)' = -2\cos t$;

$y'(t) = (3\sin t)' = 3\cos t$; $y''(t) = -3\sin t$;

$$k(x) = \frac{|-2\sin t(-3\sin t) - (-2\cos t)3\cos t|}{((-2\sin t)^2 + (3\cos t)^2)^{3/2}} = \frac{|6\sin^2 t + 6\cos^2 t|}{(4\sin^2 t + 9\cos^2 t)^{3/2}} = \frac{6(\sin^2 t + \cos^2 t)}{(4\sin^2 t + 9\cos^2 t)^{3/2}} =$$

$$= \frac{6}{(4\sin^2 t + 9\cos^2 t)^{3/2}}$$

Возьмем вершину эллипса, например, $B_1(0;3)$, ей соответствует значение параметра $t_0 = \frac{\pi}{2}$,

$$k(x) = \frac{6}{(4\sin^2 \frac{\pi}{2} + 9\cos^2 \frac{\pi}{2})^{3/2}} = \frac{6}{(4 \cdot 1 + 9 \cdot 0)^{3/2}} = \frac{6}{4^{3/2}} = \frac{6}{(\sqrt{4})^3} = \frac{6}{2^3} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}.$$

Отсюда радиус кривизны эллипса в вершине B_1 равен $\rho = \frac{1}{k} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$.

Пример 2. Найти кривизну параболы $y - 1 = 2(x+1)^2$ в её вершине.

Решение. Запишем уравнение параболы в виде: $y = 2(x+1)^2 + 1$. Вершина параболы находится в точке $A(-1;1)$. Воспользуемся формулой для вычисления кривизны:

$$k(x) = \frac{|f''(x)|}{(1 + y'^2(t))^{3/2}},$$

$$f(x) = 2(x+1)^2 + 1;$$

$$f'(x) = 2((x+2)^2)' + (1)' = 4(x+1)(x+1)' + 0 = 4(x+1) = 4x + 4;$$

$$f''(x) = (4x+4)' = 4;$$

$$f'(A) = (4x+4)\big|_{\substack{x=-1\\ y=1}} = 4 \cdot (-1) + 4 = 0;$$

$$f''(x) = 4;$$

$$k(A) = \frac{|4|}{(1 + 0^2)^{3/2}} = 4.$$

Упражнения для самостоятельной работы

1. Кривизна какой из кривых l_1 и l_2 больше в точке $O(0;0)$ (рис. 21)

2. Найти радиус кривизны окружности $x^2 + y^2 = 4$ в произвольной точке.

3. Привести пример линии постоянной кривизны.

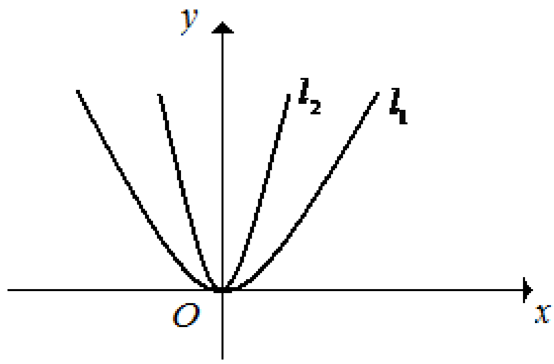


Рисунок 21.

Задачи для практических занятий.

Занятие 1.

<u>Тема</u>: Понятие производной.

1. Дана функция $y = f(x) = \ln x$. Показать, что производная от данной функции имеет вид $y' = (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

2. Вычислить угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x) = 2 + x - x^2$ в точке $x_0 = 2$.

3. В каких точках угловой коэффициент касательной к графику функции $y = 2x^3 - 2x^2 + x - 1$ равен 3.

4. Материальная точка движется прямолинейно по закону $S(t) = 2 + 16t - t^2$. В какой момент времени скорость будет равна нулю? Найти скорость точки в момент $t = 9$.

5. Прямолинейные движения двух материальных точек заданы уравнениями $S_1 = 2t^3 - 5t^2 - 3t$, $S_2 = 2t^3 - 3t^2 - 11t + 7$. Найти ускорение точек в тот момент, когда скорости их равны.

6. Движение точки по оси x задано законом $x(t) = \dfrac{10}{t} - 1$. Найти мгновенную скорость в момент: $t = 1, t = 2, t = 3$.

7. Высота камня, брошенного вертикально вверх со скоростью v_0 с начальной высоты от земли h_0, меняется по закону $x = h_0 + v_0 t - \frac{gt^2}{2}$, где $g = 10 м/с^2$ - ускорение силы тяжести.

а) Найти зависимость скорости камня от времени;

б) При $h_0 = 20 м$, $v_0 = 8 м/с$, найти скорость камня через 2 секунды. Зачем указано значение h_0? Через какое время камень упадёт на землю?

в) На какой высоте скорость обратится в 0?

8. Количество электричества, протекающее через проводник, начиная с момента $t = 0$, задаётся формулой $q = 3t^2 + t + 2$. Найти силу тока в момент времени t

9. В какие моменты времени ток в цепи равен нулю, если количество электричества, протекающего через проводник, задаётся формулой:

а) $q = t + \frac{k}{t}$; б) $q = t - \sqrt{t} + 1$.

10. Длина стержня меняется в зависимости от температуры по закону $l = l_0 + 0{,}001t + 0{,}0001t^2$. Найти коэффициент линейного расширения при $t = 5^\circ C$.

11. Найти производные и построить графики функций и их производных, если:

а) $y = |x - 3|$; б) $y + 4 = |x|$; в) $y = -|x| - 1$.

12. Определить точку, в которой не существует производная данной функции $y = |5 - x|$.

13. Указать точку, в которой не существует производная данной функции $y - 6 = |x|$.

14. Дана функция $y = \begin{cases} x^2, x \le 2; \\ x - 2, x > 2. \end{cases}$ Имеет ли функция производную в точке $x = 2$?

15. Пусть $y=\begin{cases} x^3, x>2; \\ 9, x=2; \\ 8, x<2. \end{cases}$ Имеет ли функция производную в точке $x=2$?

Занятие 2.

Тема: Общие правила дифференцирования. Производная элементарных функций.

1. Показать, что $(2u+v)'=2u'+v'$, учитывая, что функция $u=f(x)$, $v=g(x)$ имеют производные в заданной области D.

2. Показать, что $(uvw)'=u'vw+uv'w+uvw'$, используя правила дифференцирования.

3. Найти производные следующих функций:

1) $y=5x^4-7x^2-x$;

2) $y=x^5+4x^4-x^2+2x-5$;

3) $y=\dfrac{2x^3}{3}-3x^2+16x-1$;

4) $y=2-\dfrac{x}{2}-x^2$;

5) $y=3x^2+\dfrac{x^3}{3}-\sqrt{3x}$;

6) $y=x+\dfrac{1}{x}$;

7) $y=\dfrac{\sqrt{x}}{2}-\sqrt[3]{x}+x\sqrt{x}$;

8) $y=\sqrt{\dfrac{x}{2}}+3\sqrt[3]{x^2}+3x^3\sqrt{x}+\dfrac{1}{x^3}$;

9) $y=\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$;

10) $y=3\sqrt[3]{x^2}+2x\sqrt[3]{x}+\dfrac{1}{x^3}$;

11) $y=\dfrac{x}{7}-\dfrac{7}{x}$;

12) $y=\sqrt[5]{x^3}+\dfrac{\sqrt{x}}{4}-\dfrac{3}{x^2}$;

13) $y=\dfrac{x^6}{2}-\dfrac{3}{x^2}+\sqrt{5x}$;

14) $y=(x^2-1)(x^2+1)$;

15) $y=(x+\sqrt{x})^2$;

16) $y=\left(x+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)(x^2-3x-8)$;

17) $y=\left(x^4-\dfrac{1}{x^4}\right)\left(x^3+\dfrac{1}{x^3}\right)$;

18) $y=\sqrt[3]{x^4}(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x})$;

19) $y=(x-1)(x-2)(x-3)$;

20) $y=\dfrac{x^2}{x+1}$;

21) $y=\frac{x-2}{2x^2-1}$;

22) $y=\frac{x}{x-1}$;

23) $y=\frac{x^2-3x+1}{x^2+x+1}$;

24) $y=\frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}$;

25) $y=\frac{10x^4-3x^2}{3x^2-1}$;

26) $y=\frac{(2-x^2)(3-x^3)}{1-x}$;

27) $y=\sqrt{x}+\frac{2\sqrt{x}}{x+1}$;

28) $y=\sin x\cos x$;

29) $y=tgx+ctgx$;

30) $y=\frac{tgx}{x}$;

31) $y=1+x+5\sin 2x$;

32) $y=\frac{2}{tgx}-\frac{1}{x^7}$;

33) $y=\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$;

34) $y=\frac{x\sin x}{1+tgx}$;

35) $y=\frac{\sin x}{x}+\frac{x}{\sin x}$;

36) $y=x\arcsin x$;

37) $y=x\arccos x+\sin x arctgx$;

38) $y=\sqrt{x}arcctgx$;

39) $y=\frac{x^2}{\log_3 x}$;

40) $y=x\lg x$;

41) $y=x\sin x\ln x$;

42) $y=xe^x$;

43) $y=\frac{x^3+2^x}{e^x}$;

44) $y=10^{2x}-\frac{1-10^x}{1+10^x}$;

45) $y=\frac{\ln x}{1+x^2}$;

46) $y=\frac{x-1}{\log_2 x}$;

47) $y=\frac{x^2}{arctgx}$;

48) $y=\frac{e^x\cos x}{x}$;

49) $y=\frac{1}{\ln x}$;

50) $y=\frac{x}{\sin x+\cos x}$.

4. Найти производные $y=f(x)$ в заданной точке x_0:

1) $y=f(x)=\frac{2x-3}{x+1}$, $x_0=1$;

2) $y=2^3-x^2$, $x_0=1$;

3) $y = x^2 + 3 + \dfrac{2x}{x+1}, \;\; x_0 = 1$

4) $y = 7\sin x + 3x^3, \;\; x_0 = 0$;

5) $y = \sqrt{2}\,\dfrac{x^2 - 2}{x^2 + 2}, \;\; x_0 = \sqrt{2}$;

6) $y = f(x) = (x^2 + 3x + 15)tgx, \;\; x_0 = 0$;

7) $y = \dfrac{e^x + 3x}{\cos x}, \;\; x_0 = 0$;

8) $y = \dfrac{1}{\pi} x^2 \sin x, \;\; x_0 = \dfrac{3\pi}{2}$;

9) $y = x^2 \ln x + \ln 3, \;\; x_0 = 1$;

10) $y = e^{\sin x} + e^{\cos x}, \;\; x_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

Занятие 3.

Тема: Производная сложной функции.

1. Найти производные следующих функций:

1) $y = (5 + 2x)^{10}$;

2) $y = (1 - x^2)^2 (1 - x^3)^3$;

3) $y = \dfrac{1 - x - x^2}{(1 - x)^2}$;

4) $y = \dfrac{x^3}{(1 - x)^2}$;

5) $y = (1 - 2x^{\frac{1}{2}})^4$;

6) $y = \sqrt{1 - x^2}$;

7) $y = \dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$;

8) $y = \dfrac{1 + x}{\sqrt{1 - x}}$;

9) $y = \sqrt[3]{\dfrac{1}{1 + x^3}}$;

10) $y = (x^2 + x + 2)^{\frac{3}{2}}$;

11) $y = \cos^2 x$;

12) $y = \sin 3x - \sin(\sin x)$;

13) $y = 3\sin^2 x - \sin^3 x$;

14) $y = 5\cos\dfrac{x}{3} + \sin\dfrac{1}{x}$;

15) $y = \dfrac{1}{4} tg^4 x$;

16) $y = \arcsin(x - 1) arctg(x - 1)$;

17) $y = arcctg\dfrac{2x - 1}{\sqrt{3}}$;

18) $y = \sqrt{\ln x}$;

19) $y = \ln tgx$;

20) $y = \log_3(x^2 - 1)$;

21) $y = (1 + \ln\sin x)^5$;

22) $y = 2^{\frac{x}{\ln x}}$;

23) $y = 10^{2x-3}$;

24) $y = \sin e^x$;

25) $y = e^{\arcsin x}$;

26) $y = x^2 e^{-\frac{x^2}{4}}$;

27) $y = sh^2 x + ch^2 x$;

28) $y = \log_7 (x^2 - \sin x)$;

29) $y = x \cdot 8^{\sqrt{x}}$;

30) $y = \ln(\ln x)$;

31) $y = arctg \dfrac{1+x}{1-x}$;

32) $y = \ln tg \dfrac{x}{2}$;

33) $y = \sqrt{1+\sqrt{x}}$;

34) $y = (\arccos \dfrac{1}{x})^6$;

35) $y = \sqrt[3]{x(1-x)^2}$;

36) $y = \sqrt{\sin \dfrac{\pi}{10} - \ln \dfrac{3}{x}}$;

37) $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}} arctg \dfrac{x\sqrt{3}}{1-x^2}$;

38) $y = \dfrac{\ln \sin x}{\ln \cos x}$;

39) $y = e^{\frac{1}{\ln x}}$;

40) $y = e^{arctg \sqrt{1+\ln(2x+3)}}$;

41) $y = \sqrt[5]{(1 + xe^{\sqrt{x}})^3}$;

42) $y = \sqrt[11]{9 + 6\sqrt[5]{x^9}}$;

43) $y = \dfrac{1}{arctg 3^{-2x}}$;

44) $y = \dfrac{e^{x^2}}{e^x + e^{-x}}$;

45) $y = \dfrac{\sin^2 x}{1 + ctgx} - \log_2 \left(\dfrac{x^2 - 2}{6} \right)$;

46) $y = \ln tg \dfrac{x}{3} - ctgx \ln(1 + \sin 2x) - x$;

47) $y = 5^{\sin x \sqrt{1-x^2}}$;

48) $y = \dfrac{1 + xarctgx}{\sqrt{1+x^2}}$;

49) $y = \arcsin^2 x^2 + arcctg(2e^x + \sqrt{e^{2x} + 4e^x + 1})$;

50) $y = \dfrac{\sin^2 x}{\sin x^2}$;

51) $y = \dfrac{e^x arctgx}{\ln^5 x}$;

52) $y = \ln \sqrt{1 - tg\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4} \right)}$.

2. Вычислить значения производных заданных функций при указанных значениях независимой переменной.

1) $f(x) = \dfrac{x}{3} - \dfrac{3}{x}$, $f'(3) = ?$;

2) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}$, $f'(1) = ?$;

3) $f(x)=\sin 4x\cos 4x,\ \ f'(\frac{\pi}{3})=?$; 4) $f(x)=\sin^2 x^2,\ \ f'(0)=?$;

5) $f(x)=\sqrt{\frac{1-x}{1+x^2}},\ \ f'(0)=?$; 6) $f(x)=2^{x-2x^2-1},\ \ f'(0)=?$;

7) $f(x)=\frac{\sin 2x}{\sqrt{x}},\ \ f'(\pi)=?$; 8) $f(x)=\frac{x-2}{\sin^2 x},\ \ f'(\frac{\pi}{2})=?$.

3. Убедиться в том, что функция $y=f(x)$ удовлетворяет заданному соотношению:

1) $y=\ln\frac{1}{1+x},\ \ xy'+1=e^y$; 2) $y=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}},\ (1-x^2)y'-xy=1$;

3) $y=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1}+\ln\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}},\ 2y=xy'+\ln y'$;

4) $y=tg\ln 3x,\ 1+y^2=xy'$;

5) $y=\sqrt[3]{x-\ln x-1},\ \ln x+y^3-3xy^2y'=0$;

6) $y=e^{tg\frac{x}{2}},\ \ y'\sin x=y\ln y$; 7) $y=e^{x+x^2}+2e^x,\ \ y'-y=2xe^{x+x^2}$;

8) $y=(x+1)^{13}(e^x-1),\ \ y'-\frac{13y}{x+1}=e^x(1+x)^{13}$;

9) $y=\frac{1}{\sqrt{\sin x+x}},\ \ 2(\sin x)\cdot y'+y\cos x=y^3(x\cos x-\sin x)$;

10) $y=-\sqrt{\frac{2}{x^2}-1},\ 1+y^2+xyy'=0$.

Задание 4.

<u>Тема:</u> Производные высших порядков.

1. Найти производную указанного порядка:

1) $y=e^{2x-1},\ \ y''=?$; 2) $y=(x^2+1)^3,\ \ y''=?$;

3) $y=(1+x^2)arctgx,\ \ y''=?$; 4) $y=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},\ \ y''=?$;

5) $y=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}},\ \ y''=?$; 6) $y=\cos^2 x,\ \ y''=?$;

7) $y = x(\sin(\ln x) + \cos(\ln x)),\quad y'' = ?$;

8) $y = \arcsin(3\sin x),\quad y'' = ?$;

9) $y = \dfrac{1}{4+\sqrt{x}},\quad y'' = ?$;

10) $y = x\cos x^2,\quad y''' = ?$;

11) $y = \dfrac{\log_2 x}{x^3},\quad y''' = ?$;

12) $y = (2x+3)\ln^2 x,\quad y''' = ?$;

13) $y = \dfrac{\ln(x-1)}{\sqrt{x-1}},\quad y''' = ?$;

14) $y = \dfrac{1}{x}\sin 2x,\quad y''' = ?$;

15) $y = (3x-7)\cdot 3^{-x},\quad y''' = ?$;

16) $y = e^{-2x}\sin(2+3x),\quad y^{IV} = ?$;

17) $y = xe^{-x},\quad y^{(4)} = ?$;

18) $y = \dfrac{\log_3 x}{x^2},\quad y^{(4)} = ?$;

19) $y = e^{-x}(\cos 2x - 3\sin 2x),\quad y^{IV} = ?$;

20) $y = (1-x-x^2)e^{\frac{x-1}{2}},\quad y^{IV} = ?$;

21) $y = \dfrac{\ln(x-2)}{x-2},\quad y^{V} = ?$;

22) $y = \dfrac{1}{1-x},\quad y^{(5)} = ?$;

23) $y = \sqrt{4-x^2},\quad y^{V} = ?$.

2. Найти $y^{(n)}$ для следующих функций:

1) $y = 3e^{-x}$;

2) $y = \sin 2x + \cos 7x$;

3) $y = \log_a x$;

4) $y = \dfrac{1}{x^2-3x+2}$;

5) $y = \ln(5x-1)$;

6) $y = \dfrac{x}{x^2-1}$;

7) $y = \sqrt{x}$;

8) $y = \sin^4 x + \cos^4 x$;

9) $y = shx$;

10) $y = x\cos 2x$;

11) $y = e^x \ln x$;

12) $y = x\ln x$;

13) $y = \cos x \cdot chx$;

14) $y = \sin 2x \cos 4x$;

15) $y = (1+x^2)tgx$.

3. Доказать, что функция $y = \dfrac{x-3}{x+4}$ удовлетворяет условию $2y'^2 = (y-1)y''$.

4. Доказать, что функция $y=\sqrt{2x-x^2}$ удовлетворяет условию $y^3y''+1=0$.

5. Убедиться, что функция $y=\cos e^x+\sin e^x$ удовлетворяет условию $y''-y'+ye^{2x}=0$.

6. Доказать, что функция $y=(x^2-1)^n$ удовлетворяет соотношению

$(x^2-1)y^{(n+2)}+2xy^{(n+1)}-n(n+1)y^{(n)}=0$.

7. Решить задачи:

1) Точка движется прямолинейно, причём $S=\frac{4}{3}t^3-t+5$. Найти ускорение движения в конце второй минуты (S выражено в метрах, t - в секундах).

2) Точка движется прямолинейно, причём $S=\frac{2}{9}\sin\frac{\pi t}{2}+S_0$. Найти ускорение в конце первой секунды (S выражено в см, t - в секундах).

3) Точка движется прямолинейно, причём $S=\sqrt{t}$. Убедиться в том, что движение – замедленное и ускорение пропорционально кубу скорости v.

4) Баржу, палуба которой на 4 м ниже уровня пристани, подтягивают к ней при помощи каната, наматываемого на ворот со скоростью 2 м/сек. С каким ускорением движется баржа в момент, когда она удалена от пристани на 8 м (по горизонтали).

5) Точка совершает прямолинейное колебательное движение по закону $x=A\sin\omega t$. Определить ускорение движения в момент времени $t=\frac{2\pi}{\omega}$. Показать, что ускорение движения пропорционально отношению x.

6) Движение точки по оси OX определяется формулой $x=(t-2)e^{-t}$. Определить ускорение движения в те моменты, когда точка меняет направление движения.

7) Показать, что если тело движется по закону $S=ae^t+be^{-t}$, то его ускорение численно равно пройденному пути.

Задание 5.

Тема: Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функций, заданных параметрически.

1. Продифференцировать данные функции, используя правило логарифмического дифференцирования.

1) $y = x^{x^2}$; 2) $y = (\sin x)^{\cos x}$;

3) $y = (\ln x)^x$; 4) $y = (\arcsin x)^{e^x}$;

5) $y = x^{\arcsin x}$; 6) $y = (x-5)^{chx}$;

7) $y = (x^4+5)^{ctgx}$; 8) $y = (x^8+1)^{tgx}$;

9) $y = (\sin\sqrt{x})^{\ln\sin\sqrt{x}}$; 10) $y = 19^{x^{19}} \cdot x^{19}$;

11) $y = x^{\ln x}$; 12) $y = x^{\frac{1}{x}}$;

13) $y = 2x^{\sqrt{x}}$; 14) $y = \dfrac{(x-2)^2\sqrt[3]{x+1}}{(x-5)^2}$;

15) $y = \sqrt[x]{(x+1)^2}$; 16) $y = \dfrac{(x+1)^3\sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}$;

17) $y = \sqrt[3]{\dfrac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}}$; 18) $y = \sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^x}}$;

19) $y = \dfrac{(x^2-8)\sqrt{x^2-8}}{6x^3}$; 20) $y = (1-x^2)\sqrt[5]{x^3+\dfrac{1}{x}}$;

21) $y = \dfrac{4+3x^3}{x\sqrt[3]{(2+x^3)^2}}$; 22) $y = \dfrac{x\sqrt{x+1}}{x^2+x+1}$;

23) $y = 2\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$; 24) $y = \dfrac{(3x+\sqrt{x})(2x^2-1)}{\sqrt{x^2+2}}$;

25) $y = \dfrac{(x+3)^7\sqrt[5]{(2x-1)^3}}{\sqrt[7]{(2x+7)^2}}$.

2. Найти производные y'_x и y''_{xx} от функций, заданных параметрически:

1) $\begin{cases} x = 1-t^2 \\ y = t-t^3 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x = t-t^4 \\ y = t^2-t^3 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} x = t^3+1 \\ y = t^2+t+1 \end{cases}$;

4) $\begin{cases} x = e^t \\ y = \arcsin t \end{cases}$; 5) $\begin{cases} x = arctgt \\ y = \dfrac{t^2}{2} \end{cases}$; 6) $\begin{cases} x = t + \sin t \\ y = 2 + \cos t \end{cases}$;

7) $\begin{cases} x = \ln t \\ y = arctgt \end{cases}$; 8) $\begin{cases} x = \dfrac{t+1}{t} \\ y = \dfrac{t-1}{t} \end{cases}$; 9) $\begin{cases} x = \sqrt{1-t^2} \\ y = \dfrac{1}{t} \end{cases}$;

10) $\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{1-t}} \end{cases}$; 11) $\begin{cases} x = \sqrt{t^3 - 1} \\ y = \ln t \end{cases}$; 12) $\begin{cases} x = sht \\ y = tht \end{cases}$;

13) $\begin{cases} x = \sin x \\ y = \ln\cos t \end{cases}$; 14) $\begin{cases} x = sh^2 t \\ y = \dfrac{1}{ch^2 t} \end{cases}$; 15) $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin^4 \dfrac{t}{2} \end{cases}$;

16) $\begin{cases} x = \cos^2 t \\ y = tg^2 t \end{cases}$; 17) $\begin{cases} x = cht \\ y = \sqrt[3]{sh^2 t} \end{cases}$; 18) $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t - arctgt \end{cases}$;

19) $\begin{cases} x = e^t \sin t \\ y = e^t \cos t \end{cases}$; 20) $\begin{cases} x = \sin^2 t \\ y = \cos^2 t \end{cases}$.

Из уравнений, параметрически задающих функцию, исключить параметр:

1) $\begin{cases} x = 3t \\ y = 6t - t^2 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin 2t \end{cases}$; 3) $\begin{cases} x = t^3 + 1 \\ y = t^2 \end{cases}$;

4) $\begin{cases} x = tgt \\ y = \sin 2t + 2\cos 2t \end{cases}$; 5) $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$.

4. Найти значение параметра, соответствующее заданным координатам точки на линии, уравнение которой дано в параметрической форме:

1) $x = t^2 + 2t,\ \ y = t^3 + t,\ \ (3;2)$; 2) $x = t^2 - 1,\ \ y = t^3 - t,\ \ (0;0)$;

3) $x = 3(2\cos t - \cos 2t),\ \ y = 3(2\sin t - \sin 2t),\ \ (-9;0)$.

Задание 6.

Тема: Понятие дифференциала функции. Теорема о средних значениях. Теорема Тейлора для многочленов.

1. Найти приращение функции $y = x^2$, соответствующее приращению Δx независимой переменной. Вычислить Δy, если $x = 1$ и $\Delta x = 0{,}1; 0{,}01$. Какова будет ошибка значения Δy, если ограничиться членом, содержащим Δx в первой степени?

2. Дана функция $y = x^3 + 2x$. Найти значения приращения и его линейной главной части, соответствующие изменению x от $x = 2$ до $x = 2{,}1$.

3. Какое приращение получает функция $y = 3x^2 - x$ при переходе независимой переменной от значения $x = 1$ к значению $x = 1{,}02$.

4. Найти приращение ΔV объёма V шара при изменении радиуса $R = 2$ на ΔR. Вычислить ΔV, если $\Delta R = 0{,}5; 0{,}1; 0{,}01$. Какова будет ошибка значения ΔV, если ограничиться членом, содержащим ΔR в первой степени?

5. Для функции $f(x) = x^3 - 2x + 1$ определить:

1) $\Delta f(1)$; 2) $df(1)$

и сравнить их, если:

а) $\Delta x = 1$; б) $\Delta x = 0{,}1$; в) $\Delta x = 0{,}01$.

6. Вычислить без помощи таблиц:

а) $\sqrt[3]{1{,}02}$; б) $\sin 29^\circ$; в) $\cos 151^\circ$; г) $arctg 1{,}05$;

д) $\lg 11$; е) $\arcsin 0{,}4983$; ж) $\sqrt{120}$; з) $\sqrt[7]{100}$.

7. $f(x) = e^{0{,}1x(1-x)}$. Подсчитать приближенно $f(1{,}05)$.

8. Найти дифференциалы следующих функций:

1) $y = (1 + x - x^2)^3$; 2) $y = \dfrac{1}{x}$; 3) $y = \dfrac{1}{a} arctg \dfrac{x}{a}$ $(a \neq 0)$;

4) $y = 5^{\ln tgx}$; 5) $y = 2^{-\frac{1}{\cos x}}$; 6) $y = \sqrt{\arcsin x} + (arctgx)^2$;

7) $y = 3^{-\frac{1}{x^2}} + 3x^3 - 4\sqrt{x}$; 8) $y = \dfrac{1}{2a} \ln \left| \dfrac{x-a}{x+a} \right|$; 9) $y = shx - xchx$;

10) $y = th^3 x^6$.

9. Найти:

а) $d\left(\frac{1}{x^3}\right)$; б) $d(\sqrt{a^2+x^2})$; в) $d\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)$; г) $d\left(\ln(1-x^2)\right)$;

д) $d\left(\frac{\sin x}{2\cos^2 x}+\frac{1}{2}\ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\right)$.

10. Убедиться в том, что $y=\frac{1+\ln x}{x-x\ln x}$ удовлетворяет соотношению $2x^2dy=(x^2y^2+1)dx$.

11. Убедиться в том, что функция y, определенная уравнением $arctg\frac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$, удовлетворяет соотношению $x(dy-dx)=y(dy+dx)$.

12. $y=3^{\frac{1}{x}}+\frac{1}{2^{2x}}+6^{\sqrt{x}}$. Вычислить dy при $x=1$ и $dx=0{,}2$.

13. В круговом секторе радиуса $R=100$ см и центральный угол $\alpha=60^\circ$. Насколько изменится площадь этого сектора, если:

а) радиус его R увеличить на 1 см; б) угол α уменьшить на $30'$?

14. Период колебания маятника (в секундах) определяется по формуле $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, где l - длина маятника в см, $g=981 см/сек^2$ - ускорение силы тяжести. Насколько нужно изменить длину маятника $l=20$ см, чтобы период T увеличился на 0б05 сек?

Задание 7.

Тема: Касательная и нормаль к кривой. Правило Лопиталя.

1. Составить уравнение касательной и нормали к данной кривой в точке с абсциссой x_0:

1) $y=2x^2+3x-1,\ \ x_0=-2$; 2) $y=x^2+8\sqrt{x}-32,\ \ x_0=4$;

3) $y=\frac{4x-x^2}{4},\ \ x_0=2$; 4) $y=\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x},\ \ x_0=64$;

5) $y=x-x^3,\ \ x_0=-1$; 6) $y=2x+\frac{1}{x},\ \ x_0=1$;

7) $y=\dfrac{x^3+2}{x^3-2},\ \ x_0=2$;

8) $y=\dfrac{x}{x^2+1},\ \ x_0=-2$;

9) $y=\dfrac{x^{29}+6}{x^4+1},\ \ x_0=1$;

10) $y=(x-3)^{\frac{2}{3}},\ \ x_0=11$;

11) $y=3e^x+3e,\ \ x_0=1$;

12) $y=\sin(x+\pi)+1,\ \ x_0=\dfrac{\pi}{4}$;

13) $y=\sin^2 x,\ \ x_0=\dfrac{\pi}{6}$;

14) $y=\dfrac{\sin x}{1+\cos x},\ \ x_0=0$;

15) $y=\ln(2e-x),\ \ x_0=e$;

16) $y=1-\sqrt[3]{(x-2)^2},\ \ x_0=2$;

17) $y=e^{1-x^2}$, в точках пересечения с прямой $y=1$;

18) $y=\arccos 3x$, в точке пересечения с осью OX;

19) $y=yg2x$ в начале координат;

20) $y=x^2\ln x,\ \ x_0=1$.

2. Составить уравнение касательной и нормали к данным линиям, уравнения которых заданы параметрически, в указанных точках.

1) $x=2t-t^2, y=3t-t^3, t=0$;

2) $x=\dfrac{2t+t^2}{1+t^3}, y=\dfrac{2t-t^2}{1+t^3}, t=1$;

3) $x=1-t^2, y=t-t^3, t=2$;

4) $x=2e^t, y=e^{-t}, t=0$;

5) $x=\sin t, y=5^t, t=0$;

6) $x=\sqrt{3}\cos t, y=\sin x, t=\dfrac{\pi}{3}$;

7) $x=2\ln ctgt+1, y=tgt+ctgt, t=\dfrac{\pi}{4}$;

8) $x=\ln(1+t^2), y=t-arctgt, t=1$;

9) $x=\arcsin\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}, y=\arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}, t=1$;

10) $x=\sin t, y=\cos 2t, t=\dfrac{\pi}{6}$.

3. В какой точке касательная к параболе $y=x^2+4x$ параллельна оси OX.

4. Написать уравнение касательной к графику функций:

а) $y=x-2x^2$, параллельно прямой $y=-7x$;

б) $y=3x-x^2-2$, параллельно прямой $y=-3x-5$;

в) $y=\dfrac{x}{x-1}$, параллельно прямой $y=4x+3$;

г) $y=x^3+3x^2-5$, параллельно прямой $y=24x+1$.

5. Определить координаты точек пересечения с осью OY тех касательных к графику функции $y=\dfrac{x+4}{x-5}$, которые образуют угол $\dfrac{3\pi}{4}$ с осью OX.

6. Найти угол, который образует с осью OX касательная, проведённая к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

а) $y=5-0{,}5x^2, x_0=-\sqrt{3}$; б) $y=x^3, x_0=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; в) $y=x^3, x_0=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

7. Найти сумму длин отрезков, отсекаемых на осях координат касательной, проведенной к кривой $y=x^3+3x-2$ через точку $M_0(1;2)$.

8. В какой точке графика функции $y=\sqrt{x}$ касательная наклонена к оси абсцисс под углом 45°?

9. Найти уравнение прямой, проходящей через точку (0;5) и параллельной касательной к графику функции $y=x^3-x$ в точке с абсциссой $x_0=0$.

10. К графику функции $f(x)=2x^4-x^3-\dfrac{4}{3}x+1$ в точке $x=0$ проведена касательная. Найти расстояние от начала координат до этой касательной.

11. В какой точке параболы $y=x^2-2x+5$ нужно провести касательную, чтобы она была перпендикулярна к биссектрисе первого координатного угла?

12. Найти площадь треугольника, образованного биссектрисами координатных углов и касательной к кривой $y=\sqrt{x^2-5}$ в точке $M(3;2)$.

13. К гиперболе $y=\dfrac{4}{x}$ проведены касательные: одна в точке $M(2;2)$, а другая – параллельно прямой $y=-4x$. Найти площади треугольников, образованных каждой из этих касательных с осями координат.

14. Вычислить пределы следующих функций, используя правило Лопиталя:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin 2x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 5x}{x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{chx-\cos x}{x^2}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{5x}-e^{8x}}{\sin x}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x-3^x}{tgx}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\ln(1+2x)}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{1-\cos 6x}$; 9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{ctgx}$;

10) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{xctgx-1}{x^2}$; 11) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1-x^3}{\sin^6 2x}$; 12) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{7^x-7^{\sin x}}{x^3}$;

13) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x^2}{x^2\sin x^2}$; 14) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x\cos x}$; 15) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{\ln\sin x}$;

16) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}$; 17) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx-x}{x-shx}$; 18) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3\sqrt{x}}-1}{\sqrt{\sin 9x}}$;

19) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2+x-10}{x^2-x-2}$; 20) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 2x-1}{\sin x-\cos x}$; 21) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{3}}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$;

22) $\lim\limits_{x\to 7}\frac{\cos x\ln(x-7)}{\ln(e^x-e^7)}$; 23) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt[3]{tgx}-1}{2\sin^2 x-1}$; 24) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln x}$;

25) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{8}}\frac{1-\sin 4x}{(8x-\pi)^2}$; 26) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{1-2\sin x}{\cos 3x}$; 27) $\lim\limits_{x\to 1`}\frac{\ln(1-x)-tg\frac{\pi x}{2}}{ctg\pi x}$;

28) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x+x}{x^3}$; 29) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{4x}+x^2+x}{x^3+1}$; 30) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^2}$;

31) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+2x}{4x^2+1}$; 32) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\pi-2arctgx}{\ln(1+\frac{1}{x})}$; 33) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+7}{x^2+7+e^{2x}}$.

34) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$; 35) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$; 36) $\lim\limits_{x\to 0}\left(ctgx-\frac{1}{x}\right)$;

37) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x\sin x}-\frac{1}{x^2}\right)$; 38) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{x}{\ln x}\right)$; 39) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$;

40) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{6}{x^2-9}\right)$; 41) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{5}{x-3}-\frac{2}{x^2-9}\right)$; 42) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{x}{ctgx}-\frac{\pi}{2\cos x}\right)$;

43) $\lim\limits_{x\to\pi}(\pi - x)tg\dfrac{x}{2}$; 44) $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x$; 45) $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{x}{7}$;

46) $\lim\limits_{x\to\infty} x^n e^{-x}$; 47) $\lim\limits_{x\to\infty}[(\pi - 2arctgx)\ln x]$; 48) $\lim\limits_{x\to\infty}[x(e^{\frac{1}{x}} - 1)]$;

49) $\lim\limits_{x\to 0} x^x$; 50) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sin x}$; 51) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{1}{\ln(e^x - 1)}}$;

52) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(tgx)^{2x-\pi}$; 53) $\lim\limits_{x\to 0}(ctgx)^{\sin x}$; 54) $\lim\limits_{x\to +0}\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)^x$;

55) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{tgx}$; 56) $\lim\limits_{x\to\infty}(thx)^x$; 57) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^{tgx}$;

58) $\lim\limits_{x\to 0}(e^{2x} + x)^{\frac{1}{x}}$; 59) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)^x$; 60) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \dfrac{3}{x}\right)^x$;

61) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$; 62) $\lim\limits_{x\to 1}(2 - x)^{tg\frac{\pi x}{2}}$; 63) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(tgx)^{tg2x}$;

64) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}arctgx\right)^x$; 65) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{1}{x}}$; 66) $\lim\limits_{x\to 0}(1 - 9x)^{\frac{1}{x}}$;

67) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(tgx)^{\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}}$; 68) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}$; 69) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(ctgx)^{\frac{1}{x-\frac{\pi}{4}}}$;

70) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{chx}\right)^{\frac{1}{x^2}}$; 71) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1 + e^x}{2}\right)^{cthx}$; 72) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{tgx}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

Занятие 8.

Тема : Экстремумы функций одной переменной. Наибольшее и наименьшее значение функции. Промежутки монотонности.

1. Показать, что функция $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ убывает в интервале (-2;1).

2. Показать, что функция $y = x^3 + x$ везде возрастает.

3. Показать, что функция $y = arctgx - x$ везде убывает.

4. Показать, что функция $y=\dfrac{x^2-1}{x}$ возрастает в любом интервале, не содержащим точку $x=0$.

5. Исследовать на монотонность функцию $y=x^3-3x^2-9x+14$.

6. Определить интервалы монотонности следующих функций:

1) $y=x^4-2x^2-5$;

2) $y=3x-x^3$;

3) $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$;

4) $y=\dfrac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$;

5) $y=x-e^x$;

6) $y=2x^2-\ln x$;

7) $y=\dfrac{x^2}{2^x}$;

8) $y=x+\sin x$;

9) $y=\cos\dfrac{\pi}{x}$;

10) $y=x^2-\ln x^2$;

11) $y=\sqrt[3]{(2x-5)(5-x)^2}$;

12) $y=x\sqrt{3x-x^2}$.

7. Доказать следующие неравенства:

1) $2\sqrt{x}>3-\dfrac{1}{x},\ \ x>1$;

2) $y=2x^3+3x^2-12x+1$

3) $2x\,arctgx\geq\ln(1+x^2)$;

4) $tgx>x+\dfrac{x^3}{3},\ \ 0<x<\dfrac{\pi}{2}$;

5) $\sin x<x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120},\ \ x>0$;

6) $chx>1+\dfrac{x^2}{2},\ \ x\neq 0$.

8. Исследовать на экстремум следующие функции:

1) $y=x^2+4x+5$;

2) $y=4x-\dfrac{x^3}{3}$;

3) $y=1+2x^2-\dfrac{x^4}{4}$;

4) $y=\dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{x}$;

5) $y=\sqrt[3]{x^2}-1$;

6) $y=x^2(1-x)$;

7) $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+2x+1}$;

8) $y=x\sqrt[3]{x-1}$;

9) $y=xe^{-x}$;

10) $y=\dfrac{1+\ln x}{x}$;

11) $y = x - arctg 2x$;

12) $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7$;

13) $y = x - \ln(1 + x)$;

14) $y = \dfrac{9}{5\sqrt{2x^3 - 15x^2 + 35x - 13}}$.

15) $y = \dfrac{13}{\sqrt[3]{\dfrac{5}{6}x^6 - 15x^4 + \dfrac{135}{2}x^2 - 3}}$.

9. Производная квадратного трёхчлена $y = ax^2 + bx + c$ в точках 3 и 8 равна соответственно 10 и 5. Найти точку экстремума функции и указать, является ли она максимумом или минимумом.

10. Функция $y = (x - a)(x^2 - 1)$ имеет минимум в точке $x = \dfrac{1}{9}$. В какой точке у неё максимум?

11. При каких a функции $y = -x^3 + 3ax + 5$ и $y = x^2 + (a + 1)x$ имеют минимум в одной и той же точке?

12. Найти точки остановки тела, двигающегося по следующему закону:

1) $S = 2t - 1 + \dfrac{1}{4t + 1}$; 2) $S = \dfrac{1}{(t - 2)^2} - \dfrac{1}{t^2}$; 3) $S = \dfrac{t}{t^2 - 2t + 1}$.

13. Функция $y = |\ln x|$ не дифференцируема в точке $x = 1$. Имеет ли данная функция экстремум в точке $x = 1$?

14. Исследовать функцию $y = 0{,}8x^5 + x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 4x$ на возрастание (убывание) и экстремумы.

15. Найти наибольшие и наименьшие значения данных функций в указанных интервалах:

1) $y = x^3 - 6x^2 + 1$ на [-1;2];

2) $y = 5x - \dfrac{5}{3}x^3$ на [0;2];

3) $y = 7 + 4x^3 - x^4$ на [-1;3];

4) $y = \dfrac{2x^2 - 9x - 2}{x^2 - 5x - 6}$ на [0;5];

5) $y = x + 2\sqrt{x}$ на [0;4];

6) $y = \sqrt{100 - x^2}$ на [-6;8];

7) $y = x - \sin x$ на $[0; 2\pi]$;

8) $y = \sin 3x - 3\sin x$ на $[0; \dfrac{3\pi}{2}]$;

9) $y = x^3(8-x)$ на [0;7]; 10) $y = 2^x$ на [-1;5];

11) $y = arctg\frac{1-x}{1+x}$ на [0;1]; 12) $y = |x^2 - 3x + 2|$ на [-10;10];

13) $y = (x-3)^2 e^{|x|}$ на [-1;4].

16. Число 8 разбить на два таких слагаемых, чтобы сумма их кубов была наименьшей.

17. Какое положительное число, будучи сложено с обратным ему числом, даёт наименьшую сумму?

18. Найти такие неотрицательные числа a и b, сумма которых равна 136, чтобы выражение $ab - a^2$ принимало наибольшее значение.

19. При подготовке к экзамену студент за t дней изучает $\frac{t}{t+1}$-ю часть курса, а забывает $\frac{1}{25}t$-ю часть. Сколько дней нужно затратить на подготовку, чтобы была изучена максимальная часть курса?

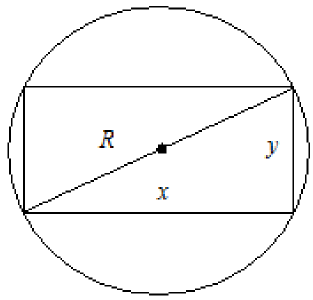
20. Через точку (3;5) провести прямую с отрицательным угловым коэффициентом так, чтобы площадь треугольника, образованного ею с осями координат, была наименьшей.

21. Решёткой длиной 120 м нужно огородить прилегающую к дому прямоугольную площадку наибольшей площади. Определить размеры прямоугольной площадки.

22. В треугольник с основанием a и высотой h вписан прямоугольник наибольшей площади. Определить площадь прямоугольника.

23. Найти стороны прямоугольника наибольшей площади, которой можно вписать в эллипс с осями $2a$ и $2b$.

24. Окно имеет форму прямоугольника, завершённого полукругом. Периметр окна равна. При каких размерах сторон прямоугольника окно будет пропускать наибольшее количество света?



25. В сопротивлении материалов доказывают, что

сопротивление изгибу балки прямоугольного сечения пропорционально её ширине x и квадрату её высоты $y: P = kxy^{2}$ (рис.). Какое сечение должна иметь балка наибольшего сопротивления изгибу, вырезанная из цилиндрического бревна радиуса R?

26. Найти высоту конуса наибольшего объёма, образующая которого имеет длину $l = \sqrt{3}$ см.

27. Найти радиус основания и высоту цилиндра с наибольшей боковой поверхностью, которой можно вписать в шар радиуса R.

28. Определить размеры открытого бассейна с квадратным дном объёмом 32 $м^3$ так, чтобы на облицовку его стен пошло наибольшее количество материала.

29. Объём правильной четырёхугольной призмы 8 $см^3$. Какую длину должны иметь сторона основания, и высота призмы, чтобы площадь её поверхности была наименьшей?

30. В основании пирамиды прямоугольный треугольник с гипотенузой 2 см. Высота пирамиды 6 см. Найти наибольший объём пирамиды.

31. Вписать в конус с высотой H и радиусом основания R цилиндр наибольшего объёма.

32. Сила действия кругового электрического тока на небольшой магнит ось которого направлена перпендикулярно плоскости круга и проходит через его центр, выражается формулой:

$$F = \frac{cx}{(a^2 + x^2)^{\frac{5}{2}}},$$

где a - радиус круга, x - расстояние от центра круга до магнита и c - постоянна. При каком значении x эта сила будет наибольшей?

33. Тело массой $m_0 = 3000$ кг падает с высоты $H = 2000$ м и теряет массу (сгорает) пропорционально времени падения. Коэффициент пропорциональности $k = 100$ кг/с.Считая, что начальная скорость $v_0 = 0$, ускорение $g = 10$ $м/с^2$,

и пренебрегая сопротивлением воздуха. Найти наибольшую кинетическую энергию тела.

34. В точках A и B находятся источники света силы соответственно F_1 и F_2. На отрезке $AB = a$ найти наименее освещенную точку M (освещённость точки обратно пропорциональна квадрату расстояния r её от источника света: $E = \frac{mF}{r^2}$, где $m = const$).

35. Лампа висит над центром круглого стола радиуса R. При какой высоте лампы над столом освещённость предмета, лежащего на краю стола, будет наилучшая? (Освещённость прямо пропорционально косинусу угла падения лучом света и обратно пропорционально квадрату расстояния от источника: $E = \frac{k\cos\varphi}{r^2}$, где $k = const$).

36. Стоимость плавания корабля в течение часа определяется формулой $a + bv^3$, где a и b - постоянные, а v - скорость корабля (первое слагаемое связано с расходами на амортизацию и содержание команды, а второе с расходом топлива). При какой скорости судно пройдёт расстояние l с наименьшими затратами?

37. Вблизи завода A проводится по намеченной прямой к городу B железная дорога. Под каким углом α к проектируемой железной дороге нужно провести шоссе с завода A, чтобы доставка грузов из A в B была наиболее дешёвой, если стоимость перевозки 1 тонны – километра по шоссе в m раз дороже, чем по железной дороге.

38. На двух стройплощадках возводятся два одноэтажных склада общей площадью 600 $м^2$. Стоимость постройки склада прямо пропорциональна квадрату его площади. Кроме того, известно, что строительство 1 $м^2$ на второй площадке обходится на 40 % дороже, чем на первой. Какой должны быть площадь каждого склада, чтобы стоимость строительства была наименьшей?

39. Требуется изготовить открытый цилиндрический бак данного объёма V. Стоимость квадратного метра материала, идущего на изготовление дна бака,

равна p_1 руб. , а стенок - p_2 руб.. Каковы должны быть радиус дна и высота бака, чтобы затраты на материал для его изготовления были наименьшими?

40. На странице книге печатный текст должен занимать S квадратных сантиметров. Верхнее и нижнее поля должны быть по a см, правое и левое – по b см. Если принимать во внимание только экономию бумаги, то какими должны быть наиболее выгодные размеры страницы?

41. Известна функция прибыли $П(x) = R(x) - C(x)$, где $R(x)$ - доход, $C(x)$ - издержки. Найти максимум прибыли, если доход и издержки определяются формулами соответственно: $R(x) = -x^2 + 5x$, $C(x) = 13x - 7x^2 + x^3$.

42. В краткосрочном плане производственная функция зависит только от численности персонала x фирмы и имеет вид $Q(x) = 4{,}5x^2 - 0{,}5x^3$. Требуется определить численность персонала, при которой выпуск продукции достигается максимального значения.

43. Производитель реализует свою продукцию по цене p за единицу, а издержки при этом задаются функцией $C(x) = 6x + 0{,}1x^3$, где x - объём выпускаемой продукции в усл. ед. $(x > 0)$. Найти оптимальный для производителя объём выпуска продукции и соответствующая ему прибыль, если $p = 486$ ден. ед. (Прибыль $П(x) = 486x - C(x)$).

44. Издержки производства составляют $C = 3x^2 + 18x$ (руб./час), объём выпускаемой продукции $Q = 2 + 6x$ (у.е./час), где x (руб./час) – количество вложенных в производство инвестиций. Цена единицы продукции $p = 12$ руб. Найти оптимальное количество инвестиций в производство.

Занятие 9.

Тема: Кривизна кривой.

1. Найти кривизну параболы $y^2 = 4x$ в точке $N(9;6)$.

2. Вычислить кривизну параболы $y - 3 = 2(x+2)^2$ в ее вершине.

3. Вычислить кривизну гиперболы $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ в одной из ее вершин.

4. Найти радиус кривизны эллипса $L: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ в одной из его вершин.

5. Найти радиус кривизны астроиды $x = a\cos^3 t$; $y = a\sin^3 t$; $z = 0$; $0 \le t \le 2\pi$ в точке $A\left(\frac{a\sqrt{2}}{4}; \frac{a\sqrt{2}}{4}\right)$.

6. Найти кривизну части циклоиды $x = a(t - \sin t)$; $y = a(1 - \cos t)$; $z = 0$; $0 < t < 2\pi$ в точке $P\left(a\left(\frac{\pi}{2} - 1\right); a\right)$.

Индивидуальные задания.

Вариант 1.

1. Вычислить производные следующих функций:

а) $y = \frac{1 + x^2}{\sqrt{x}}$; б) $y = \ln \arcsin x^3$; в) $\begin{cases} x = t^3 + 1, \\ y = \ln(1 + t^2) \end{cases}$; г) $y = (tgx)^{\ln x}$.

2. Найти пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x + x^2}$; б) $\lim\limits_{x \to 0} (1 + 7x)^{\frac{1}{x}}$.

3. Исследовать функцию на экстремум:

$y = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 3$.

4. Найти наибольшее и наименьшее значение функции в указанном промежутке: $y = x \ln x^2$, $x \in [e^{-1}; e]$.

5. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y = 8\sqrt[4]{x} - 70$ в заданной точке $x_0 = 16$.

6. Решить задачу: Две материальные точки движутся прямолинейно по законам: $S_1(t) = \frac{2}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 6t + 11$, $S_2(t) = \frac{2}{3}t^3 - t^2 + 5t + 6$ (время t измеряется в секундах; пути S_1 и S_2 - в метрах). Найти ускорение материальных точек в тот момент, когда их скорости одинаковы.

7. Разложить многочлен $f(x) = 2x^6 - x^3 + 3$ по степеням двучлена $x - 2$ и вычислить приближенно $f(1{,}02)$ с точностью до 0,001.

8. Найти приближенное значение функции $y = arctgx$ в точке $x = 0{,}97$.

9. Исследовать функции и построить их графики:

а) $y = \dfrac{4x}{4 + x^2}$; б) $y = x^3 + 3x + 2$; в) $y = \ln(x^2 + x - 2)$

10. Решить задачу: Сечение тоннеля имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Периметр сечения 18 м. При каком радиусе полукруга площадь сечение будет наибольшей?

Вариант 2.

1. Вычислить производные следующих функций:

а) $y = x^5 \cdot e^{x+1}$; б) $y = \sin^2 \sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$; в) $\begin{cases} x = 5t^3, \\ y = 3t^2 + 4t \end{cases}$; г) $y = x^{\sin^2 x}$.

2. Найти пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4e^x + x^2}{x^3}$; б) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} (tgx)^{\frac{1}{\frac{\pi}{4} - x}}$.

3. Исследовать функцию на экстремум: $y = \dfrac{12}{\sqrt{x^2 + 3x - 4}}$.

4. Найти наибольшее и наименьшее значение функции в указанном промежутке: $y = \arccos x^2$, $x \in [-\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \dfrac{\sqrt{2}}{2}]$.

5. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $\begin{cases} x = 2t\cos t \\ y = 2t\sin t \end{cases}$ в заданной точке $t_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

6. Решить задачу: Закон движения точки по оси OX даётся формулой $x = 10t + 5t^2$, где t - время в секундах, x - расстояние в метрах. Найти среднюю скорость движения за промежуток времени $20 \le t \le 20 + \Delta t$, если:

а) $\Delta t = 1$; б) $\Delta t = 0{,}01$.

Чему равна скорость движения в момент времени $t = 20$?

7. Разложить многочлен $f(x)=x^{11}+3x^{6}+1$ по степеням двучлена $x+1$ и вычислить приближенно $f(0,27)$ с точностью до 0,01.

8. Найти приближенное значение функции $y=\sin x$ в точке $x=359^{\circ}$.

9. Исследовать функции и построить их графики:

а) $y=x^{2}-4x$; б) $y=\dfrac{x^{3}+8}{3x}$; в) $y=e^{\frac{1}{2-x}}$.

10. Решить задачу: Два источника света расположены в 30 м друг от друга. На прямой, соединяющей их, найти наименее освещённую точку, если силы света источников относятся, как 27:8.

Вариант 3.

1. Вычислить производные следующих функций:

а) $y=\dfrac{\cos(x+\pi)}{\sqrt{x}}$; б) $y=2^{\arcsin\sqrt{x}}$; в) $\begin{cases} x=2t^{2}-t, \\ y=t+\sin t \end{cases}$; г) $y=(\arcsin x)^{x}$.

2. Найти пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin 2x-1}{\sin x-\cos x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} tgx\cdot\ln x$.

3. Исследовать функцию на экстремум:

$y=\sqrt[3]{(2x^{3}-9x^{2}-60x+5)^{2}}$.

4. Найти наибольшее и наименьшее значение функции в указанном промежутке: $y=\dfrac{1}{\cos x}$, $x\in[\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}]$.

5. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y=\dfrac{x^{16}+9}{1-5x^{2}}$ в заданной точке $x_0=1$.

6. Решить задачу: Измерение величины заряда на обкладках конденсатора показали, что заряд q меняется со временем по закону: $q(t)=3{,}05+6{,}11t-\dfrac{0{,}8}{t+1}$ ($t\le 10$, время в секундах, заряд в микрокулонах). Найти закон изменения силы тока.

7. Разложить многочлен $f(x)=2-24x-12x^2-4x^3-x^4$ по степеням двучлена $x-3$.

8. Найти приближенное значение функции $y=\arcsin x$ в точке $x=0{,}51$.

9. Исследовать функции и построить их графики:

а) $y=x^2-12x+21$; б) $y=\dfrac{2x}{(x-3)^2}$; в) $y=e^{2x-x^2}$.

10. Решить задачу: В полукруг радиуса R вписан прямоугольник наибольшей площади. Определить его радиус.

Вариант 4.

1. Вычислить производные следующих функций:

а) $y=(x^2+1)tgx$; б) $y=\sqrt[3]{x^2+4x}$; в) $\begin{cases} x=\cos t, \\ y=t-\sin t \end{cases}$; г) $y=(tgx)^{arctgx}$.

2. Найти пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$.

3. Исследовать функцию на экстремум: $y=1-(x-2)^{\frac{4}{5}}$.

4. Найти наибольшее и наименьшее значение функции в указанном промежутке: $y=x^6-5x^4+5x^3-1,\quad x\in[0;2]$.

5. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y=\begin{cases} x=t-t^4 \\ y=t^2-t^3 \end{cases}$ в заданной точке (0;0).

6. Решить задачу: Точка движется по параболе $y=8x-x^2$ так, что её абсцисса изменяется по закону $x=\sqrt{t}$ (x измеряется в метрах, t - в секундах). Какова скорость изменения ординаты точки через 9 секунд после начала движения?

7. Разложить многочлен $f(x)=x^{10}-3x^6+x^2+2$ по степеням двучлена $x-2$.

8. Найти приближенное значение функции $y=\sqrt[4]{x}$ в точке $x=15{,}8$.

9. Исследовать функции и построить их графики:

а) $y=x^3+6x+14$; б) $y=\dfrac{4x^2}{x^3-1}$; в) $y=(3x^2+4)e^{-x^2}$

10. Решить задачу: Найти максимум прибыли, если доход и издержки определяются формулами соответственно: $R(q)=70q+q^2$ и $C(q)=q^3-23q^2-170q+6750$ (прибыль $\Pi(q)=R-C$).

Вариант 5.

1. Вычислить производные следующих функций:

а) $y=\dfrac{\ln x+1}{x^2+1}$; б) $y=\ln\dfrac{x+5}{x-5}$; в) $\begin{cases} x=t^2-1, \\ y=t^3-4t \end{cases}$; г) $y=(\cos x)^{\ln x}$.

2. Найти пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{4x}-x}{x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{2x}$.

3. Исследовать функцию на экстремум: $y=(x-2)^{\frac{2}{3}}(2x+1)$.

4. Найти наибольшее и наименьшее значение функции в указанном промежутке: $y=x+\dfrac{1}{x},\ \ x\in[0{,}01;100]$.

5. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y=\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$ в заданной точке $x_0=4$.

6. Решить задачу: Количество тепла Q Дж, необходимое для нагревания 1 кг воды от 0° C до t° C, определяется формулой $Q=t+2\cdot 10^{-5}t^2+3\cdot 10^{-7}t^3$. Определить теплоёмкость воды при $t=100^\circ$ C.

7. Разложить многочлен $f(x)=x^8-2x^7+5x^6-x+3$ по степеням двучлена $x-1$.

8. Найти приближенное значение функции $y=\ln tgx$ в точке $x=47^\circ 15'$.

9. Исследовать функции и построить их графики:

а) $y = x^2(x-1)$; б) $y = \dfrac{x^4}{x^3+64}$; в) $y = 5xe^{-\frac{x}{3}}$.

10. Решить задачу: Потенциал в точке *M* электрического поля, образованного зарядом *e*, равен $\dfrac{e}{r}$, где *r* – расстояние от точки *M* до заряда. В точках O_1 и O_2, удаленных друг от друга на *a*, помещены заряды e_1 и e_2 одинакового знака. В какой точке отрезка O_1O_2 потенциал суммарного электрического поля будет наименьшим.

Вариант 6.

1. Вычислить производные следующих функций:

а) $y = \sin x \cdot arctgx$; б) $y = \sqrt{\cos\sqrt{x}}$; в) $\begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = arctgt \end{cases}$; г) $y = (x^2+4)^{tgx}$.

2. Найти пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-\sqrt{8x}}{x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[4]{x}\cdot\ln x$.

3. Исследовать функцию на экстремум: $y = x^2(1-x\sqrt{x})$.

4. Найти наибольшее и наименьшее значение функции в указанном промежутке: $y = x\sqrt[3]{x-1},\ \ x\in[0;9]$.

5. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $\begin{cases} x = 2tgt \\ y = 2\sin^2 t + \sin 2t \end{cases}$ в заданной точке $t_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

6. Решить задачу: Масса $m(t)$ радиоактивного вещества изменяется по закону $m = m_0 \cdot 2^{\frac{t_0-t}{T}}$, где *t* – время, m_0 - масса в момент времени t_0, *T* – период полураспада. Доказать, что скорость распада радиоактивного вещества пропорциональна количеству веществ. Найти коэффициент пропорциональности.

7. Разложить многочлен $f(x) = x^5 - 5x^3 + x$ по степеням двучлена $x-2$ и вычислить приближенно $f(2{,}1)$ с точностью до 0,001.

8. Найти приближенное значение функции $y=\sqrt[3]{x}$ в точке $x=125{,}1324$.

9. Исследовать функции и построить их графики:

а) $y=x^3-3x+10$; б) $y=\dfrac{4x}{4-x^2}$; в) $y=\ln(x^2-4x+5)$

10. Решить задачу: Стоимость эксплуатации катера, плывущего со скоростью v км/ч., составляет $90+0{,}4v^2$ рублей в час. С какой скоростью должен плыть катер, чтобы стоимость 1 км пути была наименьшей?

Вариант 7.

1. Вычислить производные следующих функций:

а) $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{x}$; б) $y=\ln^2 arctg\dfrac{x}{2}$; в) $\begin{cases} x=\cos x, \\ y=t+\sin t \end{cases}$; г) $y=(tgx)^{\arcsin x}$.

2. Найти пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+7}{x^2+e^x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(tgx-\dfrac{1}{\cos x}\right)$.

3. Исследовать функцию на экстремум: $y=x+\sqrt{3-x}$.

4. Найти наибольшее и наименьшее значение функции в указанном промежутке: $y=\dfrac{1-x+x^2}{1+x-x^2}$, $x\in[0;1]$.

5. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y=x^2\arcsin\dfrac{x}{2}$ в заданной точке $x_0=\sqrt{3}$.

6. Решить задачу: Тело с высоты 10 м брошено вертикально вверх с начальной скоростью 20 м/сек. На какой высоте x оно будет через t секунд? Определить скорость и ускорение движения. Через сколько секунд тело достигнет наивысшей точки и на какой высоте?

7. Разложить многочлен $f(x)=3x^5-5x^4+3x-2$ по степеням двучлена $x-3$ и вычислить приближенно $f(0{,}39)$ с точностью до 0,01.

8. Найти приближенное значение функции $y=tgx$ в точке $x=44^\circ 50'$.

9. Исследовать функции и построить их графики:

а) $y=(x+3)(x-2)^2$; б) $y=\dfrac{-x^2}{2(x^2+10)}$; в) $y=3xe^{\frac{x^2}{2}}$.

10. Решить задачу: Периметр равнобедренного треугольника равен 2р. Какой длины должны быть его стороны, чтобы объём тела, образованного вращением этого треугольника вокруг его основания, был наибольшим?

Вариант 8.

1. Вычислить производные следующих функций:

а) $y=(x^3+x^2)\cos x$; б) $y=\ln^2\sin\dfrac{1}{x}$; в) $\begin{cases} x=t^3+1, \\ y=t^2-t \end{cases}$; г) $y=(\cos x)^{arctgx}$.

2. Найти пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\ln(x-3)}{x-4}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{x-1}}$.

3. Исследовать функцию на экстремум: $y=\ln(x^2+1)$.

4. Найти наибольшее и наименьшее значение функции в указанном промежутке: $y=2x^3+3x^2-12x+1,\ \ x\in[-1;5]$.

5. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $\begin{cases} x=2\cos t \\ y=\sin t \end{cases}$ в заданной точке $\left(1;-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

6. Решить задачу: Сосуд в форме полушара радиуса R см наполняется водой с постоянной скоростью a л/сек. Определить скорость повышения уровня на высоте уровня h см и показать, что она обратно пропорциональна площади свободной поверхности жидкости. *Указание*: Объём шарового сегмента $V=\pi h^2\left(R-\dfrac{h}{3}\right)$. Обе часть этого равенства надо продифференцировать по t, причём $\dfrac{dV}{dt}=a$ (по условию).

7. Разложить многочлен $f(x) = 4 - 4x - 3x^2 + 2x^3 + x^4$ по степеням двучлена $x + 2$.

8. Найти приближенное значение функции $y = \sqrt{\dfrac{2-x}{2+x}}$ в точке $x = 0{,}15$.

9. Исследовать функции и построить их графики:

а) $y = x^3 + 3x - 4$; б) $y = \dfrac{4x^2 - 9}{2x^3}$; в) $y = x - \ln(x+9)$.

10. Решить задачу: Производственная функция Q зависит от числа работающих x и имеет вид $Q(x) = 24x^2 - 0{,}8x^3$, где Q – выпуск продукции, x –число работающих.Найти численность работающих, при которой выпуск Q достигает максимального значения.

Вариант 9.

1. Вычислить производные следующих функций:

а) $y = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x^2+1}$; б) $y = 2^{ctg^2 4x}$; в) $\begin{cases} x = t + t^2, \\ y = 2t + t^4 \end{cases}$; г) $y = (arctgx)^{x^2}$.

2. Найти пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - x - 1}{\sin 2x}$; б) $\lim\limits_{x \to 1} (x-1)\ln(x-1)$.

3. Исследовать функцию на экстремум: $y = \dfrac{x}{\ln x}$.

4. Найти наибольшее и наименьшее значение функции в указанном промежутке: $y = 4x^6 - x^3 + 3, \quad x \in [0;1]$.

5. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y = 2^{-x^2} \sin \pi x$ в заданной точке $x_0 = 0$.

6. Решить задачу: Зенитный снаряд выброшен вертикально вверх с начальной скоростью a м/сек. На какой высоте x он будет через t секунд? Определить скорость и ускорение движения снаряда. Через сколько секунд снаряд достигнет наивысшей точки и на каком расстоянии от земли?

7. Разложить многочлен $f(x)=x^5-x^3-8x^2+2x+12$ по степеням двучлена $x-3$.

8. Найти приближенное значение функции $y=\lg x$ в точке $x=61$.

9. Исследовать функции и построить их графики:

а) $y=x^3-3x+12$; б) $y=\dfrac{1}{x}+4x^2$; в) $y=2xe^{-\frac{3x^2}{2}}$.

10. Решить задачу: Если батарея с электродвижущей силой E и внутренним сопротивлением r замкнута проводником с сопротивлением R, то мощность получающегося тока W выражается формулой $W=\dfrac{E^2R}{(R+r)^2}$. При каком значении R мощность будет наибольшей?

Вариант 10.

1. Вычислить производные следующих функций:

а) $y=\dfrac{\sin x}{x^3+1}$; б) $y=\log_3(x^3-\sin x)$; в) $\begin{cases} x=t(1-\sin t), \\ y=t\cos t \end{cases}$;

г) $y=(tg(2x+1))^{x^2+1}$.

2. Найти пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-\sqrt{ax^3}}{\sqrt{ax}-x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^x$.

3. Исследовать функцию на экстремум: $y=x^3+9x^2+24x-5$.

4. Найти наибольшее и наименьшее значение функции в указанном промежутке: $y=\sqrt[3]{x^2}-x,\quad x\in[0;1]$.

5. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y=3\sqrt[4]{x}-\sqrt{x}$ в заданной точке $x_0=1$.

6. Решить задачу: Колебательное движение материальной точки совершается по закону $x=a\cos\omega t$. Определить скорость и ускорение движения в точках $x=\pm a$ и $x=0$.

7. Разложить многочлен $f(x) = x^4 - 10x^3 + 25x^2 - 7x + 1$ по степеням двучлена $x - 5$.

8. Найти приближенное значение функции $y = x^6$ в точке $x = 1{,}002$.

9. Исследовать функции и построить их графики:

а) $y = x(x^2 - 9)$; б) $y = \dfrac{x^2 + x + 3}{x - 3}$; в) $y = \dfrac{e^{3x} + e^{-3x}}{6}$.

10. Решить задачу: Найти наибольший объём правильной треугольной пирамиды, у которой периметр боковой грани равен 6 см.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – С.-П.: Изд-во «Профессия», 2001.

2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Задачник. – М.: Наука, 1982.

3. Виноградова И. А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу. Книга 1. – М.: «Высшая школа», 2000.

4. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – 9-е изд. – М.: Наука, 1977.

5. Зорич В.А. Математический анализ. Т. 1,2. – М.: Наука, 1984.

6. Ильген В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ. – М.: Наука, 1979.

7. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа. Т.1,2. – М.: Физматлит, 2002.

8. Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. Сборник задач по математическому анализу. Ч.1. – М.: Физматлит, 2003.

9. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике. – М.: «Высшая школа», 1983.

10. Лунгу К.Н., Письменный Д.Т., Федин С.Н., Шевченко Ю.А. Сборник задач по высшей математике. 1 курс. – М.: Айрис Пресс, 2007.

11. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике – М.: Физматгиз, 1967.

12. Никольский С.М. Курс математического анализа. Т.1,2. – 3-е изд., перераб. и доп.-М.: Наука, 1983.

13. Рудин У. Основы математического анализа. – М.: Мир, 1966.

14. Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа. – 2-е изд., перераб. – М.: Изд-во МФТИ, 2000.

16. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.2,3. – 5-е изд. – М.: Наука, 1969.

СОДЕРЖАНИЕ

Анна Павловна Филимонова,
канд. физ-мат. наук, доц. кафедры общей математики и информатики АмГУ

Светлана Владимировна Костенко,
старший преподаватель кафедры общей математики и информатики АмГУ

Анна Владимировна Павельчук,
ассистент кафедры общей математики и информатики АмГУ

Анжелика Владимировна Голик,
ассистент кафедры общей математики и информатики АмГУ

Математика: Дифференциальное исчисление функции одной переменной. *Практикум*.

Издательство АмГУ. Формат 60x84/16. Усл. печ. л. 4,88. Тираж 70. Заказ 201.