Федеральное агентство по образованию
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
(ГОУВПО «АМГУ»)

УТВЕРЖДАЮ
Зав. кафедрой МАиМ
_______ Т.В. Труфанова
«___»_________ 2007г.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС ДИСЦИПЛИНЫ

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

для специальности 010701 – Физика

Составители: Е.М. Салмашова, Н.В. Кван

Благовещенск
2007

ББК
Т 80

Печатается по решению редакционно-издательского совета факультета математики и информатики Амурского государственного университета

Салмашова Е.М., Кван Н.В.
Учебно-методический комплекс дисциплины «Аналитическая геометрия и линейная алгебра» для студентов очной формы обучения специальности 010701 – «Физика». – Благовещенск. Изд-во Амурский гос. ун-та, 2007. – 141 с.

СОДЕРЖАНИЕ

1. ВЫПИСКА ИЗ ГОСУДАРСТВЕННОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО СТАНДАРТА ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Специальность 010701 – Физика
Квалификация – физик

Аналитическая геометрия.

Определители второго и третьего порядка. Векторы и координаты на плоскости и в пространстве. Прямые на плоскости и в пространстве. Кривые и поверхности второго порядка.

Линейная алгебра.

Матрицы и определители. Линейные пространства. Системы линейных уравнений. Евклидовы и унитарные пространства. Линейные операторы в конечномерном пространстве. Билинейные и квадратичные формы.

2. РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

по дисциплине: «Аналитическая геометрия и линейная алгебра»
для специальности 010701 – Физика

Курс 1 Семестр 1,2
Лекции 72 (36+36) (час.) Экзамен 1,2 семестр
Зачет (нет).

Практические (семинарские) занятия 36 (18+18) (час.)
Лабораторные занятия (нет).
Самостоятельная работа 54 (час.)
Всего 162 (час.)

1. Цели и задачи дисциплины, ее место в учебном процессе

Дисциплина «Аналитическая геометрия и линейная алгебра» ставит своей целью знакомство студентов с основными разделами и методами аналитической геометрии и линейной алгебры и их приложениями, развитие наглядно-геометрических представлений.

В процессе обучения студенты должны овладеть умениями и навыками свободной и уверенной работы с векторами и различными системами координат, прочно усвоить свойства прямых и плоскостей, изучить теорию алгебраических кривых и поверхностей второго порядка, освоить комплексные числа, матрицы, теорию определителей и квадрики в евклидовом пространстве.

2. Тематическое содержание дисциплины

2.1. Наименование тем, их содержание, объем в часах лекционных занятий

ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН ЛЕКЦИОННЫХ ЗАНЯТИЙ

	Наименование темы	Кол-во часов
	1 семестр	
1	Векторы на плоскости и в пространстве	8
2	Прямые и плоскости	10
3	Кривые второго порядка	4
4	Комплексные числа и многочлены над полем	6
5	Матрицы и определители	8
	2 семестр	
6	Системы линейных уравнений	6
7	Линейные пространства	6

8	Линейные преобразования линейного пространства	6
9	Евклидовы пространства	8
10	Квадратичные формы. Квадрики	10
ИТОГО		72

1 курс 1 семестр

Тема 1. Векторы на плоскости и в пространстве.

Вектор как направленный отрезок. Сложение и вычитание векторов, умножение вектора на скаляр. Аффинные и прямоугольные системы координат. Скалярное произведение векторов. Векторное произведение векторов. Смешанное произведение векторов.

Тема 2. Прямые и плоскости.

Понятие уравнения кривой на плоскости и поверхности в пространстве. Уравнения прямой на плоскости. Метрические задачи на прямую. Уравнения плоскости в пространстве. Уравнения прямой в пространстве. Метрические задачи на прямую и плоскость и прямую в пространстве.

Тема 3. Кривые второго порядка.

Эллипс, гипербола, парабола.

Тема 4. Комплексные числа и многочлены над полем.

Понятие кольца, поля. Поле комплексных чисел.

Тема 5. Матрицы и определители.

Перестановки и подстановки. Определитель n-го порядка, его свойства. Миноры и алгебраические дополнения. Сложение, умножение матриц и умножение матрицы на скаляр. Обратная матрица. Теорема Крамера.

1курс 2семестр

Тема 6. Системы линейных уравнений.

Определение системы линейных уравнений над полем, ее решения. Метод Гаусса. Однородные системы линейных уравнений, фундаментальная система решений. Линейные многообразия и системы линейных уравнений .

Тема 7. Линейные пространства.

Определение линейного пространства. Линейная зависимость векторов. Базис и ранг системы векторов. Изоморфизм линейных пространств. Линейные подпространства и линейные многообразия.

Тема 8. Линейные преобразования линейного пространства.

Линейное преобразование его матрица. Сложение, умножение на скаляр линейных преобразований. Образ, ядро, ранг и дефект линейного преобразования.

Тема 9. Евклидовы пространства.

Определение евклидова пространства, примеры. Ортогональные и ортонормированные системы векторов. Процесс ортогонализации. Изоморфизм евклидовых пространств. Ортогональные дополнения подпространства.

Тема 10. Квадратичные формы. Квадрики.

Квадратичная форма. Матрица квадратичной формы. Ранг квадратичной формы. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом Лагранжа. Квадрика. Приведение общего уравнения квадрики к каноническому виду путем параллельного переноса и поворота осей. Поверхности второго порядка. Исследование их формы методом сечений.

2.2. Практические (семинарские) занятия, их содержание и объем в часах.

ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Наименование темы		Кол-во часов
1	Вектор. Сложение и вычитание векторов, умножение вектора на скаляр	1
2	Системы координат. Скалярное произведение векторов	1
3	Векторное произведение векторов	1
4	Смешанное произведение векторов	1
5	Прямая на плоскости	2
6	Прямая и плоскость в пространстве	2
7	Линии второго порядка	2
8	Комплексные числа	4
9	Матрицы	2
10	Определители	2
11	Линейные пространства	4
12	Системы линейных уравнений	4
13	Евклидовы пространства	4
14	Линейные преобразования	2
15	Квадратичные формы	2
16	Квадрики	2
ИТОГО		36

2.3. Самостоятельная работа студентов

Для студентов специальности 010701 – «Физика» на самостоятельную работу по рабочей программе отводиться 54 часа.

ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Наименование темы	Содержание самостоятельной работы	Кол-во часов
Векторы на плоскости и в пространстве	Расчетная работа	2
Прямые и плоскости	Индивидуальная домашняя контрольная работа	1
Кривые второго порядка	Работа с литературой (конспект) Домашняя работа	2
Комплексные числа	Расчетная работа	2
Матрицы и определители	Расчетная работа	3

Линейные пространства	Домашняя работа	1
Системы линейных уравнений	Индивидуальная домашняя контрольная работа	2
Евклидовы пространства	Работа с литературой (конспект) Домашняя работа	1
Линейные преобразования линейного пространства	Домашняя работа	2
Квадратичные формы. Квадрики	Индивидуальная домашняя контрольная работа	2
Подготовка к экзамену	1 семестр	18
Подготовка к экзамену	2 семестр	18
ИТОГО		54

2.4. Перечень и темы промежуточных форм контроля знаний студентов

Текущий и промежуточный контроль за аудиторной и самостоятельной работой обучаемых осуществляется во время проведения практических занятий посредством проведения самостоятельных и контрольных работ по соответствующим разделам. Итоговый контроль осуществляется после успешного прохождения студентами текущего и промежуточного контроля в виде экзамена.

Формы контроля:

1) домашнее задание по каждой из тем практических занятий;
2) проверка выполнения домашних занятий;
3) контрольные работы по пройденным темам;
4) расчетные работы.

2.5. Вопросы к экзамену

1. Векторы, операции над ними.
2. Коллинеарные, компланарные векторы. Линейная зависимость векторов.
3. Базис векторного пространства. Ортонормированный базис. Длина вектора.
4. Скалярное произведение векторов, его свойства.
5. Векторное произведение векторов.
6. Смешанное произведение векторов.
7. Аффинная, прямоугольная и полярная система координат.
8. Уравнения прямой на плоскости.
9. Общее уравнение прямой на плоскости. Прямая в системе координат на плоскости.
10. Взаимное расположение двух прямых на плоскости. Расстояние от точки до прямой на плоскости. Угол между двумя прямыми на плоскости.
11. Эллипс.
12. Гипербола.

13. Парабола. Классификация линий второго порядка.
14. Способы задания плоскости в пространстве. Общее уравнение плоскости.
15. Плоскость в системе координат. Угол между плоскостями. Расстояние от точки до плоскости.
16. Способы задания прямой в пространстве. Взаимное расположение двух прямых в пространстве.
17. Взаимное расположение прямой и плоскости. Угол между прямой и плоскостью.
18. Расстояние от точки до прямой в пространстве. Расстояние между скрещивающимися прямыми.
19. Поверхности второго порядка. Цилиндрические поверхности.
20. Конические поверхности. Эллипсоид.
21. Гиперболоиды. Параболоиды.
22. Прямолинейные образующие поверхностей второго порядка.
23. Классификация поверхностей второго порядка.
24. Алгебраические операции. Группа.
25. Кольцо. Поле.
26. Поле комплексных чисел.
27. Действия с комплексными числами в алгебраической форме.
28. Действия с комплексными числами в тригонометрической форме.
29. Извлечение квадратного корня из алгебраической формы комплексного числа
30. Действия с комплексными числами в тригонометрической форме.
31. Извлечение корня n-ой степени комплексного числа в тригонометрической форме.
32. Основные задачи теории систем линейных уравнений.
33. Ранг матрицы. Неизменность ранга матрицы при элементарных преобразованиях.
34. Критерий совместности систем линейных уравнений. Метод Гаусса.
35. Система линейных однородных уравнений. Связь между решениями неоднородной системы уравнений и однородной.
36. Матрицы операции над ними.
37. Обратная матрица.
38. Решение систем линейных уравнений в матричной форме.
39. Определитель. Свойства определителя.
40. Минор. Разложение определителя по элементам ряда.
41. Определитель произведения матриц.
42. Вычисление обратной матрицы с помощью алгебраических дополнений.
43. Правило Крамера.
44. Линейные пространства, их свойства.
45. Изоморфизм линейных пространств.
46. Преобразование координат векторов при изменении базиса.
47. Подпространства линейного пространства.
48. Линейная оболочка системы векторов.

49. Фундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений.
50. Линейное многообразие решений системы линейных уравнений.
51. Понятие линейного преобразования (оператора), его матрица.
52. Связь между матрицами линейного оператора в различных базисах.
53. Действия над линейными операторами.
54. Вырожденные и невырожденные операторы. Ранг, ядро, дефект линейного оператора.
55. Собственный вектор, собственное значение линейного оператора.
56. Характеристический многочлен матрицы линейного оператора
57. Понятие евклидова пространства.
58. Длина вектора. Неравенство Коши-Буняковского.
59. Понятие метрического пространства.
60. Ортогональность векторов. Ортогональный базис. Процесс ортогонализации.
61. Изоморфизм евклидовых пространств.
62. Ортогональные матрицы.
63. Ортогональные и симметрические преобразования евклидова пространства.
64. Представление линейного преобразования в виде произведения ортогонального и симметрического.
65. Понятие квадратичной формы, ее матрица.
66. Преобразования матрицы квадратичной формы. Канонический вид квадратичной формы.
67. Ортогональное преобразование квадратичной формы к каноническому виду.
68. Метод Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду.
69. Закон инерции квадратичных форм. Эквивалентные квадратичные формы.
70. Приведение квадрики к каноническому виду.

2.6. Требования к знаниям студентов, предъявляемые на экзамене

Необходимым условием допуска на экзамен является сдача всех расчетных работ. В предлагаемый билет входят два вопроса и задача. Студент должен дать развернутые ответы на вопросы и решить предложенную задачу. Развернутый ответ предполагает полное знание теории по данной части курса, свободную ориентацию в материале.

Знания студента оцениваются «отлично» при полном изложении теоретического материала экзаменационного билета, ответах на дополнительные вопросы со свободной ориентацией в материале и других литературных источниках, при правильно выполненной практической части.

Оценка «хорошо» ставится при твердых знаниях студентом всех разделов курса (в пределах конспекта лекций) и при преимущественно правильно выполненной практической части (допускаются ошибки вычислительного характера, небольшие недочеты или неточности).

Оценку «удовлетворительно» студент получает, если дает неполные ответы на теоретические вопросы билета, показывая поверхностное знание учебного материала, владение основными понятиями и терминологией; при неверном ответе на билет или на дополнительные вопросы, при этом по крайней мере практическое задание должно быть выполнено в основном верно.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется за незнание студентом одного из разделов курса, если студент не дает ответы на теоретические вопросы билета, показывая лишь фрагментарное знание учебного материала, незнание основных понятий и терминологии, незнание способа решения задачи.

3. Учебно-методические материалы по дисциплине

3.1. Перечень обязательной (основной) литературы

1. Веселов А.П., Троицкий Е.В. Лекции по аналитической геометрии. Учеб.пособие . М.: Изд-во Центра прикладных исследований при механико-математическом ф-те МГУ.2002.-160с.
2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра: Учеб.: Для вузов.-5-е изд.-М.: ФИЗМАТЛИТ,2001. –320с.- (Курс высшей математики и мат.физики).
3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитичекая геометрия: Учеб.: Для вузов.- 5-е изд.-М.: Наука. Физматлит,1999.-224с.
4. Бурмистрова Е.Б., Лобанов С.Г. Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии: Учеб. пособие. –М.: ГУ ВШЭ, 1998.-184 с.
5. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.-М.: Физмат-лит, 2004.-304с.
6. А.Л.Вернер, Б.Е.Кантор, С.А.Франгулов . Геометрия. Ч.1. Учебное пособие для физико-математических факультетов педагогических институтов.- СПб.: «Специальная Литература», 1997.- 352 с.
7. А.Л.Вернер, Б.Е.Кантор, С.А.Франгулов . Геометрия. Ч.2. Учебное пособие для физико-математических факультетов педагогических институтов.- СПб.: «Специальная Литература», 1997.- 320 с.
8. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре.- М.: Лаборатория Базовых Знаний , 2001.-384с.
9. В.В. Просолов, В.М. Тихомиров Геометрия. М.: МЦНМО, 1997.-352 с.
10. Цубербиллер О.Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. 32-е изд., стер.- СПб.: Издательство «Лань», 2005.- 336с.:ил.-(Учебники для вузов. Специальная литература).
11. Гусак А.А. Аналитическая геометрия и линейная алгебра: справочное пособие по решению задач/ А.А. Гусак.-Изд-е 2-е, стереотип.-Мн.: «ТетраСистемс», 2001.-288 с.
12. Сборник задач по алгебре и аналитической геометрии: Учеб. Пособие / А.А.Бурдун, Е.А.Мурашко, М.М.Токачев, А.С.Феденко; Под ред. А.С.Феденко.-2-е изд.-Мн.:Унiверсiтэцкае, 1999.-302 с.
13. Фадеев Д.К. Лекции по алгебре - М.: Наука 1984
14. Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел. М., Высшая школа, 1979.

15. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М., Наука, 1965.
16. А.Д.Александров, Н.Ю.Нецветаев. Геометрия: Учеб. Пособие.-М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990.- 672 с.: ил.
17. Кострикин А.И. Введение в алгебру. М., Наука, 1977.
18. Фадеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре. М., Наука, 1977.
19. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. М., Государственное издательство физико-математической литературы, 1980.
20. Л.С. Атанасян. Геометрия. М., Просвещение, 1973, ч.1.
21. Л.С. Атанасян , В.Т. Базылев. Геометрия. М., Просвещение, 1986, ч.1.; 1987. ч.2

3.2. Перечень дополнительной литературы

1. Куликов Л.Я., Москаленко А.И., Фомин А.А. Сборник задач по алгебре и теории чисел. М., Просвещение, 1993.
2. Н.В. Ефимов Высшая геометрия.
3. Сборник задач по геометрии./ Под редакцией В.Т. Базылева. М., Просвещение, 1980
4. Е.С. Ляпин, А.Е. Евсеев Алгебра и теория чисел. М., Просвещение, 1974.
5. Сборник задач по геометрии./ Под редакцией Л.С. Атанасяна. М., Просвещение, 1975.
6. Л.С. Атанасян , В.А. Атанасян. Сборник задач по геометрии. М., Просвещение, 1973 ч.1.
7. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии – М.: Наука, 1977.

3.3. Перечень наглядных и других пособий, методических указаний по проведению конкретных видов учебных занятий, а также методических материалов к используемым в учебном процессе техническим средствам

1. Кван Н.В. «Группы. Кольца. Поля». Учебное пособие. –Изд-во АмГУ, 1999.
2. Ермак Н.В., Кван Н.В. «Векторные пространства. Методы решения задач. Ч.1.». Учебное пособие. – Изд-во АмГУ, 2000.
3. Кван Н.В. Линейная алгебра. Учебное пособие (электр. вариант). – Изд-во АмГУ, 2000.
4. Раздаточный материал по расчетно-графическим работам.
5. Материалы контрольных работ.

3. КРАТКИЙ КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Тема 1. Выкторы на плоскости и в пространстве.

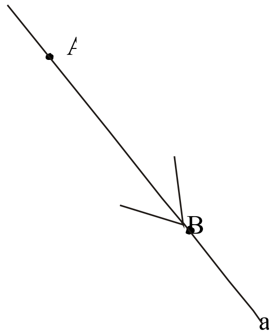
§1. Направленный отрезок. Вектор.

Определение: Направленным отрезком называется множество точек прямой между двумя точками этой прямой, одна из точек которой называется началом, вторая – концом.

$\overline{\grave{A}\hat{A}}$ - направленный отрезок

А – начало

В – конец



Замечание: Любой направленный отрезок имеет две характеристики: длина и направление.

$\left|\overline{\grave{A}\hat{A}}\right|$ - длина.

Определение: Два направленных отрезка, если они лежат на одной или двух параллельных прямых, называются коллинеарными.

Два направленных отрезка называются сонаправленными, если:

1) Лежат на одной или двух параллельных прямых;
2) Их концы находятся в одной полуплоскости относительно прямой, проходящей через их начало.

Два направленных отрезка называются противоположнонаправленными, если:

1) Лежат на концах одной или двух параллельных прямых;
2) Их концы находятся в разных полуплоскостях относительно прямой проходящей через их начало.

Два направленных отрезка называются равными, если:

1) Они сонаправлены;
2) Их длины равны.

Определение: Направленный отрезок, имеющий начало и конец в одной точке (нулевую длину), называется нулевым направленным отрезком.

Замечание: нулевой направленный отрезок коллинеарен любому направленному отрезку.

Определение: Свободным вектором (вектором) называется класс направленных отрезков равных между собой, то есть сонаправленных и равных по длине.

Замечание: Для обозначения векторов используют либо малые буквы, либо вектор обозначают одним из представителей класса направленных отрезков.

Замечание: Множество нулевых направленных отрезков – это нулевой вектор.

Замечание: Все основные свойства направленных отрезков (коллинеарность, сонапрвленность, противоположнонаправленность) справедливы и для вектора.

Определение: два вектора называются противоположными, если:

1) Они противоположнонаправлены;
2) Их длины равны.

Определение: Вектор, длина которого равна единице, называется единичным или ортом.

Сложение векторов.

Суммой двух векторов называется вектор, который можно получить:

1) По правилу треугольника;
2) По правилу параллелограмма.

Правило треугольника:

1) Зафиксируем точку;
2) Отложим от фиксированной точки первый вектор;
3) От конца первого вектора отложим второй;
4) Соединим начало первого вектора и конец второго.

Правило параллелограмма:

1) Зафиксируем точку;
2) Откладывает от фиксированной точки оба вектора;
3) Полученную фигуру достраиваем до параллелограмма;
4) Проводим диагональ параллелограмма из общего начала векторов – это сумма.

Свойства сложения:

1) Коммутативность: $\vec{a} + \vec{a} = \vec{a} + \vec{a}$
2) Ассоциативность: $\vec{a} + (\vec{a} + \tilde{n}) = (\vec{a} + \vec{a}) + \tilde{n}$
3) $\vec{a} + \overline{0} = \vec{a}$
4) $\vec{a} + (-\vec{a}) = \overline{0}$

Правило многоугольника:

Для сложения нескольких векторов от фиксированной точки откладывают первый вектор, каждый следующий откладывают от конца предыдущего. Вектор суммы начинается в начале первого вектора и заканчивается в конце последнего.

Вычитание векторов.

Определение: Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{a}$, называется такой вектор $\tilde{o}$, что выполняется равенство: $\tilde{o} + \vec{a} = \vec{a}$

Вывод: Для того, чтобы построить вектор разности вектор откладывают от одной точки, результирующий вектор направлен от конца вычитаемого к концу уменьшаемого.

Замечание: Если вектор отложить от одной точки и достроить фигуру до параллелограмма, то диагонали параллелограмма это векторы суммы и разности исходных.

Умножение вектора на число.

Определение: Произведением вектора $\vec{a}$ на действительное число $\alpha \in$ R называется вектор $\vec{\partial} = \alpha \vec{a}$, такой что:

1) Длина $|\vec{\partial}| = |\vec{a}| * |\alpha|$
2) Коллинеарны, причём: $\vec{\partial}$ и $\vec{a}$ сонаправлены, если $\alpha \succ 0$; $\vec{\partial}$ и $\vec{a}$ противоположнонаправлены, если $\alpha \prec 0$

Свойства:

1) $1 * \vec{a} = \vec{a}$
2) $-1 * \vec{a} = -\vec{a}$
3) $\alpha * \bar{0} = \bar{0}$
4) Дистрибутивность относительно суммы чисел: $(\alpha + \beta) * \vec{a} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{a}$
5) Дистрибутивность относительно суммы векторов: $(\vec{a} + \vec{a}) * \alpha = \alpha \vec{a} + \alpha \vec{a}$
6) Ассоциативность: $\alpha * (\beta * \vec{a}) = (\alpha * \beta) * \vec{a}$

§2 Линейная зависимость. Базис.

План:

1. Теорема о коллинеарных векторах;
2. Теорема о компланарных и не компланарных векторах;
3. Линейная зависимость векторов, её свойства;
4. Базис векторного пространства. Координаты вектора.

Теорема: Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{a}$ коллинеарны, причём $\vec{a} \neq 0$, то существует и притом единственное, действительное число α такое, что $\vec{a} = \alpha * \vec{a}$

Определение: Три вектора $\vec{a}, \vec{a}, \vec{n}$ - компланарны, причём $\vec{a}$ и $\vec{a}$ неколлинеарны, то существует и притом единственная пара чисел $\alpha, \beta \in$ R: $\vec{n} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{a}$.

Теорема (о некомпланарныхых векторах): Если $\vec{a}, \vec{a}, \vec{n}$ некомпланарны, то для любого вектора $\vec{\partial}$ существует и притом единственный набор чисел $\alpha, \beta, \chi \in R : \vec{\partial} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{a} + \chi \vec{n}$.

Определение: Пусть дана система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$. Вектор $\vec{a} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n \vec{a}_n$ называется линейной комбинацией векторов системы, где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ - действительные числа.

Определение: Линейная комбинация вида $\lambda_1 \vec{a}_1 + \ldots + \lambda_n \vec{a}_n = \bar{0}$ - называется нулевой линейной комбинацией.

Определение: Система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ называется линейнозависимой, если в нулевой линейной комбинации векторов системы хотя бы один коэффициент отличен от нуля.

Определение: Система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ называется линейно-независимой, если в нулевой линейной комбинации векторов системы все числовые коэффициенты равны нулю.

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 \ldots + \lambda_n \vec{a}_n = \bar{0} \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$$

Свойства линейной зависимости:

1. Система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ линейно-зависима тогда и только тогда, когда один из векторов системы можно выразить через остальные в виде линейной комбинации.

2. Если часть системы векторов линейно-зависима, то и вся система векторов линейно-зависима.
3. Если вся система векторов линейно-независима, то любая её часть линейно-независима.
4. Линейно-независимая система векторов не может содержать нулевого вектора.

Определение: Базисом называется упорядоченная система векторов, удовлетворяющая свойствам: линейно-независимая система векторов; любой вектор пространства выражается через базисные в виде линейной комбинации.

Базисом плоскости может быть два неколлинеарных вектора. Базисом трёхмерного пространства является три некомпланарных вектора.

Замечание: Размерность пространства соответствует количеству векторов в базисе.

Согласно теореме о компланарности и некомпланарности векторов имеем:

1. Если $\vec{a}$ компланарен $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$, то существует a$_1$, a$_2$ такие что $\vec{a} = \vec{a}_1\alpha_1 + \vec{a}_2\alpha_2$
2. Если $\vec{a} \in$ трёхмерному пространству, в котором $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ - базис, то существует и притом единственный набор чисел $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R$

$\vec{a} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \alpha_3\vec{a}_3$

Определение: Числовой коэффициент в разложении вектора по векторам базиса, называются координатами вектора в данном базисе.

Замечание: Базисные векторы в собственном базисе имеют координаты из нулей и единицы.

Базис $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$, то $\vec{a}_1 = (1;0)$ $\vec{a}_2 = (0;1)$

Операции над векторами в координатах.

1. Вектор суммы имеет координаты каждая, из которых есть сумма соответствующих координат слагаемого.
2. Вектор разности имеет координаты каждая, из которых есть разность соответствующих координат уменьшаемого и вычитаемого.
3. При умножении вектора на число, каждая координата умножается на число.
4. Координаты коллинеарных векторов пропорциональны.

§3 Скалярное произведение векторов.

План:

1. Определение, свойства из определения;
2. Общие свойства скалярного произведения. Скалярное произведение в координатах в ортонормированном базисе;
3. Проекция вектора. Координаты вектора;
4. Физический смысл скалярного произведения векторов.

Определение: Скалярным произведением $(\vec{a}, \vec{a})$ называется число равное произведению длин векторов на cos угла между ними.

$(\vec{a}, \vec{a}) = |\vec{a}| * |\vec{a}| * \cos(\vec{a}, \vec{a})$

Замечание: Для того, чтобы найти угол между векторами, их откладывают от одной точки и рассмотреть угол между лучами с общим началом.

Следствия из определения:

1. Знак скалярного произведения зависит от угла между векторами $(\vec{a},\vec{a}) \succ 0$, если $\cos(\vec{a},\vec{a}) \succ 0 \Rightarrow$ векторы образуют острый угол $(\vec{a},\vec{a}) \prec 0$, если $\cos(\vec{a},\vec{a}) \prec 0 \Rightarrow$ векторы образуют тупой угол
2. $(\vec{a},\vec{a}) \leq |\vec{a}| * |\vec{a}|$, если $(\vec{a},\vec{a}) = |\vec{a}| * |\vec{a}|$, векторы сонаправлены; $(\vec{a},\vec{a}) = -|\vec{a}| * |\vec{a}|$, векторы противоположнонаправлены
3. $(\vec{a},\vec{a}) = 0$, если либо один вектор нулевой, либо векторы ортогональны;
4. $(\vec{a},\vec{a}) = |\vec{a}| * |\vec{a}| = |\vec{a}|^2$, $|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a},\vec{a})}$;
5. Скалярное произведение на множестве векторов не является бинарной алгебраической операцией.

Свойства скалярного произведения:

1. Коммутативность: $(\vec{a},\vec{a}) = (\vec{a},\vec{a})$
2. Ассоциативность числового множителя: $(\lambda\vec{a},\vec{a}) = \lambda(\vec{a},\vec{a})$
3. Дистрибутивность: $(\vec{a},\vec{a}+\vec{n}) = (\vec{a},\vec{a}) + (\vec{a},\vec{n})$

Доказательство этих свойств проводится по определению.

Среди бесконечного числа базисов плоскости особо выделяют ортонормированный базис.

Определение: Ортонормированным базисом плоскости называется базис $\{\bar{i},\bar{j}\}$, такой что:

Базисные векторы единичны – орты $|\bar{i}| = |\bar{j}| = 1$

Базисные векторы ортогональны

С учётом определения любой вектор в ортонормированном базисе можно расписать $\vec{a} = \grave{a}_1\bar{i} + a_2\bar{j}$

Теорема: Скалярное произведение равно сумме произведений соответствующих координат.

$(\vec{a},\vec{a}) = \grave{a}_1\hat{a}_1 + \grave{a}_2\hat{a}_2$

Следствия из теоремы:

1. $\vec{a} \perp \vec{a} \Leftrightarrow \quad \grave{a}_1\hat{a}_1 + \grave{a}_2\hat{a}_2 = 0$
2. $(\vec{a},\vec{a}) = \grave{a}_1{}^2 + \grave{a}_2{}^2 \qquad |\vec{a}| = \sqrt{\grave{a}_1^2 + \grave{a}_2^2}$
3. $\cos(\vec{a},\vec{a}) = \dfrac{(\vec{a},\vec{a})}{|\vec{a}| * |\vec{a}|} \qquad \cos(\vec{a},\vec{a}) = \dfrac{\grave{a}_1\hat{a}_1 + \grave{a}_2\hat{a}_2}{\sqrt{\grave{a}_1^2 + \grave{a}_2^2} + \sqrt{\hat{a}_1^2 + \hat{a}_2^2}}$

Пусть дан ортонормированный базис $\{\bar{i},\bar{j}\}$

$\vec{a} = (\grave{a}_1, \grave{a}_2)$

$\vec{a} = \grave{a}_1\bar{i} + a_2\bar{j}$

Рассмотрим скалярное произведение вектора $\vec{a}$ с каждым из базисных векторов

$(\vec{a},\bar{i}) = (a_1\bar{i} + a_2\bar{j},\bar{i}) = a_1(\bar{i},\bar{i}) + a_2(\bar{i},\bar{j}) = a_1(\bar{i},\bar{i}) = a_1$

$(\bar{a},\bar{i}) = |\bar{a}| * |\bar{i}| * \cos(\bar{a},\bar{i})$

$a_1 = |a| * \cos(\overline{a}, \bar{i})$

Аналогично :

$a_2 = |a| * \cos(\overline{a}, \bar{j})$

В ортонормированном базисе каждая координата это ортогональная проекция данного вектора на соответствующий базисный вектор.

Замечание: Косинусы углов, которые образуют данный вектор с базисными, называются направляющими косинусами данного вектора, причём так как $|\vec{a}|^2 = \vec{a}_1^2 + \vec{a}_2^2 = |\vec{a}|^2 * \cos^2(\overline{a}, \bar{i}) + |a|^2 * \cos^2(\overline{a}, \bar{j}) \Rightarrow$

$\cos^2(\overline{a}, \bar{i}) + \cos^2(\overline{a}, \bar{j}) = 1$

Проекция вектора на вектор:

$$\text{Ïð}_{\vec{a}}\vec{a} = \frac{(\vec{a}, \vec{a})}{|\vec{a}|}$$

В результате вычисления проекции вектора на вектор может быть отрицательной – это возможно, если скалярное произведение между векторами отрицательное, а значит угол – тупой.

Физический смысл скалярного произведения

Векторам, изображающим силу, скорость момента силы и так далее приписывается размерность – одночлен, составленный из какого-то набора символов. Такие одночлены перемножаются и делятся обычным способом.

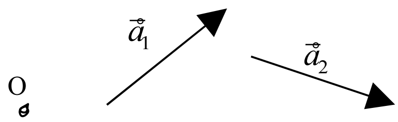
§4 Система координат. Простейшие задачи. Полярные координаты

План:

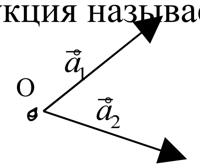
I. Понятие системы координат. Координаты точки;
II. Простейшие задачи:
   a. Координаты вектора;
   b. Расстояние между точками;
   c. Деление отрезков в заданном отношении;
   d. Площадь треугольника;
III. Полярная система координат. Связь между полярными и декартовыми координатами.

Пункт 1:

Выберем на плоскости точку О рассмотрим на плоскости базис $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$



Отложим базисные векторы от фиксированной точки, полученная конструкция называется системой координат $\{\hat{I}, \vec{a}_1, \vec{a}_2\}$



В системе координат выделяют:

1. Точку О – начало координат

2. Координатные оси $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$, проходящие через начало координат в направлении базисных векторов, причём длины базисных векторов – это длины мерных отрезков по этим осям.

Выделяют различные системы координат:

1. Аффинная система координат (два некомпланарных вектора)
2. Прямоугольная система координат
3. Ортонормированная система координат

Ортонормированной системой координат принято считать систему с правым базисом (движение от $\bar{i}$ к $\bar{j}$ против часовой стрелки)

Замечание: В аффинном пространстве (пространстве точек) аналогичную процедуру задания системы координат можно осуществить вводя три упорядоченные точки.

Определение: Координатами точки М в данной системе координат, называются координаты её радиус-вектора.

Таким образом между множеством точек и множеством упорядоченных пар чисел (их координат) установлено взаимнооднозначное соответствие.

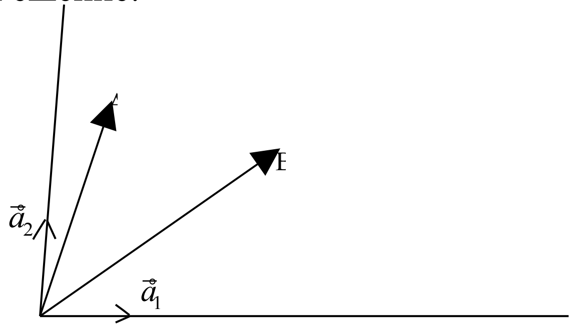
Простейшие задачи.

Задача№1.

В данной системе координат $\{Î, \vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ даны: т. $À(õ_1, ó_1)$, т. $Â(õ_2, ó_2)$

Найти: Координаты вектора $\overline{ÀÂ}$ в данном базисе.

Решение:



По условию $\overline{ÎÀ} = (õ_1, ó_1)$ $\overline{ÎÂ} = (õ_2, ó_2)$

По правилу разности $\overline{ÀÂ} = \overline{ÎÂ} - \overline{ÎÀ}$

$\overline{ÀÂ} = õ_2\vec{a}_1 + ó_2\vec{a}_2 - (õ_1\vec{a}_1 + ó_1\vec{a}_2) = (õ_2 - õ_1)\vec{a}_1 + (ó_2 - ó_1)\vec{a}_2 \Rightarrow$

$\overline{ÀÂ} = (õ_2 - õ_1; ó_2 - ó_1)$

Вывод: Для того, чтобы найти координаты вектора необходимо из соответствующих координат конца вектора вычесть соответствующие координаты начала вектора.

Задача№2.

В базисе $\{Î, \bar{i}, \bar{j}\}$ т. $À(õ_1, ó_1)$, т. $Â(õ_2, ó_2)$

Найти: расстояние между точками $\rho(À, Â) - ?$

Решение: $\rho(À, Â) = \left|\overline{ÀÂ}\right|$

Из темы скалярное произведение знаем, что $|\vec{a}| = \sqrt{à_1^2 + à_2^2}$, так как $\overline{ÀÂ} = (õ_2 - õ_1; ó_2 - ó_1)$, то $\left|\overline{ÀÂ}\right| = \sqrt{(õ_2 - õ_1)^2 + (ó_2 - ó_1)^2}$ таким образом

$\rho(\grave{A},\hat{A}) = \sqrt{(\tilde{o}_2-\tilde{o}_1)^2+(\acute{o}_2-\acute{o}_1)^2}$

Задача№3.

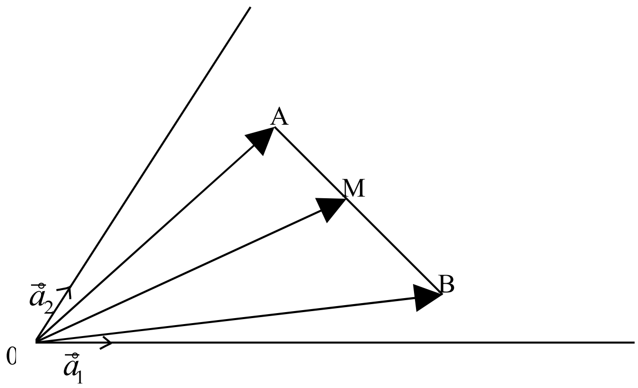
В базисе $\{\hat{I}\ ,\vec{a}_1,\vec{a}_2\}$ т. $\grave{A}(\tilde{o}_1,\acute{o}_1)$, т. $\hat{A}(\tilde{o}_2,\acute{o}_2)$ $\quad \lambda \in R \quad \lambda \neq -1$

Найти: Координаты точки М делящей отрезок АВ в отношении λ .

Решение:

Определение: Говорят, что точка М делит отрезок АВ в отношении λ, если $\overline{\grave{A}\grave{I}} = \lambda\,\overline{\grave{I}\hat{A}} \quad \lambda \in \grave{A}\hat{A}$

Построим в системе координат точки А, В, М



По условию $\overline{\hat{I}\grave{A}} = (\tilde{o}_1;\acute{o}_1)$, $\overline{\hat{I}\hat{A}} = (\tilde{o}_2;\acute{o}_2)$.

Пусть точка $\grave{I}\ (\tilde{o};\acute{o})$, тогда $\overline{\hat{I}\grave{I}} = (\tilde{o};\acute{o})$

Найдём связь координат точек А, В, М.

По определению $\overline{\grave{A}\grave{I}} = \lambda\,\overline{\grave{I}\hat{A}}$

$\overline{\grave{A}\grave{I}} = \overline{\hat{I}\grave{I}} - \overline{\hat{I}\grave{A}}$

$\overline{\grave{I}\hat{A}} = \overline{\hat{I}\hat{A}} - \overline{\hat{I}\grave{I}}$

Подставим: $\overline{\hat{I}\grave{I}} - \overline{\hat{I}\grave{A}} = \lambda(\overline{\hat{I}\hat{A}} - \overline{\hat{I}\grave{I}})$

Выразим $\overline{\hat{I}\grave{I}}$:

$\overline{\hat{I}\grave{I}} + \lambda\,\overline{\hat{I}\grave{I}} = \overline{\hat{I}\grave{A}} + \lambda\,\overline{\hat{I}\hat{A}}$

$$\overline{\hat{I}\grave{I}} = \frac{\overline{\hat{I}\grave{A}} + \lambda\,\overline{\hat{I}\hat{A}}}{1+\lambda}$$

Расписывая последнее равенство для каждой из координат точки М, получим:

$$\tilde{o} = \frac{\tilde{o}_1+\lambda\tilde{o}_2}{1+\lambda} \qquad \acute{o} = \frac{\acute{o}_1+\lambda\acute{o}_2}{1+\lambda}$$

Замечание: Если точка М – середина отрезка АВ, то $\lambda = 1$, а значит каждая координата есть полусумма соответствующих координат.

$$\tilde{o} = \frac{\tilde{o}_1+\tilde{o}_2}{2} \qquad \acute{o} = \frac{\acute{o}_1+\acute{o}_2}{2}$$

Задача№4.

Найти площадь треугольника.

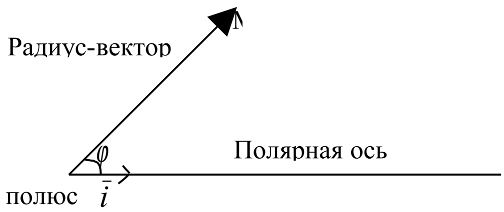
т. $\grave{A}(\tilde{o}_1,\acute{o}_1)$, т. $\hat{A}(\tilde{o}_2,\acute{o}_2)$, т. $\tilde{N}(\tilde{o}_3,\acute{o}_3)$

$$\pm S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix}\tilde{o}_2-\tilde{o}_1 & \acute{o}_2-\acute{o}_1\\ \tilde{o}_3-\tilde{o}_1 & \acute{o}_3-\acute{o}_1\end{vmatrix} = \frac{1}{2}((\tilde{o}_2-\tilde{o}_1)(\acute{o}_3-\acute{o}_1)-(\acute{o}_2-\acute{o}_1)(\tilde{o}_3-\tilde{o}_1))$$

Пункт 3:

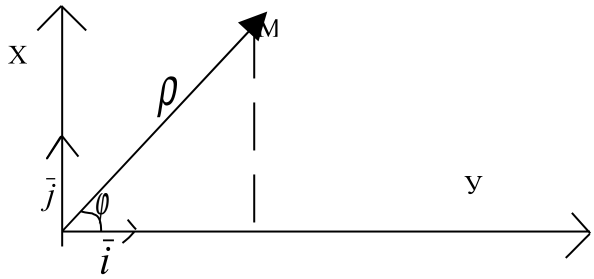
Выберем точку О – полюс, рассмотрим луч с началом в точке О, вдоль луча выберем единичный вектор $\bar{i}$, луч – полярная ось. Каждой точке плоскости поставим в соответствие две характеристики:

1. Длина её радиус-вектора
2. Угол между радиус-вектором и $\bar{i}$



Замечание: Для построения точки в полярных координатах работу удобно начинать со второй координаты.

Связь между полярной и прямоугольной системой координат.



Выберем прямоугольную систему координат $\{\hat{I}, \bar{i}, \bar{j}\}$. Рассмотрим полярную систему координат.

О – полюс

Ох – полярная ось

$\bar{i}$ - единичный вектор

Пусть $\grave{I}\ (\tilde{o}, \acute{o})$ - в прямоугольной системе координат, $\grave{I}\ (\rho, \varphi)$ - в полярной системе координат.

По теореме Пифагора $\Rightarrow$ $\rho = \sqrt{\tilde{o}^2 + \acute{o}^2}$

$$Sin\varphi = \frac{y}{\rho}, \quad Cos\varphi = \frac{x}{\rho}, \quad Tg\varphi = \frac{y}{x}$$

§5 Метод координат на плоскости.

План:

1. Суть метода;
2. Уравнения фигуры;
3. Схема составления аналитического условия для геометрической фигуры.

Введение на плоскости системы координат установило взаимнооднозначное соответствие между точками плоскости и упорядоченными парами действительных чисел.

Аналитическая геометрия одним из основных своих методов использует метод координат, его суть: по средствам координат точек геометрические объекты задаются аналитически с помощью чисел, уравнений и их систем (систем неравенств).

Достоинства метода координат: при доказательстве теорем или решений задач, использование аналитических методов (метод координат) существенно упрощает рассуждения и позволяет алгоритмизировать рассуждение.

Геометрическим методом точек (ГМТ) или фигурой на плоскости будем называть множество точек, удовлетворяющих некоторому свойству.

Пример: ГМТ, удалённых от данной точки на данное расстояние – окружность с центром в данной точке, данного радиуса.

Определение: Условием, определяющим фигуру в данной системе координат называется уравнение, неравенство или их системы такие, что координаты любой точки, принадлежащей фигуре удовлетворяют им, а координаты любой точки, не принадлежащей этой фигуре, не удовлетворяют.

Замечание: Если условие, определяющее фигуру является уравнением , его называют уравнением фигуры.

Замечание: Уравнения фигуры никогда не решают, его только исследуют.

Используя метод координат решают задачи двух типов:

1. По заданным геометрическим свойствам фигуры составляют аналитическое условие, определяющее данную фигуру;
2. По заданным условиям фигуры выясняют её геометрические свойства.

Для решения задач первого типа придерживаются схемы:

1) Выбрать удобную систему координат;
2) Выбрать произвольную точку фигуры и приписать ей произвольные (свободные) координаты;
3) Записать основное характеристическое свойство всех точек данной фигуры;
4) Основные характеристические свойства записывают через координаты;
5) Упрощение выражения четвёртого пункта;
6) При необходимости строим ГМТ.

Для решения задач второго типа следует помнить:

1) Если фигура состоит из конечного множества точек, то она называется вырожденной.
2) Если на плоскости не существует точек, чьи координаты удовлетворяли бы уравнению фигуры. Такая фигура называется мнимой.
3) Если уравнение фигуры представимо в виде произведения множителей равных нулю, то фигура считается распавшейся.

Замечание: Линии на плоскости могут быть заданы:

a) Явно: $y = f(x)$
b) Не явно: $F(x; y) = 0$
c) Параметрически.

Тема 2. Прямая и плоскость.

§ 1 Задания прямой.

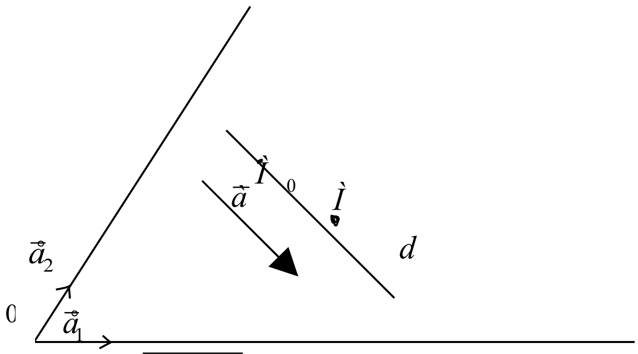
План:
1. Задание точкой и направляющим вектором:
 - ✓ Каноническое уравнение
 - ✓ Параметрическое уравнение
2. Задание прямой двумя точками
3. Задание прямой точкой и угловым коэффициентом
4. Задание прямой в «отрезках»
5. Задание прямой точкой и вектором нормали
6. Общее уравнение прямой

Определение: Не нулевой вектор $\vec{a}$ называется направляющим вектором прямой d, если он параллелен прямой.

Замечание: Любая прямая имеет бесконечное множество направляющих векторов, коллинеарных между собой.

Пусть дана прямая d точка $M_0 \in d$, $\vec{a}$ параллелен d. Используя метод координат получим уравнение прямой. Выберем систему координат $\{O, \vec{a}_1, \vec{a}_2\}$

$M_0(x_0; y_0)$ $\quad \vec{a} = (a_1; a_2)$



Рассмотрим $\overline{M_0 M} = (x - x_0; y - y_0)$

$\overline{M_0 M}$ коллинеарен $\vec{a}$.

По теореме о коллинеарности векторов $\Rightarrow \quad \exists!\alpha : \overline{M_0 M} = \alpha \vec{a}$ или в координатах имеем:

$$\begin{cases} x - x_0 = \alpha a_1 \\ y - y_0 = \alpha a_2 \end{cases}$$

Эту систему можно привести к виду:

$$\begin{cases} \dfrac{x - x_0}{a_1} = \alpha \\ \dfrac{y - y_0}{a_2} = \alpha \end{cases} \qquad \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2}$$

Данное уравнение является уравнением прямой, заданной точками и направляющим вектором.

Замечание: так как $\vec{a} \neq 0$, то $a_1 \neq 0$ и $a_2 \neq 0$, но равенство нулю одной из координат возможно, при этом уравнение прямой не теряет смысла так как уравнение прямой не решают, а исследуют.

$a_2(x - x_0) = a_2(y - y_0)$ - каноническое уравнение прямой.

$$\begin{cases} x = \alpha a_1 + x_0 \\ y = \alpha a_2 + y_0 \end{cases}$$ - параметрическое уравнение прямой.

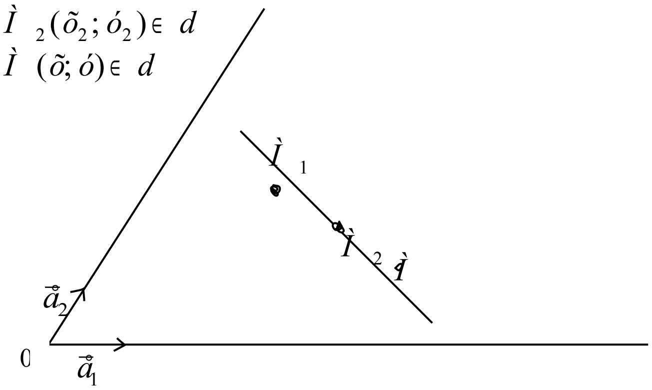
Пункт 2:

Пусть d – прямая $\grave{I}_1 \in d$, $\grave{I}_2 \in d$. Выберем систему координат $\{\hat{I}, \vec{a}_1, \vec{a}_2\}$.

$\grave{I}_1(\tilde{o}_1; \acute{o}_1) \in d$

$\grave{I}_2(\tilde{o}_2; \acute{o}_2) \in d$

$\grave{I}(\tilde{o}; \acute{o}) \in d$



Рассмотрим два коллинеарных вектора: $\overline{\grave{I}_1\grave{I}_2}$ $\overline{\grave{I}_1\grave{I}}$.

$\overline{\grave{I}_1\grave{I}_2} = (\tilde{o}_2 - \tilde{o}_1; \acute{o}_2 - \acute{o}_1)$

$\overline{\grave{I}_1\grave{I}} = (\tilde{o} - \tilde{o}_1; \acute{o} - \acute{o}_1)$

Знаем, что соответствующие координаты коллинеарных векторов пропорциональны, поэтому имеем:

$$\frac{\tilde{o} - \tilde{o}_1}{\tilde{o}_2 - \tilde{o}_1} = \frac{\acute{o} - \acute{o}_1}{\acute{o}_2 - \acute{o}_1}$$

Пункт 3:

Уравнение прямой можно задавать в любой системе координат, но об угловом коэффициенте для прямой говорят только, если прямая задана в ортонормированной системе координат.

Выберем систему координат $\{O, \bar{i}, \bar{j}\}$

$$d: \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2}$$

Пусть прямая d не параллельна Oy $\Rightarrow$ $a_1 \neq 0$.

Определение: Число $k = \dfrac{a_1}{a_2}$ называется угловым коэффициентом прямой.

Замечание: Угловой коэффициент не зависит от выбора направляющего вектора для прямой.

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{a}$ направляющие векторы прямой d.

$\vec{a}$ и $\vec{a}$ коллинеарны $\Rightarrow$ $\vec{a} = \lambda \vec{a}$

Если $\vec{a} = (\hat{a}_1; \hat{a}_2)$, $\vec{a} = (\grave{a}_1; \grave{a}_2)$, то

$$\begin{cases} \hat{a}_1 = \lambda \grave{a}_1 \\ \hat{a}_2 = \lambda \grave{a}_2 \end{cases} \qquad \frac{\hat{a}_2}{\hat{a}_1} = \frac{\lambda \grave{a}_2}{\lambda \grave{a}_1} = \frac{\grave{a}_2}{\grave{a}_1} = \hat{e}$$

Рассмотрим каноническое уравнение прямой d вида:

$\grave{a}_2(\tilde{o} - \tilde{o}_0) = \grave{a}_2(\acute{o} - \acute{o}_0) \quad (: \grave{a}_1)$

$\hat{e}(\tilde{o} - \tilde{o}_0) = (\acute{o} - \acute{o}_0)$

Геометрический смысл углового коэффициента.

Пусть $(\widehat{d, \bar{i}}) = \varphi$

Знаем, что каждая координата вектора $\bar{a}$ это проекция вектора на базисный вектор, поэтому имеем:

$$\grave{a}_1 = |\vec{a}| * \cos\varphi$$

$$\grave{a}_2 = |\vec{a}| * \cos(\widehat{\vec{a}, \bar{j}}) = |\vec{a}| * \cos(90^0 - \varphi) = |\vec{a}| * \sin\varphi$$

Тогда $k = \frac{a_2}{a_1} = \frac{|\bar{a}| * \sin\varphi}{|\bar{a}| * \cos\varphi} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = tg\varphi$

Таким образом геометрический смысл углового коэффициента – это тангенс угла наклона прямой к положительному направлению оси Ох.

Выберем произвольную систему координат $\{\hat{I}, \vec{a}_1, \vec{a}_2\}$. Рассмотрим прямую не проходящую через начало координат, отсекающую на оси Ох отрезок а, на Оу – в, считая от начала координат.

Можно сказать: А(а,0) $\in d$ и В(0,в) $\in d$

Используя уравнение прямой по двум точкам $\frac{\tilde{o} - \tilde{o}_1}{\tilde{o}_2 - \tilde{o}_1} = \frac{\acute{o} - \acute{o}_1}{\acute{o}_2 - \acute{o}_1}$ получим: $\frac{\tilde{o} - \grave{a}}{0 - \grave{a}} = \frac{\acute{o} - 0}{\hat{a} - 0}$ или $\frac{\tilde{o} - \grave{a}}{- \grave{a}} = \frac{\acute{o}}{\hat{a}}$

$$\hat{a}(\tilde{o} - \grave{a}) = - \grave{a}\acute{o}$$

$$\hat{a}\tilde{o} - \grave{a}\acute{o} = \grave{a}\hat{a} \quad (\div \grave{a}\hat{a})$$

$\frac{\hat{a}\tilde{o} - \grave{a}\acute{o}}{\grave{a}\hat{a}} = 1$ или $\frac{\tilde{o}}{\grave{a}} + \frac{\acute{o}}{\hat{a}} = 1$ - уравнение прямой в отрезках

Замечание: Знаки уравнения в отрезках указывают на то, в положительном или отрицательном направлении отсекаются отрезки.

Пусть d – прямая.

Определение: не нулевой вектор $\bar{n}$ называется вектором нормали к прямой d, если он перпендикулярен любому направляющему вектору к прямой d.

Пусть задана прямая d , $\bar{n}$ - вектор нормали, $\grave{I}_0 \in d$.

Выберем ортонормированную систему координат.

$$\bar{n} = (n_1, n_2) \quad M_0(x_0, y_0)$$

Выберем любую точку $\grave{I}\ (\tilde{o}; \acute{o}) \in d$

Рассмотрим векторы $\overline{\grave{I}_0\grave{I}} = (\tilde{o} - \tilde{o}_0; \acute{o} - \acute{o}_0)$

$\overline{\grave{I}_0\grave{I}}$ перпендикулярен $\bar{n} \Rightarrow (\overline{\grave{I}_0\grave{I}}, \bar{n}) = 0$

В координатах имеем:

$$n_1(x - x_0) + n_2(y - y_0) = 0$$

Пункт 6:

При любом задании прямой её уравнение всегда можно привести к виду: $Ax + By + C = 0$

Таким образом, прямая задаётся уравнением первой степени от двух переменных x и y вида $Ax + By + C = 0$, где коэффициенты при переменных одновременно не обращаются в ноль. $\grave{A}^2 + \hat{A}^2 \neq 0$

Коэффициенты А и В, взятые в определённом порядке могут быть координатами вектора нормали, либо координатами направляющего вектора.

$n_1(x - x_0) + n_2(y - y_0) = 0$

$n_1x + n_2y - n_1x_0 - n_2y_0 = 0$

$Ax + By + C = 0$

$n_1 = A \quad n_2 = B$ C – const

С другой стороны: $\frac{\tilde{o} - \tilde{o}_0}{\grave{a}_1} = \frac{\acute{o} - \acute{o}_0}{\grave{a}_2}$

$\grave{a}_2\tilde{o} - \grave{a}_1\acute{o} + \grave{a}_1\acute{o}_0 - \grave{a}_2\tilde{o}_0 = 0$

$Ax + By + C = 0$

$\grave{a}_2 = \grave{A} \quad \grave{a}_1 = -\hat{A} \quad \vec{\tilde{a}} = (-\hat{A}; \grave{A})$

Тема 3. Алгебраические структуры

§1. Бинарная алгебраическая операция

Упорядоченный набор из *n* элементов $a_1,...,a_n$ некоторого множества *A* называется *кортежем* длины *n* и обозначается $\langle a_1,...,a_n \rangle$, а множество всех таких кортежей называют *n*-й декартовой степенью множества *A* и обозначается A^n.

Бинарной алгебраической операцией на непустом множестве *A* называется отображение $A \times A \to A$, сопоставляющее каждому кортежу $\langle a,b \rangle$ из A^2 определенный элемент *c* из множества *A*, т.е. бинарная алгебраическая операция на множестве *A* – это некоторое правило, по которому любой паре элементов *a*, *b* из *A* (взятых в определенном порядке) ставится однозначно определенный элемент *c* из *A* ($c = a * b$).

Под *n* - местной операцией на множестве *A* понимают отображение, ставящее каждому кортежу $\langle a_1,...,a_n \rangle$ из A^n определенный элемент из *A*.

Примеры.

1. Сложение, умножение и операция возведения в степень на множестве $\boldsymbol{Z}^+$ целых положительных чисел – бинарные алгебраические операции.
2. Умножение вещественных квадратных матриц заданного порядка – бинарная алгебраическая операция.
3. Бинарной алгебраической операцией на множестве векторов трехмерного вещественного векторного пространства $\overrightarrow{E^3}$ может служить операция векторного произведения $[\vec{a},\vec{b}]$, $\vec{a},\vec{b} \in \overrightarrow{E^3}$.
4. Сложение и умножение функций действительного переменного - примеры бинарных алгебраических операций.
5. Не являются бинарными алгебраическими операциями умножение на множестве отрицательных целых чисел, сложение нечетных целых чисел, деление действительных чисел.

Задача. Выяснить, являются ли бинарными алгебраическими операции +, -, $\times$, $\div$ на указанном множестве: $A = \{x : x \in N_-\}$.

Решение. Для операции + имеем: $\forall x_1,\ x_2 \in N_-\ x_1 + x_2 \in N_-$; следовательно, операция сложения + является бинарной алгебраической на множестве *A*.

Операция вычитания $-$ не является бинарной алгебраической на множестве A, так как найдутся числа x_1 и x_2, для которых $x_1 - x_2 \notin N_-$. Например, при $x_1 < x_2$ разность $x_1 - x_2$ будет числом положительным, а значит, не будет принадлежать множеству N_-.

Операции умножения $\times$ и деления $\div$ на множестве чисел противоположных натуральным N_- также не являются бинарными алгебраическими, поскольку и произведение и частное двух любых отрицательных чисел является числами положительными.

Свойства бинарных алгебраических операций

Бинарная алгебраическая операция на множестве A называется *коммутативной*, если для любых двух элементов a_1 и a_2 из A выполняется условие:

$a_1 * a_2 = a_2 * a_1$.

Например, бинарные алгебраические операции сложения и умножения на множестве целых чисел $\boldsymbol{Z}$ коммутативны, а операция вычитания нет.

Операция на множестве A называется *ассоциативной,* если для любых трех элементов a_1, a_2, a_3 из A выполняется условие:

$(a_1 * a_2) * a_3 = a_1 * (a_2 * a_3)$.

Например, операции сложения и умножения на множестве действительных чисел $\boldsymbol{R}$ ассоциативны, а операция на множестве $\boldsymbol{Z}$, задаваемая формулой $m * n = m^n$, не является ассоциативной.

Задача. Доказать, что на множестве $\boldsymbol{R}^+$ операция $a * b = \sqrt{ab}$ (операция нахождения среднего геометрического) коммутативна, но не ассоциативна.

Решение. Пусть a, b, c - любые действительные положительные числа. В силу коммутативности умножения на $\boldsymbol{R}^+$ получим: $a * b = \sqrt{ab} = \sqrt{ba} = b * a$, т.е. бинарная операция нахождения среднего геометрического на $\boldsymbol{R}^+$ коммутативна. Далее, $(a * b) * c = \sqrt{\sqrt{ab}c} = \sqrt[4]{ab}\sqrt{c}$ и $a * (b * c) = \sqrt{a\sqrt{bc}} = \sqrt[4]{a}\sqrt{bc}$.

Из полученных результатов следует, что при $a \neq c$ равенство $(a * b) * c = a * (b * c)$ не является справедливым. Следовательно, заданная операция $*$ не ассоциативна на множестве $\boldsymbol{R}^+$.

Задача. Доказать, что на некотором непустом множестве M бинарная операция, заданная формулой $a * b = b$, не коммутативна, но ассоциативна.

Решение. Пусть a, b, c - любые элементы множества M. Тогда $a * b = b$, а $b * a = a$. Следовательно, при условии $a \neq b$ равенство $a * b = b * a$ не является справедливым, т.е. операция $*$ на множестве M не коммутативна.

Далее, $(a * b) * c = b * c = c$ и $a * (b * c) = a * c = c$, поэтому равенство $(a * b) * c = a * (b * c)$ справедливо, т.е. операция $*$ на множестве M является ассоциативной.

Задача. Определить, какими свойствами обладает бинарная операция $*$ $a * b = a + b + 5$ на множестве действительных чисел $\boldsymbol{R}$.

Решение. Проверяя свойство коммутативности, видим, что для любых действительных чисел a и b выполняется равенство $a * b = a + b + 5 = b + a + 5 = b * a$. Следовательно, операция $*$ на множестве $\boldsymbol{R}$ коммутативна.

Для проверки свойства ассоциативности рассмотрим выражения

$(a*b)*c=(a+b+5)*c=(a+b+5)+c+5=a+b+c+10$

и

$a*(b*c)=a*(b+c+5)=a+(b+c+5)+5=a+b+c+10$

для любых действительных чисел *a, b* и *c.*

Видим, что правые части равенств совпадают. Значит, справедливо равенство и левых частей

$(a*b)*c=a*(b*c)$,

что доказывает ассоциативность операции $*$ на множестве $\boldsymbol{R}$.

§2. Группа.

Непустое множество элементов G называется *группой*, если на множестве G задана бинарная алгебраическая операция $*$, так что выполнены условия:

1) для любых элементов a, b, c из G выполняется соотношение $(a*b)*c=a*(b*c)$ – ассоциативность;

2) в G имеется единица, общая для всех элементов группы, т.е. такой элемент e, что $a*e=e*a=a$ для каждого элемента a из G;

3) для всякого элемента a из G существует обратный элемент, т.е. такой элемент a' что $a'*a=a*a'=e$.

Обратный элемент элемента a в группе G обозначают символом a', a^{-1} или $\frac{1}{a}$.

Если для любых элементов a, b из G $a*b=b*a$, то группа называется *коммутативной* или *абелевой.*

В коммутативных (абелевых) группах бинарная операция $*$ часто обозначается символом + и называется сложением элементов из G. В этом случае нейтральный элемент обозначается символом 0 («ноль»), а стмметрический элемент a' к элементу a называется *противоположным* к элементу a и обозначается символом $-a$. Эта система обозначений для абелевых групп называется *аддитивной.*

Предыдущая система обозначений называется *мультипликативной*; часто умножение обозначается «точкой» $\cdot$ или «крестиком» $\times$ или вообще символ операции умножения опускается.

Группа называется бесконечной или конечной, в зависимости от того, является ли множество G бесконечным или конечным; число элементов $|G|$ конечной группы G называется её *порядком*.

Примеры.

1. Множество всех положительных действительных чисел $\boldsymbol{R}^+$ образует группу относительно операции умножения. В самом деле, умножение ассоциативно, число 1 является нейтральным элементом, т. к. $1\times a=a\times 1=a$ для любого $a\in R^+$ и для каждого числа $a>0$ существует обратное число, равное $\frac{1}{a}$, так как $a\times\frac{1}{a}=\frac{1}{a}\times a=1$. Эта группа $\boldsymbol{R}^+$ называется *мультипликативной* группой положительных действительных чисел.

2. Множество всех действительных чисел $\boldsymbol{R}$ с операцией сложения является группой, так как сложение ассоциативно, число 0 является

нейтральным элементом, ибо $a+0=0+a=a$ для любого $a\in R^{+}$, и для всякого числа *a* обратным элементом служит противоположное ему число – *a*, так как $a+(-a)=(-a)+a=0$. Эта группа называется аддитивной группой действительных чисел.

3. Пусть *p* - простое число. Рациональное число вида $\frac{m}{p^n}$ где $m,n\in Z$, называется *p*-адичной дробью. Множество $\boldsymbol{Q_p}$ - всех *p*-адичных дробей относительно умножения чисел − абелева группа.

4. Арифметическое *n*-мерное векторное пространство R^n является группой относительно сложения векторов.

5. Множество целых чисел ***Z*** с операцией умножения группой не является, так как для любого элемента в ***Z*** не существует обратного элемента.

Рассмотрим решение примеров.

1. Доказать, что множество ***Z*** образует группу относительно операции • заданной формулой:

$$a\bullet b=\begin{cases} a+b, \text{если } a-\text{ четное число}, b-\text{ любое целое число},\\ a-b, \text{если } a-\text{ нечетное число}, b-\text{ любое целое число}.\end{cases}$$

<u>Решение.</u> 1. Рассматриваемая на Z операция сводится к сложению и вычитанию целых чисел, а т.к. сложение и вычитание элементов из Z дают в результате элементы из Z, то на множестве Z рассматриваемая, операция • является бинарной операцией.

2. Рассмотрим возможные случаи:

а) Если *a*,*b* - четные числа, а *c* − любое число из Z, то $a\bullet(b\bullet c)=a+(b+c)$, $(a\bullet b)\bullet c=(a+b)+c=a+(b+c)$, т.е. $a\bullet(b\bullet c)=(a\bullet b)\bullet c$.

б) Если *a* − четное число, *b* − нечетное, а *c* − любое число из Z, то $a\bullet(b\bullet c)=a+(b-c)$, $(a\bullet b)\bullet c=(a+b)-c=a+(b-c)$, т. е. $a\bullet(b\bullet c)=(a\bullet b)\bullet c$.

в) Если *a* − нечетное число, *b* − четное число, а *c* − любое число из Z, то $a-b$ нечетно и потому $a\bullet(b\bullet c)=a-(b+c)=(a-b)-c$, $(a\bullet b)\bullet c=(a-b)-c$, т.е. $a\bullet(b\bullet c)=(a\bullet b)\bullet c$.

г) Если *a*, *b* − нечетные числа, а *c* − любое число из Z, то $a-b$ четно и потому $a\bullet(b\bullet c)=a-(b-c)=(a-b)+c$, $(a\bullet b)\bullet c=(a-b)+c$, т.е. $a\bullet(b\bullet c)=(a\bullet b)\bullet c$.

Итак, во всех возможных случаях заданная на множестве Z бинарная операция является ассоциативной.

3. Так как 0 − четное число, то $0\bullet a=a$. Кроме того, если число *a* четно, то $a\bullet 0=a+0=a$; если же *a* нечетно, то $a\bullet 0=a-0=a$. Итак, $0\bullet a=a\bullet 0=a$, т. е. 0 является в Z нейтральным элементом относительно заданной операции.

4 .Для любого элемента $a\in Z$ в Z существует обратный элемент: для четного *a* обратным будет противоположное число –*a*, т.к. $a\bullet(-a)=a+(-a)=0$; для нечетного *a* обратным будет само число *a*, т.к. $a\bullet a=a-a=0$.

Итак, Z является группой относительно заданной операции. Однако эта группа не является абелевой, поскольку $4\bullet 5=4+5=9$, $5\bullet 4=5-4=1$, т.е. $4\bullet 5\neq 5\bullet 4$.

2. Множество всех подстановок *n*-ой степени относительно алгебраической операции произведения подстановок является группой.

Единицей этой группы служит тождественная подстановка $\begin{pmatrix} 1\,2\,...\,n \\ 1\,2\,...\,n \end{pmatrix}$; элементом, обратным к подстановке $\begin{pmatrix} 1\;\;2\,...\,n \\ i_1\;i_2\,...\,i_n \end{pmatrix}$, является подстановка $\begin{pmatrix} i_1\;i_2\,...\,i_n \\ 1\;\;2\,...\,n \end{pmatrix}$. Эта группа называется *симметрической группой n-ой степени* и обозначается через S_n, причем она – конечная группа порядка n!. При $n \geq 3$ симметрическая группа S_n некоммутативная. Группа всех четных подстановок n-ой степени называется знакопеременной группой n-ой степени и обозначается A_n.

3. Пусть G – совокупность всех преобразований множества R, задаваемых формулой $f(x) = x + a$, где $a \in R$. Доказать, что G есть группа относительно операции умножения преобразований.

Решение. Проверим, что умножение преобразований есть бинарная операция на множестве G.

По определению операции умножения преобразований φ , h имеем:

$h(x) = \varphi(f(x))$.

Обозначим преобразование $x \to x + a$ множества R через f_a. Тогда

$(f_a f_b)(x) = f_a(f_b(x)) = f_a(x + b) = x + b + a = f_{a+b}(x)$, т. е.

$f_a f_b = f_{a+b}$

Этим доказано, что $f_a f_b \in G$.

2. Операция умножения преобразований ассоциативна.

3. Тождественное преобразование, играющее роль нейтрального элемента для операции умножения преобразований, принадлежит G. Таким является преобразование f, где $f_0(x) = x$ для любого x из R.

4. Преобразование, обратное любому преобразованию f из G, которое играет роль обратного элемента для f_a, снова принадлежит G. Таким является преобразование $f_{-a}(x) = x - a$.

Итак, G – группа.

§ 3. Кольца

Множество K с двумя определенными в нем бинарными алгебраическими операциями, сложением и умножением, называется *кольцом,* если относительно операции сложения оно является абелевой группой, а операция умножения связана с операцией сложения законами дистрибутивности, т. е. для любых трех элементов $a, b, c \in K$

$a(b + c) = ab + ac$ и $(b + c)a = ba + ca$.

Если умножение, определенное в кольце K, ассоциативно, т. е. для любых трех элементов $a, b, c \in K$ $a(bc) = (ab)c$, то кольцо K называется ассоциативным. Если умножение, определенное в K, коммутативно, то K называется коммутативным кольцом.

Примеры.

1. Все целые числа относительно обычных операций сложения и умножения чисел образуют коммутативное, ассоциативное кольцо целых чисел $\boldsymbol{Z}$.
2. Все рациональные числа, все действительные числа, все комплексные числа относительно обычных операций сложения и умножения образуют

коммутативные, ассоциативные кольца.

3.Все многочлены от одного переменного с произвольными числовыми коэффициентами относительно обычных операций сложения и умножения многочленов образуют коммутативное, ассоциативное кольцо.

4.Ассоциативное, но не коммутативное, кольцо образуют все квадратные матрицы *n*-го порядка с произвольными числовыми элементами.

5.Множество всех векторов трехмерного пространства, где векторы складываются обычным образом, а в качестве произведения двух векторов берется их векторное произведение, является неассоциативным кольцом.

§ 4. Поле

Полем называется ассоциативное коммутативное кольцо, имеющее не менее двух элементов, в котором для любого элемента $a \neq 0$ и любого элемента b существует ровно один такой элемент x, что $ax = b$. Элемент x называется частным от деления элемента b на элемент a(обозначение $x = \frac{b}{a} = b:a$).

Примеры.

1.Кольцо всех рациональных чисел $\boldsymbol{Q}$, кольцо всех действительных чисел $\boldsymbol{R}$, кольцо всех комплексных чисел $\boldsymbol{C}$ являются полями;

2.Все комплексные числа, являющиеся корнями многочленов с рациональными коэффициентами, также образуют поле, называемое полем алгебраических чисел.

3.Кольцо всех целых чисел $\boldsymbol{Z}$ полем не является.

4.Все дробно-рациональные функции $\frac{f(x)}{g(x)}$, где $f(x)$ и $g(x)$ - многочлены с действительными коэффициентами, причем $g(x) \neq 0$, являются полем.

Всякое поле обладает единицей, которая отлична от нуля. Для любого отличного от нуля элемента поля существует обратный ему элемент. Множество всех отличных от нуля элементов поля образует относительно умножения, определенного в поле, абелеву группу (мультипликативную группу поля). Никакое поле не содержит делителей нуля.

Множество с двумя алгебраическими операциями, изоморфное полю, само является полем. Всякое гомоморфное отображение одного поля в другое является или изоморфизмом, или отображением, переводящим все элементы поля в нуль.

Если некоторое целое положительное кратное единичного элемента e поля P $ne=e+e+\ldots+e$ (n слагаемых) равно нулю, то наименьшее целое положительное число p со свойством $pe=0$ называется *характеристикой поля* Р; p всегда является простым числом. Если никакое целое положительное кратное единичного элемента поля Р нулю не равно, то Р называется полем *характеристики нуль*. Пример поля характеристики p - поле Z_p классов вычетов по модулю p. Пример поля характеристики нуль - любое числовое поле (например, поле всех действительных чисел).

Тема 4. Комплексные числа и многочлены над полем.

§ 1. Действия над комплексными числами в алгебраической форме

Пусть $z=a+bi$ – алгебраическая форма комплексного числа, где a – действительная часть $a=\operatorname{Re}z$, а bi – мнимая часть комплексного числа $b=\operatorname{Im}z$. Величина равная $\sqrt{a^2+b^2}$ называется *модулем комплексного числа* и обозначается $|a+bi|$ или $|z|$.

Два комплексных числа $a+bi$ и $c+di$ равны, если равны их действительные и мнимые части, т.е. $a=b$ и $c=d$.

При сложении комплексных чисел складывают отдельно их действительные и мнимые части

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i.$$

Аналогичное правило существует и для вычитания

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i.$$

Для умножения комплексных чисел в алгебраической форме необходимо выполнить следующие действия

$$(a+bi)(c+di)=ac+adi+cbi+bdi^2=(ac-bd)+(ad+cb)i.$$

Число, *сопряженное* числу $z=a+bi$ – это число $\bar{z}=a-bi$, для которого верны соотношения $z+\bar{z}=2a$ и $z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2-(bi)^2=a^2+b^2=|z|$.

Пример. Доказать, что $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$.

Решение. Пусть $z_1=x_1+y_1i$ и $z_2=x_2+y_2i$ – данные комплексные числа, а $\overline{z_1}=x_1-y_1i$ и $\overline{z_2}=x_2-y_2i$ – им сопряженные комплексные числа. Тогда

$$\overline{z_1+z_2}=\overline{(x_1+y_1i)+(x_2+y_2i)}=\overline{(x_1+x_2)+(y_1+y_2)i}=(x_1+x_2)-(y_1+y_2)i=$$

$$=(x_1-y_1i)+(x_2-y_2i)=\overline{z_1}+\overline{z_2}.$$

Кроме этого свойства комплексно – сопряженные числа удовлетворяют следующим свойствам:

1) $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\ \overline{z_2}$;

2) $z^{-1}=\dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$;

3) $\bar{\bar{z}}=z$;

4) $\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$;

5) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

При делении комплексных чисел числитель и знаменатель данной дроби умножают на число, сопряженное знаменателю:

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$$

Извлечение квадратного корня из алгебраической формы комплексного числа

$$\sqrt{a+bi}=x+yi$$

$a+bi=(x+yi)^2$

$a+bi=x^2+2xyi+(yi)^2=(x^2-y^2)+2xyi$, отсюда справедлива система уравнений:

$$\begin{cases} x^2-y^2=a \\ 2xy=b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x^2-y^2)^2=a^2 \\ 4x^2y^2=b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-y^2=a \\ x^4-2x^2y^2+y^4+4x^2y^2=a^2+b^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x^2-y^2=a \\ x^4+2x^2y^2+y^4=a^2+b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-y^2=a \\ (x^2+y^2)^2=a^2+b^2 \end{cases} \Rightarrow \text{ (т.к. } x^2+y^2>0)$$

$$\begin{cases} x^2-y^2=a \\ x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2} \end{cases}.$$

При сложении уравнений последней системы получаем

$$2x^2=a+\sqrt{a^2+b^2},\; x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}},$$

а при вычитании уравнений последней системы получаем

$$2y^2=-a+\sqrt{a^2+b^2},\; y_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}.$$

Так как $2xy=b$, то при $b>0$ x и y имеют одинаковые знаки, а при $b<0$ x и y имеют различные знаки.

Итак, $\sqrt{a+bi}=\pm\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\pm i\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}$ – формула извлечения квадратного корня из алгебраической формы комплексного числа при $b>0$;

$\sqrt{a+bi}=\pm\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\mp i\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}$ – формула извлечения квадратного корня из алгебраической формы комплексного числа при $b<0$;

Пример. Вычислить $\sqrt{3-4i}$.

Решение. Так как $a=3$, а $b=-4$, то $x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{3+\sqrt{3^2+(-4)^2}}{2}}=\pm 2$,

$y_{1,2}=\mp\sqrt{\frac{-3+\sqrt{3^2+(-4)^2}}{2}}=\mp 1$, $\sqrt{3-4i}=\pm(2-i)$.

Пример. Решить уравнение

$(1+2i)x+(3-5i)y=1-3i,$ считая x и y действительными числами.

Решение. Приведем левую часть уравнения к виду $a+bi,$ где $a\in R,\ b\in R$: $(x+3y)+(2x-5y)i=1-3i.$ Полученное уравнение равносильно данному. Так как равенство комплексных чисел означает равенство действительных и мнимых частей, то имеем систему уравнений

$$\begin{cases} x+3y=1, \\ 2x-5y=-3. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим $x=\dfrac{\begin{vmatrix}1 & 3\\ -3 & -5\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & -5\end{vmatrix}}=-\dfrac{4}{11},\ y=\dfrac{\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & -5\end{vmatrix}}=\dfrac{5}{11}.$

Пример. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} iz_1+(1+i)z_2=2+2i,\\ 2iz_1+(3+2i)z_2=5+3i.\end{cases}$$

Решение. Будем решать систему уравнений по формулам Крамера.

Составим определитель Δ второго порядка из коэффициентов при неизвестных:

$$\Delta=\begin{vmatrix} i & 1+i\\ 2i & 3+2i\end{vmatrix}=i\begin{vmatrix}1 & 1+i\\ 2 & 3+2i\end{vmatrix}=i(3+2i-2-2i)=i.$$

Составим определитель Δ_{z_1} второго порядка, заменяя первый столбец определителя Δ столбцом свободных членов системы:

$$\Delta_{z_1}=\begin{vmatrix}2+2i & 1+i\\ 5+3i & 3+2i\end{vmatrix}=(2+2i)(3+2i)-(1+i)(5+3i)=6+4i+6i-4-5-3i-5i+3=2i.$$

Составим определитель Δ_{z_2} второго порядка, заменяя второй столбец определителя Δ столбцом свободных членов системы:

$$\Delta_{z_2}=\begin{vmatrix} i & 2+2i\\ 2i & 5+3i\end{vmatrix}=i(5+3i)-2i(2+2i)=5i-3-4i+4=1+i.$$

Найдем z_1 и z_2, используя формулы $z_1=\dfrac{\Delta_{z_1}}{\Delta}$ и $z_2=\dfrac{\Delta_{z_2}}{\Delta}$:

$$z_1=\frac{\Delta_{z_1}}{\Delta}=\frac{2i}{i}=2,\ z_2=\frac{\Delta_{z_2}}{\Delta}=\frac{1+i}{i}=\frac{(1+i)(-i)}{i(-i)}=1-i.$$

Пример. Вычислить $i^{44},\ i^{135},\ i^{237}$.

Решение. Находим, что $i^0=1;\ i^1=i,\ i^2=-1;\ i^3=-i,\ i^4=1.$ Из этих равенств непосредственно следует, что $i^{4n}=1,\ i^{4n+1}=i,\ i^{4n+2}=-1,\ i^{4n+3}=-i.$ Значит, $i^{44}=i^{4\cdot 11}=(i^4)^{11}=1^{11}=1,\ i^{135}=i^{4\cdot 33+3}=1i^3=-i,\ i^{237}=i^{4\cdot 59+1}=i.$

Пример. Вычислить $\dfrac{1+4i}{-3-i}(-5i)+2$.

Решение.

$$\frac{1+4i}{-3-i}(-5i)+2=\frac{(1+4i)(-3+i)}{(-3-i)(-3+i)}(-5i)+2=\frac{-3+i-12i+4i^2}{(-3)^2-(i)^2}(-5i)+2=$$

$$=\frac{(-3-4)-11i}{9+1}(-5i)+2=\frac{-7-11i}{10}(-5i)+2=\frac{7+11i}{2}i+2=\frac{-11+7i+4}{2}=\frac{-7+7i}{2}=$$

$$=-\frac{7}{2}+\frac{7}{2}i=-3{,}5+3{,}5i$$

Пример. Вычислить $\left|\dfrac{-\left[(-3i)(2-4i)-(2+4i)3i\right]^2}{(1-i)(1+i)^2-\left[\left(\dfrac{2}{5}-\dfrac{1}{5}i\right)-\dfrac{1+2i}{1-2i}\right]-4i}i^{248}\right|$.

Решение. 1) $i^{248}=(i^4)^{62}=1^{62}=1$;

2) $-\left[(-3i)(2-4i)-(2+4i)3i\right]^2=-\left[-6i-12-6i+12\right]^2=-\left[-12i\right]^2=-(-144)=144$;

3)

$$(1-i)(1+i)^2-\left[\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i\right)-\frac{1+2i}{1-2i}\right]-4i=(1-i)(1+i)(1+i)-\left[\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i\right)-\frac{(1+2i)^2}{(1-2i)(1+2i)}\right]-4i=$$

$$=2(1+i)-\left[\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i\right)-\frac{1+4i-4}{1+4}\right]-4i=2+2i-4i-\left[\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i\right)-\frac{-3+4i}{5}\right]=2-2i-\frac{2-i+3-4i}{5}=$$

$$=2-2i-\frac{5-5i}{5}=2-2i-1+i=1-i;$$

4) $\dfrac{144}{1-i}i^{248}=\dfrac{144(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{144(1+i)}{2}=72(1+i)$;

5) $|72(1+i)|=72\sqrt{1^2+1^2}=72\sqrt{2}$.

Пример. Решить уравнение $z^2-z+5=0$.

Решение. Найдем дискриминант уравнения $z^2-z+5=0$

$D=(-1)^2-4\cdot1\cdot5=-19$

$$z_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{19}i}{2}.$$

Пример. Решить уравнение $z^2-(1+i)z+6+3i=0$.

Решение. Найдем дискриминант данного уравнения

$z^2-(1+i)z+6+3i=0$

$D=(1+i)^2-4(6+3i)=1+2i-1-24-12i=-24-10i$,

Тогда корни уравнения имеют вид $z_{1,2}=\dfrac{1+i\pm\sqrt{-24-10i}}{2}$. Найдем значение $\sqrt{-24-10i}$, используя формулу для случая $b<0$ $\sqrt{a+bi}=\pm\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\mp i\sqrt{\dfrac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}$.

Получим $\sqrt{-24-10i}=\pm\sqrt{\dfrac{-24+\sqrt{(-24)^2+(-10)^2}}{2}}\mp i\sqrt{\dfrac{-(-24)+\sqrt{(-24)^2+(-10)^2}}{2}}=$

$=\pm\sqrt{\dfrac{-24+26}{2}}\pm i\sqrt{\dfrac{24+26}{2}}=\pm1\mp5i$.

Следовательно, корни уравнения соответственно равны $z_1=\dfrac{1+i+1-5i}{2}=1-2i$ и

$$z_2=\frac{1+i-1+5i}{2}=3i.$$

Пример. Решить уравнение $z^2+\bar{z}=0$.

Решение. $z^2+\bar{z}=0$, $(x+yi)^2+x-yi=0$, $x^2+2xyi+(yi)^2+x-yi=0$,
$x^2+2xyi-y^2+x-yi=0$, $(x^2-y^2+x)+(2xy-y)i=0$,
$(x^2-y^2+x)+(2xy-y)i=0+0i$

$$\begin{cases} x^2-y^2+x=0 \\ 2xy-y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2x-1)y=0 \\ x^2-y^2+x=0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x-1=0 \\ x^2-y^2+x=0 \end{cases} \\ \begin{cases} y=0 \\ x^2-y^2+x=0 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x=1 \\ x^2-y^2+x=0 \end{cases} \\ \begin{cases} y=0 \\ x^2+x=0 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{4}-y^2+\dfrac{1}{2}=0 \end{cases} \\ \begin{cases} y=0 \\ x(x+1)=0 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ y^2=\dfrac{3}{4} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} y=0 \\ x=-1 \end{cases}.$$

Следовательно, решения данного уравнения имеют вид
$z_{1,2}=\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_3=0,\ z_4=-1$.

Пример. Решить уравнение $|z|+z=8+4i$.

Решение. Пусть $z=x+yi$, где $x\in R,\ y\in R$. Тогда уравнение примет вид $\sqrt{x^2+y^2}+x+yi=8+4i$. Из равенства комплексных чисел, стоящих в левой и правой частях уравнения, следует система уравнений относительно действительных переменных x и y

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}+x=8, \\ y=4. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим $x=3,\ y=4$. Следовательно, $z=3+4i$.

§ 2. Тригонометрическая форма комплексного числа

Любое комплексное число $z=a+bi$ можно изобразить точкой M (a,b) на плоскости OXY.

Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называются комплексной плоскостью. Ось абсцисс называют действительной осью, а ось ординат – мнимой.

Комплексное число $z=a+bi$ можно изобразить и с помощью

радиус–вектора $\vec{OM}=(a,b)$. Длина радиус–вектора, изображающего комплексное число z, называется модулем этого числа, обозначается $|z|$ или ρ и однозначно определяется по формуле $|z|=\rho=\sqrt{a^2+b^2}$.

Величина угла φ между положительным направлением действительной оси и вектором $\vec{OM}$, изображающим комплексное число, называется аргументом этого числа и обозначается $\arg z$.

Аргумент φ определяется из формул $\cos\varphi = \dfrac{a}{\rho}$, $\sin\varphi = \dfrac{b}{\rho}$, где $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$. И так как аргумент комплексного числа $z \neq 0$ величина многозначная: $\arg z = \varphi + 2\pi k,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, то в качестве аргумента можно брать величину из промежутка $[0; 2\pi)$.

Запись числа z в виде $z = a + bi = \rho\cos\varphi + \rho\sin\varphi \cdot i = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ называется тригонометрической формой комплексного числа.

А запись числа z в виде $z = |z|e^{i\varphi}$ называется показательной формой комплексного числа.

Пример. Представить комплексные числа в тригонометрической форме

а) $\sqrt{3} - i$; б) $2\cos\dfrac{\pi}{3} - 2i\sin\dfrac{\pi}{3}$; в) $\sin\varphi + i\cos\varphi$; д) $1 + \cos 44^o + i\sin 44^o$.

Решение. а) Для представления числа $\sqrt{3} - i$ в тригонометрической форме найдем его модуль $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ и аргумент φ

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2;$$

$$\cos\varphi = \frac{a}{\rho} = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin\varphi = \frac{b}{\rho} = -\frac{1}{2}, \text{ следовательно, } \varphi = -\frac{\pi}{6}.$$

Таким образом, $\sqrt{3} - i = 2(\cos(-\dfrac{\pi}{6}) + i\sin(-\dfrac{\pi}{6}))$.

б) $2\cos\dfrac{\pi}{3} - 2i\sin\dfrac{\pi}{3} = 2(\cos\dfrac{\pi}{3} - i\sin\dfrac{\pi}{3}) = 2(\cos(-\dfrac{\pi}{3}) + \sin(-\dfrac{\pi}{3}))$;

в) $\sin\varphi + i\cos\varphi = \cos(\dfrac{\pi}{2} - \varphi) + i\sin(\dfrac{\pi}{2} - \varphi)$;

г)
$1 + \cos 44^o + i\sin 44^o = 2\cos^2 22^o + i2\sin 22^o\cos 22^o = 2\cos 22^o(\cos 22^o + i\sin 22^o)$.

§ 3. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме

Даны два комплексных числа в тригонометрической форме $z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$

$$z_1 z_2 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= \rho_1\rho_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)] =$$
$$= \rho_1\rho_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

$$|z_1z_2| = \rho_1\rho_2 = |z_1||z_2|, \qquad \arg z_1z_2 = \varphi_1 + \varphi_2 = \arg z_1 + \arg z_2.$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{\rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\cdot\frac{(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)} =$$

$$= \frac{\rho_1}{\rho_2}\cdot\frac{(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2)}{(\cos\varphi_2)^2 - (i\sin\varphi_2)^2} =$$

$$= \frac{\rho_1}{\rho_2}\cdot\frac{\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\cdot\frac{\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{1} =$$

$$= \frac{\rho_1}{\rho_2}\cdot[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \ \arg\frac{z_1}{z_2} = \varphi_1 - \varphi_2 = \arg z_1 - \arg z_2$$

$z^n = [\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = \rho^n[\cos n\varphi + i\sin n\varphi]$ – формула Муавра для возведения комплексных чисел в натуральную степень.

Эта формула позволяет выразить $\cos n\varphi$ и $\sin n\varphi$ через $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$. Для этого нужно вычислить $[\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n$ другим способом, пользуясь формулой бинома Ньютона. В результате получим

$$\cos n\varphi = \cos^n\varphi - C_n^2\cos^{n-2}\varphi\,\sin^2\varphi + C_n^4\cos^{n-4}\varphi\,\sin^4\varphi - \ldots$$

и

$$\sin n\varphi = n\cos^{n-1}\varphi\,\sin n\varphi - C_n^3\cos^{n-3}\varphi\,\sin^3\varphi + C_n^5\cos^{n-5}\varphi\,\sin^5\varphi - \ldots$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

$$\rho = r^n$$

$$\varphi + 2\pi k = n\theta \quad \theta = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}, \ k = 0,1,\ldots,n-1.$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right).$$

Пример. Вычислить $\left(\frac{-1-i}{1-i\sqrt{3}}\right)^{18}$.

Решение. Представим число $-1-i$ в тригонометрической форме: $\rho = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ $\cos\varphi = \frac{a}{\rho} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\varphi = \frac{b}{\rho} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\varphi = \frac{5\pi}{4}$,

$$-1-i = \sqrt{2}\left(cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right).$$

Представим число $1-i\sqrt{3}$ в тригонометрической форме:

$$\rho = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}} = 2 \ \cos\varphi = \frac{a}{\rho} = \frac{1}{2}, \ \sin\varphi = \frac{b}{\rho} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \ \varphi = -\frac{\pi}{3},$$

$1-i\sqrt{3}=2(cos(-\frac{\pi}{3})+i\sin(-\frac{\pi}{3}))$.

Выполним деление полученных чисел в тригонометрической форме:

$$\frac{-1-i}{1-i\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}(\cos(\frac{5\pi}{4})+i\sin(\frac{5\pi}{4}))}{2(\cos(-\frac{\pi}{3})+i\sin(-\frac{\pi}{3}))}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos(\frac{5\pi}{4}-(-\frac{\pi}{3}))-i\sin(\frac{5\pi}{4}-(-\frac{\pi}{3}))=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos(\frac{19\pi}{12})-i\sin(\frac{19\pi}{12})).$$

Пользуясь формулой Муавра, возведем полученное число в степень

$$\left(\frac{-1-i}{1-i\sqrt{3}}\right)^{18}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos(\frac{19\pi}{12})-i\sin(\frac{19\pi}{12}))\right)^{18}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{18}\left((\cos18(\frac{19\pi}{12})-i\sin18(\frac{19\pi}{12})\right)=$$

$$=\frac{1}{2^9}\left((\cos(\frac{57\pi}{2})-i\sin(\frac{57\pi}{2})\right)=\frac{1}{2^9}\left((\cos(\frac{\pi}{2})-i\sin(\frac{\pi}{2})\right)=\frac{1}{2^9}(0-i)=-\frac{i}{512}.$$

Пример. Найти $\sqrt[3]{1}$.

Решение. Представим число, стоящее под корнем в алгебраической форме $\sqrt[3]{1}=\sqrt[3]{1+0i}$,

а затем в тригонометрической форме

$\rho=\sqrt{1^2+0^2}=1;\ \cos\varphi=\frac{1}{1},\ \sin\varphi=\frac{0}{1},$

следовательно, $\varphi=0$ и $\sqrt[3]{1}=\sqrt[3]{1+0i}=\sqrt[3]{1(\cos0+i\sin0)}.$

Используя формулу для извлечения корня n–степени из тригонометрической формы комплексного числа, имеем

$\sqrt[3]{1}=\sqrt[3]{1+0i}=\sqrt[3]{1(\cos0+i\sin0)}=\sqrt[3]{1}(\cos\frac{0+2\pi k}{3}+i\sin\frac{0+2\pi k}{3})$,где $k=0,\ 1,\ 2$.

При k=0 $\sqrt[3]{1}=\sqrt[3]{1}(\cos\frac{0+2\pi\ 0}{3}+i\sin\frac{0+2\pi\ 0}{3})=\cos0+i\sin0=1$.

При k=1 $\sqrt[3]{1}=\sqrt[3]{1}(\cos\frac{0+2\pi}{3}+i\sin\frac{0+2\pi}{3})=cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

При k=2 $\sqrt[3]{1}=\sqrt[3]{1}(\cos\frac{0+4\pi}{3}+i\sin\frac{0+4\pi}{3})=cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Корни n–степени из 1, имеющие вид $z_k=\cos\frac{2\pi k}{n}+i\sin\frac{2\pi k}{n},\ k=0,\ 1,\ ...,n-1$, являются вершинами правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса 1 с центром в начале координат, причем одной из вершин этого многоугольника является 1.

Совокупность T_n всех корней n – ой степени из 1 является подгруппой мультипликативной группы комплексных чисел. В частности, эта группа T_n

циклическая с образующим элементом $z_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$, называемым первообразным корнем n – ой степени из 1.

Пример. Вычислить $\sqrt[4]{\frac{7-2i}{1+i\sqrt{2}} + \frac{4+14i}{\sqrt{2}+2i} - (8-2i)}$.

Решение. Решение примера начнем с упрощения подкоренного выражения:

$$\frac{7-2i}{1+i\sqrt{2}} + \frac{4+14i}{\sqrt{2}+2i} - (8-2i) = \frac{7-2i}{1+i\sqrt{2}} + \frac{4+14i}{\sqrt{2}(1+\sqrt{2}i)} - (8-2i) =$$

$$= \frac{7\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i + 4 + 14i - 8\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i - 16i - 4}{\sqrt{2}(1+\sqrt{2}i)} = \frac{-\sqrt{2}-2i}{\sqrt{2}(1+\sqrt{2}i)} = \frac{-\sqrt{2}(1+\sqrt{2}i)}{\sqrt{2}(1+\sqrt{2}i)} = -1.$$

Теперь представим число -1 сначала в алгебраической, а затем в тригонометрической форме:

$-1 = -1 + 0i = 1(\cos\pi + i\sin\pi) = \cos\pi + i\sin\pi$.

Далее по формуле извлечения корня n–ой степени из тригонометрической формы комплексного числа имеем

$$\sqrt[4]{\frac{7-2i}{1+i\sqrt{2}} + \frac{4+14i}{\sqrt{2}+2i} - (8-2i)} = \sqrt[4]{\cos\pi + i\sin\pi} = \cos\frac{\pi+2\pi k}{4} + i\sin\frac{\pi+2\pi k}{4}$$

при $k = 0, 1, 2, 3$.

Найдем значение корня при каждом k:

при k=0 $\varepsilon_0 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$;

при k=1 $\varepsilon_1 = \cos\frac{\pi+2\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2\pi}{4} = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$;

при k=2 $\varepsilon_2 = \cos\frac{\pi+4\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+4\pi}{4} = \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$;

при k=3 $\varepsilon_3 = \cos\frac{\pi+6\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+6\pi}{4} = \cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Тема 5. Матрицы и определители.

В предыдущем разделе было введено определение матрицы А размерности $p \times q$ как прямоугольной таблицы:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & a_{p3} & \dots & a_{pq} \end{pmatrix}.$$

Можно пользоваться сокращенной формой записи:

$$A = (a_{ij});\ i = 1, 2, 3, \dots, p;\ j = 1, 2, 3, \dots, q.$$

Две матрицы одинаковой размерности $p \times q$ называются равными, если в них одинаковые места заняты равными числами (на пересечении i-й строки и

j-го столбца в одной и в другой матрице стоит одно и то же число; i=1, 2, ..., p; j=1, 2, ..., q).

Пусть А = (a_{ij}) – некоторая матрица и α – произвольное число, тогда αA = (αa_{ij}), то есть при умножении матрицы А на число α все числа, составляющие матрицу А, умножаются на число α.

Пусть А и В – матрицы одинаковой размерности А = (a_{ij}), В = (b_{ij}), тогда их сумма А + В – матрица С = (c_{ij}) той же размерности, определяемая из формулы $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, то есть при сложении двух матриц попарно складываются одинаково расположенные в них числа.

Матрицу А можно умножить на матрицу В, то есть найти матрицу С = АВ, если число столбцов n матрицы А равно числу строк матрицы В, при этом матрица С будет иметь столько строк, сколько строк у матрицы A и столько столбцов, сколько столбцов у матрицы B. Каждый элемент матрицы С определяется формулой

Элемент c_{ij} матрицы-произведения С равен сумме произведений элементов i-строки первой матрицы- сомножителя на соответствующие элементы j-го столбца второй матрицы-сомножителя.

Из сказанного следует, что если можно найти произведение матриц АВ, то произведение ВА, вообще говоря, не определено.

Приведем примеры перемножения матриц:

$$1)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \\ 4 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -4 \\ 6 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} 1\cdot 2+2\cdot 1+33\cdot 6+4\cdot(-3) & 1\cdot 5+2\cdot(-4)+3\cdot 2+4\cdot(-1) \\ 2\cdot 3+1\cdot 1+(-1)\cdot 6+(-3)\cdot(-3) & 2\cdot 5+1\cdot(-4)+(-1)\cdot 2+(-3)\cdot(-1) \\ 4\cdot 5+(-2)\cdot(-4)+3\cdot 2+1\cdot(-1) & 4\cdot 5+(-2)\cdot(-4)+3\cdot 2+1\cdot(-1) \end{pmatrix}$$

Если АВ и ВА одновременно определены, то, вообще говоря, эти произведения не равны. Это означает, что умножение матриц не коммутативно.

Для алгебраических действий над матрицами справедливы следующие законы:

1) $A + B = B + A$;

2) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;

3) $(A + B) + C = A + (B + C)$;

4) $(AB)C = A(BC)$;

5) $A(B + C) = AB + AC$.

Матрица, состоящая из одной строки, называется вектором (вектором-строкой). Матрица, состоящая из одного столбца, также называется вектором (вектором-столбцом).

Пусть имеется матрица А = (a_{ij}) размерности $m \times n$, n-мерный вектор-столбец Х и m-мерный вектор-столбец В:

$$\mathbf{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Тогда матричное равенство

$$AX = B, \tag{1}$$

если расписать его поэлементно, примет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}.$$

Таким образом, формула (1) является записью системы m линейных уравнений с n неизвестными в матричной форме. Ниже будет показано, что, записывая систему в сжатом виде, кроме краткости написания мы получаем и другие очень важные преимущества.

Нулевой матрицей называется матрица, у которой все элементы – нули. Очевидно равенство А + (–1)А = 0. Здесь в правой части через 0 обозначена нулевая матрица той же размерности, что и матрица А.

Квадратная матрица размера n называется единичной, если все её элементы, стоящие на главной диагонали, равны единице, а все остальные – нули. Единичную матрицу можно определить формулами:

$a_{ij} = 1$ при $i = j$;

$a_{ij} = 0$ при $i \neq j$.

Очевидно, что первые три столбца матрицы (3) образуют единичную матрицу.

Единичная матрица, как правило, обозначается буквой Е:

$$\mathbf{E}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Легко проверить справедливость равенств: ЕА = АЕ = А. Здесь А – квадратная матрица, и размеры А и Е одинаковы.

Пусть А – квадратная матрица. Обратной матрицей к матрице А называется такая матрица A^{-1}, для которой справедливы равенства:

$AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Очевидно, что A^{-1} – квадратная матрица того же размера, что и матрица А. Сразу заметим, что не всякая квадратная матрица имеет обратную матрицу.

Теперь сформулируем правило, по которому находится матрица, обратная к квадратной матрице А размера n.

Нужно выписать матрицу размерности $n \times 2n$, первые n столбцов которой образованы матрицей А, а последние n столбцов образуют единичную матрицу Е. Построенная таким образом матрица преобразуется по методу Жордана-Гаусса так, чтобы на месте матрицы А получилась единичная матрица, если это возможно. Тогда на месте матрицы Е получается матрица A^{-1}.

Если матрицу А нельзя преобразовать к единичной матрице, то A^{-1} не существует.

Рассмотрим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными в общем виде:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}.$$

Найдем x_1 следующим образом: чтобы исключить x_2, умножим первое уравнение на a_{22} и из полученного уравнения вычтем второе, умноженное на a_{12}:

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}. \qquad (1)$$

Обозначим $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, $\Delta_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}$.

Для определения x_2 поступим так: умножим второе уравнение на a_{11} и из полученного уравнения вычтем первое, умноженное на a_{21}:

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1. \qquad (2)$$

Обозначим $\Delta_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1$.

Величина Δ называется определителем матрицы второго порядка

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Вообще определителем произвольной матрицы второго порядка $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$ называется число, которое обозначается и равно произведению двух чисел, стоящих на главной диагонали минус произведение двух чисел, стоящих на другой диагонали: $\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}$.

Например,

$$\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} = -15 - 8 = -23.$$

Из сказанного следует, что величины Δ_1 и Δ_2 в (3) тоже являются определителями:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}; \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим теперь систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}. \qquad (4)$$

Введем определение. Определителем произвольной квадратной матрицы третьего порядка $\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$ называется сумма шести слагаемых, каждое из которых представляет собой произведение трех элементов матрицы, выбираемых по следующему правилу: три произведения элементов, стоящих на главной диагонали и в вершинах двух треугольников: , берутся со знаком "+", а три произведения элементов, стоящих на второй диагонали и в вершинах двух других треугольников: , берутся со знаком "–". Определитель третьего порядка обозначается так:

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}.$$

Например,

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 9 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\cdot(-2)\cdot 9 + 3\cdot 3\cdot 2 + (-1)\cdot 4\cdot 5 - 2\cdot(-2)\cdot 5 - (-1)\cdot 3\cdot 9 - 4\cdot 3\cdot 2 =$$
$$= -36 + 18 - 20 + 20 + 27 - 24 = -15$$

Решая систему (4), например методом Гаусса, можно получить равенства

$$\Delta\cdot x_1 = \Delta_1;\ \Delta\cdot x_2 = \Delta_2;\ \Delta\cdot x_3 = \Delta_3, \qquad (5)$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Из формул (5) видно, что если $\Delta \neq 0$, то единственным образом определяется решение системы:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, i = 1,2,3.$$

Решая квадратные системы линейных уравнений 4-го, 5-го или любого более высокого порядка, можно получить формулы, аналогичные формулам (1), (2) или (5).

Дадим определение определителя

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

квадратной матрицы n-го порядка или просто определителя n-го порядка. (В дальнейшем, принимая во внимание введённое обозначение, под элементами, строками и столбцами определителя матрицы будем подразумевать элементы, строки и столбцы этой матрицы.)

Сформулируем понятие $n!$ (читается *эн факториал*): если n – натуральное (целое положительное) число, то $n!$ – это произведение всех натуральных чисел от 1 до n.

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1)\, n.$$

Например,

$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$$

Замечание: в некоторых книгах вместо термина "определитель" используется термин "детерминант" и определитель матрицы А обозначается detA.

Определителем n-го порядка называется сумма $n!$ слагаемых. Каждое слагаемое представляет собой произведение n элементов, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца определителя. (Произведения отличаются одно от другого набором элементов.) Перед каждым произведением ставится знак "+" или "–". Покажем, как определить, какой нужно ставить знак перед произведением.

Так как в каждом произведении присутствует один элемент из 1-й строки, один элемент из 2-ой и т.д., то произведение в общем виде можно записать так:

$$a_{1i} \cdot a_{2j} \cdot a_{3k} \cdot \ldots \cdot a_{ns}.$$

Здесь i, j, k, …, s – номера столбцов, в которых стоят элементы, выбранные из 1-й, 2-й, 3-й, ... n-й строк, соответственно. Ясно из сказанного выше, что каждое из чисел $i, j, k, \ldots, s$ равно какому-либо из чисел 1, 2, ..., n, и что все числа $i, j, k, \ldots, s$ – различные.

Расположенные в данном порядке i, j, k, …, s, эти числа образуют "перестановку" из чисел 1, 2, ..., n (перестановкой называется заданный порядок в конечном множестве).

Взаимное расположение двух чисел в перестановке, когда большее стоит впереди меньшего называется инверсией. Например, в перестановке три инверсии; в перестановке – шесть инверсий.

Перестановка называется четной, если в ней четное число инверсий и нечетной, если число инверсий нечетное.

Теперь можно сформулировать правило: произведение $a_{1i} \cdot a_{2j} \cdot a_{3k} \cdot \ldots \cdot a_{ns}$ берется со знаком "+", если вторые индексы образуют четную перестановку, и со знаком "–", если нечетную.

Из определения определителя можно вывести следующие его свойства.

1. Если поменять местами две строки определителя (два столбца), то получим новый определитель, равный исходному, умноженному на .

2. Определитель, имеющий две равных строки (два равных столбца), равен нулю.

3. Если одну из строк определителя умножить на какое-либо число, то получится определитель, равный исходному, умноженному на это число.

4. Определитель транспонированной матрицы равен определителю исходной матрицы.

5. Если в определителе вместо любой строки записать сумму этой строки и любой другой строки, умноженной на некоторое число, то полученный новый определитель будет равен исходному.

До сих пор было показано, как вычислять определитель второго и третьего порядков. Чтобы вычислить определитель более высоких порядков, пользуются формулой Лапласа разложения определителя по строке или столбцу:

$$\det A = a_{i1}(-1)^{i+1}M_{i1} + a_{i2}(-1)^{i+2}M_{i2} + \ldots + a_{in}(-1)^{i+n}M_{in} =$$
$$= a_{1j}(-1)^{1+j}M_{1j} + a_{2j}(-1)^{2+j}M_{2j} + \ldots + a_{nj}(-1)^{n+j}M_{nj}$$

Здесь i и j — любые числа от 1 до n. Последняя формула представляет собой разложение определителя по i-й строке или j-му столбцу. M_{ij} называется минором и равняется определителю порядка $n-1$, который получается из определителя detA, если вычеркнуть i-ю строку и j-й столбец. Произведение $(-1)^{i+j}M_{ij}$ обозначается A_{ij} и называется алгебраическим дополнением элемента a_{ij}.

Вычисление обратной матрицы

Пусть $A = (a_{ij})$ – квадратная матрица с определителем, не равным нулю. Тогда существует обратная матрица A^{-1}, которая вычисляется по формуле

$$\mathbf{A}^{-1} = \left(c_{ij}\right) = \left(\frac{A_{ji}}{\det A}\right).$$

Последняя формула означает, что в i-й строке и j-м столбце обратной матрицы располагается алгебраическое дополнение элемента, стоящего в j-й строке и в i-м столбце исходной матрицы, деленное на определитель исходной матрицы.

Напомним здесь, что $A_{pq} = (-1)^{p+q}M_{pq}$, где M_{pq} называется минором и представляет собой определитель, получающийся из определителя detA вычеркиванием p-й строки и q-го столбца.

Рассмотрим пример:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \det A = 20 + 6 - 24 = 2;$$

$$A_{11}=20,\quad A_{12}=-9,\quad A_{13}=-15,$$
$$A_{21}=-8,\quad A_{22}=4,\quad A_{23}=6,$$
$$A_{31}=2,\quad A_{32}=-1,\quad A_{33}=-1;$$

$$\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix} 10 & -4 & 1 \\ -\frac{9}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{15}{2} & 3 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Еще раз подчеркнем, что обратная матрица существует только для квадратной матрицы с определителем, отличным от нуля!

Правило Крамера решения квадратных систем линейных уравнений.

Пусть мы имеем квадратную систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}.$$

Ее можно записать в матричной форме:

$$\text{AX} = \text{B},$$

где

$$\mathbf{A}=\left(a_{ij}\right)i,j=1,2,\ldots,n;\mathbf{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix};\mathbf{B}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Если определитель матрицы А не равен нулю, то система имеет единственное решение, определяемое формулами:

$$\begin{cases} x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta} \\ x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta} \\ \ldots\ldots \\ x_n=\frac{\Delta_n}{\Delta} \end{cases}.$$

Здесь Δ_i – определитель n-го порядка, получающийся из определителя Δ матрицы А коэффициентов системы заменой i-го столбца столбцом свободных членов.

Например,

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2-x_3=2 \\ 2x_1-x_2+2x_3=3 \\ 4x_1+x_2+3x_3=5 \end{cases};$$

Отметим, что если определитель матрицы А коэффициентов квадратной системы линейных уравнений равен нулю, то возможен один из двух случаев: либо система несовместна, либо она совместна и неопределенна.

Тема 6. Системы линейных уравнений.

Систему m линейных уравнений с n неизвестными будем записывать в следующем виде:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}. \qquad (1)$$

Здесь $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – неизвестные величины, a_{ij} $(i = 1,2, \ldots, m;$ $j = 1, 2, \ldots, n)$ – числа, называемые коэффициентами системы (первый индекс фиксирует номер уравнения, второй — номер неизвестной), $b_1, b_2, \ldots, b_m$ –числа, называемые свободными членами.

Решением системы будем называть упорядоченный набор чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, обращающий каждое уравнение системы в верное равенство.

Решить систему — значит найти все ее решения или доказать, что ни одного решения нет.

Система, имеющая решение, называется совместной.

Если система имеет только одно решение, то она называется определенной. Система, имеющая более чем одно решение, называется неопределенной (совместной и неопределенной).

Если система не имеет решений, то она называется несовместной.

Система, у которой все свободные члены равны нулю($b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0$), называется однородной. Однородная система всегда совместна, так как набор из n нулей удовлетворяет любому уравнению такой системы.

Если число уравнений системы совпадает с числом неизвестных ($m=n$), то система называется квадратной.

Две системы, множества решений которых совпадают, называются эквивалентными или равносильными (совпадение множеств решений означает, что каждое решение первой системы является решением второй системы, и каждое решение второй системы является решением первой).

Две несовместные системы считаются эквивалентными.

Преобразование, применение которого превращает систему в новую систему, эквивалентную исходной, называется эквивалентным или равносильным преобразованием. Примерами эквивалентных преобразований могут служить следующие преобразования: перестановка местами двух уравнений системы, перестановка местами двух неизвестных вместе с коэффициентами у всех уравнений, умножение обеих частей какого-либо уравнения системы на отличное от нуля число.

Метод Гаусса решения систем линейных уравнений

Рассмотрим квадратную систему

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 11 \\ 4x_1 + 6x_2 - x_3 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \end{cases}. \qquad (1)$$

У этой системы коэффициент a_{11} отличен от нуля. Если бы это условие не выполнялось, то чтобы его получить, нужно было бы переставить местами уравнения, поставив первым то уравнение, у которого коэффициент при x_1 не равен нулю.

Проведем следующие преобразования системы:

1) поскольку $a_{11}\neq 0$, первое уравнение оставим без изменений;

2) вместо второго уравнения запишем уравнение, получающееся, если из второго уравнения вычесть первое, умноженное на 4;

3) вместо третьего уравнения запишем разность третьего и первого, умноженного на 3;

4) вместо четвертого уравнения запишем разность четвертого и первого, умноженного на 5.

Полученная новая система эквивалентна исходной и имеет во всех уравнениях, кроме первого, нулевые коэффициенты при x_1 (это и являлось целью преобразований 1 – 4):

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 11 \\ 10x_2 - 13x_3 - 8x_4 = -45 \\ 5x_2 - 7x_3 - 7x_4 = -30 \\ 4x_2 - 13x_3 - 9x_4 = -53 \end{cases}. \qquad (2)$$

Можно доказать, что замена любого уравнения системы новым, получающимся прибавлением к данному уравнению любого другого уравнения системы, умноженного на любое число, является эквивалентным преобразованием системы.

Для приведенного преобразования и для всех дальнейших преобразований не следует целиком переписывать всю систему, как это только что сделано. Исходную систему можно представить в виде таблицы

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & 11 \\ 4 & 6 & -1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 2 & -1 & 3 \\ 5 & -1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Прямоугольную таблицу, состоящую из p строк и q столбцов, будем называть матрицей размера $p\times q$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & a_{p3} & \dots & a_{pq} \end{pmatrix}.$$

Числа a_{ij} называются элементами матрицы. Первый индекс фиксирует номер строки, а второй – номер столбца, в которых стоит данный элемент. Если $p = q$, то есть число столбцов матрицы равно числу строк, то матрица называется квадратной. Элементы a_{ii} образуют главную диагональ матрицы.

Матрица (3) называется расширенной матрицей для исходной системы уравнений. Если из расширенной матрицы удалить столбец свободных членов, то получится матрица коэффициентов системы, которую иногда называют просто матрицей системы.

Очевидно, что матрица коэффициентов квадратной системы является квадратной матрицей.

Каждую систему m линейных уравнений с n неизвестными можно представить в виде расширенной матрицы, содержащей m строк и $n+1$ столбцов. Каждую матрицу можно считать расширенной матрицей или матрицей коэффициентов некоторой системы линейных уравнений. Системе (2) соответствует расширенная матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & 11 \\ 0 & 10 & -13 & -8 & -45 \\ 0 & 5 & -7 & -7 & -30 \\ 0 & 4 & -13 & -9 & -53 \end{pmatrix}.$$

Преобразуем эту матрицу следующим образом:

1) первые две строки оставим без изменения, поскольку элемент a_{22} не равен нулю;

2) вместо третьей строки запишем разность между второй строкой и удвоенной третьей;

3) четвертую строку заменим разностью между удвоенной второй строкой и умноженной на 5 четвертой.

В результате получится матрица, соответствующая системе, у которой неизвестная x_1 исключена из всех уравнений, кроме первого, а неизвестная x_2 — из всех уравнений кроме первого и второго:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & 11 \\ 0 & 10 & -13 & -8 & -45 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 15 \\ 0 & 0 & 39 & 29 & 175 \end{pmatrix}.$$

Теперь исключим неизвестную x_3 из четвертого уравнения. Для этого последнюю матрицу преобразуем так:

1) первые три строки оставим без изменения, так как $a_{33} \neq 0$;

2) четвертую строку заменим разностью между третьей, умноженной на 39, и четвертой:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & 11 \\ 0 & 10 & -13 & -8 & -45 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 205 & 410 \end{pmatrix}.$$

Полученная матрица соответствует системе

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 11 \\ 10x_2 - 13x_3 - 8x_4 = -45 \\ x_3 + 6x_4 = 15 \\ 205x_4 = 410 \end{cases}. \qquad (4)$$

Из последнего уравнения этой системы получаем $x_4 = 2$. Подставив это значение в третье уравнение, получим $x_3 = 3$. Теперь из второго уравнения следует, что $x_2 = 1$, а из первого — $x_1 = -1$. Очевидно, что полученное решение единственно (так как единственным образом определяется значение x_4, затем x_3 и т. д.).

Назовем элементарными преобразованиями матрицы следующие преобразования:

1) перемена местами двух строк;

2) умножение строки на число, отличное от нуля;

3) замена строки матрицы суммой этой строки с любой другой строкой, умноженной на некоторое число.

Если матрица А является расширенной матрицей некоторой системы, и путем ряда элементарных преобразований матрица А переводится в матрицу В, являющуюся расширенной матрицей некоторой другой системы, то эти системы эквивалентны.

Назовем квадратную матрицу, у которой на главной диагонали стоят числа, отличные от нуля, а под главной диагональю – нули, треугольной матрицей. Матрица коэффициентов системы (4) – треугольная матрица.

Если с помощью элементарных преобразований матрицу коэффициентов квадратной системы можно привести к треугольной матрице, то система совместна и определенна.

Рассмотрим другой пример:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 4x_5 = -2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 7 \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 10x_5 = -10 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 9 \end{cases}. \qquad (5)$$

Проведем следующие преобразования расширенной матрицы системы:

1) первую строку оставим без изменения;

2) вместо второй строки запишем разность между второй строкой и удвоенной первой;

3) вместо третьей строки запишем разность между третьей строкой и утроенной первой;

4) четвертую строку заменим разностью между четвертой и первой;

5) пятую строку заменим разностью пятой строки и удвоенной первой.

В результате преобразований получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 5 & -5 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 5 & -7 & 4 & -11 & 13 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 6 & -8 \\ 0 & 5 & -7 & 4 & -11 & 13 \end{pmatrix}.$$

Оставив без изменения первые две строки этой матрицы, приведем ее элементарными преобразованиями к следующему виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 5 & -5 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 6 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 6 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 6 & -8 \end{pmatrix}.$$

Если теперь, следуя методу Гаусса, который также называют и методом последовательного исключения неизвестных, с помощью третьей строки привести к нулю коэффициенты при x_3 в четвертой и пятой строках, то после деления всех элементов второй строки на 5 и деления всех элементов третьей строки на 2 получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Каждая из двух последних строк этой матрицы соответствует уравнению $0x_1+0x_2+0x_3+0x_4+0x_5 = 0$. Это уравнение удовлетворяется любым набором чисел $x_1, x_2, \ldots, x_5$, и его следует удалить из системы. Таким образом, система с только что полученной расширенной матрицей эквивалентна системе с расширенной матрицей вида

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & -4 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Последняя строка этой матрицы соответствует уравнению $x_3 - 2x_4 + 3x_5 = -4$. Если неизвестным x_4 и x_5 придать произвольные значения: $x_4 = r$; $x_5 = s$, то из последнего уравнения системы, соответствующей матрице (6), получим $x_3 = -4 + 2r - 3s$. Подставив выражения x_3, x_4, и x_5 во второе уравнение той же системы, получим $x_2 = -3 + 2r - 2s$. Теперь из первого уравнения можно получить $x_1 = 4 - r + s$. Окончательно решение системы представляется в виде

$$\begin{cases} x_1 = 4 - r + s \\ x_2 = -3 + 2r - 2s \\ x_3 = -4 + 2r - 3s \\ x_4 = r \\ x_5 = s \end{cases}.$$

Рассмотрим прямоугольную матрицу A, у которой число столбцов m больше, чем число строк n. Если матрицу A можно разделить вертикальной чертой на две матрицы: стоящую слева треугольную матрицу размера m и стоящую справа прямоугольную матрицу, то матрицу A назовем трапециевидной или трапецеидальной. Очевидно, что матрица (6) — трапециевидная матрица.

Если при применении эквивалентных преобразований к системе уравнений хотя бы одно уравнение приводится к виду

$$0x_1 + 0x_2 + \ldots 0x_n = b_j \quad (b_j \neq 0),$$

то система несовместна или противоречива, так как ни один набор чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ не удовлетворяет этому уравнению.

Если при преобразовании расширенной матрицы системы матрица коэффициентов приводится к трапецеидальному виду и при этом система не получается противоречивой, то система совместна и является неопределенной, то есть имеет бесконечно много решений.

В последней системе можно получить все решения, придавая конкретные числовые значения параметрам r и s.

Те переменные, коэффициенты при которых стоят на главной диагонали трапецеидальной матрицы (это значит, что эти коэффициенты отличны от нуля), называются базисными. В рассмотренном выше примере это неизвестные x_1, x_2, x_3. Остальные неизвестные называются свободными. В рассмотренном выше примере это неизвестные x_4, и x_5. Свободным неизвестным можно придавать любые значения или выражать их через параметры, как это сделано в последнем примере.

Базисные неизвестные единственным образом выражаются через свободные неизвестные.

Если свободным неизвестным приданы конкретные числовые значения и через них выражены базисные неизвестные, то полученное решение называется частным решением.

Если свободные неизвестные выражены через параметры, то получается решение, которое называется общим решением.

Все бесконечное множество решений системы можно получить, придавая свободным неизвестным любые числовые значения и находя соответствующие значения базисных неизвестных.

Если всем свободным неизвестным приданы нулевые значения, то полученное решение называется базисным.

Одну и ту же систему иногда можно привести к разным наборам базисных неизвестных. Так, например, можно поменять местами 3-й и 4-й столбцы в матрице (6). Тогда базисными будут неизвестные x_1, x_2, x_4, а свободными – x_3 и x_5. Рекомендуем читателю самостоятельно привести последнюю систему к такому виду, чтобы свободными неизвестными были x_1 и x_2, а базисными – x_3, x_4, x_5.

Если получены два различных набора базисных неизвестных при различных способах нахождения решения одной и той же системы, то эти наборы обязательно содержат одно и то же число неизвестных, называемое рангом системы.

Рассмотрим еще одну систему, имеющую бесконечно много решений:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 + x_5 = 2 \\ 2x_1 + 3x_3 + 7x_4 - x_5 = 7 \\ 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 9x_4 + 5x_5 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 + 14x_4 - 2x_5 = 8 \end{cases}.$$

Проведем преобразование расширенной матрицы системы по методу Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & -5 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Как видно, мы не получили трапецеидальной матрицы, однако последнюю матрицу можно преобразовать, поменяв местами третий и четвертый столбцы:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица уже является трапецеидальной. У соответствующей ей системы две свободных неизвестных – x_3, x_5 и три базисных – x_1, x_2, x_4. Решение исходной системы представляется в следующем виде:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{14}{3} - \frac{3}{2}r - \frac{11}{6}s \\ x_2 = \frac{4}{3} + \frac{1}{2}r + \frac{11}{6}s \\ x_3 = r \\ x_4 = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}s \\ x_5 = s \end{cases}.$$

Приведем пример не имеющей решения системы:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \\ 4x_1 + 7x_2 - 3x_3 = 4 \end{cases}.$$

Преобразуем матрицу системы по методу Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & -1 & 5 \\ 4 & 7 & -3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & 13 & -5 & -11 \\ 0 & 13 & -5 & -10 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & 13 & -5 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Последняя строка последней матрицы соответствует не имеющему решения уравнению $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1$. Следовательно, исходная система несовместна.

Сформулируем теперь кратко суть метода Гаусса. Полагая, что в системе коэффициент a_{11} отличен от нуля (если это не так, то следует на первое место поставить уравнение с отличным от нуля коэффициентом при x_1 и переобозначить коэффициенты), преобразуем систему следующим образом: первое уравнение оставляем без изменения, а из всех остальных уравнений исключаем неизвестную x_1 с помощью эквивалентных преобразований описанным выше способом.

В полученной системе

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ a_{13}x_3 + \ldots a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}^*x_2 + \ a_{23}^*x_3 + \ldots a_{2n}^*x_n = b_2^* \\ \qquad a_{32}^*x_2 + \ a_{33}^*x_3 + \ldots a_{3n}^*x_n = b_3^* \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad a_{m2}^*x_2 + \ a_{m3}^*x_3 + \ldots a_{mn}^*x_n = b_m^* \end{cases},$$

считая, что $a_{22}^* \neq 0$ (что всегда можно получить, переставив уравнения или слагаемые внутри уравнений и переобозначив коэффициенты системы), оставляем без изменений первые два уравнения системы, а из остальных уравнений, используя второе уравнения, с помощью элементарных преобразований исключаем неизвестную x_2. Во вновь полученной системе

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ a_{13}x_3 + \ldots a_{1n}x_n = \ b_1 \\ \qquad a_{22}^*x_2 + \ a_{23}^*x_3 + \ldots a_{2n}^*x_n = b_2^* \\ \qquad\qquad a_{33}^{**}x_3 + \ldots a_{3n}^{**}x_n = b_3^{**} \\ \qquad \ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad a_{m3}^{**}x_3 + \ldots a_{mn}^{**}x_n = b_m^{**} \end{cases}$$

при условии $a_{33}^{**} \neq 0$ оставляем без изменений первые три уравнения, а из всех остальных с помощью третьего уравнения элементарными преобразованиями исключаем неизвестную x_3.

Этот процесс продолжается до тех пор, пока не реализуется один из трех возможных случаев:

1) если в результате приходим к системе, одно из уравнений которой имеет нулевые коэффициенты при всех неизвестных и отличный от нуля свободный член, то исходная система несовместна;

2) если в результате преобразований получаем систему с матрицей коэффициентов треугольного вида, то система совместна и является определенной;

3) если получается система с трапецеидальной матрицей коэффициентов (и при этом не выполняется условие пункта 1), то система совместна и неопределенна.

Тема 7. Линейные пространства.

§ 1. Определение линейного пространства. Примеры.

Рассмотрим совокупность направленных отрезков пространства, исходящих из некоторой точки O. По правилу параллелограмма для любых двух таких отрезков или векторов a и b найдется вектор $a+b$. Кроме этой операции сложения векторов, хорошо известна также операция умножения вектора a на вещественное число λ. Часто эту совокупность векторов с указанными операциями называют векторным пространством. В дальнейшем оно обозначается V_3.

Аксиоматизируя свойства операций над векторами из V_3, приходим к общему понятию векторного, или линейного пространства.

Определение 1. Пусть P - некоторое числовое поле, R - любое непустое множество элементов и

а) в R определена операция сложения (т е. указан закон, по которому для любых двух элементов $a.b\in R$ находится вполне определенный элемент в R, называемый их суммой и обозначаемый $a+b$).

б) определена операция умножения элементов из R на числа P (т.е. указан закон, по которому для любого элемента $a\in R$ и любого числа $\lambda\in P$ находится вполне определенный элемент в R, называемый произведением числа λ на элемент a и обозначаемый через $\lambda\cdot a$ или λa).

Множество R называется линейным (или векторным) пространством над полем P, а его элементы - векторами, если указанные операции (сложения векторов и умножения вектора на число) удовлетворяют аксиомам:

I. 1. $a+b=b+a$ (коммутативность сложения).

2. $(a+b)+c=a+(b+c)$ (ассоциативность сложения).

3. Существует вектор θ, такой, что $a+\theta=a$ для любого $a\in R$. Вектор θ называется нулевым или просто нулем пространства R.

4. Для каждого вектора $a\in R$ существует вектор $-a$, такой, что $a+(-a)=\theta$. Вектор $-a$ называется противоположным для вектора a.

II. 5. $1\cdot a=a$, где 1 – единица поля P.

6. $\alpha(\beta a)=(\alpha\beta)a$ (ассоциативность умножения на число поля P).

III. 7. $(\alpha+\beta)a=\alpha a+\beta a$ (дистрибутивность относительно сложения чисел поля P).

8. $\alpha(a+b)=\alpha a+\alpha b$ (дистрибутивность умножения относительно сложения в множестве R).

Если поле коэффициентов P есть ноле всех комплексных чисел, то линейное пространство называется комплексным линейным пространством;

если P есть иоле всех вещественных чисел, то - вещественным линейным пространством; если P - произвольное поле, то R - линейным пространством над полем P.

Как правило, в дальнейшем всюду в качестве основного поля P будет предполагаться поле вещественных чисел D. Отступление от этого правила будет оговариваться.

Как и при определении группы, в определении линейного пространства ничего не говорится о технике выполнения операций: в любом конкретном случае, как только выполняемые операции будут удовлетворять аксиомам 1-8, эти операции приобретают право называться сложением и умножением на число, а совокупность элементов с такими операциями получает право называться линейным пространством.

Примеры линейных пространств.

1. Пространство V_3. Элементы этого пространства - направленные геометрические отрезки обычного пространства, имеющие общее начало в фиксированной точке O.

2. Пространство T_n. Элемент x - вектор этого так называемого арифметического линейного пространства - любая упорядоченная совокупность n вещественных чисел $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ (n-фиксированное натуральное число):

$$x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n).$$

Числа ξ_i называются компонентами вектора x.

3. Пространство $C(a,b)$. Элемент этого линейного пространства - любая вещественная функция $x = x(t)$ определенная и непрерывная на отрезке $a \le t \le b$.

4. Пространство решений однородной системы линейных уравнений. Пусть

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0, \\ .... \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + ... + a_{sn}x_n = 0 \end{array}\right\}$$

однородная система s линейных уравнении с n неизвестными и с коэффициентами из поля D.

5. Пространство квадратных матриц. Векторы этого пространства - квадратные матрицы одного и того же порядка n с вещественными элементами. Основное поле - поле вещественных чисел. Сложение матриц и умножение их на числа выполняются по известным правилам. Аксиомы 1-8 выполняются. Нулевым элементом θ здесь будет матрица, все элементы которой нули.

6. Пространство R, векторы которого положительные вещественные числа, основное поле — поле D вещественных чисел. Сложение и умножение чисел α, β …поля D обозначаем обычными знаками + и •. «Сложение» $\oplus$ векторов a и b в R по определению есть обычное умножение вещественных чисел;

$a \oplus b = a \cdot b$.

«Умножение» $\otimes$ числа $\alpha \in D$ на вектор $a \in R$ по определению есть возвышение числа a в степень α :

$\alpha \otimes a = a^{\alpha}$.

Проверьте выполнимость аксиом 1—8.

§ 2. Простейшие свойства линейных пространств.

Отметим некоторые свойства линейных пространств, которые непосредственно вытекают из аксиом 1-8.

Аксиомы 1-4 означают, что относительно операции сложения линейное пространство R является коммутативной группой. Следовательно, все свойства коммутативных групп имеют место для линейных пространств. В частности:

1. В линейном пространстве существует единственный нуль.
2. В линейном пространстве для каждого элемента существует единственный противоположный элемент.
3. Уравнение $a + x = b$, где a и b - любые данные элементы линейного пространства R, разрешимо в R и притом единственным образом.

Другие свойства линейного пространства R связаны с операцией умножения.

4. $a \cdot \theta = \theta$.

5. $0 \cdot a = \theta$, где 0 - нуль поля P.

6. Если $\alpha a = \theta$, то или $\alpha = 0$, или $a = \theta$.

8. $(-\alpha)a = -(\alpha a)$.

9. $\alpha(a - b) = \alpha a - \alpha b$.

10. $(\alpha - \beta)a = \alpha a - \beta a$.

Определение 2. Линейной комбинацией векторов $a, b, \ldots, c$ называется вектор x, получаемый по формуле

$x = \alpha a + \beta b + \ldots + \gamma c$,

где $\alpha, \beta, \ldots \gamma$ - некоторые числа основного поля P. Говорят при этом также, что вектор x: линейно выражается через векторы $a, b, \ldots, c$.

§ 3. Линейная зависимость векторов.

Важнейшим понятием в теории линейных пространств является линейная зависимость векторов.

Определение 3. Система векторов $a_1, a_2, \ldots a_k$ линейного пространства R над полем P называется линейно зависимой, если существуют не все равные нулю числа $c_1, c_2, \ldots c_k$ поля P, такие, что

$$c_1 a_1 + c_2 a_2 + \ldots + c_k a_k = \theta \quad (1)$$

Если же для векторов $a_1, a_2, \ldots a_k$ равенство (1) имеет место только при $c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0$, то система векторов $a_1, a_2, \ldots a_k$ называется линейно независимой.

Заметим, что свойство линейной зависимости и независимости является свойством системы векторов.

Отметим некоторые свойства линейной зависимости векторов.

Свойство 1. Система векторов, содержащая линейно зависимую подсистему, линейно зависима.

Из свойства 1 следует, что всякая подсистема линейно независимой системы векторов линейно независима.

Свойство 2. Если система векторов $a_1, a_2, ... a_k$ линейно независима, а система векторов $a_1, a_2, ... a_k, b$ линейно зависима, то вектор b линейно выражается через векторы системы $a_1, a_2, ... a_k$.

Свойство 3. Упорядоченная система ненулевых векторов $a_1, a_2, ... a_k$ $(k > 1)$ линейно зависима тогда и только тогда, когда некоторый вектор a_i, $2 \le i \le k$, является линейной комбинацией предшествующих векторов.

Из свойства 3 легко следует, что система векторов $a_1, a_2, ... a_k$ $(k > 1)$ тогда и только тогда линейно зависима, когда хотя бы один ее вектор линейно выражается через остальные. В этом смысле и говорят, что понятие линейной зависимости эквивалентно понятию линейной выражаемости.

Свойство 4, Если вектор x линейно выражается через векторы системы

$$a_1, ..., a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, ..., a_k, \qquad (2)$$

а вектор a_i, линейно выражается через остальные векторы системы (2), то вектор x также линейно выражается через эти векторы системы (2).

Теорема 1. Если каждый вектор линейно независимой системы $a_1, a_2, ... a_m$ есть линейная комбинация векторов $b_1, b_2, ..., b_n$, то $m \le n$. Другими словами, в линейно независимой системе векторов, являющихся линейными комбинациями n векторов $b_1, b_2, ..., b_n$, число векторов не может быть больше n.

Рассмотрим теперь, что означает линейная зависимость векторов в различных пространствах.

1. Пространство V_3. Если система двух векторов a и b линейно зависима, то $a = \lambda b$ или $b = \lambda a$, т. е. векторы коллинеарны. Верно и обратное. Система трех векторов пространства V_3 линейно зависима тогда и только тогда, когда они лежат в одной плоскости. (Докажите!) Система четырех векторов a_1, a_2, a_3, a_4 пространства V_3 всегда линейно зависима

2. Пространство T_n. Линейная зависимость векторов пространства T_n как строк матрицы, рассматривалась нами ранее при изучении систем линейных уравнений. В связи с этим будем считать известным, что максимальное число линейно независимых векторов системы

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = (\zeta_{11}, \zeta_{12}, ..., \zeta_{1n}), \\ a_1 = (\zeta_{21}, \zeta_{22}, ..., \zeta_{2n}), \\ .... \\ a_1 = (\zeta_{k1}, \zeta_{k2}, ..., \zeta_{kn}). \end{array}\right\} \qquad (3)$$

т. е. строк или столбцов матрицы

$$M = \begin{pmatrix} \zeta_{11} \zeta_{12} \cdots \zeta_{1n} \\ \zeta_{21} \zeta_{22} \cdots \zeta_{2n} \\ .... \\ \zeta_{k1} \zeta_{k2} \cdots \zeta_{kn} \end{pmatrix},$$

есть ранг матрицы M (ранг M). В частности, система векторов (3) линейно независима, если ранг $M = k$, и линейно зависима, если ранг $M < k$. Таким образом, решение вопроса о линейной зависимости системы векторов сводится к вычислению ранга матрицы.

§ 4. Базис линейного пространства.Координаты вектора относительно базиса.

Определение 4. Базисом или координатной системой линейного пространства R над числовым полем P называется такая упорядоченная линейно независимая система векторов $e_1, e_2, ..., e_n$ этого пространства, что для всякого вектора $x \in R$ существует линейное представление

$$x = \zeta_1 e_1 + \zeta_2 e_2 + ... + \zeta_n e_n, \qquad (1)$$

где $\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_n \in P$.

Таким образом, по определению к базису предъявляются два требования: первое - векторы, входящие в базис, линейно независимы; второе - каждый вектор $x \in R$ линейно выражается через векторы базиса. (Покажите независимость этих требований друг от друга.) Если $e_1, e_2, ..., e_n$ - базис, то коэффициенты $\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_n$ представления (1) находятся однозначно.

Числа $\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_n$ в представлении (1) называют координатами, а набор чисел $(\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_n)$ - координатной строкой вектора x в базисе $e_1, e_2, ..., e_n$. Иногда этот набор чисел мы будем записывать в виде

$$\begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ ... \\ \zeta_n \end{pmatrix}$$

и называть координатным столбцом вектора x.

Примеры.

1. В пространстве V_3 в качестве базиса можно взять любые три вектора, не лежащие в одной плоскости. (Докажите!)

2. В пространстве T_n базис составляют, например, векторы

$e_1 = (1,0,0,...,0)$, $e_2 = (0,1,0,...,0)$, …, $e_n = (0,0,0,...,1)$.

В пространстве T_n можно указать бесконечное множество базисов.

3. R - линейное пространство многочленов от t степени $\le n-1$. Одним из базисов этого пространства является: $e_0 = 1$, $e_1 = t$, $e_2 = t^2$, …, $e_{n-1} = t^{n-1}$.

4. R - линейное пространство вещественных квадратных матриц порядка n. Базис этого пространства составляют n^2 матриц E_{ij}, $i, j = 1,2,...,n$; E_{ij} есть матрица, в которой элемент $a_{ij} = 1$, а остальные элементы нули.

Теорема 2. Если пространство R имеет базис из n векторов, то всякая линейно независимая система из n его векторов также является базисом.

Теорема 3. Если $a_1, a_2, ..., a_m$ и $b_1, b_2, ..., b_n$ - два базиса некоторого линейного пространства R, то $m = n$, т. е. все базисы линейного пространства R состоят из одинакового числа векторов.

Теорема 4. Система векторов $a_1, a_2, \ldots a_k$ пространства R, имеющего базис, линейно зависима тогда и только тогда, когда линейно зависима система координатных столбцов векторов $a_1, a_2, \ldots a_k$ в каком-либо базисе пространства R .

Следствие 1. Максимальное число линейно независимых векторов системы $a_1, a_2, \ldots a_k$ пространства R, имеющего базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$, равно рангу матрицы M, составленной из координатных столбцов векторов этой системы. (Докажите!)

Следствие 2. Система n векторов пространства R, имеющего базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$, линейно независима тогда и только тогда, когда матрица M, составленная из координатных столбцов этих векторов относительно данного базиса, является невырожденной.

Замечание. Значение теоремы 4 заключается в том, что она сводит вопрос о линейной зависимости системы векторов произвольного линейного пространства R, имеющего базис, к вопросу о линейной зависимости системы векторов арифметического пространства T_n. (Пример)

§ 5. Размерность линейного пространства.

Определение 5. Линейное пространство R называется n-мерным, если в нем выполнимы аксиомы:

IV. 9. В пространстве R существует хотя бы одна линейно независимая система n векторов.

10. Всякая система $n+1$ векторов пространства R линейно зависима.

Число n при этом называется размерностью пространства R и обозначается через $\dim R$. Линейное пространство R размерности n будем обозначать R_n. Пространства, в которых можно указать как угодно большое число линейно независимых векторов, называются бесконечномерными. Примером такого пространства может служить пространство $C(a,b)$.

Теорема 5. Линейное пространство R является n-мерным тогда и только тогда, когда в нем существует базис из n векторов.

§ 6. Изоморфизм линейных пространств.

Определение 6. Два линейных пространства R и R' над полем P называются изоморфными, если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие

$x \leftrightarrow x'$, $(x \in R, x' \in R')$,

так что $(x+y)' = x' + y'$, $(\lambda x)' = \lambda x'$ (1)

для любых векторов $x, y \in R$ и любого $\lambda \in P$.

Если указание соответствие обозначить буквой Φ, то вместо x' можно будет писать $\Phi(x)$ и условия (1) запишутся в виде

$\Phi(x+y) = \Phi(x) + \Phi(y)$, $\Phi(\lambda x) = \lambda \Phi(x)$.

Отметим некоторые свойства изоморфизма пространств.

Свойство 1. При изоморфном соответствии двух пространств R и R' произвольной линейной комбинации векторов пространства R соответствует такая же линейная комбинация векторов пространства R'.

Свойство 2. При изоморфном соответствии двух пространств нулевому вектору соответствует нулевой вектор.

Свойство 3. При изоморфизме линейно независимая система векторов переходит в линейно независимую систему векторов.

Из свойств 2 и 3, в частности, следует, что при изоморфизме двух пространств всякий базис одного пространства переходит в базис другого.

Теорема 6. Любые два n-мерных линейных пространства R_n и R_n' изоморфны над одним полем P.

Пусть R_n - некоторое n-мерное линейное пространство над полем D вещественных чисел, T_n - арифметическое пространство. Тогда из теоремы 6 имеем

Следствие. Всякое n-мерное линейное пространство над полем D изоморфно пространству T_n.

§ 7. Преобразование координат вектора при изменении базиса.

Пусть R_n - линейное пространство над полем P и $e_1, e_2, ..., e_n$; $e_1', e_2', ..., e_n'$ - два его базиса. Условимся первый из этих базисов называть «старым», второй - «новым» и обозначать соответственно через $\{e\}$ и $\{e'\}$. Так как $\{e\}$ и $\{e'\}$ - базисы, то имеют место однозначные представления:

$$x = \zeta_1 e_1 + \zeta_2 e_2 + ... + \zeta_n e_n = \zeta_1' e_1' + \zeta_2' e_2' + ... + \zeta_n' e_n', \qquad (1)$$

$\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_n$ - координаты вектора x в базисе $\{e\}$, а $\zeta_1', \zeta_2', ..., \zeta_n'$ - его координаты в базисе $\{e'\}$. Задача состоит в вычислении координат вектора x в одном базисе по известным его координатам в другом базисе.

Как и все векторы пространства R_n, векторы базиса $\{e'\}$ однозначно выражаются через векторы базиса $\{e\}$, так что можно записать:

$$\left.\begin{array}{l} e_1' = \tau_{11} e_1 + \tau_{21} e_2 + ... + \tau_{n1} e_n, \\ e_2' = \tau_{12} e_1 + \tau_{22} e_2 + ... + \tau_{n2} e_n, \\ .... \\ e_n' = \tau_{1n} e_1 + \tau_{2n} e_2 + ... + \tau_{nn} e_n, \end{array}\right\} \qquad (2)$$

где τ_{ij} - числа основного поля P.

Матрица

$$T = \begin{pmatrix} \tau_{11}\tau_{12}...\tau_{1n} \\ \tau_{21}\tau_{22}...\tau_{2n} \\ .... \\ \tau_{n1}\tau_{n2}...\tau_{nn} \end{pmatrix}$$

называется матрицей перехода от базиса $\{e\}$ к базису $\{e'\}$. Заметим, что столбцами матрицы T являются координаты векторов $e_1', e_2', ..., e_n'$ в базисе $\{e\}$.

Выразим координаты $\zeta_1', \zeta_2', ..., \zeta_n'$ через координаты $\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_n$. Подставив в (1) вместо $e_1', e_2', ..., e_n'$ их выражения через $e_1, e_2, ..., e_n$ из (2), получим:

$$x = \zeta_1 e_1 + \zeta_2 e_2 + ... + \zeta_n e_n = \zeta_1'(\tau_{11} e_1 + \tau_{21} e_2 + ... + \tau_{n1} e_n) +$$

$$+\zeta'_2(\tau_{12}e_1+\tau_{22}e_2+\ldots+\tau_{n2}e_n)+\ldots+\zeta'_n(\tau_{1n}e_1+\tau_{2n}e_2+\ldots+\tau_{nn}e_n).$$

Так как представление вектора x в базисе $\{e\}$ единственно, то коэффициенты $\zeta_1,\zeta_2,\ldots,\zeta_n$ при $e_1,e_2,\ldots,e_n$ в левой части этого равенства равны соответствующим коэффициентам при $e_1,e_2,\ldots,e_n$ в правой части, т. е.

$$\left.\begin{array}{l}\zeta_1=\tau_{11}\zeta'_1+\tau_{12}\zeta'_2+\ldots+\tau_{1n}\zeta'_n,\\ \zeta_2=\tau_{21}\zeta'_1+\tau_{22}\zeta'_2+\ldots+\tau_{2n}\zeta'_n,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \zeta_n=\tau_{n1}\zeta'_1+\tau_{n2}\zeta'_2+\ldots+\tau_{nn}\zeta'_n.\end{array}\right\} \qquad (3)$$

Равенства (3) можно записать в матричной форме так:

$$\begin{pmatrix}\zeta_1\\ \zeta_2\\ .\\ .\\ \zeta_n\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}\zeta'_1\\ \zeta'_2\\ .\\ .\\ \zeta'_n\end{pmatrix}, \qquad (4)$$

или если обозначить через X столбец координат вектора x в базисе $\{e\}$, а через X_1, - столбец координат того же вектора в базисе $\{e'\}$, то

$$X=TX_1. \qquad (5)$$

Таким образом, столбец координат вектора x в базисе $\{e\}$ равен столбцу координат этого вектора в базисе $\{e'\}$, умноженному слева на матрицу T перехода от базиса $\{e\}$ к базису $\{e'\}$.

Из равенства (5) легко получить также выражение вектора X_1 через X. В самом деле, по следствию 2 из теоремы 4 матрица T невырожденная, а потому имеет обратную. Умножая обе части равенства (5) на матрицу T^{-1}, получим:

$$X_1=T^{-1}X.$$

§ 8. Подпространства линейного пространства.

Определение 7. Подмножество L данного линейного пространства R над полем P называется линейным подпространством или просто подпространством пространства R, если оно само является линейным пространством над полем P относительно определенных в R операций сложения векторов и умножения вектора на числа из P.

Теорема 7. Для того чтобы непустое подмножество L линейного пространства R над полем P было его подпространством, достаточно выполнения следующих двух требований:

а) если $x,y\in L$, то $x+y\in L$;

б) если $x\in L,\ \lambda\in P$, то $\lambda x\in L$.

Примеры:

1. Нуль-вектор θ и само пространство R - тривиальные подпространства пространства R.

2. Все векторы пространства V_3, расположенные в некоторой плоскости (или на некоторой прямой), проходящей через O, составляют подпространство V_2 (соответственно V_1,) пространства V_3.

3. Совокупность L решений однородной линейной системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \ldots + a_{sn}x_n = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

т. е. совокупность L всех тех векторов $x = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$ пространства T_n, компоненты которых удовлетворяют уравнениям системы (1), будет, очевидно, подпространством пространства T_n.

4. Пересечение двух подпространств L_1, L_2 пространства R есть снова подпространство пространства R.

5. Множество L векторов вида $x_1 + x_2$, где $x_1 \in L_1, x_2 \in L_2$ и L_1, L_2 - подпространства из R, есть подпространство пространства R.

Определение 8. Построенное выше подпространство L называется суммой пространств L_1, L_2 и обозначается через $L_1 + L_2$. В том случае, когда $L_1 \cap L_2 = \{\theta\}$, эта сумма называется прямой суммой.

Пусть L, есть нетривиальное подпространство пространства R_n. Так как не все векторы из R_n входят в L, то не из всякого базиса пространства R_n можно выбрать базис пространства L. Больше того, в R_n могут существовать базисы, целиком содержащиеся в $R_n \setminus L$ ($R_n \setminus L$ есть множества векторов из R_n, не содержащихся в L).

Теорема 8. Если L - подпространство в R_n размерности $k < n$ и $e_1, e_2, \ldots, e_k$ - его базис, то в R_n всегда можно выбрать векторы $e_{k+1}, \ldots, e_n$ так, чтобы система векторов $e_1, e_2, \ldots, e_k$, $e_{k+1}, \ldots, e_n$ была базисом пространства R_n. Иначе говоря, любой базис подпространства L, можно дополнить до базиса всего пространства R_n.

Теорема 9. Если пространство R_n есть прямая сумма подпространств L_1, L_2, то:

$$\dim L_1 + \dim L_2 = \dim R_n = n. \qquad (2)$$

Из доказательства теоремы 9 видно, что при $L_1 \cap L_2 = \{\theta\}$ объединение базисов пространств L_1 и L_2 есть базис пространства $L_1 + L_2$ (Верно ли обратное утверждение?)

Отметим еще без доказательства следующее обобщение теоремы 9:

$$\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2).$$

§9. Линейная оболочка или подпространство, натянутое на данную систему векторов.

В § 8 были рассмотрены общие положения о подпространствах. Возникает, однако, естественный вопрос конструктивного характера о способах построения подпространств; одним из таких способов начнется образование так называемой линейной оболочки заданной системы векторов.

Определение 9. Пусть $x, y, \ldots, z$ - конечная система векторов линейного пространства R над полем P. Линейной оболочкой системы $x, y, \ldots, z$ называется совокупность всех конечных линейных комбинаций векторов данной системы, т. е. совокупность векторов вида

$$\alpha x+\beta y+...+\gamma z \tag{1}$$

с произвольными коэффициентами $\alpha, \beta, ...\gamma$, взятыми из поля P.

Линейную оболочку векторов $x, y, ..., z$ обозначим через $L(x, y, ..., z)$.

Пусть $a\in L(x, y, ..., z)$, $b\in L(x, y, ..., z)$, т.е.

$a=\alpha_1 x+\beta_1 y+...+\gamma_1 z,$

$b=\alpha_2 x+\beta_2 y+...+\gamma_2 z.$

Тогда $a+b=(\alpha_1+\alpha_2)x+(\beta_1+\beta_2)y+...+(\gamma_1+\gamma_2)z\in L(x, y, ..., z),$

$\lambda a=\lambda a_1 x+\lambda\beta_1 y+...+\lambda\gamma_1 z\in L(x, y, ..., z).$

По теореме 7 получаем, что $L(x, y, ..., z)$ - подпространство пространства R. Значит, образование линейных оболочек действительно является способом конструирования подпространств.

О пространстве $L(x, y, ..., z)$ говорят также, что оно порождено векторами $x, y, ..., z$ или натянуто на систему векторов $x, y, ..., z$.

Очевидно, что $L(x, y, ..., z)$ содержит и сами векторы $x, y, ..., z$. С другой стороны, всякое подпространство, содержащее векторы $x, y, ..., z$, содержит, очевидно, и все их линейные комбинации. Значит, линейная оболочка системы векторов $x, y, ..., z$ содержится во всяком подпространстве, содержащем векторы $x, y, ..., z$, т. е. $L(x, y, ..., z)$ есть наименьшее подпространство, содержащее векторы $x, y, ..., z$. Указанный способ построения подпространств с помощью линейных оболочек является весьма общим. В самом деле, каждый вектор произвольного подпространства $F\subset R_n$ по определению базиса есть линейная комбинация векторов базиса пространства F и, значит, всякое подпространство F линейного пространства R_n является подпространством, натянутым на некоторые векторы из R_n (на векторы базиса F).

Из теоремы 1 следует, что размерность пространства $L(x, y, ..., z)$ равна числу векторов в максимальной линейно независимой подсистеме системы порождающих векторов $x, y, ..., z$, короче, максимальному числу линейно независимых векторов в системе $x, y, ..., z$.

§ 10. Фундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений.

Пусть дана однородная система линейных уравнений

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+...+a_{sn}x_n=0. \end{array}\right\} \tag{1}$$

с произвольными вещественными коэффициентами. Мы знаем, что совокупность всех решений системы (1) образует линейное пространство, являющееся подпространством в T_n. Решим вопрос о размерности этого подпространства L.

Пусть A - матрица коэффициентов системы (1). Предположим, что ранг матрицы A равен r и минор r-го порядка, находящийся в левом верхнем углу матрицы A, отличен от нуля. Тогда система (1) эквивалентна ее подсистеме из первых r уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = -a_{1,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r = -a_{2,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rr}x_r = -a_{r,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n. \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Для отыскания решений системы (2), а следовательно, и системы (1) неизвестным $x_{r+1}, \ldots, x_n$ системы (2) придаем произвольные значения $c_{r+1}, \ldots, c_n$ и затем (например, по формулам Крамера) находим соответствующие значения $c_1, c_2, \ldots, c_r$ для первых r неизвестных:

$$c_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1,i-1} & -a_{1,r+1}c_{r+1} - \ldots - a_{1n}c_n & a_{1,i+1} \ldots a_{1r} \\ a_{21} \ldots a_{2,i-1} & -a_{2,r+1}c_{r+1} - \ldots - a_{2n}c_n & a_{2,i+1} \ldots a_{2r} \\ a_{r1} \ldots a_{r,i-1} & -a_{r,r+1}c_{r+1} - \ldots - a_{rn}c_n & a_{r,i+1} \ldots a_{rr} \end{vmatrix}}{\Delta}, \qquad (3)$$

где Δ - определитель системы (2) (т. е. отличный от нуля минор порядка r).

Таким образом, произвольному набору чисел $c_{r+1}, \ldots, c_n$, т. е. вектору пространства T_{n-r} мы сопоставили вектор $(c_1, \ldots, c_r, c_{r+1}, \ldots, c_n)$ пространства L решений системы (2) или (1). А так как для любых фиксированных значений неизвестных $x_{r+1}, \ldots, x_n$ система уравнений (2) имеет единственное решение относительно неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_r$ то

$$(c_{r+1}, \ldots, c_n) \leftrightarrow (c_1, \ldots, c_r, c_{r+1}, \ldots, c_n) \qquad (4)$$

является взаимно однозначным соответствием между пространствами T_{n-r} и L. Это соответствие является изоморфизмом.

Отсюда следует, что

$$\dim L = \dim T_{n-r} = n - r .$$

Определение 10. Любой базис пространства L, т. е. любая совокупность $n-r$ линейно независимых решений однородной линейной системы (1), называется фундаментальной системой решений системы (1).

Так как при изоморфизме двух пространств базис одного переходит в базис другого (§ 6), то для построения фундаментальной системы решений можно воспользоваться любым базисом пространства T_{n-r}. Если в качестве последнего взять стандартный базис

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0),\ e_2 = (0, 1, \ldots, 0),\ \ldots,\ e_{n-r} = (0, 0, \ldots, 1),$$

то получим фундаментальную систему решений, которая называется нормальной.

Обозначим через $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n-r)}$ фундаментальную систему решений системы (1). По определению базиса для любого решения x системы (1) будет иметь место равенство:

$$x = c_1x^{(1)} + c_2x^{(2)} + \ldots + c_{n-r}x^{(n-r)}, \qquad (5)$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_{n-r}$ — некоторые числа. Формула (5) содержит $n-r$ произвольных параметров и заключает в себе любое решение системы (1), поэтому можно сказать, что формула (5) дает общее решение системы (1).

Пример. Найти нормальную фундаментальную систему решений для системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 0,\\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 &= 0,\\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 &= 0,\\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 &= 0. \end{aligned}\right\} . \qquad (6)$$

О рассмотренном выше подпространстве L, решений однородной системы уравнений (1) говорят, что оно задается системой (1). Оказывается, что такой способ задания подпространств пространства T_n является универсальным, а именно:

Всякое подпространство L, пространства T_n может быть задано некоторой системой линейных однородных уравнении.

§11. Линейное многообразие. Линейное многообразие решений системы линейных уравнений.

Совокупность векторов пространства V_3. исходящих из точки O и расположенных на прямой a, проходящей через точку O, образует подпространство L, состоящее из векторов вида αe_1 при произвольном вещественном α . Пусть вектор x_0 не принадлежит L. При фиксированном x_0 и переменном α совокупность концов векторов вида $x_0 + \alpha e_1$ дает прямую a_1, параллельную прямой a и проходящую через точку x_0. Геометрически ясно, что если x_1 и x_2 - два вектора совокупности H векторов вида $x_0 + \alpha e_1$, то их сумма $x_1 + x_2$ не принадлежит этой совокупности. Таким образом, если векторы, лежащие на прямой a, составляют подпространство, то векторы с концами на прямой a_1, не проходящей через точку O, подпространства не образуют. Вместе с тем нежелательно исключать из рассмотрения прямые типа a_1 - им и присваивают наименование линейных многообразий, полученных сдвигом подпространства L.

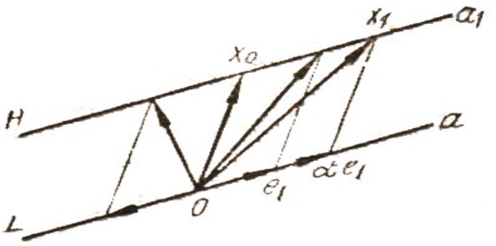


Рисунок 1.

Определение 11. Пусть дано линейное пространство R и его подпространство L. Линейным многообразием, полученным параллельным сдвигом подпространства L на вектор x_0, называется совокупность H всех векторов $x \in R$ вида

$$x = x_0 + y,$$

где вектор y пробегает все подпространство L. При этом L называют определяющим пространством многообразия H, x_0 - его вектором сдвига и пишут:

$$H = x_0 + L.$$

Рассмотрим совместную неоднородную систему линейных уравнений над полем D:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1,\\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \ldots + a_{sn}x_n = b_s \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

И соответствующую ей однородную систему:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n = 0,\\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n = 0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{s1}y_1 + a_{s2}y_2 + \ldots + a_{sn}y_n = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Обозначим через L пространство решений системы (2). Как мы уже знаем, L есть подпространство пространства T_n. Примем обозначения:

$$x_0 = \left(\zeta_1^{(0)}, \zeta_2^{(0)}, \ldots, \zeta_n^{(0)}\right),\ \ y = \left(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n\right),\ \ x = \left(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n\right),$$

где x_0 есть некоторое фиксированное решение системы (1), y - произвольное решение системы (2), x - произвольное решение системы (1). Известно, что все решения системы (1) могут быть получены также прибавлением всех решений системы (2) к одному и тому же частному решению системы (1). Значит, множество H векторов x исчерпывается векторами вида $x_0 + y$, когда y пробегает все пространство L, так что $H = x_0 + L$.

Таким образом, совокупность решений произвольной совместной системы линейных уравнений (1) есть линейное многообразие, полученное параллельным сдвигом пространства решений соответствующей однородной системы. Вектором сдвига является некоторое частное решение системы (1). Говорят, что это линейное многообразие задано системой линейных уравнений (1).

Если r - ранг основной матрицы системы (1), а совокупность векторов $y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(n-r)}$ составляет фундаментальную систему решений системы (2), то любой вектор x линейного многообразия H можно записать в виде

$$x = x_0 + c_1y^{(1)} + c_2y^{(2)} + \ldots + c_{n-r}y^{(n-r)},$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_{n-r}$ - произвольные числа.

Из геометрических соображений видно (см. Рисунок 1), что многообразие H (прямая H) может быть получено сдвигом подпространства L (прямой L) и на другой вектор $x_1 \neq x_0$. В связи с этим, естественно, возникает вопрос об описании всех определяющих подпространств и векторов сдвига для заданного многообразия H. Этот вопрос решает

Теорема 10. Пусть L_1, L_2 - подпространства линейного пространства R и

$$H_1 = x_1 + L_1, \qquad H_2 = x_2 + L_2. \qquad (3)$$

Линейные многообразия H_1, H_2 совпадают тогда и только тогда, когда совпадают L_1, L_2 и $x_1 - x_2 \in L_1$.

Определение 12. Размерностью линейного многообразия называется размерность того линейного подпространства, параллельным сдвигом которого оно получено.

Одномерные линейные многообразия называются прямыми, двумерные - плоскостями. Линейное многообразие размерности $n-1$ пространства R_n называют гиперплоскостью.

Тема 8. Линейные преобразования линейного пространства.

§1. Понятие линейного преобразования. Представление линейного преобразования матрицей.

Если каждому элементу x некоторого множества M поставлен в соответствие вполне определенный элемент y множества N, то говорят, что задано отображение f множества M в множество N и пишут:

$f: M \to N$ и $y = f(x)$ или $y = fx$.

Отображение множества M в себя называется преобразованием множества M. Два преобразования f_1 и f_2 множества M называются равными, если $f_1(x) = f_2(x)$ для любого $x \in M$.

В дальнейшем мы будем рассматривать преобразования линейных пространств. Наличие операций в линейном пространстве R позволяет из множества всех преобразований выделить класс наиболее важных и поддающихся изучению так называемых линейных преобразований.

Определение 13. Линейным преобразованием (или линейным оператором) линейного пространства R над полем P называется такое его преобразование φ, которое удовлетворяет условиям:

1*. $\varphi(x_1 + x_2) = \varphi x_1 + \varphi x_2$,

2*. $\varphi(\lambda x) = \lambda \varphi x$

для любых $x_1, x_2, x \in R$ и $\lambda \in P$.

Вектор φx называется образом вектора x, вектор x - прообразом вектора φx.

Отметим два следствия из определения 13.

1. Всякое линейное преобразование переводит нулевой вектор в нулевой вектор.

2. Условия 1* и 2* эквивалентны одному условию:

$$\varphi(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 \varphi x_1 + \lambda_2 \varphi x_2. \qquad (1)$$

В случае, когда линейное пространство R n-мерно, имеет место следующее важное утверждение.

Теорема 11. Для фиксированного базиса $e_1, e_2, ..., e_n$ линейного пространства R_n и произвольного набора его векторов $b_1, b_2, ..., b_n$ существует и притом только одно линейное преобразование пространства R_n, которое переводит векторы $e_1, e_2, ..., e_n$ соответственно в векторы $b_1, b_2, ..., b_n$.

Теорема 11 означает, что линейное преобразование φ пространства R_n вполне определяется заданием лишь образов $\varphi e_1, \varphi e_2, ..., \varphi e_n$ векторов $e_1, e_2, ..., e_n$ какого-либо базиса. Этот факт дает возможность указать удобное для практического обращения с линейными преобразованиями описание их с помощью матриц.

Пусть R_n - линейное пространство с фиксированным базисом $e_1, e_2, ..., e_n$. Векторы $\varphi e_1, \varphi e_2, ..., \varphi e_n$ в базисе $\{e\}$ задаются своими координатами:

$$\left.\begin{aligned} \varphi e_1 &= a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + ... + a_{n1}e_n \ , \\ \varphi e_2 &= a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + ... + a_{n2}e_n \ , \\ &.. \\ \varphi e_n &= a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + ... + a_{nn}e_n \ . \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}...a_{2n} \\ .... \\ a_{n1}a_{n2}...a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется матрицей линейного преобразования φ в базисе $e_1, e_2, ..., e_n$.

Таким образом, при фиксированном базисе всякому линейному преобразованию φ пространства R_n соответствует единственная матрица A с элементами из основного поля P.

Обратно, пусть дана квадратная матрица A порядка n с элементами из поля P. Пользуясь матрицей A, при фиксированном базисе $\{e\}$ по формулам (2) найдем векторы $\varphi e_1, \varphi e_2, ..., \varphi e_n$. Однако по теореме 11 выбором этих векторов вполне определяется линейное преобразование φ пространства R_n. Очевидно, что матрицей этого преобразования в базисе $\{e\}$ является матрица A.

В итоге при фиксированном базисе пространства R_n имеем взаимно однозначное соответствие между линейными преобразованиями в R_n и квадратными матрицами порядка n с элементами из основного поля P. Этот факт и позволяет говорить, что линейное преобразование задается матрицей A в базисе $e_1, e_2, ..., e_n$. Заметим, что полученное взаимно однозначное соответствие между множествами линейных преобразований в R_n и матриц существенно зависит от базиса.

Выясним, как выражаются координаты вектора-образа φx через координаты данною вектора x, если преобразование φ задало матрицей A в базисе $\{e\}$.

Если

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + ... + \xi_n e_n \text{ -}$$

какой-либо вектор из R_n, то по свойству 2° и формулам (2)

$$\begin{aligned} &y = \varphi x = \xi_1 \varphi e_1 + \xi_2 \varphi e_2 + ... + \xi_n \varphi e_n = \xi_1 (a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + ... + a_{n1}e_n) + \\ &+ \xi_2 (a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + ... + a_{n2}e_n) + \ ... + \xi_n (a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + ... + a_{nn}e_n) = \\ &= (a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + ... + a_{1n}\xi_n) e_1 + (a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + ... + a_{2n}\xi_n) e_2 + \\ &+ ... + (a_{n1}\xi_1 + a_{n2}\xi_2 + ... + a_{nn}\xi_n) e_n \ . \end{aligned}$$

Обозначив через $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n$ координаты вектора $y = \varphi x$ в базисе $\{e\}$, получаем:

$$\left.\begin{aligned}\eta_1 &= a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \ldots + a_{1n}\xi_n,\\ \eta_2 &= a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + \ldots + a_{2n}\xi_n,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \eta_n &= a_{n1}\xi_1 + a_{n2}\xi_2 + \ldots + a_{nn}\xi_n.\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Вводя матричные обозначения

$$X = \begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ .\\ .\\ \xi_n\end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ .\\ .\\ \eta_n\end{pmatrix}$$

для столбцов координат данного вектора x и его образа φx, получаем матричную запись системы равенств (3):

$$Y = AX. \qquad (5)$$

Таким образом, при фиксированном базисе столбец координат преобразованного вектора получается умножением матрицы A линейного преобразования φ па столбец координат данного вектора.

§2. Примеры линейных преобразований.

1. Исходное пространство - пространство векторов, исходящих из фиксированной точки O. Преобразование φ в нем - ортогональное проектирование векторов на некоторую плоскость π, проходящую через точку O (Рисунок 2).

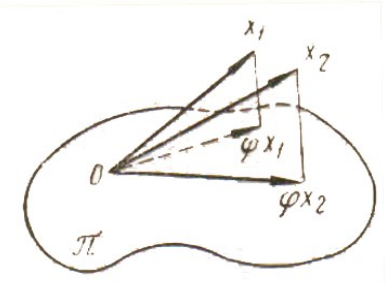


Рисунок 2.

2. Исходное пространство R есть n-мерное пространство многочленов $f(t)$ степени $\leq n-1$ с вещественными коэффициентами. Оператор φ в пространстве R - дифференцрование:

$$\varphi\, f(t) = f'(t),$$

где $f'(t)$ - производная многочлена $f(t)$.

§3. Связь между матрицами линейного преобразования в различных базисах.

В § 12 было показано, что при фиксированном базисе всякое линейное преобразование пространства R_n задается матрицей. Интересно, как изменяется матрица линейного преобразования при переходе от одного базиса к другому. На этот вопрос отвечает

Теорема 12. Если A, A_1 - матрицы линейного преобразования φ пространства R_n соответственно в базисах $\{e\},\{e'\}$ и T - матрица перехода от базиса $\{e\}$ к базису $\{e'\}$, то

$A_1 = T^{-1} AT$.

Лемма. Если A и B - квадратные матрицы порядка n, то ранг $AB \leq$ ранга A и ранг $AB \leq$ ранга B.

Следствие 1. A и B - квадратные матрицы порядка n и матрица B невырожденная, то

ранг $AB =$ ранг $BA =$ ранг A

(т. е. при умножении матрицы A справа или слева на невырожденную матрицу B ранг матрицы не изменяется).

Следствие 2. Ранг матрицы линейного преобразования φ пространства R_n не изменяется при переходе от одного базиса к другому.

§4. Действия над линейными преобразованиями и матрицами.

В приложениях приходится иметь дело с несколькими преобразованиями, которые используются в различных комбинациях друг с другом. Чаще всего используют либо последовательное применение двух преобразований, либо так называемую сумму преобразований.

Пусть даны линейные преобразования φ и ψ, действующие в линейном пространстве R_n. Напомним, что два преобразования φ_1 и φ_2 считаются равными, если для любого вектора $x \in R_n$ будет $\varphi_1 x = \varphi_2 x$.

Определение 15. Суммой линейных преобразований φ и ψ называется преобразование $\varphi + \psi$, которое ставит в соответствие вектору x вектор $\varphi x + \psi x$, т. е. $(\varphi + \psi)x = \varphi x + \psi x$.

Определение 16. Произведением линейного преобразования φ на число $\lambda \in P$ называется преобразование $\lambda\varphi$, определяемое равенством $(\lambda\varphi)x = \lambda(\varphi x)$.

Определение 17. Произведением линейных преобразований φ и ψ называется преобразование (обозначаемое через $\varphi\psi$), состоящее в последовательном выполнении сначала преобразования ψ, а затем преобразования φ.

По этому определению $(\varphi\psi)x = \varphi(\psi x)$.

§5. Обратное преобразование. Вырожденные и невырожденные преобразования. Ранг и ядро линейного преобразования.

Среди всех линейных преобразований пространства R_n особое место занимают взаимнооднозначные преобразования (при которых каждый вектор пространства является образом ровно одного вектора).

Теорема 14. Линейное преобразование φ пространства R_n взаимно однозначно тогда и только тогда, когда его матрица в каком-нибудь базисе невырожденна.

Определение 18. Линейное преобразование φ пространства R_n называется обратимым (или невырожденным), если существует такое линейное преобразование ψ, что

$$\psi\varphi = \varphi\psi = \varepsilon, \tag{1}$$

где ε - тождественное преобразование.

Очевидно, что если какое-либо преобразование ψ удовлетворяет равенствам (1), то оно единственно, линейно и невырожденно. Это преобразование называется обратным для φ и обозначается через φ^{-1}, так что

$$\varphi^{-1}\varphi = \varphi\varphi^{-1} = \varepsilon \,. \qquad (2)$$

Теорема 15. Линейное преобразование φ пространства R_n обратимо тогда и только тогда, когда оно в каком-либо базисе задается невырожденной матрицей A. При этом обратное преобразование (когда оно существует) определяется матрицей A^{-1}.

Определение 19. Пусть φ - линейное преобразование пространства R_n. Совокупность векторов $y = \varphi x$ для всех $x \in R_n$ называется областью значений преобразования φ и обозначается φR_n. φR_n есть подпространство линейного пространства R_n.

Ранг матрицы линейного преобразования пространства R_n не зависит от выбора базиса в нем, а зависит только от самого преобразования. Этот факт делает обоснованным следующее

Определение 20. Рангом линейного преобразования φ пространства R_n называется ранг его матрицы.

Теорема 16. Размерность подпространства φR_n (области значений линейного преобразования φ) равна рангу преобразования φ, т. е.

$\dim\varphi R_n =$ ранг φ.

Из теорем 15—16 заключаем следующее. Для невырожденных преобразований φ ранг $\varphi = n$, область значений φR_n имеет размерность n и совпадает с пространством R_n.

Если преобразование вырожденное, то ранг $\varphi < n$, в этом случае преобразование φ переводит пространство R_n в его правильную часть φR_n размерности $\leq n-1$. Наряду с областью значений важной характеристикой линейного преобразования является так называемое ядро линейного преобразования.

Определение 21. Ядром линейного преобразования φ пространства R_n называется множество всех векторов, отображаемых преобразованием φ в нулевой вектор.

Ядро преобразования φ обозначается через $Ker\varphi$. Легко видеть, что оно является подпространством пространства R_n.

Теорема 17. Размерность ядра преобразования φ пространства R_n равна разности $n - r$, где $r =$ ранг φ.

Из теорем 15 и 17 получаем

Следствие. Для того чтобы линейное преобразование пространства R_n было невырожденным, необходимо и достаточно, чтобы ядро этого преобразования было нулевым.

§6. Собственные векторы и собственные значения линейного преобразования.

Пусть φ - линейное преобразование пространства R_n над полем P. Простейшей, но весьма важной будет ситуация, при которой вектор x переходит в коллинеарный вектор λx, так что $\varphi x = \lambda x$, где λ - некоторое число из поля P. Понятно, что для данного линейного преобразования φ соотношение $\varphi x = \lambda x$ может выполняться лишь для некоторых векторов x -

такие векторы и называются собственными векторами линейного преобразования φ. Условие $\varphi x = \lambda x$ выполняется тривиальным образом для нулевого вектора $x = \theta$, так как всегда $\varphi\theta = \theta = \lambda\theta$. Но этот случай не представляет интереса. Когда говорят о собственных векторах преобразования, то имеют в виду векторы, отличные от нулевого.

Определение 23. Собственным вектором линейного преобразования φ пространства R_n над полем P называется ненулевой вектор x, удовлетворяющий условию

$$\varphi x = \lambda x \qquad (1)$$

для некоторого $\lambda \in P$. Число λ при этом называется собственным значением преобразования φ, соответствующим вектору x.

Свойство 1. Собственные векторы линейного преобразования φ, отвечающие данному собственному значению λ, вместе с нулевым вектором образуют подпространство.

Свойство 2. Собственные векторы $x_1, x_2, ..., x_m$ линейного преобразования φ, соответствующие попарно различным собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ линейно независимы.

Следствие. Линейное преобразование φ пространства R_n не может иметь более n собственных векторов с попарно различными собственными значениями.

Свойство 3. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ - попарно различные собственные значения преобразования φ. Если для каждого из этих значений взять линейно независимую систему собственных векторов, то система, состоящая из всех этих векторов, линейно независима.

§7. Характеристический многочлен матрицы и линейного преобразования. Существование собственных векторов.

Определение 24. Пусть A - квадратная матрица порядка n с элементами a_{ij} из поля P. Тогда многочлен

$$\Delta(\lambda) = |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

называется характеристическим многочленом матрицы A.

Уравнение $|A - \lambda E| = 0$ относительно λ называют характеристическим уравнением, а его корни - характеристическими числами матрицы A.

Из определения определителя следует, что $\Delta(\lambda)$ есть многочлен от λ степени n, коэффициент старшего члена равен $(-1)^n$.

Пусть φ - линейное, преобразование пространства R_n. Выбирая различные базисы пространства R_n, мы будем получать различные матрицы преобразования φ. Естественно возникает вопрос: зависит ли характеристический многочлен матрицы линейного преобразования от выбора базиса? На этот вопрос отвечает

Теорема 18. Характеристический многочлен матрицы линейного преобразования не зависит от выбора базиса.

Теорема 18 позволяет характеристический многочлен матрицы линейного преобразования называть характеристическим многочленом преобразования. Множество характеристических чисел матрицы преобразования также не будет зависеть от базиса, поэтому говорят о характеристических числах преобразования.

Теорема 19. Множество собственных значений преобразования φ линейного пространства R_n над числовым полем P совпадает с множеством корней характеристического многочлена преобразования φ, принадлежащих полю P.

Тема 9. Евклидовы пространства.

§1. Понятие евклидова пространства. Примеры

Определение 25. Евклидовым пространством E_n размерности n называется n-мерное линейное пространство над полем вещественных чисел, в котором каждой паре векторов x и y поставлено в соответствие вещественное число, обозначаемое через (x, y) и называемое скалярным произведением этих векторов, причем выполнены аксиомы:

11.$(x, y) = (y, x)$

12.$(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$

13.$(\alpha x, y) = \alpha (x, y)$

14.$(x, x) > 0, x \neq \Theta$

, где α -любое вещественное число.

Из аксиом 11-14 следует (докажите):

1.$(\Theta, \Theta) = 0$

2.$(x, \Theta) = 0$

3.$(x_1 + x_2 + \ldots + x_k, y) = (x_1, y) + (x_2, y) + \ldots + (x_k, y)$

4.$(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_k x_k, y) = \alpha_1 (x_1, y) + \alpha_2 (x_2, y) + \ldots + \alpha_k (x_k, y)$

Примеры.1. Исходное линейное пространство V_3.Скалярное произведение векторов из V_3 определяется как произведение длин векторов на косинус угла между ними:

$$(x, y) = |x| \cdot |y| \cdot \cos(x \wedge y)$$

Аксиомы 11-14 выполняются, следовательно, имеем евклидово пространство, для которого сохраним обозначение V_3.

2. Исходное линейное пространство T_n. Скалярное произведение векторов

$$x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n), y = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$$

определим формулой

$$(x, y) = \xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2 + \ldots + \xi_n \eta_n$$

Аксиомы 11-14 легко проверяются. В дальнейшем пространство T_n с указанным скалярным произведением будем обозначать через T_n^o и называть арифметическим евклидовым пространством.

Этот пример показывает, что евклидовы пространства существуют для любого n.

В пространстве T_n Скалярное произведение векторов x и y можно задавать формулой:

$$(x, y) = \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \ldots + n\xi_n\eta_n \qquad (1')$$

Здесь также выполнены аксиомы 11-14.

Таким образом, одно и то же линейное пространство можно различными способами превратить в евклидово, по-разному определяя скалярное произведение.

3. Исходное линейное пространство T_n то же, что и в примере 2. Для определения скалярного произведения возьмем некоторую вещественную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Выясним, какой должна быть матрица A, для того, чтобы формула

$$\begin{aligned}(x, y) &= a_{11}\xi_1\eta_1 + a_{12}\xi_1\eta_2 + \ldots + a_{1n}\xi_1\eta_n + \\ &+ a_{21}\xi_2\eta_1 + a_{22}\xi_2\eta_2 + \ldots + a_{2n}\xi_2\eta_n + \ldots + \\ &a_{n1}\xi_n\eta_1 + a_{n2}\xi_n\eta_2 + \ldots + a_{nn}\xi_n\eta_n \end{aligned} \qquad (2)$$

определяла скалярное произведение векторов $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n), y = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$.

Аксиомы 12-13 выполняются для любой A. Чтобы выполнялась 11, необходимо и достаточно, чтобы $a_{ij} = a_{ji}$ (3)

То есть, чтобы A была симметрическая.

Аксиома 14 требует, чтобы выражение

$$\begin{aligned}(x, x) &= a_{11}\xi_1^2 + a_{12}\xi_1\xi_2 + .. + a_{1n}\xi_1\xi_n + \\ &+ a_{21}\xi_2\xi_1 + a_{22}\xi_2^2 + \ldots + a_{2n}\xi_2\xi_n + \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ a_{n1}\xi_n\xi_1 + a_{n2}\xi_n\xi_2 + \ldots + a_{nn}\xi_n^2 \end{aligned} \qquad (4)$$

было положительно для любых значений $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, одновременно не равных нулю, т.е. чтобы квадратичная форма (4) с матрицей A была положительно определенной.

Если в качестве A взять единичную матрицу E, формула (2) принимает вид (1), и мы получаем евклидово пространство T_n^o. Если же

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 2 & \ldots & 0 \\ .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & \ldots & n \end{pmatrix}$$

то формула (2) принимает вид (1').

4.Исходное линейное пространство-пространство функций, непрерывных на отрезке $a \le t \le b$,скалярное произведение функций $x(t), y(t)$ определим так

$$(x,y)=\int_b^a x(t)y(t)dt$$

Аксиомы 11-14 выполнены, полученное евклидово пространство бесконечномерно.

5. Исходное пространство-пространство многочленов от t степени $\le n-1$. Скалярное произведение двух многочленов $f(t)$ и $g(t)$ определим как в примере 4. Получим n-мерное евклидово пространство.

§2. Длина вектора. Угол между векторами. Неравенство Коши - Буняковского

Для скалярного произведения, определенного формулой

$$(x,y)=|x||y|\cos(x,y) \qquad (1)$$

имеем

$$(x,x)=|x|^2.$$

Определение 26. Длиной вектора в евклидовом пространстве E_n называется неотрицательное значение квадратного корня из скалярного квадрата этого вектора, и обозначается $|x|$.

$$|x|=\sqrt{(x,x)}$$

$$|x|^2=(x,x)$$

Число (x,x)-скалярный квадрат вектора x по аксиоме 14 число неотрицательное, и поэтому каждый вектор имеет определенную неотрицательную длину. Длина нулевого вектора равна нулю. Вектор, длина которого равна 1, называется единичным, или нормированным.

Если α есть некоторое вещественное число, то

$$|\alpha x|=\sqrt{(\alpha x,\alpha x)}=\sqrt{\alpha^2(x,x)}=|\alpha|\sqrt{(x,x)}=|\alpha||x|.$$

Отсюда следует, что каждый вектор можно нормировать, умножив его на число $\frac{1}{|x|}$.

Примеры.1. В пространстве T_n^o для вектора $x=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)$ получаем выражение его длины

$$|x|=\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+..+\xi_n^2}.$$

2. В пространстве $C(a,b)$ длина вектора $x(t)$ будет выражаться формулой

$$|x|=\sqrt{(x,x)}=\sqrt{\int_b^a x^2(t)dt}.$$

Определение 27. Углом между ненулевыми векторами x и y евклидова пространства E_n называется число

$$\varphi=\arccos\frac{(x,y)}{|x||y|} \qquad (2)$$

Следовательно,

$$\cos\varphi = \frac{(x,y)}{|x||y|} \qquad (3)$$

Чтобы определение угла было корректным, надо доказать, что $-1 \le \frac{(x,y)}{|x||y|} \le 1$, т.е. что $\frac{|(x,y)|}{|x||y|} \le 1$ или что для любых векторов x и y имеет место неравенство $|(x,y)| \le |x||y|$ (4)

Неравенство (4) называют неравенством Коши-Буняковского.

Примеры. 1. В пространстве V_3 неравенство Коши—Буняковского следует непосредственно из (1).

2. В пространстве T_n^O для векторов $x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n), y = (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n)$

неравенство Коши—Буняковского принимает вид:

$$|\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + ... + \xi_n\eta_n| \le \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + ... + \xi_n^2} \times \sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2 + ... + \eta_n^2}$$

где знак = будет тогда и только тогда, когда при некотором α

$$(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) = \alpha\ (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n)$$

т. е. когда наборы координат пропорциональны.

§3. Понятие метрического пространства

Докажем так называемое неравенство треугольника для любых двух векторов x и $y \in E_n$. Используя аксиомы 11°—14° и неравенство Коши — Буняковского, получаем:

$$|x+y|^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + 2(x,y) + (y,y) \le |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2 \qquad (1)$$

Неравенство (1) называют неравенством треугольника. Это название оправдывается тем, что в случае пространства V_2 мы имеем дело с треугольником, длины сторон которого суть $|x|, |y|, |x+y|$ (сделайте чертеж).

Выясним, когда в соотношении (1) имеет место знак =. Случай, когда хотя бы один из векторов нулевой, очевиден.

а) Пусть оба вектора x и y ненулевые, но

$$|x+y| = |x| + |y|$$

Тогда

$$|x+y|^2 = |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2$$

С другой стороны

$$|x+y|^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + 2(x,y) + (y,y) = |x|^2 + 2(x,y) + |y|^2$$

Следовательно,

$$(x,y) = |x||y|$$

а это, как мы видели ранее (§ 23), означает, что $x = \alpha y$, где α -вещественное число, и $(x,y) > 0$.

Значит, $(x,y) = (\alpha y, y) = \alpha\,(y,y) > 0$, откуда следует, что $\alpha > 0$.

б) Обратно, пусть $x = \alpha y$, где $\alpha > 0$. Тогда

$$|x+y| = |\alpha y + y| = |(\alpha + 1)y| = |\alpha + 1||y|,$$

$$|x| + |y| = |\alpha y| + |y| = |\alpha||y| + |y| = (|\alpha| + 1)|y| = |\alpha + 1||y|$$

и, значит, при $x = \alpha y$, где $\alpha > 0$ в соотношении (1), имеет место знак = .

Итак, для ненулевых векторов x и y в соотношении (1) имеет место знак =тогда и только тогда, когда $x = \alpha y$, где $\alpha > 0$, т. е. когда векторы x и y коллинеарны и одинаково направлены.

Длина вектора $x \in E_n$ является, таким образом, неотрицательной числовой функцией, определенной на E_n и обладающей свойствами:

1*. $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$.

2*. $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$.

3*. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

Произвольное линейное пространство R (не обязательно евклидово), на котором задана числовая функция $\|x\|$ обладающая свойствами 1*—3*, называется нормированным, сама же функция $\|x\|$ называется нормой вектора.

Таким образом, евклидовы пространства являются нормированными, причем нормой вектора является его длина.

Введем понятие расстояния $\rho(x,y)$ между двумя векторами x и y произвольного нормированного пространства R, положив

$$\rho(x,y) = \|x - y\| \qquad (2)$$

Это определение находится в полном соответствии со свойствами расстояния в обычном трехмерном пространстве. Действительно, если точка A в пространстве является концом вектора $x = \overline{OA}$, а точка B — концом вектора $y = \overline{OB}$, то расстояние между точками A и B есть не что иное, как длина вектора AB, равного $y - x$.

На основе аксиом нормы {т. е. аксиом 1* —3*) можно получить, что $\rho(x,y) > 0$, при этом:

а) $\rho(x,y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$ (свойство тождества),

б) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ (свойство симметрии),

в) $\rho(x,y) \le \rho(x,z) + \rho(z,y)$ (свойство треугольника).

В самом деле, из 1* по определению (2) следует а). По аксиоме 3* и определению (2) получаем б), так как

$$\rho(x,y) = \|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| = |-1|\|y - x\| = \|y - x\| = \rho(y,x)$$

Свойство в) получаем по определению (2), пользуясь аксиомой 2*:

$$\rho(x,y) = \|x - y\| = \|(x - z) + (z - y)\| \le \|x - z\| + \|z - y\| = \rho(x,z) + \rho(z,y)$$

Произвольное множество, в котором определена неотрицательная вещественная функция $\rho(x,y)$, обладающая свойствами а), б), в) (аксиомами метрики), называется метрическим пространством. Следовательно, всякое нормированное (в частности, евклидово) пространство является метрическим пространством.

Для евклидова пространства E_n расстояние между векторами x и y определяется формулой

$$\rho(x,y) = |x - y| = \sqrt{(x - y, x - y)} \qquad (3)$$

в частности,

$$\rho(x,\theta) = \sqrt{(x,x)} = |x|$$

т. е. длина вектора x есть расстояние от этого вектора x (точки x) до вектора θ (точки θ) — до «начала координат» θ .

§4. Ортогональность векторов. Ортонормированный базис. Ортогонально-дополнительное подпространство.

Определение 28. Векторы x и y евклидова пространства E_n называются ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю, т. е. если

$$(x, y) = 0 . \qquad (1)$$

Согласно определению 27 угол между ненулевыми ортогональными векторами равен 90^o .

Если $x = \theta$, то $(x, y) = (\theta , y) = (0 \times z, y) = 0(z, y) = 0$,т.е. нулевой вектор оказывается ортогональным к любому вектору.

Из аксиомы 13° следует, что ортогональность двух векторов сохраняется при умножении любого из них па произвольное вещественное число.

Отметим два свойства ортогональности векторов.

Свойство 1. Любая система ненулевых попарно ортогональных векторов

$$a_1, a_2, ..., a_k \qquad (3)$$

линейно независима.

Допустим, что система (3) линейно зависима. Тогда существуют не равные одновременно нулю числа $c_1, ..., c_k$ такие, что

$$c_1 a_1 + ... + c_k a_k = \theta \qquad (4)$$

Не нарушая общности, положим $c_1 \neq 0$. Умножив обе части (4) скалярно на a_1 и учитывая ортогональность вектора a_1 к остальным, получим, что

$$c_1 (a_1, a_1) = 0$$

откуда, в силу $c_1 \neq 0$, следует, что $(a_1, a_1) = 0$. Отсюда по аксиоме, 14° получаем $a_1 = \theta$, что противоречит условию. Следовательно, допущение о линейной зависимости системы (3) неверно.

Свойство 2. Если вектор $b \in E_n$ ортогонален к каждому из векторов

$$a_1, a_2, ..., a_k$$

то он ортогонален к каждому из векторов линейного подпространства L, натянутого на векторы $a_1, a_2, ..., a_k$.

В самом деле, пусть $L = L(a_1, a_2, ..., a_k) = \{\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_k a_k\}$, где $\alpha_1, .., \alpha_k$ - произвольные вещественные числа. Согласно условию и аксиомам 12° — 13° имеем:

$$(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + ... + \alpha_k a_k, b) = \alpha_1 (a_1, b) + ... + \alpha_k (a_k, b) = 0$$

Свойство 2 является обобщением на любое евклидово пространство теоремы о двух перпендикулярах из элементарной геометрии.

Определение 29. Векторы $e_1, e_2, ..., e_n$, отличные от нулевого, образуют ортогональный базис n-мерного евклидова пространства, если они попарно ортогональны.

Определение 30. Векторы $e_1, e_2, ..., e_n$ евклидова пространства размерности n образуют ортонормированный базис, если они попарно ортогональны и каждый имеет длину, равную 1, т. е. если

$$(e_i, e_k) = \begin{cases} 1, i = k \\ 0, i \neq k \end{cases}$$

Существование ортогональных базисов доказывается конструктивно с помощью так называемого процесса ортогонализации.

Теорема 24. Во всяком n-мерном евклидовом пространстве E_n существуют ортогональные (а также и ортонормированные) базисы.

Следующая теорема показывает значение ортонормированных базисов в определении скалярного произведения.

Теорема 25. 1) В ортонормированном базисе евклидова пространства скалярное произведение любых двух векторов равно сумме произведений соответствующих координат:

$$(x, y) = \xi_1\eta_1 + \ldots + \xi_n\eta_n \tag{5}$$

где ξ_i, η_i — координаты векторов x и y в указанном базисе.

2) Обратно, если в некотором базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ евклидова пространства E_n скалярное произведение любых двух векторов x и y задается формулой (5), то этот базис является ортонормированным.

Определение 31. Ортогональным дополнением подпространства L пространства E_n называется совокупность L^* всех векторов из E_n, ортогональных к L.

Докажем, что L^* является подпространством пространства E_n.

Пусть $x^*, y^* \in L^*$. Это означает, что если x — произвольный вектор из L, то

$$(x^*, x) = (y^*, x) = 0,$$

и потому

$$(x^* + y^*, x) = (x^*, x) + (y^*, x) = 0.$$

Следовательно, $(x^* + y^*) \in L^*$. Кроме того, для произвольного вещественного числа α и любого $x^* \in L^*$, имеем:

$$(\alpha x^*, x) = \alpha\,(x^*, x) = \alpha \cdot 0 = 0$$

Следовательно, $\alpha x^* \in L$.

По теореме 7 получаем, что L^* подпространство.

Тот факт, что подпространство L^* названо дополнением подпространства L, объясняется следующей теоремой.

Теорема 26. Пространство E_n есть прямая сумма подпространств L и L^*.

Пусть L — линейное подпространство пространства E_n. Докажем, что любой вектор x из E_n однозначно представляется в виде $x = y + z$, где $y \in L$ и $z \in L$. Вектор y называется ортогональной проекцией вектора x на подпространство L, а z - ортогональной составляющей вектора x относительно L.

Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — некоторый базис подпространства L. Будем искать вектор y, требуемый задачей в виде

$$y = c_1e_1 + c_2e_2 + \ldots + c_ke_k \tag{6}$$

где числа $c_1, c_2, \ldots, c_k$ найдем из условия ортогональности вектора $x - y$ к L.

Из следует, что $(x - y, e_i = 0)$, а отсюда

$(x,e_i) = (y,e_i), i = 1,2,...,k.$

Таким образом, получаем систему для отыскания чисел $c_1,c_2,...,c_k$:

$$\left.\begin{aligned}
&(e_1,e_1)c_1 + (e_2,e_1)c_2 + ... + (e_k,e_1)c_k = (x,e_1)\\
&(e_1,e_2)c_1 + (e_2,e_2)c_2 + ... + (e_k,e_2)c_k = (x,e_2)\\
&..\\
&(e_1,e_k)c_1 + (e_2,e_k)c_2 + ... + (e_k,e_k)c_k = (x,e_k)
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Если базис $e_1,e_2,...,e_n$ ортонормирован, то система (7) обращается в систему:

$$c_i = (x,e_i), i = 1,2,...,k \tag{8}$$

откуда находятся и притом однозначно коэффициенты $c_1,c_2,...,c_k$. Так как базис всегда можно ортонормировать, а исходное условие $(x-y)\perp L$ не зависит от базиса, то тем самым доказано существование и единственность вектора у, такого, что $(x-y)\perp L$. Отсюда следует, что при произвольном базисе $e_1,e_2,...,e_n$ определитель системы (7)

$$\begin{vmatrix}
(e_1,e_1)(e_2,e_1).....(e_k,e_1)\\
(e_1,e_2)(e_2,e_2).....(e_k,e_2)\\
....\\
(e_1,e_k)(e_2,e_k)....(e_k,e_k)
\end{vmatrix}$$

отличен от нуля (так называемый определитель Грама векторов $e_1,e_2,...,e_n$).

Таким образом, числа $c_1,c_2,...,c_k$ находим из системы (7), а затем по формуле (6) и сам вектор у. Найдя вектор у, полагаем $z = x - y$.

Пример. Найти ортогональную проекцию y и ортогональную составляющую z вектора $x = (5,2,-2,2)$ на линейное пространство L, натянутое на векторы

$e_1 = (2,1,1,-1)$, $e_2 = (1,1,3,0)$

Расстоянием от вектора x до линейного многообразия $H = L + x_0$ называется минимум расстояний от данного вектора до векторов многообразия, т. е. минимум длин векторов $x - u$, где u — вектор из H.

Докажем, что указанное расстояние равно длине ортогональной составляющей z векторов $x - x_0$ относительно линейного подпространства L.

Пусть $x - x_0 = y + z$, где у — ортогональная проекция векора $x - x_0$ на L, z - его ортогональная составляющая относительно L, так что

$x - x_0 - y \perp L$.

Имеем: $x - u = (x - x_0) - (u - x_0) = [(x - x_0) - y] + [y - (u - x_0)]$

Здесь $(x - x_0) - y \perp L, y - (u - x_0) \in L$, а потому

$|x - u|^2 = (x - u, x - u) = |(x - x_0) - y|^2 + |y - (u - x_0)|^2$

Так как первое слагаемое не зависит от u, то $\min|x - u|$ достигается при $\min|y - (u - x_0)|$, который равен нулю (при $u = x_0 + y \in H$). Следовательно,

$\min|x - u| = |(x - x_0) - y| = |z|,$

что и требовалось доказать.

Теперь докажем, что из всех векторов линейного подпространства L, наименьший угол с данным вектором $x \in E_n$ образует ортогональная проекция y вектора x на L.

Пусть $x = y + z$, где y и z имеют тот же смысл, что и выше. Тогда

$$(x, y) = (y + z, y) = (y, y) + (z, y) = (y, y) = |y|^2$$

а поэтому

$$\cos(x, y) = \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|} = \frac{|y|^2}{|x| \cdot |y|} = \frac{|y|}{|x|}$$

Пусть теперь y' — произвольный вектор из L. Учитывая, что

$$(x, y') = (y + z, y') = (y, y') + (z, y') = (y, y')$$

получаем:

$$\cos(x, y') = \frac{(x, y')}{|x| \cdot |y'|} = \frac{(y, y')}{|x| \cdot |y'|} = \frac{|y| \cdot |y'|}{|x| \cdot |y'|} \cos(y, y') \le \frac{|y|}{|x|} = \cos(x, y)$$

что и доказывает утверждение.

Угол между вектором x и его ортогональной проекцией на подпространство L называется углом между x и L.

Тема 10. Квадратичные формы.

§1. Понятие квадратичной формы.

Определение 36. Вещественной квадратичной формой от n переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ называется однородный многочлен $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ второй степени с вещественными коэффициентами от переменных $x_1, x_2, ..., x_n$.

Пример. $f(x_1, x_2, ..., x_n) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$ есть квадратичная форма от переменных $x_1, x_2, ..., x_n$.

Согласно определению каждый член квадратичной формы содержит или квадрат одного из переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ или произведение двух разных переменных.

Для квадратичных форм используется специальная запись. Пусть в квадратичной форме $f = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ уже выполнено приведение подобных членов. Тогда коэффициент при x_i^2 обозначают через a_{ii}, а коэффициент при $x_i x_j$, где $i \ne j$ — через $2a_{ij}$ и пишут

$$2a_{ij}x_ix_j = a_{ij}x_ix_j + a_{ji}x_jx_i$$

так что

$$a_{ij} = a_{ji} \qquad (1)$$

С учетом этого соглашения квадратичная форма запишется в общем виде следующим образом:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, ..., x_n) = {} & a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + ... + a_{1n}x_1x_n + \\ & a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + ... + a_{2n}x_2x_n + \\ & .... \\ & + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + ... + a_{nn}x_n^2 \end{aligned} \qquad (2)$$

Очевидно, что всякая квадратичная форма от n переменных может быть единственным образом приведена к такому виду. Квадратичной форме, записанной в виде (2), соответствует матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

которая называется матрицей квадратичной формы $f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Согласно условию (1) матрица квадратичной формы есть матрица симметрическая, так что $A' = A$. Очевидно, что каждой симметрической матрице A n порядка соответствует вполне определенная квадратичная форма f от n переменных.

Пример. Для квадратичной формы

$f(x_1, x_2, ..., x_n) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$ запись (2) будет иметь вид:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - x_1x_2 + 2x_1x_3 - x_2x_1 + 3x_2^2 - \frac{3}{2}x_2x_3 + 2x_3x_1 - \frac{3}{2}x_3x_2 + 4x_3^2$$

Матрицей дайной квадратичной формы является

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -\frac{3}{2} \\ 2 & -\frac{3}{2} & 4 \end{pmatrix}$$

Ранг матрицы A квадратичной формы f называется рангом самой квадратичной формы f. Если ранг A равен n, то матрица A невырожденная; квадратичная форма с такой матрицей называется также невырожденной,

Пользуясь правилом умножения матриц, квадратичную форму (2) можно записать в матричном виде:

$$f = X'AX$$

где

$$X' = (x_1, x_2, ..., x_n), X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

§2. Преобразование матрицы квадратичной формы при линейной замене переменных. Канонический вид квадратичной формы

Пусть в пространстве E_n задано линейное преобразование φ, матрица которого в некотором фиксированном базисе есть

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \dots & q_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{n1} & q_{n2} & \dots & q_{nn} \end{pmatrix}$$

Под действием преобразования φ каждый вектор y с координатами $y_1, y_2, ..., y_n$ в данном базисе переходит в другой вектор x с координатами $x_1, x_2, ..., x_n$. При этом согласно § 12 имеем:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = q_{11}y_1 + q_{12}y_2 + ... + q_{1n}y_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = q_{n1}y_1 + q_{n2}y_2 + ... + q_{nn}y_n \end{array}\right\} \qquad (1)$$

или, в матричной записи,

$$X = QY,$$

где X и Y — матрицы-столбцы

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix}$$

Имея в виду формулы (1), говорят, что преобразование φ осуществляет линейное преобразование переменных с матрицей Q.

Пусть $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ — квадратичная форма. Если в выражении для f заменить переменные $x_1, x_2, ..., x_n$ их выражениями через $y_1, y_2, ..., y_n$ по формулам (1), то получим некоторую квадратичную форму $\tilde{f}(y_1, y_2, ..., y_n)$. Выясним, как связаны матрицы квадратичных форм f и $\tilde{f}$, другими словами, как изменяется матрица квадратичной формы f, если переменные $x_1, x_2, ..., x_n$ подвергаются линейному преобразованию (1).

Теорема 35. Если в квадратичной форме f с матрицей A выполнено линейное преобразование переменных с матрицей Q, то полученная квадратичная форма $\tilde{f}$ будет иметь матрицу $Q'AQ$, где матрица Q' получается транспонированием Q.

Пример. Квадратичная форма

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$$

имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -\frac{3}{2} \\ 2 & -\frac{3}{2} & 4 \end{pmatrix}.$$

Выполним преобразование переменных

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = y_1 + y_2 - 9y_3, \\ x_2 = 2y_2 + y_3, \\ x_3 = 10y_3 \end{array}\right\},$$

матрицей которого является

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -9 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Тогда новая квадратичная форма будет иметь матрицу

$$B = Q'AQ = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 190 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, в результате замены переменных получаем квадратичную форму

$$\widetilde{f}(y_1, y_2, y_3) = Y'BY = 2y_1^2 + 10y_2^2 + 190y_3^2$$

Теорема 36. Ранг квадратичной формы не меняется в результате выполнения невырожденного линейного преобразования переменных.

Определение 37. Квадратичная форма вида

$$b_1y_1^2 + b_2y_2^2 + ... + b_ny_n^2,$$

не содержащая членов с произведениями различных переменных (т. е. имеющая диагональную матрицу), называется квадратичной формой канонического (или диагонального) вида.

Теорема 37. Число отличных от нуля коэффициентов в каноническом виде квадратичной формы f равно ее рангу.

В самом деле, пусть квадратичная форма f от n переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ с матрицей A невырожденным линейным преобразованием уже приведена к каноническому виду

$$b_1y_1^2 + b_2y_2^2 + ... + b_ny_n^2,$$

где $y_1, y_2, ..., y_n$ - новые переменные.

Матрицей B квадратичной формы канонического вида является

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & b_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & b_n \end{pmatrix}.$$

По теореме 36 $rangf = rangA = rangB$. А так как матрица B диагональна, то ранг равен числу ее от личных от нуля диагональных элементов. Теорема доказана.

Если $rangB = r$ и отличные от нуля r элементов матрицы B окажутся первыми, то канонический вид квадратичной формы f будет таким:

$$b_1y_1{}^2 + b_2y_2^2 + ... + b_ry_r^2$$

§3. Ортогональное преобразование квадратичной формы к каноническому виду.

Существует довольно простой метод (метод Лагранжа) приведения квадратичной формы к каноническому виду. Этот метод, однако, во многих задачах не дает нужного результата. Например, в задачах аналитической геометрии часто требуется привести общее уравнение кривой или поверхности второго порядка к каноническому виду, причем такое приведение требуется осуществить с помощью весьма специального преобразования переменных (а именно ортогонального); метод Лагранжа не всегда обеспечивает это условие. В связи с этим мы укажем способ, основанный на отыскании собственных значений матрицы квадратичной формы.

Теорема 38. Всякая квадратичная форма с матрицей A может быть приведена к каноническому виду

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$$

при помощи преобразования переменных с ортогональной матрицей. При этом коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ канонического вида являются корнями характеристического многочлена матрицы A, каждый из которых взят столько раз, какова его кратность.

Канонический вид формы f можно найти, таким образом, и не находя самого ортогонального преобразования переменных, а зная лишь собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ определяемые матрицей A .

Это положение подтверждает важность понятия собственного значения.

§4. Нахождение ортогонального преобразования, приводящего вещественную квадратичную форму к каноническому виду

Исходя из доказательства теоремы 38, можно указать практическую схему для отыскания ортогонального преобразования переменных, в результате которого квадратичная форма принимает канонический вид, или, что то же, ее матрица заменяется на диагональную.

1-й шаг. Для данной квадратичной формы строим ее симметрическую матрицу А.

2-й шаг. Составляем характеристический многочлен $\Delta(\lambda) = |A - \lambda E|$ и находим его корни. (В силу теоремы 22 все n корней этого многочлена вещественны, но не обязательно различны.) Обозначим корни характеристического многочлена через $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

3-й шаг. Зная корни характеристического многочлена $\Delta(\lambda)$ можно написать канонический вид данной квадратичной формы:

$$\tilde{f} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2 .$$

4-й шаг. Для каждого корня λ_i кратности m_i составляем однородную систему линейных уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} (a_{11} - \lambda_i)\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \ldots + a_{1n}\xi_n = 0, \\ a_{21}\xi_1 + (a_{22} - \lambda_i)\xi_2 + \ldots + a_{2n}\xi_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\xi_1 + a_{n2}\xi_2 + \ldots. + (a_{nn} - \lambda_i)\xi_n = 0 \end{array}\right\} \qquad (1)$$

где a_{ij} — элементы матрицы A.

5-й шаг. Для каждого λ_i кратности m_i находим какую-нибудь одну ортонормированную систему из m_i векторов, являющихся решениями системы (1). Индекс i меняется от 1 до k, где k есть число различных корней характеристического многочлена $\Delta(\lambda)$. Согласно теореме 32 получим n попарно ортогональных нормированных векторов:

$e_1' = (q_{11}, q_{21}, ..., q_{n1})$
$e_2' = (q_{12}, q_{22}, ..., q_{n2})$
....
$e_n' = (q_{1n}, q_{2n}, ..., q_{nn})$

(Порядок следования векторов $e_1', e_2', ..., e_n'$ соответствует порядку λ_i в каноническом виде.)

6-й шаг. Составляем матрицу Q, столбцами которой являются координаты векторов $e_1', e_2', ..., e_n'$:

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix}$$

7-й шаг. Записываем искомое ортогональное преобразование переменных:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = q_{11}y_1 + q_{12}y_2 + ..+ q_{1n}y_n, \\ x_2 = q_{21}y_1 + q_{22}y_2 + ...+ q_{2n}y_n, \\ .... \\ x_n = q_{n1}y_1 + q_{n2}y_2 + ...+ q_{nn}y_n. \end{array}\right\}$$

то есть

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = Q\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

8-й шаг. Если требуется выразить новые переменные $y_1, y_2, .., y_n$ через старые $x_1, x_2, ..., x_n$, то, учитывая, что $Q^{-1} = Q'$, получаем:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix} = Q'\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Замечание. В случае правильности полученного результата должно быть $B = Q'AQ$, где B — диагональная матрица, отвечающая форме $\widetilde{f}$. Отметим еще, что в связи с неоднозначностью отыскания фундаментальной системы решений однородной линейной системы (5-й шаг) ортогональное преобразование переменных будет находиться также неоднозначно.

Элементарным способом приведения квадратичной формы к каноническому виду является метод Лагранжа

Теорема 39 (Лагранжа). Всякая квадратичная форма при помощи невырожденного линейного преобразования переменных может быть приведена к каноническому виду.

§5. Закон инерции квадратичных форм

Применяя преобразования переменных

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= t_1 - \frac{1}{2}t_2 - 4t_3, \\ x_2 &= t_1 + \frac{1}{2}t_2 - 2t_3, \\ x_3 &= t_3 \end{aligned}\right\}, \left.\begin{aligned} x_1 &= u_1 - u_2 - 2u_3, \\ x_2 &= u_1 + u_2 - u_3, \\ x_3 &= \frac{1}{2}u_3 \end{aligned}\right\}$$

для квадратичной формы

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x$$

получим два канонических вида:

$$t_1^2 - \frac{1}{4}t_2^2 - 8t_3^2, u_1^2 - u_2^2 - 2u_3^2.$$

Таким образом, канонический вид данной квадратичной формы не однозначен. Мы получили два различных канонических вида, но можно заметить, что в каждом из них один положительный коэффициент и два отрицательных. Оказывается, что имеет место общее положение: число положительных и число отрицательных коэффициентов канонического вида данной вещественной квадратичной формы будет одно и то же независимо от преобразования переменных, приводящего к каноническому виду. В этом и состоит закон инерции вещественных квадратичных форм.

Предварительно сделаем замечание. Выполнив подходящее невырожденное линейное преобразование переменных, можно согласно теореме Лагранжа каждую вещественную квадратичную форму привести к каноническому виду

$$\tilde{f} = \alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 y_2^2 + \ldots + \alpha_r y_r^2 \qquad (1)$$

где все коэффициенты вещественны и отличны от нуля. Число этих коэффициентов согласно теореме 37 равно рангу квадратичной формы f. После надлежащего линейного преобразования, состоящего в изменении нумерации переменных, канонический вид (1) можно записать так:

$$\tilde{f} = \alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 y_2^2 + \ldots + \alpha_k y_k^2 - \alpha_{k+1} y_{k+1}^2 - \ldots - \alpha_r y_r^2, \qquad (1')$$

где все числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ положительны и $0 < k \le r$. Применив к форме (1’) невырожденное линейное преобразование

$$\left.\begin{aligned} & y_1 = \frac{1}{\sqrt{\alpha_1}} z_1, y_2 = \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} z_2, \ldots, y_k = \frac{1}{\sqrt{\alpha_k}} z_k, \ldots \\ & \ldots, y_r = \frac{1}{\sqrt{\alpha_r}} z_r, \\ & y_{r+1} = z_{r+1}, \ldots, y_n = z_n \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

с вещественными коэффициентами, получим форму:

$$z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_k^2 - z_{k+1}^2 - \ldots - z_r^2 \qquad (3)$$

которая называется нормальным видом квадратичной формы f. Принимая во внимание теорему Лагранжа, мы получили утверждение: всякая вещественная квадратичная форма невырожденным линейным преобразованием переменных с вещественными коэффициентами приводится к нормальному виду (3) с коэффициентами +1 и -1 при квадратах переменных.

Теорема 40. (Закон инерции.) Число положительных и число отрицательных квадратов в каноническом виде, к которому приводится данная вещественная квадратичная форма невырожденным линейным преобразованием переменных с вещественными коэффициентами, не зависит от выбора этого преобразования.

Закон инерции дает основание принять следующее

Определение 38. Число k положительных и число q отрицательных коэффициентов в каноническом виде вещественной квадратичной формы f называется соответственно положительным и отрицательным индексом инерции; разность $s = k - q$ называется сигнатурой данной квадратичной формы.

4. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

4.1. Материалы аудиторных контрольных работ

1 семестр

1. Самостоятельная работа по теме «Векторы»

1. Дан параллелограмм ABCD. Точка O – пересечение диагоналей. Построить вектор $\overline{AB}+\overline{CO}; \overline{AC}+\overline{OD}; \overline{AB}+\overline{DC}; \overline{AC}+\overline{OC}+\overline{OD}$.

2. Дан вектор a. Построить: 1) $-\frac{3}{5}\overline{a}$;

2) $2{,}5\overline{a}$;

3) $\sqrt{2}\overline{a}$.

3. Дан правильный шестиугольник ABCDF, O – центр:

1) Найти: а) пару коллинеарных векторов;

б) сонаправленных;

в) противоположных;

г) равных;

2) Построить: а) $\overline{AB}-\overline{OD}$;

б) $\overline{BD}+\overline{OC}-\overline{OF}$;

в) $2\overline{AB}-\overline{OE}$.

2. Самостоятельная работа по теме «Зависимость векторов. Базис. Координаты вектора»

1. Дан параллелограмм ABCD; $\overline{AB}=\overline{a}$, $\overline{AD}=\overline{b}$, O – точка пересечения диагоналей. Найти коэффициент в разложении векторов $\overline{AO}, \overline{AC}, \overline{DC}, \overline{DO}$, через векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

2. Найти числа α и β такие, что $\overline{m}=\alpha\overline{a}+\beta\overline{b}$.

3. Дана равнобокая трапеция ABCD; AB||CD, $\overline{AB}=k\overline{CD}$. O – точка пересечения диагоналей; $\overline{AB}=\overline{a}$, $\overline{AD}=\overline{b}$. Разложить по векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$ $\overline{DB}$, $\overline{AO}$.

4. Дана система векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$.

$2\overline{a}+\overline{b}-\overline{c}=0$;

$\alpha_1=2, \alpha_2=1, \alpha_3=-1 \quad \alpha_i\neq 0$;

$\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ – л.з.

a||b $\qquad (\alpha+\beta-1)\overline{a}+(2\alpha-\beta)\overline{b}=0$

$\alpha=? \quad \beta=?$

5. Дан базис ABC. Найти координаты данных векторов в базисе:

$\overline{p}=\overline{a}+\overline{b}-\overline{c} \qquad \overline{m}=\frac{1}{2}\overline{a}$

$\overline{k}=\overline{a}-2\overline{b} \qquad \overline{l}=-\overline{b}$

$\overline{p} = (1;1;-1);\quad \overline{m} = \left(\frac{1}{2};0;0\right)\quad \overline{k} = (1;-2;0)\quad \overline{l} = (0;-1;0).$

$\overline{c} = -2\overline{a} + \overline{b}$, $\overline{a} = 2\overline{y} - \overline{v}$, $\overline{b} = \overline{y} + 2\overline{v}$. Найти координаты $\overline{c}$ в базисе $\{\overline{yv}\}$.

6. Дан $\overline{c}$ =(-2;-12) в базисе $\{e_1e_2\}$, представить $\overline{c}$ в виде линейной комбинации векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ если $\overline{a}$ =(4;-2), $\overline{b}$ =(3;5) в этом базисе. $\overline{c} = \alpha\,\overline{a} + \beta\,\overline{b}$. α =? β =?

3. Контрольная работа по теме «Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов»

1. Даны 3 вектора p={3;-2;1}, q={-1;1;-2}, r={2;1;-3}. Найти разложение вектора c={11;-6;5} по базису p, q, r.
2. Вычислить косинус угла, образованного векторами a={2;-4;4} и b={-3;2;6}.
3. Найти вектор *x*, коллинеарный вектору *a*={2;1;-1} и удовлетворяющий условию *xa*=3.
4. Даны точки A(2;-1;2), B(1;2;-1) и C(3;2;1). Найти координаты векторных произведений: 1) $\left[\overline{AB}\,\overline{BC}\right]$; 2) $\left[\left(\overline{BC} - 2\overline{CA}\right)\overline{CB}\right]$.
5. Доказать, что точки A(1;2;-1), B(0;1;5), C(-1;2;1), D(2;1;3) лежат в одной плоскости.
6. Даны вершины тетраэдра A(2;3;1) B(4;1;-2) C(6;3;7) D(-5;-4;8). Найти длину его высоты, опущенную из вершины D.

4. Самостоятельная работа по теме «Простейшие задачи в координатах»

1. Даны точки $M_1(2;-3), M_2(1;-4), M_3(-1;-7), M_4(-4;8)$. Вычислить длину и полярный угол следующих отрезков: 1) $\overline{M_1M_2}$; 2) $\overline{M_1M_3}$; 3) $\overline{M_2M_4}$; 4) $\overline{M_4M_3}$.
2. Даны смежные вершины параллелограмма A(-3;5) B(1;7) и точки пересечения его диагоналей M(1;1). Определить две другие вершины.
3. Отрезок, ограниченный точками A(1;-3) и B(4;-3), разделен на три равные части. Определить координаты точек деления.
4. Вычислить площадь треугольника, вершинами которого являются точки: 1) A(2;-3), B(3;2) и C(-2;5).
5. Вершины треугольника суть точки A(3;6), B(-1;3), C(2;-1). Вычислить длину его высоты, проведённой из вершины C.

5. Самостоятельная работа по теме «Прямая»

1. Привести общее уравнение прямой к нормальному виду в каждом из следующих случаев: 1) 4x-3y-10=0; 2) $\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + 10 = 0$; 3) 12x-5y+13=0;

4)x+2=0;

5) $2x - y - \sqrt{5} = 0$.

2. Доказать, что прямая 5x-2y-1=0 параллельна прямым 5x-2y+7=0, 5x-2y-9=0 и делит расстояние между ними пополам.

3. Составить уравнения биссектрис углов, образованных двумя пересекающимися прямыми:
1) x-3y+5=0, 3x-y-2=0;
2) x-2y-3=0, 2x+4y+7=0;
3) 3x+4y-1=0, 5x+12y-2=0.
4. Составить уравнение прямой, которая проходит через точку пересечения прямых 2x+y-2=0, x-5y-23=0 и делит пополам отрезок, ограниченный точками (5;-6) и (-1;-4). Решить задачу, не вычисляя координат точки пересечения данных прямых.

6. Контрольная работа по теме «Прямые на плоскости»

1. Дан треугольник ABC $A(5;-4), B(-1;3), C(-3;-2)$. Найти координаты ортоцентра, точку пересечения высот.
2. Найти центр тяжести треугольника ABC, т.е. точку пересечения медиан данного треугольника.
$A(5;-4), B(-1;3), C(-3;-2)$
$Al - медиана \quad kC - медиана \quad Bl = lC$
$Ak = kB \quad k \in AB \quad l \in BC.$
3. Дан треугольник ABC $A(5;-4), B(-1;3), C(-3;-2)$. Найти центр описанной окружности.
4. Найти длину высоты треугольника ABC из вершины C.
$A(5;-4), B(-1;3), C(-3;-2)$. Найти ρ от центра тяжести до стороны AC.
5. Определить, при каких значениях m и n прямая (2m-n+5)x+(m+3n-2)y+2m+7n+19=0 параллельна оси ординат и отсекает на оси абсцисс отрезок, равный +5 (считая от начала координат). Написать уравнение этой прямой.
6. Установить, какие из следующих пар прямых перпендикулярны:
1) 3x-y+5=0, x+3y-1=0;
2) 3x-4y+1=0, 4x-3y+7=0;
3) 6x-15y+7=0, 10x+4y-3=0.
7. Определить, при каком значении m две прямые (m-1)x+my-5=0, mx+(2m-1)y+7=0 пересекаются в точке, лежащей на оси абсцисс.
8. Вычислить расстояние *d* между параллельными прямыми:
$d_1: 4x - 3y + 15 = 0$
$d_2: 8x - 6y + 25 = 0$
9. Найти уравнение прямой, принадлежащей пучку прямых
$\alpha(x + 2y - 5) + \beta(3x - 2y + 1) = 0$ и параллельной оси Oy.

7. Самостоятельная работа по теме «Эллипс»

1. $F_1(-2;1{,}5)$, $F_2(2;-1{,}5)$, $E = \frac{\sqrt{2}}{2}$
Записать уравнение эллипса.

2. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, зная, кроме того, что:

1) его полуоси равны 5 и 2;
2) его большая ось равна 10, а расстояние между фокусами 2c=8;
3) его малая ось равна 24, а расстояние между фокусами 2c=10;
4) расстояние между его фокусами 2c=6 и эксцентриситет ε=3/5;
5) его большая ось равна 20, а эксцентриситет ε=3/5;
6) его малая ось равна 10, а эксцентриситет ε=12/13;
7) расстояние между его директрисами равно 5 и расстояние между фокусами 2c=4;
8) его большая ось равна 8, а расстояние между директрисами равно 16;
9) его малая ось равна 6, а расстояние между директрисами равно 13;
10) расстояние между его директрисами равно 32 и ε=1/2.

3. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

$M_1(-4;2{,}4)$

Найти: $r_1, r_2 \; и \; M \in \; эллипсу$.

4. Установить какая линия определяется следующим уравнением $y=\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$.

5. Установить, что каждое из следующих уравнений определяет эллипс, и найти координаты его центра C, полуоси, эксцентриситет и уравнения директрис: 2) $16x^2+25y^2+32x-100y-284=0$.

6. Установить, какие линии определяются следующими уравнениями:

2) $y=1-\frac{3}{4}\sqrt{-6x-x^2}$;

3) $x=-2\sqrt{-5-6y-y^2}$.

Изобразить эти линии на чертеже.

7. Составить уравнение эллипса, зная, что:
его фокусы суть $F_1(1;3)$, $F_2(3;1)$ и расстояние между директрисами равно $12\sqrt{2}$.

8. Составить уравнение эллипса, если известны его эксцентриситет ε=2/3, фокус F(2;1) и уравнение соответствующей директрисы x-5=0.

8. Самостоятельная работа по теме «Гипербола»

1. Дана гипербола $16x^2-9y^2=-144$. Найти: 1) полуоси *a* и *b*; 2) фокусы; 3) эксцентриситет; 4) уравнения асимптот; 5) уравнения директрис.

2. $\gamma : \frac{x^2}{80}-\frac{y^2}{20}=1$

$M(10;-\sqrt{5})$

$M \in \gamma = ?$

$MF_1, MF_2 = ?$

3. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, зная, кроме того, что:
1) её оси 2a=10 и 2b=8;
2) расстояние между фокусами 2c=10 и ось 2b=8;
3) расстояние между фокусами 2c=6 и эксцентриситет ε=3/2;
4) ось 2a=16 и эксцентриситет ε=5/4;
5) уравнения асимптот $y = \pm \dfrac{4}{3}x$ и расстояние между фокусами 2c=20;
6) расстояние между директрисами равно 228/13 и расстояние между фокусами 2c=26;
7) расстояние между директрисами равно 32/5 и ось 2b=6;
8) расстояние между директрисами равно 8/3 и эксцентриситет ε=3/2;
9) уравнения асимптот $y = \dfrac{3}{4}x$ и расстояние между директрисами равно 64/5.

4. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси ординат симметрично относительно начала координат, зная, кроме того, что;
1) её полуоси a=6, b=18 (буквой a обозначаем полуось гиперболы, расположенную на оси абсцисс);
2) расстояние между фокусами 2c=10 и эксцентриситет ε=5/3;
3) уравнения асимптот $y = \pm \dfrac{12}{5}x$ и расстояние между вершинами равно 48;
4) расстояние между директрисами равно 50/7 и эксцентриситет ε=7/5;
5) уравнения асимптот $y = \pm \dfrac{4}{3}x$ и расстояние между директрисами равно 32/5.

5. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, если даны точки $M_1(6;-1)$ и $M_2\left(-8;2\sqrt{2}\right)$ гиперболы.

6. Определить эксцентриситет гиперболы, если отрезок между её вершинами виден из фокусов сопряжённой гиперболы под углом 60°.

7. Фокусы гиперболы совпадают с фокусами эллипса $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$. Составить уравнение гиперболы, если её эксцентриситет ε=2.

8. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, если даны:
2) точка $M_1(-5;3)$ гиперболы и эксцентриситет ε=$\sqrt{2}$;
3) точка $M_1\left(\dfrac{9}{2};-1\right)$ гиперболы и уравнения асимптот $y = \pm \dfrac{2}{3}x$.

9. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой лежат в вершинах эллипса $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{64} = 1$, а директрисы проходят через фокусы этого эллипса.

10. Установить, что каждое из следующих уравнений определяет гиперболу, и найти координаты её центра С, полуоси, эксцентриситет, уравнения директрис:

1) $16x^2-9y^2-64x-54y-161=0$;

2) $9x^2-16y^2+90x+32y-367=0$.

11. Составить уравнение гиперболы, зная, что:

1) расстояние между её вершинами равно 24 и фокусы суть $F_1(-10;2)$, $F_2(16;2)$;

2) фокусы суть $F_1(3;4)$, $F_2(-3;-4)$ и расстояние между директрисами равно 3,6;

3) угол между асимптотами равен 90° и фокусы суть $F_1(4;-4)$, $F_2(-2;2)$.

9. Самостоятельная работа по теме «Парабола»

1. Определить величину параметра и расположение относительно координатных осей следующих парабол:

1) $y^2=6x$;

2) $x^2=5y$;

3) $y^2=-4x$;

4) $x^2=-y$;

2. Составить уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, зная, что:

1) парабола расположена симметрично относительно оси Ох и проходит через точку А(9;6).

2) парабола расположена симметрично относительно оси Оу и проходит через точку D(4;-8).

3. Составить уравнение параболы, которая имеет фокус Е(0;-3) и проходит через начало координат, зная, что её осью служит ось Оу.

4. На параболе $y^2=16x$ найти точки, фокальный радиус которых равен 13.

5. Стальной трос подвешен за два конца; точки крепления расположены на одинаковой высоте; расстояние между ними равно 20м. Величина его прогиба на расстоянии 2м от точки крепления, считая по горизонтали, равно 14,4см. Определить величину прогиба этого троса в середине между точками крепления, приближенно считая, что трос имеет форму параболы.

6. Установить, какие линии определяются следующими уравнениями:

1. $y=+2\sqrt{x}$;

2. $y=-2\sqrt{x}$;

3. $x=-\sqrt{3y}$.

Изобразить эти линии на чертеже.

7. Вычислить фокальный радиус точки М параболы $y^2=12x$, если ордината точки М равна 6.

8. Составить уравнение параболы, если дан фокус F(-7;0) и уравнение директрисы x-7=0.

9. Установить, что каждое из следующих уравнений определяет параболу, и найти ординаты её вершины А и величину параметра р:

1) $x = -\frac{1}{4}y^2 + y$;

2) $x = -y^2 + 2y - 1$.

10. Контрольная работа по теме «Линии второго порядка»

Вариант № 1 Привести к каноническому виду и построить.

1. $3x^2 - 4xy - 2y^2 + 3x - 12 - 7 = 0$.
2. $4x^2 + 5xy + 3y^2 - x + 9y - 12 = 0$.
3. $4x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 8y + 13 = 0$.

Вариант № 2 Привести к каноническому виду и построить.

1. $4x^2 - 4xy + y^2 - 12x + 6y - 11 = 0$.
2. $x^2 - 2xy + 4y^2 + 5x - 7y + 12 = 0$.
3. $x^2 - 2xy + y^2 - 6x + 6y - 3 = 0$.

Вариант № 3 Привести к каноническому виду и построить.

1. $4x^2 - 20xy + 25y^2 - 14x + 2y - 15 = 0$.
2. $4x^2 - 6xy - 9y^2 + 3x - 7y + 12 = 0$.
3. $3x^2 + 5xy + y^2 - 8x - 11y - 7 = 0$.

Вариант № 4 Привести к каноническому виду и построить:

1. $5x^2 + 4xy + 2y^2 + 20x + 20y - 18 = 0$.
2. $9x^2 - 4xy - 7y^2 - 12 = 0$.

$2x^2 - 6xy + 5y^2 + 22x - 36y + 11 = 0$.

2 семестр

1. Самостоятельная работа по теме «Комплексные числа»

1. Вычислить: $\left|\dfrac{-\left[(-3i)(2-4i)-(2+4i)3i\right]^2}{(1-i)(1+i)^2-\left[\left(\dfrac{2}{5}-\dfrac{1}{5}i\right)-\dfrac{1+2i}{1-2i}\right]-4i}\,i^{248}\right|$.

2. Решить уравнение:

$$z^2 - (1+i)z + 6 + 3i = 0.$$

3. Вычислить:

а) $\left((1+\dfrac{\sqrt{3}}{2})+\dfrac{i}{2}\right)^{24}$; б) $\sqrt[5]{-\dfrac{16}{8-4\sqrt{12}i}}$.

4. Изобразить на плоскости XOY множества точек, для которых:

а) $|z+2| = 2$; б) $\dfrac{\pi}{4} \le \arg z < \dfrac{2\pi}{3}$; в) $0 \le \operatorname{Im} z \le 1$.

2. Контрольная работа по теме «Матрицы и определители»

1. Исследовать систему и решить ее методом Гаусса в зависимости от значений буквенных параметров:

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

2. Решить методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 1, \\ 4x_1 - 10x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 1, \\ 2x_1 - 14x_2 + 7x_3 - 7x_4 + 11x_5 = -1. \end{cases}$$

3. Найти матрицу, обратную данной, и выполнить проверку (первым способом):

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -8 & -5 \\ -4 & 7 & -1 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Решить матричное уравнение, выполнить проверку (обратную матрицу искать по формуле):

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -5 & 7 \\ 4 & -9 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 8, \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 + x_4 = 0, \\ 5x_1 - 9x_2 + 4x_3 - x_4 = 0, \\ 4x_1 - 6x_2 + 3x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

6. Вычислить методом окаймления миноров ранг матрицы A:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Самостоятельная работа по теме «Векторное пространство»

1 вариант

1. Образует ли линейное пространство множество всех отрицательных действительных чисел, для которых сумма определяется равенством $a + b = -|a| \cdot |b|$, а произведение вектора a на число α определяется как $\alpha a = -|a|^{\alpha}$, где $\alpha \in R$.

2. Выяснить, является ли данная система векторов линейно зависимой или нет. Если система линейно зависима, то найти коэффициенты линейной зависимости.

а) $x_1 = (-15;-1;4;17;-13;5)$,

$x_2 = (19;16;-9;5;11;15)$,

б) $\sin x, \cos x, tgx$ на $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$;

в) $1, x, x^2, (1+x)^2$.

$x_3=(10;-3;13;18;2;-15)$,

$x_4=(-1;11;12;57;-13;10)$;

2 вариант

1. Образует ли линейное пространство множество всех положительных действительных чисел, для которых сумма определяется равенством $a+b=a\cdot b$, а произведение вектора *a* на число α определяется как $\alpha a=a^{\alpha}$, где $\alpha\in R$.

2. Выяснить, является ли данная система векторов линейно зависимой или нет. Если система линейно зависима, то найти коэффициенты линейной зависимости.

а) $x_1=(-15;-1;4;17;-13;5)$,

$x_2=(19;16;-9;5;11;15)$,

$x_3=(10;-3;13;18;2;-15)$,

$x_4=(-1;11;12;57;-13;10)$;

б) e^x, xe^x, x^2e^x;

в) $1+x+x^2, 1+2x+x^2, 1+2x+x^2$.

4. Контрольная работа по теме «Линейные операторы»

Вариант 1.

Задание 1:

Линейный оператор φ в базисе e_1,e_2,e_3 имеет матрицу A. Найти матрицу B линейного оператора φ в базисе e_1',e_2',e_3', если:

$$e_1=\begin{pmatrix}0, & 0, & 1\end{pmatrix}\quad e_2=\begin{pmatrix}0, & 1, & 1\end{pmatrix}\quad e_3=\begin{pmatrix}1, & 1, & 1\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & -2\\ 1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$e_1'=\begin{pmatrix}2, & 3, & 5\end{pmatrix}\quad e_2'=\begin{pmatrix}0, & 1, & 2\end{pmatrix}\quad e_3'=\begin{pmatrix}1, & 0, & 0\end{pmatrix}$$

Задание 2:

Линейный оператор φ векторного пространства V задан в некотором базисе матрицей A. Найти собственные значения и собственные векторы, если:

$$A=\begin{pmatrix}-3 & 6 & 1\\ -1 & 3 & -1\\ -2 & 8 & -3\end{pmatrix}.$$

Задание 3:

Найти ранг, дефект и ядро линейного оператора φ, который в базисе e_1,e_2,e_3,e_4 задан матрицей:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 9 & 4\\ 7 & 5 & 4 & -8\\ 3 & 2 & 1 & -4\\ 1 & 2 & 7 & 5\end{pmatrix}.$$

Вариант 2.

Задание 1:

Линейный оператор φ в базисе e_1, e_2, e_3 имеет матрицу A. Найти матрицу B линейного оператора φ в базисе e_1', e_2', e_3', если:

$$e_1 = (1,\ \ 2,\ \ 1) \qquad e_2 = (2,\ \ 3,\ \ 3) \qquad e_3 = (3,\ \ 7,\ \ 1)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e_1' = (3,\ \ 1,\ \ 4) \qquad e_2' = (5,\ \ 2,\ \ 1) \qquad e_3' = (1,\ \ 1,\ \ -6)$$

Задание 2:

Линейный оператор φ векторного пространства V задан в некотором базисе матрицей A. Найти собственные значения и собственные векторы, если:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 6 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задание 3:

Найти ранг, дефект и ядро линейного оператора φ, который в базисе e_1, e_2, e_3, e_4 задан матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 & 12 \\ -2 & -4 & -6 & -8 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вариант 3.

Задание 1:

Линейный оператор φ в базисе e_1, e_2, e_3 имеет матрицу A. Найти матрицу B линейного оператора φ в базисе e_1', e_2', e_3', если:

$$e_1 = (1,\ \ 0,\ \ 0) \qquad e_2 = (0,\ \ 1,\ \ 0) \qquad e_3 = (0,\ \ 0,\ \ 1)$$

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 9 \\ 4 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$e_1' = (1,\ \ 1,\ \ 0) \qquad e_2' = (0,\ \ 1,\ \ 1) \qquad e_3' = (1,\ \ 0,\ \ 1)$$

Задание 2:

Линейный оператор φ векторного пространства V задан в некотором базисе матрицей A. Найти собственные значения и собственные векторы, если:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Задание 3:

Найти ранг, дефект и ядро линейного оператора φ, который в базисе e_1, e_2, e_3, e_4 задан матрицей:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 & 4 \\ -1 & -3 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вариант 4.

Задание 1:

Линейный оператор φ в базисе e_1, e_2, e_3 имеет матрицу A. Найти матрицу B линейного оператора φ в базисе e_1', e_2', e_3', если:

$$e_1=(1,\ -1,\ 0) \qquad e_2=(1,\ 2,\ 3) \qquad e_3=(0,\ 1,\ -1)$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$e_1'=(3,\ -1,\ 4) \qquad e_2'=(1,\ -2,\ -5) \qquad e_3'=(3,\ -2,\ -1)$$

Задание 2:

Линейный оператор φ векторного пространства V задан в некотором базисе матрицей A. Найти собственные значения и собственные векторы, если:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -4 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задание 3:

Найти ранг, дефект и ядро линейного оператора φ, который в базисе e_1, e_2, e_3, e_4 задан матрицей:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

5. Контрольная работа по теме «Ортогональное дополнение к подпространству. Элементы аналитической геометрии в евклидовом пространстве»

1. В евклидовом пространстве R^3 подпространство L задано системой уравнений $\begin{cases} 2x_1-3x_2+3x_3=0 \\ x_1+2x_2-3x_3=0 \\ 3x_1-x_2-2x_3=0 \end{cases}$. Найдите по одному ортогональному базису в каждом из пространств $L, L^{\perp}$, R^3.

2. Найдите ортогональную проекцию a и ортогональную составляющую b вектора v относительно подпространства L, порожденного векторами a_1, a_2, a_3, если:

$a_1 = (2,-4,5,3)$,
$a_2 = (3,-6,4,2)$,
$a_3 = (4,-8,17,11)$,
$v = (3,-5,2,-10)$.

3. Найдите в пространстве С наименьший угол между вектором $z = 1 + i\sqrt{3}$ и подпространством L, порожденным вектором $\sqrt{3} + i$.

6. Контрольная работа по теме «Приведение квадратичной формы к каноническому виду»

1. Приведите к каноническому виду методом Лагранжа квадратичные формы:

а) $x_1^2 - x_1x_2 - x_2^2$, б) $-x_1x_2$,
б) $x_1^2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_2^2 + 4x_3^2$,
в) $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 3x_2^2 - 6x_2x_3 - 4x_3^2$,
г) $2x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 9x_2^2 + 19x_3^2$.

2. Приведите к каноническому виду квадратичные формы при всевозможных действительных λ :

а) $3x_1^2 - 2x_1x_2 + \lambda x_2^2$,
б) $8x_1^2 + \lambda x_1x_2 + 2x_2^2$,
в) $2x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 6x_2^2 + \lambda x_3^2$, г) $x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + \lambda x_4^2 + 4x_2x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 5x_3x_4$
.

4.2. Материалы расчетно-графических работ

1 семестр

1. Индивидуальное задание по теме «Векторы на плоскости»

Вариант 1

1. Доказать, что сумма векторов, соединяющих центр правильного треугольника с его вершинами, равна нуль-вектору.
2. Проверить, что векторы $\vec{e}_1 = (1;-1)$ и $\vec{e}_2 = (2;3)$ образуют базис и найти разложение вектора $\vec{a} = (2;-1)$ по этому базису.
3. Доказать, что диагонали ромба взаимно перпендикулярны.
4. Найти угол между векторами $\vec{a} = (2;2)$ и $\vec{a} + \vec{b}$, где $\vec{b} = (3;-2)$.

Вариант 2

1. $ABCD$ - квадрат, O - точка пересечения его диагоналей. Найти координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{DO}$ в базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, где $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OB}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OC}$.
2. $ABCD$ - параллелограмм, $\overrightarrow{AB} = 2\vec{m} + 3\vec{n}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{m} - \vec{n}$, где $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 3$, $\left(\vec{m} ,\hat{} \vec{n}\right) = \frac{\pi}{3}$. Вычислить $\cos\left(\overrightarrow{AD} ,\hat{} \overrightarrow{AC}\right)$.
3. Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{a} + \vec{b}$, где $\vec{a} = (3;3)$, $\vec{b} = (-8;-3)$.

Вариант 3

1. По данным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ построить вектор $\sqrt{2}\vec{a}-\frac{4}{3}\vec{b}$.
2. Дан параллелограмм $ABCD$. Точка M делит сторону BC в отношении $1:2$, точка N делит сторону AD в отношении $2:1$, точка P - середина стороны CD. Найти координаты векторов $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{AP}$, приняв векторы $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ за векторы базиса.
3. В прямоугольном треугольнике проведены медианы из вершин острых углов. Найти угол между ними.
4. Даны векторы $\vec{a}=(2;-1)$ и $\vec{b}=(0;1)$. Найти вектор $\vec{x}$, если $(\vec{x},\vec{a})=5$, $(\vec{x},\vec{b})=-3$.

Вариант 4

1. Сторона AC треугольника ABC разделена на пять равных частей, все точки деления A_1, A_2, A_3, A_4 соединены с вершиной A. Обозначив $\overrightarrow{AB}=\vec{c}$ и $\overrightarrow{BC}=\vec{a}$, найти векторы $\overrightarrow{A_1A}$, $\overrightarrow{A_2A}$, $\overrightarrow{A_3A}$, $\overrightarrow{A_4A}$.
2. Проверить, что векторы $\vec{e}_1=(1;-1)$ и $\vec{e}_2=(2;3)$ образуют базис и найти разложение вектора $\vec{a}=(-4;-11)$ по этому базису.
3. Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{a}+\vec{b}$, где $\vec{a}=(2;-2)$, $\vec{b}=(5;2)$.

Вариант 5

1. Пусть $ABCDEF$ правильный шестиугольник. Найти равнодействующую сил $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AF}$ приложенных к точке A.
2. Проверить, что векторы $\vec{e}_1=(1;-1)$ и $\vec{e}_2=(2;3)$ образуют базис и найти разложение вектора $\vec{a}=(-1;-4)$ по этому базису.
3. $ABCD$ - параллелограмм, $\overrightarrow{AC}=2\vec{e}_1-3\vec{e}_2$, $\overrightarrow{AD}=\vec{e}_1+\vec{e}_2$, где $\left|\vec{e}_1\right|=1$, $\left|\vec{e}_2\right|=\sqrt{2}$, $\left(\vec{e}_1,\hat{\ }\vec{e}_2\right)=\frac{\pi}{4}$. Вычислить $\cos\left(\overrightarrow{BD},\hat{\ }\overrightarrow{AC}\right)$.
4. Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{a}+\vec{b}$, где $\vec{a}=(-2;-2)$, $\vec{b}=(8;8)$.

Вариант 6

1. Дана трапеция $ABCD$, $\overrightarrow{DC}=k\cdot\overrightarrow{AB}$, P - точка пересечения диагоналей, M и N - середины оснований. Разложить векторы $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{PB}$ по векторам $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.
2. В треугольнике ABC BM - медиана. Известно, что $\overrightarrow{AB}=\vec{p}-3\vec{q}$, $\overrightarrow{AC}=2\vec{p}-4\vec{q}$, где $\left|\vec{p}\right|=\sqrt{3}$, $\left|\vec{q}\right|=2$, $\left(\vec{p},\hat{\ }\vec{q}\right)=\frac{\pi}{6}$. Вычислить $\cos\left(\overrightarrow{BM},\hat{\ }\overrightarrow{BC}\right)$.
3. Даны векторы $\vec{a}=(2;-1)$ и $\vec{b}=(0;1)$. Найти вектор $\vec{x}$, если $(\vec{x},\vec{a})=7$, $(\vec{x},\vec{b})=-3$.

Вариант 7

1. Отрезок AB разделен точками C_1, C_2, C_3 на четыре равные части. Полагая, что $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, выразить через них векторы $\overrightarrow{OC_1}$, $\overrightarrow{OC_2}$, $\overrightarrow{OC_3}$, где точка O - произвольная точка плоскости.
2. При каком значении α векторы $\vec{a}+\alpha\cdot\vec{b}$ и $\vec{a}-\alpha\cdot\vec{b}$ будут перпендикуляры, если $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=5$.
3. Дан вектор $\vec{a}=(a_1,a_2)$ в базисе $\{\vec{i},\vec{j}\}$. Найти координаты вектора $\vec{x}$, если $\vec{x}$ перпендикулярен $\vec{a}$ и $|\vec{x}|=|\vec{a}|$.
4. Даны векторы $\vec{s}=(-2;1)$, $\vec{t}=(4;3)$, $\vec{a}=(-1;2)$, $\vec{b}=(3;3)$. Найти координаты вектора $\vec{c}=\vec{a}+3\vec{b}$ в базисе $\{\vec{s},\vec{t}\}$.

Вариант 8

1. Пользуясь параллелограммом, построенном на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, проверить на чертеже справедливость тождества $\left(\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)+\left(\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{a}\right)=\frac{3}{2}(\vec{a}+\vec{b})$.
2. Проверить, что векторы $\vec{e}_1=(1;-1)$ и $\vec{e}_2=(2;3)$ образуют базис и найти разложение вектора $\vec{a}=(5;5)$ по этому базису.
3. В треугольнике ABC AK - медиана. Известно, что $\overrightarrow{AB}=\vec{m}+\vec{n}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{m}-3\vec{n}$, где $|\vec{m}|=1$, $|\vec{n}|=\sqrt{2}$, $\left(\vec{m}\,\hat{,}\,\vec{n}\right)=\frac{\pi}{4}$. Вычислить $\cos\left(\overrightarrow{AK}\,\hat{,}\,\overrightarrow{BC}\right)$.
4. Даны векторы $\vec{a}=(2;-1)$ и $\vec{b}=(0;1)$. Найти вектор $\vec{x}$, если $(\vec{x},\vec{a})=1$, $(\vec{x},\vec{b})=3$.

Вариант 9

1. Дан правильный пятиугольник $ABCDE$ приняв $\overrightarrow{AB}=\vec{m}$, $\overrightarrow{CB}=\vec{n}$, $\overrightarrow{CD}=\vec{p}$, $\overrightarrow{DE}=\vec{q}$, $\overrightarrow{AE}=\vec{s}$, построить $\vec{a}=3\vec{n}-\vec{p}+\vec{q}-\frac{1}{2}\vec{s}$, $\vec{b}=\vec{m}+\vec{n}-\vec{q}-\vec{p}-2\vec{s}$, $\vec{c}=2(\vec{m}-\vec{q})+\frac{1}{2}(\vec{p}-\vec{s})+\vec{n}$.
2. Проверить, что векторы $\vec{e}_1=(1;-1)$ и $\vec{e}_2=(2;3)$ образуют базис и найти разложение вектора $\vec{a}=(2;8)$ по этому базису.
3. Определить при каком значении α векторы $\vec{m}=2\vec{p}-3\vec{q}$, $\vec{n}=\vec{p}+\alpha\cdot\vec{q}$ взаимно перпендикулярны, если $|\vec{p}|=|\vec{q}|=1$, $\left(\vec{p}\,\hat{,}\,\vec{q}\right)=\frac{\pi}{3}$.
4. Даны векторы $\vec{a}=(2;-1)$ и $\vec{b}=(0;7)$. Найти вектор $\vec{x}$, если $(\vec{x},\vec{a})=-3$, $(\vec{x},\vec{b})=1$.

2. Индивидуальное задание по теме «Векторы в пространстве»

Вариант 1

1. В параллелепипеде $ABCDA'B'C'D'$ заданы векторы, совпадающие с его ребрами: $\overrightarrow{AB}=\vec{n}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{m}$, $\overrightarrow{AA'}=\vec{p}$. Построить каждый из следующих векторов: $\vec{m}+\vec{n}+\vec{p}$, $\vec{m}+\vec{n}+\frac{1}{2}\vec{p}$, $\frac{1}{2}\vec{m}+\frac{1}{2}\vec{n}+\vec{p}$, $-\vec{m}-\vec{n}+\frac{1}{2}\vec{p}$.
2. Найти вектор $\vec{x}$ из уравнения $3(\vec{a_1}-\vec{x})+2(\vec{a_2}+\vec{x})=5(\vec{a_3}+\vec{x})$, где $\vec{a_1}=(5,-6,-2)$, $\vec{a_2}=(2,-1,4)$, $\vec{a_3}=(-3,2,-5)$.
3. Даны три силы $\vec{M}=(3,-4,2)$, $\vec{N}=(2,3,-5)$, $\vec{P}=(-3,-2,4)$, приложенные к одной точке. Вычислить, какую работу производит равнодействующая этих сил, когда ее точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается вдоль вектора $\vec{r}=(-1,-4,3)$.
4. Вычислить площадь и высоту треугольника *ABC*, где $A(1,2,0)$, $B(3,0,-3)$, $C(5,2,6)$.
5. При каком значении *m* векторы $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+m\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{j}$, $\vec{c}=3\vec{i}+\vec{k}$ компланарны?

Вариант 2

1. Выяснить является ли система векторов $\vec{a_1}=(-7,21,-49)$, $\vec{a_2}=(4,12,28)$ линейно зависимой?
2. Даны векторы $\vec{a}=(4,-2,-4)$ и $\vec{b}=(6,-3,2)$. Вычислить скалярное произведение векторов $\vec{p}=\vec{a}+2\vec{b}$, $\vec{q}=2\vec{a}-3\vec{b}$.
3. Вектор $\vec{x}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}=(4,-2,-3)$ и $\vec{b}=(0,1,3)$ и образует с осью *OY* тупой угол. Зная, что $|\vec{x}|=2b$, найти его координаты.
4. Показать, что векторы $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+4\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}-2\vec{j}$, $\vec{c}=3\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}$ компланарны и найти линейную зависимость между ними.
5. Каковы бы ни были векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторы $\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{b}-\vec{c}$, $\vec{c}-\vec{a}$ компланарны. Доказать это утверждение аналитически.

Вариант 3

1. Найти орт вектора $\vec{a}=(6,-2,2)$.
2. Показать, что векторы $\vec{a}=(2,3,-1)$, $\vec{b}=(5,7,0)$, $\vec{c}=(3,-2,4)$ образуют базис и найти координаты вектора $\vec{d}=(4,12,-3)$ в этом базисе.
3. Найти угол между биссектрисами углов *XOY* и *YOZ*.
4. Найти единичный вектор $\vec{p}$, одновременно перпендикулярный вектору $\vec{i}$ и вектору $\vec{a}=(3,6,8)$.
5. Доказать компланарность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, если $[\vec{a},\vec{b}]+[\vec{b}+\vec{c}]+[\vec{c}+\vec{a}]=\vec{0}$.

Вариант 4

1. Дан параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{r}$, $\overrightarrow{A'C} = \vec{s}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{t}$. Выразить векторы $\overrightarrow{B'D}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AC'}$ через $\vec{r}$, $\vec{s}$, $\vec{t}$.
2. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ линейно независимы. Выяснить, будут ли линейно независимыми векторы $\vec{p} = -\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$, $\vec{q} = 2\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$, $\vec{r} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.
3. Найти вектор $\vec{x}$, коллинеарный вектору $\vec{a} = (2,2,-1)$ и удовлетворяющий условию $(\vec{x},\vec{a}) = 3$.
4. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{b} = 5\vec{j} - 7\vec{k}$.
5. Вычислить произведения: $(\vec{b},\vec{c} + \vec{a},\vec{b} + 2\vec{c})$, $(\vec{a} + \vec{b},\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c},\vec{c} - \vec{a})$, $(\vec{c} + \vec{b},2\vec{a},\vec{b})$, если $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = 5$.

Вариант 5

4. Дан правильный тетраэдр $ABCD$. DO – высота тетраэдра. DK – медиана грани DCB. Выразить векторы $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DO}$, $\overrightarrow{DK}$ через векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$.
5. Векторы $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ образуют базис пространства. Выяснить будут ли векторы $\vec{a} = 2\vec{p} - 3\vec{q} + \vec{r}$, $\vec{b} = -\vec{p} + \vec{q} - 2\vec{r}$, $\vec{c} = -2\vec{p} - \vec{q} + \vec{r}$ образовывать базис?
6. Найти длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\vec{m} = 2\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{m} = \vec{a} - 2\vec{b}$, где $\vec{a}$ и $\vec{b}$ - единичные векторы, угол между которыми 60°.
7. Найти единичный вектор $\vec{q}$, одновременно перпендикулярный векторам $\vec{j}$ и $\vec{a} = (2,0,-8)$.
8. Вектор $\vec{c}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, величина угла между которыми равна 30°. Зная, что $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 3$ вычислить смешанное произведение $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$.

Вариант 6

1. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$. SF – медиана грани SDC, $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}) = 0$. Выразить векторы $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{SF}$, $\overrightarrow{AB}$ через векторы $\overrightarrow{AS} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{SO} = \vec{c}$.
2. Даны три вектора $\vec{p} = (3,-2,1)$, $\vec{q} = (-1,1,-2)$, $\vec{r} = (2,1,-3)$. Найти разложение по ним вектора $\vec{m} = (11,-6,5)$.
3. Используя свойства скалярного произведения, доказать теорему Пифагора.
4. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ составляют угол в 45°. Найти площадь треугольника построенного на векторах $\vec{a} - 2\vec{b}$, $3\vec{a} + 2\vec{b}$, если $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 5$.

5. Вычислить высоту параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}$, $\vec{b}=-\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{c}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$.

Вариант 7

1. Три силы $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$, $\vec{F_3}$, приложенные к одной точке, имеют взаимно перпендикулярные направления. Определить величину их равнодействующей $\vec{R}$, если $|\vec{F_1}|=1$, $|\vec{F_2}|=8$, $|\vec{F_3}|=5$.
2. Даны три вектора $\vec{m}=(-1,1,-2)$, $\vec{n}=(2,1,-3)$, $\vec{k}=(3,-2,1)$. Найти разложение вектора $\vec{a}=(-6,5,11)$ по базису $\vec{m}$, $\vec{n}$, $\vec{k}$.
3. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ попарно образуют друг с другом углы, каждый из которых равен 60°. Зная, что $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=4$, $|\vec{c}|=6$, определить длину вектора $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.
4. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}=4\vec{i}-5\vec{j}$, $\vec{b}=4\vec{j}-3\vec{k}$.
5. Доказать, что векторы $\vec{m}-2\vec{n}$, $\vec{n}-\vec{k}$, $2\vec{k}-\vec{m}$ компланарны. Здесь $\vec{m}$, $\vec{n}$, $\vec{k}$ - произвольные векторы.

Вариант 8

1. В тетраэдре $ABCD$ даны ребра, выходящие из вершины D: $\overrightarrow{DA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{DB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{DC}=\vec{c}$. Выразить через эти векторы медиану AL грани ABC.
2. Векторы $\vec{l}$, $\vec{m}$, $\vec{n}$ разложены по трем компланарным векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$: $\vec{l}=2\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$, $\vec{m}=2\vec{b}-\vec{c}-\vec{a}$, $\vec{n}=2\vec{c}-\vec{a}-\vec{b}$. Определить, являются ли векторы $\vec{l}$, $\vec{m}$, $\vec{n}$ базисом пространства.
3. Найти вектор $\vec{x}$, коллинеарный вектору $\vec{p}=(3,2,4)$ и удовлетворяющий условию $(\vec{x},\vec{p})=-29$.
4. Векторы $\vec{m}$, $\vec{n}$, $\vec{p}$ являются взаимно перпендикулярными ортами, образующими правую тройку. Разложить вектор $\vec{q}=[3\vec{m}+4\vec{n},\vec{m}+6\vec{n}+4\vec{p}]$ по векторам $\vec{m}$, $\vec{n}$, $\vec{p}$.
5. Доказать тождество $(\vec{a}+\vec{b},\vec{b}+\vec{c},\vec{c}+\vec{a})=2(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$.

Вариант 9

1. Дан параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$, $\overrightarrow{AA'}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{c}$. Построить вектор $-\frac{1}{2}(\vec{c}-\vec{b})+\vec{a}$.
2. Определить, образуют ли векторы $\vec{p}=5\vec{i}+7\vec{j}$, $\vec{q}=3\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$, $\vec{r}=2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$ базис пространства.

3. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ попарно образуют друг с другом углы, каждый из которых равен 60°. Зная, что $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 3$, $|\vec{c}| = 2$, определить длину вектора $2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.
4. Найти единичный вектор $\vec{m}$, одновременно перпендикулярный векторам $\vec{k}$ и $\vec{r} = (6,8,11)$.
5. Вычислить высоту параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$.

Вариант 10

1. В пирамиде $ABCD$ точки F и Q – середины ребер AD и BC соответственно. Выразить векторы $\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{FQ}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$.
2. Доказать, что векторы $\vec{a} = (1,2,3)$, $\vec{b} = (-1,3,2)$, $\vec{c} = (7,-3,5)$ образуют базис пространства и найти координаты вектора $\vec{d} = (6,10,17)$ в этом базисе.
3. Дан треугольник ABC и известны координаты векторов $\overrightarrow{AB} = \left(-1,-1,-\sqrt{2}\right)$, $\overrightarrow{AC} = \left(\sqrt{3},\sqrt{3},-\sqrt{6}\right)$. Найти углы треугольника.
4. Треугольник ABC построен на векторах $\overrightarrow{AB} = (2,0,6)$ $\overrightarrow{AC} = (3,4,0)$. Найти длину высоты AD и синус угла C этого треугольника.
5. Дан тетраэдр $ABCD$ и известны координаты векторов $\overrightarrow{AB} = (2,0,0)$, $\overrightarrow{AC} = (3,4,0)$, $\overrightarrow{AD} = (3,4,2)$. Найти высоту DH этого тетраэдра.

3. Индивидуальное задание по теме «Прямая и плоскость»

НАЙТИ:

1. Уравнения боковых ребер.
2. Длины боковых ребер.
3. Уравнение основания АВС
4. Углы между ребрами при вершине Д.
5. Уравнения апофемы грани АВД.
6. Углы между ребрами и основанием АВС.
7. Двугранные углы при основании АВС.
8. Уравнения перпендикуляра к ребрам АД и ВС
9. Уравнения высоты из вершины Д.
10. Длину апофемы грани АВД.
11. Длину перпендикуляра к ребрам АД и ВС.
12. Длину высоты из вершины Д.
13. Основание высоты из вершины Д.
14. Объем тетраэдра
15. Площадь основания

Вариант № 1

Даны вершины тетраэдра: А(2,-1,1), В(5,5,4), С(3,2,-1), Д(4,1,3)

Вариант №2
Даны вершины тетраэдра:
A(-10,-13,-11), B(-7,-7,-8), C(-9,-10,-13), Д(-8,-11,-9)
Вариант №3
Даны вершины тетраэдра: A(4,1,3), B(7,7,6), C(5,4,1), Д(6,3,5).
Вариант №4
Даны вершины тетраэдра: A(7,4,6), B(10,10,9), C(8,7,4), Д(9,6,8).
Вариант №5
Даны вершины тетраэдра: A(-9,-12,-10), B(-6,-6,-7), C(-8,-9,-12),Д(-7,-10,-8).
Вариант №6
Даны вершины тетраэдра: A(3,0,2), B(6,6,5), C(4,3,0), Д(5,2,4).
Вариант №7
Даны вершины тетраэдра: A(-7,-10,-8), B(-4,-4,-5), C(-6,-7,-10), Д(-5,-8,-6).
Вариант №8
Даны вершины тетраэдра: A(5,2,4), B(8,8,7), C(6,5,2), Д(7,4,6).
Вариант №9
Даны вершины тетраэдра: A(-4,-7,-5), B(-1,-1,-2), C(-3,-4,-7), Д(-2,-5,-3)
Вариант №10
Даны вершины тетраэдра: A(6,3,5), B(9,9,8), C(7,6,3), Д(8,5,7).
Вариант №11
Даны вершины тетраэдра: A(-8,-11,-9), B(-5,-5,-6), C(-7,-8,-11), Д(-6,-9,-7).
Вариант №12
Даны вершины тетраэдра: A(8,5,7), B(11,11,10), C(9,8,5), Д(10,7,9).
Вариант №13
Даны вершины тетраэдра: A(-6,-9,-7), B(-3,-3,-4), C(-5,-6,-9), Д(-4,-7,-5).
Вариант № 14
Даны вершины тетраэдра: A(2,-1,1), B(5,5,4), C(3,2,-1), Д(4,1,3).
Вариант №15
Даны вершины тетраэдра: A(-10,-13,-11), B(-7,-7,-8), C(-9,-10,-13), Д(-8,-11,-9).
Вариант №16
Даны вершины тетраэдра: A(4,1,3), B(7,7,6), C(5,4,1), Д(6,3,5).
Вариант №17
Даны вершины тетраэдра: A(7,4,6), B(10,10,9), C(8,7,4), Д(9,6,8).
Вариант №18
Даны вершины тетраэдра: A(3,0,2), B(6,6,5), C(4,3,0), Д(5,2,4).
Вариант №19
Даны вершины тетраэдра: A(-7,-10,-8), B(-4,-4,-5), C(-6,-7,-10), Д(-5,-8,-6).
Вариант №20
Даны вершины тетраэдра: A(5,2,4), B(8,8,7), C(6,5,2), Д(7,4,6).

4. Индивидуальное задание по теме «Линии второго порядка на плоскости»

Вариант 1
Найти центр или вершину, полуоси, эксцентриситет, директрисы, фокусы, построить линию

$$(x-6)^2-3(y+4)^2=144$$
$$12(x-6)^2+3(y+6)^2=144$$
$$x^2+x=y$$

Вариант 2

Найти центр или вершину, полуоси, эксцентриситет, директрисы, фокусы, построить линию

$$12(x-6)^2+3(y+6)^2=144$$
$$9(x-7)^2-3(y+1)^2=144$$
$$2x^2+x=9y$$

Вариант 3

Найти центр или вершину, полуоси, эксцентриситет, директрисы, фокусы, построить линию

$$(x-9)^2-9(y+4)^2=144$$
$$(x-5)^2+9(y-2)^2=144$$
$$x=-2y^2+y$$

Вариант 4.

Найти центр или вершину, полуоси, эксцентриситет, директрисы, фокусы, построить линию

$$(x+5)^2-16(y+4)^2=144$$
$$(x-5)^2+6(y+2)^2=144$$
$$6x=-4y^2+y$$

Вариант 5.

Найти центр или вершину, полуоси, эксцентриситет, директрисы, фокусы, построить линию

$$(x-3)^2+3(y+9)^2=144$$
$$3(x+5)^2-6(y+2)^2=144$$
$$3x^2+x=-y$$

Вариант 6.

Найти центр или вершину, полуоси, эксцентриситет, директрисы, фокусы, построить линию

$$(x-6)^2-(y+4)^2=144$$
$$(x+6)^2-3(y+3)^2=144$$
$$8x=y^2+y$$

Вариант 7.

Найти центр или вершину, полуоси, эксцентриситет, директрисы, фокусы, построить линию

$12(x-6)^2+3(y+9)^2=144$

$9(x-7)^2-3(y+1)^2=144$

$-6x=y^2+y$

Вариант 8.

Найти центр или вершину, полуоси, эксцентриситет, директрисы, фокусы, построить линию

1. $3(x-7)^2-3(y+4)^2=144$
2. $6(x-5)^2+24(y+2)^2=144$
3. $9x=y^2+y$

Вариант 9.

Найти центр или вершину, полуоси, эксцентриситет, директрисы, фокусы, построить линию

1. $(x-1)^2-18(y+4)^2=144$
2. $(x-5)^2+9(y-2)^2=144$
3. $-4x^2+x=y$

Вариант 10.

Найти центр или вершину, полуоси, эксцентриситет, директрисы, фокусы, построить линию

1. $(x-4)^2-24(y+8)^2=144$
2. $12(x-6)^2+3(y+6)^2=144$
3. $3x=-y^2+y$

5. Индивидуальное задание по теме «Поверхности второго порядка»

Вариант № 1

Построить поверхности, заданные уравнениями:

1. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{25}=1$ **7.** $-x^2+y^2=1;$

2. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{25}=1;$ **8.** $x^2=2z;$

3. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{4}=1;$ **9.** $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=0;$

4. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=z;$ **10.** $x^2-4=0;$

5. $\frac{x^2}{9}-\frac{z^2}{16}=y;$ **11.** $y^2=0;$

6. $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1;$ **12.** $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{1} = 0.$

Вариант № 2.

Построить поверхности, заданные уравнениями:

1. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{9} = 1;$ **7.** $-\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{36} = 1;$

2. $-\frac{x^2}{16} + \frac{z^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1;$ **8.** $y^2 = 4z;$

3. $-\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1;$ **9.** $\frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 0;$

4. $\frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = x;$ **10.** $y^2 - 25 = 0;$

5. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = z;$ **11.** $z^2 = 0;$

6. $\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$ **12.** $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{25} = 0.$

Вариант № 3.

Построить поверхности, заданные уравнениями:

1. $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1;$ **7.** $-\frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1;$

2. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{25} = 1;$ **8.** $z^2 = 2x;$

3. $-\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{9} = 1;$ **9.** $\frac{z^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 0;$

4. $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{3} = z;$ **10.** $z^2 - 16 = 0;$

5. $\frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = x;$ **11.** $x^2 = 0;$

6. $\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1$ **12.** $-\frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 0.$

Вариант № 4.

Построить поверхности, заданные уравнениями:

1. $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{36} + \frac{z^2}{9} = 1;$ **7.** $\frac{z^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1;$

2. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1;$ **8.** $x^2 = 2y;$

3. $-\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1;$ **9.** $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{16} = 0;$

4. $\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{16} = y;$ **10.** $y^2 - 9 = 0;$

5. $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{36} = z$;

6. $\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$;

11. $z^2 = 0$;

12. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{1} = 0$.

Вариант № 5.

Построить поверхности, заданные уравнениями:

1. $\frac{x^2}{9} + y^2 + \frac{z^2}{16} = 1$;

2. $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} + z^2 = 1$;

3. $-\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{25} = 1$;

4. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = z$

5. $\frac{x^2}{9} - \frac{z^2}{4} = y$;

6. $\frac{x^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$;

7. $-\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$;

8. $y^2 = 2x$;

9. $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 0$;

10. $z^2 - 16 = 0$;

11. $x^2 = 0$;

12. $-\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 0$.

Вариант № 6.

Построить поверхности, заданные уравнениями:

1. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$;

2. $x^2 - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$;

3. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{16} = 1$;

4. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{25} = 1$;

5. $\frac{x^2}{16} + \frac{z^2}{9} = y$;

6. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$;

7. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$;

8. $\frac{x^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 0$;

9. $z^2 = 4x$;

10. $x^2 - 9 = 0$;

11. $z^2 = 0$;

12. $-x^2 + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 0$.

Вариант № 7.

Построить поверхности, заданные уравнениями:

1. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$;

2. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{1} - \frac{z^2}{9} = 1$;

3. $-\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{1} + \frac{z^2}{25} = 1$;

4. $\frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{16} = y$;

7. $-\frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$;

8. $y^2 = 2z$;

9. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$;

10. $z^2 - 25 = 0$;

5. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = z$; 11. $y^2 = 0$;

6. $y^2 + \frac{z^2}{4} = 1$; 12. $-\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 0$.

Вариант № 8.

Построить поверхности, заданные уравнениями:

1. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$; 7. $\frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{16} = 1$;

2. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{4} = 1$; 8. $y^2 = 9z$;

3. $-x^2 - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$; 9. $\frac{x^2}{25} - \frac{z^2}{16} = 0$;

4. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = z$; 10. $z^2 = 25$;

5. $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = z$; 11. $y^2 = 0$;

6. $\frac{x^2}{25} + y^2 = 1$; 12. $\frac{x^2}{25} - y^2 + \frac{z^2}{4} = 0$.

Вариант № 9.

Построить поверхности, заданные уравнениями:

1. $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1$; 7. $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$;

2. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{25} = 1$; 8. $y^2 = 9z$;

3. $x^2 - \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{16} = 1$; 9. $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{25} = 0$;

4. $\frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = x$; 10. $y^2 = 25$;

5. $y^2 - \frac{x^2}{4} = z$; 11. $x^2 = 0$;

6. $\frac{x^2}{16} + \frac{z^2}{25} = 1$; 12. $-\frac{x^2}{16} + y^2 + \frac{z^2}{25} = 0$.

Вариант № 10.

Построить поверхности, заданные уравнениями:

1. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$; 7. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$;

2. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{16} = 1$; 8. $y^2 = 4x$;

3. $x^2 - \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1$; 9. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 0$;

4. $4x^2 + y^2 - 16 = 0$; 10. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{36} = 0$;

5. $\frac{x^2}{9} - \frac{z^2}{16} = y$; **11.** $-\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 0$;

6. $x^2 + y^2 = 9$; **12.** $z^2 - 25 = 0$.

2 семестр

1. Индивидуальное задание по теме «Бинарная алгебраическая операция. Группа»

№ Вар	1. Определить, являются ли Б.А.О. действия +, -, ×, ÷ на указанном множестве	2. Определить, какими свойствами обладает указанная Б.А.О. на множестве ***R***	3. Определить, является ли указанное множество группой относительно заданной Б.А.О. $*$.
1	а) $\{x : x \in N\}$; б) $\{0\}$	$a * b = b$	$R^* = R \setminus \{0\}$; $a * b = 4ab$
2	а) $\{-x : x \in N\}$; б) $\{1\}$	$a * b = a + b + 2$	$R^* = R \setminus \{0\}$; $a * b = \frac{ab}{4}$
3	а) $\{x : x \in Z \setminus \{0\}\}$; б) $\{-1, +1\}$	$a * b = a + b - 2$	$R \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$; $a * b = a + b + 2ab$
4	а) $\{x : x \in Z^+\}$; б) $\{0,1,2\}$	$a * b = 2a\|b\|$	$R^* = R \setminus \{0\}$; $a * b = \frac{ab}{3}$
5	а) $\{x : x \in Z^-\}$; б) $\{0, +1\}$	$a * b = 2\|a\|b$	$R^* = R \setminus \{0\}$; $a * b = 3ab$
6	а) $\{2x : x \in Z\}$; б) $\{0, -1\}$	$a * b = \frac{1}{2}a\|b\|$	$R \setminus \{-1\}$; $a * b = a + b + ab$
7	а) $\{2x + 1 : x \in Z\}$; б) $\{-1\}$	$a * b = \frac{1}{2}\|a\|b$	$\{a + b\sqrt{2} : a, b \in Q\}$; $a * b = a + b$
8	а) $\{nx : x \in Z, n \in N\}$; б) $\{i, -i, 1, -1\}$ $(i^2 = -1)$	$a * b = 5ab$	$\{a + b\sqrt{3} : a, b \in Q\}$; $a * b = a + b$
9	а) $\{x : x \in Q\}$; б) $\{0\}$	$a * b = \sqrt[4]{a}$	$\{a + b + ab\sqrt{2} : a, b \in Q\}$; $a * b = a + b$
10	а) $\{x : x \in Q \setminus \{0\}\}$; б) $\{1\}$	$a * b = a + b - 1$	$\{a + 2b\sqrt{2} : a, b \in Q\}$; $a * b = a + b$
11	а) $\{x : x \in Q^+\}$; б) $\{-1, +1\}$	$a * b = a + b + 1$	$\{a + b\sqrt[3]{2} : a, b \in Q\}$; $a * b = a + b$
12	а) $\{x : x \in Q^-\}$; б) $\{-1, 0, +1\}$	$a * b = (a + b)^2$	$\{a - b\sqrt{2} : a, b \in Q\}$; $a * b = a + b$
13	а) $\{x : x \in R\}$; б) $\{0, +1\}$	$a * b = (a + b)^3$	$\{-1, +1\}$; $a * b = a + b$
14	а) $\{x : x \in R \setminus \{0\}\}$; б) $\{0, -1\}$	$a * b = \frac{a + b}{3}$	$\{a + b\sqrt[3]{5} : a, b \in Z\}$; $a * b = a + b$
15	а) $\{x : x \in R^-\}$; б) $\{-1\}$	$a * b = \frac{a - b}{3}$	$\{2a + 2b\sqrt{2} : a, b \in Z\}$; $a * b = a + b$

2. Индивидуальное задание по теме «Комплексные числа»

1 вариант

1. Вычислить в алгебраической форме:

$$\left(\frac{-i^{17}}{1-2i^{43}}\right)^3+\frac{2+i}{3i^{24}-i^{41}}.$$

2. Решить уравнения:

а) $z^2+4z+11=0$; б) $(2+i)z^2-(5-i)z+(2-2i)=0$.

3. Данные комплексные числа записать в тригонометрической форме и вычислить значение ω, записав ответ в алгебраической форме:

$$z_1=\sqrt{3}-2\sqrt{3}i;\ z_2=1-i;\ \omega=\frac{z_1^2}{z_2}.$$

4. Вычислить, записав результат в алгебраической форме:

$$\frac{\left(\sqrt{8}-\sqrt{8}i\right)^{18}(-2-2\sqrt{3}i)^{20}}{(-\sqrt{3}+i)^{12}}.$$

5. Вычислить значение корня:

а) $\sqrt[5]{-12}$; б) $\sqrt[6]{-3i}$; в) $\sqrt[4]{-2\sqrt{3}-2i}$.

2 вариант

1. Вычислить в алгебраической форме:

$$\left(\frac{-i^{19}}{2+5i^{27}}\right)^2-\frac{3-i^{71}}{3i^{32}+i^{33}}.$$

2. Решить уравнения:

а) $z^2+16z+65=0$; б) $z^2-(3-2i)z+(5-5i)=0$.

3. Данные комплексные числа записать в тригонометрической форме. Вычислить значение ω и записать ответ в алгебраической форме:

$$z_1=2\sqrt{3}+2i;\ z_2=1+i;\ \omega=z_1^3\,z_2.$$

4. Вычислить, записав результат в алгебраической форме:

$$\frac{\left(-\sqrt{3}-\sqrt{3}i\right)^{13}(1-\sqrt{3}i)^{10}}{(-2+3i)^{14}}.$$

5. Вычислить значение корня:

а) $\sqrt[4]{-5}$; б) $\sqrt[7]{7i}$; в) $\sqrt[4]{\dfrac{1+i\sqrt{32}}{32}}$.

3 вариант

1. Вычислить в алгебраической форме:

$$\left(\frac{i^{27}}{5-5i^{45}}\right)^3+\frac{4-i}{3i^{24}-i^{61}}.$$

2. Решить уравнения:

а) $z^2+12z+37=0$; б) $z^2-(5-3i)z+(4-7i)=0$.

3. Данные комплексные числа записать в тригонометрической форме. Вычислить значение ω и записать ответ в алгебраической форме:

$$z_1 = 1 + \sqrt{3}i;\; z_2 = 4 - 4i;\; \omega = \frac{z_2}{(\overline{z_1})^3}.$$

4. Вычислить, записав результат в алгебраической форме:

$$\frac{\left(-2\sqrt{3} - 2i\right)^{14}(1 - \sqrt{3}i)^{16}}{(-16 + 16i)^8}.$$

5. Вычислить значение корня:

а) $\sqrt[5]{-32}$; б) $\sqrt[4]{\frac{1}{81}i}$; в) $\sqrt[3]{-8 + i}$.

4 вариант

1. Вычислить в алгебраической форме:

$$\left(\frac{i^6}{2 + 3i^{25}}\right)^2 - \frac{2 + i^{15}}{3i^{44} - i^{19}}.$$

2. Решить уравнения:

а) $z^2 + 14z + 50 = 0$; б) $z^2 - (2 + i)z + (-1 + 7i) = 0$.

3. Данные комплексные числа записать в тригонометрической форме. Вычислить значение ω и записать ответ в алгебраической форме:

$$z_1 = 2 - \sqrt{2}i;\; z_2 = \sqrt{3} + i;\; \omega = \frac{\overline{z_1}}{z_2^2}.$$

4. Вычислить, записав результат в алгебраической форме:

$$\frac{\left(-\sqrt{5} + \sqrt{5}i\right)^{16}(2 + 2\sqrt{3}i)^{12}}{(2\sqrt{3} - 2i)^{17}}.$$

5. Вычислить значение корня:

а) $\sqrt[4]{\frac{1}{81}i}$; б) $\sqrt[6]{-6i}$; в) $\sqrt[5]{\sqrt{8} - i\sqrt{8}}$.

5 вариант

1. Вычислить в алгебраической форме:

$$\left(\frac{-i^{14}}{1 - 2i^{23}}\right)^3 + \frac{4 - i}{2i^{66} + i^{73}}.$$

2. Решить уравнения:

а) $z^2 + 18z + 82 = 0$; б) $z^2 + (2i - 7)z + 13 - i = 0$.

3. Данные комплексные числа записать в тригонометрической форме. Вычислить значение ω и записать ответ в алгебраической форме:

$$z_1 = 2 - 2\sqrt{3}i;\; z_2 = 1 + i;\; \omega = \frac{\overline{z_1}}{z_2^3}.$$

4. Вычислить, записав результат в алгебраической форме:

$$\frac{\left(-\sqrt{6} - \sqrt{6}i\right)^{11}(-2 + 2\sqrt{3}i)^{21}}{(-\sqrt{3} + i)^{16}}.$$

5. Вычислить значение корня:

а) $\sqrt[6]{-6}$; б) $\sqrt[3]{-\frac{1}{27}i}$; в) $\sqrt[4]{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}$.

6 вариант

1. Вычислить в алгебраической форме:

$$\left(\frac{-i^{21}}{3+2i^{53}}\right)^2+\frac{2-3i^{22}}{i^{88}-2i^{41}}.$$

2. Решить уравнения:

а) $z^2+8z+20=0$; б) $(2+i)z^2-(5-i)z+(2-2i)=0$.

3. Данные комплексные числа записать в тригонометрической форме. Вычислить значение ω и записать ответ в алгебраической форме:

$$z_1=2+2i;\ z_2=1-i\sqrt{3};\ \omega=\overline{z_1}(z_2)^3.$$

4. Вычислить, записав результат в алгебраической форме:

$$\frac{\left(1-\sqrt{3}i\right)^{14}(-2-2i)^{13}}{(-8\sqrt{3}+8i)^{12}}.$$

5. Вычислить значение корня:

а) $\sqrt[5]{32}$; б) $\sqrt[4]{-\frac{1}{81}i}$; в) $\sqrt[4]{-128+128i\sqrt{3}}$.

7 вариант

1. Вычислить в алгебраической форме:

$$\left(\frac{4i^3}{2-i^{15}}\right)^3-\frac{2i}{2i^{225}+1-i^{11}}.$$

2. Решить уравнения:

а) $z^2+6z+10=0$; б) $z^2-(3-2i)z+(5-5i)=0$.

3. Данные комплексные числа записать в тригонометрической форме. Вычислить значение ω и записать ответ в алгебраической форме:

$$z_1=4+4i;\ z_2=-\sqrt{3}-i;\ \omega=\frac{\overline{z_1}}{z_2^2}.$$

4. Вычислить, записав результат в алгебраической форме:

$$\frac{(2-2i)^{18}(-2+2\sqrt{3}i)^{20}}{(-\sqrt{3}-i)^{15}}.$$

5. Вычислить значение корня:

а) $\sqrt[5]{\frac{1}{32}}$; б) $\sqrt[4]{-64i}$; в) $\sqrt[4]{-8-8i\sqrt{3}}$.

8 вариант

1. Вычислить в алгебраической форме:

$$\left(\frac{1-3i^{31}}{3+2i^{13}}\right)^2+\frac{2-i}{5i^{41}-2i^6}.$$

2. Решить уравнения:

а) $z^2 + 22z + 122 = 0$; б) $z^2 - (3-2i)z + (5-5i) = 0$.

3. Данные комплексные числа записать в тригонометрической форме. Вычислить значение ω и записать ответ в алгебраической форме:

$$z_1 = 2-2i;\ z_2 = -3\sqrt{3}-3i;\ \omega = \frac{\overline{z_2}}{z_1^2}.$$

4. Вычислить, записав результат в алгебраической форме:

$$\frac{\left(\sqrt{3}-i\right)^{19}(8+8\sqrt{3}i)^{13}}{(-2-2i)^{15}}.$$

5. Вычислить значение корня:

а) $\sqrt[6]{-625}$; б) $\sqrt[4]{-\frac{1}{16}i}$; в) $\sqrt[5]{\sqrt{8}-i\sqrt{8}}$.

9 вариант

1. Вычислить в алгебраической форме:

$$\left(\frac{1+4i^{37}}{1+3i^{35}}\right)^3 - \frac{4+i^{46}}{6i^{23}-2i^6}.$$

2. Решить уравнения

а) $z^2 + 20z + 104 = 0$; б) $z^2 - (2+i)z + (-1+7i) = 0$.

3. Данные комплексные числа записать в тригонометрической форме. Вычислить значение ω и записать ответ в алгебраической форме:

$$z_1 = -12-12i;\ z_2 = -2+i2\sqrt{3};\ \omega = \overline{z_2}(z_1)^3.$$

4. Вычислить, записав результат в алгебраической форме:

$$\frac{\left(-3\sqrt{8}+3\sqrt{8}i\right)^7(1-\sqrt{3}i)^{22}}{(-4\sqrt{3}-4i)^9}.$$

5. Вычислить значение корня:

а) $\sqrt[6]{-64}$; б) $\sqrt[4]{i}$; в) $\sqrt[3]{7-24i}$.

10 вариант

1. Вычислить в алгебраической форме:

$$\left(\frac{i^5+3}{1+i^{21}}\right)^3 + \frac{2-i^{64}}{3i^{41}+2i^8}.$$

2. Решить уравнения:

а) $z^2 - 24z + 145 = 0$; б) $z^2 + (2i-7)z + 13 - i = 0$.

3. Данные комплексные числа записать в тригонометрической форме. Вычислить значение ω и записать ответ в алгебраической форме:

$$z_1 = -1-\sqrt{3}i;\ z_2 = -4-4i;\ \omega = \frac{z_2}{(\overline{z_1})^3}.$$

4. Вычислить, записав результат в алгебраической форме:

$$\frac{\left(\sqrt{12}-\sqrt{12}i\right)^8(-\sqrt{3}+i)^{12}}{(-1-i)^{15}}.$$

5. Вычислить значение корня:

а) $\sqrt[5]{-243}$; б) $\sqrt[4]{-16i}$; в) $\sqrt[5]{\sqrt{\dfrac{3}{2}}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i}$.

3. Индивидуальное задание по теме «Матрицы и определители. Системы линейных алгебраических уравнений»

Задание 1. Решить матричное уравнение. Сделать проверки обратной матрицы и решения.

Задание 2. Методом Гаусса исследовать две системы линейных уравнений на совместность, найти их общее решение, сделать проверки, определить фундаментальную систему решений соответствующих однородных систем.

Вариант №1

I. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

II. а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ -x_1 + 4x_2 + x_3 + 6x_4 = 3 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + 9x_2 - 8x_3 + 10x_4 = 1 \\ 10x_1 + 11x_2 + 23x_3 - 16x_4 = 1 \end{cases}$.

Вариант №2

I. $X \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & -5 & 2 \\ -1 & 7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -2 & 4 & -4 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}$.

II. а) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 6 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ 2x_1 + x_2 - x_4 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 25 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 11 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 8x_4 = 28 \end{cases}$.

Вариант №3

I. $X \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -4 \\ 13 & 1 & 10 \\ 12 & 2 & 8 \end{pmatrix}$.

II. а) $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 5x_5 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 6x_5 = 0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = -4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -13 \\ 4x_1 - 5x_2 + 6x_3 = -10 \end{cases}$.

Вариант №4

I. $X\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$

II. а) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_4 = -1 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x_1 - 15x_2 - 8x_3 = 22 \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = -8 \\ 5x_1 - 38x_2 - 25x_3 = 57 \end{cases}$.

Вариант №5

I. $X\begin{pmatrix} 1 & 7 & -6 \\ 1 & 7 & -5 \\ -1 & -6 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 11 & 7 \\ 0 & -3 & 1 \\ -4 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$

II. а) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ 3x_1 - 6x_2 + 5x_3 = 6 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 1 \end{cases}$.

Вариант №6

I. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}X = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$

II. а) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 - 3x_4 + 5x_5 = 2 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 - 7x_5 = 3 \\ 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 5x_4 + 8x_5 = 3 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_3 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$.

Вариант №7

I. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$

II. а) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ 4x_1 + 11x_2 - 13x_3 + 16x_4 = 0 \\ 7x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 4x_1 + 11x_2 - 13x_3 + 16x_4 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 1 \\ x_1 + 7x_2 - 8x_3 + 9x_4 = 6 \end{cases}$.

Вариант №8

I. $X\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

II. а) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 3 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = -1 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$.

Вариант №9

I. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}X = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

II. а) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 5 \\ 2x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 6x_4 = 10 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 20 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$.

Вариант №10

I. $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & 6 & 7 \end{pmatrix}X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

II. а) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2 \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 = 5 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 5 \\ 2x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 6x_4 = 7 \end{cases}$.

4. Индивидуальное задание по теме «Векторные пространства»

Задание 1**.** Показать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют базис и найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе:

1. $= (-3, 4, 7)$, $\vec{b} = (0, -8, 11)$, $\vec{c} = (13, 1, 5)$, $\vec{d} = (-19, -1, 20)$.
2. $\vec{a} = (4, 0, 9)$, $\vec{b} = (10, -7, 2)$, $\vec{c} = (-1, 1, 14)$, $\vec{d} = (-25, 20, -11)$.
3. $\vec{a} = (-8, 13, -7)$, $\vec{b} = (-3, 1, -7)$, $\vec{c} = (4, -3, 3)$, $\vec{d} = (11, 0, 19)$.
4. $\vec{a} = (-4, 17, 3)$, $\vec{b} = (-2, 0, 2)$, $\vec{c} = (12, 6, 5)$, $\vec{d} = (-20, 11, 2)$.
5. $\vec{a} = (2, -3, 14)$, $\vec{b} = (7, 0, -8)$, $\vec{c} = (11, 13, 0)$, $\vec{d} = (-6, 7, 52)$.
6. $\vec{a} = (15, -1, 0)$, $\vec{b} = (4, 7, -11)$, $\vec{c} = (-1, -2, 3)$, $\vec{d} = (-9, 12, -17)$.
7. $\vec{a} = (-4, 11, 9)$, $\vec{b} = (1, -2, 0)$, $\vec{c} = (-3, 2, -1)$, $\vec{d} = (-12, 19, 7)$.
8. $\vec{a} = (-1, 16, 7)$, $\vec{b} = (0, 3, -7)$, $\vec{c} = (3, 4, -5)$, $\vec{d} = (-2, -23, 5)$.
9. $\vec{a} = (0, -13, 2)$, $\vec{b} = (8, 5, -7)$, $\vec{c} = (-1, -1, 4)$, $\vec{d} = (7, 30, -7)$.

10. $\vec{a}$ = (-3, -7 ,4), $\vec{b}$ = (12, -1, 0), $\vec{c}$ = (-2, 2, 11), $\vec{d}$ = (3, -2, 37).
11. $\vec{a}$ = (-11, 7 ,0), $\vec{b}$ = (2, 2, 5), $\vec{c}$ = (-3, -6, 1), $\vec{d}$ = (4, -17, -9).
12. $\vec{a}$ = (2, 14 ,-1), $\vec{b}$ = (7, 0, 3), $\vec{c}$ = (9, 1, 1), $\vec{d}$ = (-12, 27, -6).
13. $\vec{a}$ = (3, -9 ,3), $\vec{b}$ = (0, 4, 11), $\vec{c}$ = (17, 1, -1), $\vec{d}$ = (20, 0, 24).
14. $\vec{a}$ = (-7, 11 ,0), $\vec{b}$ = (1, -5, 7), $\vec{c}$ = (3, 3, -5), $\vec{d}$ = (-25, 35, -2).
15. $\vec{a}$ = (0, 18 ,3), $\vec{b}$ = (-7, 1, -2), $\vec{c}$ = (1, 9, 5), $\vec{d}$ = (-4, -8, 7).
16. $\vec{a}$ = (11, -5 ,3), $\vec{b}$ = (4, -6, 0), $\vec{c}$ = (-7, 7, 2), $\vec{d}$ = (17, -7, -1).
17. $\vec{a}$ = (5, -13 ,2), $\vec{b}$ = (7, 0, 4), $\vec{c}$ = (-3, -1, 6), $\vec{d}$ = (-16, 14, -16).
18. $\vec{a}$ = (-3, 4 , 0), $\vec{b}$ = (17, 2, -11), $\vec{c}$ = (7, 5, -7), $\vec{d}$ = (4, 5, -4).
19. $\vec{a}$ = (0, 4 , -18), $\vec{b}$ = (5, -3, 6), $\vec{c}$ = (1, -11, -5, $\vec{d}$ = (-3, -11, -32).
20. $\vec{a}$ = (-7, 9 , 2), $\vec{b}$ = (10, 0, -6), $\vec{c}$ = (3, -1, 8), $\vec{d}$ = (30, -10, -6).
21. $\vec{a}$ = (12, -1 , 0), $\vec{b}$ = (3, 7, -2), $\vec{c}$ = (-1, 5, 15), $\vec{d}$ = (14, 11, 13).
22. $\vec{a}$ = (2, 17 , -5), $\vec{b}$ = (4, 8, 0), $\vec{c}$ = (1, 10, -1), $\vec{d}$ = (-3, 5, 2).
23. $\vec{a}$ = (3, -8 , 0), $\vec{b}$ = (12, -7, -4), $\vec{c}$ = (2, 1, -2), $\vec{d}$ = (-5, -18, 8).
24. $\vec{a}$ = (7, -8 , 3), $\vec{b}$ = (10, 0, -15), $\vec{c}$ = (4, -5, 8), $\vec{d}$ = (-27, -3, 40).
25. $\vec{a}$ = (-3, -1 , 6), $\vec{b}$ = (7, 0, 4), $\vec{c}$ = (5, -13, 2), $\vec{d}$ = (0, 27, -6).
26. $\vec{a}$ = (-7, 7 , 2), $\vec{b}$ = (4, -6, 0), $\vec{c}$ = (11, -5, 3), $\vec{d}$ = (14, -22, -9).
27. $\vec{a}$ = (1, 9 , 5), $\vec{b}$ = (-7, 1, -2), $\vec{c}$ = (0, 18, 3), $\vec{d}$ = (-9, -35, -15).
28. $\vec{a}$ = (3, 3 , -5), $\vec{b}$ = (1, -5, 7), $\vec{c}$ = (-7, 11, 0), $\vec{d}$ = (18, -24, 2).
29. $\vec{a}$ = (17, 1 , -1), $\vec{b}$ = (0, 4, 11), $\vec{c}$ = (3, -9, 3), $\vec{d}$ = (-23, 21, 6).
30. $\vec{a}$ = (9, 1 , 1), $\vec{b}$ = (7, 0, 3), $\vec{c}$ = (2, 14, -1), $\vec{d}$ = (30, -25, 8).

Задание 2. Даны два базиса пространства строк: e_1, e_2, e_3 и f_1, f_2, f_3. Найти:
а) матрицу А перехода от базиса e_1, e_2, e_3 к базису f_1, f_2, f_3;
б) матрицу A^{-1} обратного перехода;
в) координаты e_1 в обоих базисах;
г) координаты вектора a в базисе e_1, e_2, e_3, имеющего во втором базисе координаты (1, 1, 1).

1. $e_1 = (0,1,1), e_2 = (1,0,1), e_3 = (1,0,2);$ $f_1 = (1,1,1), f_2 = (2,1,0), f_3 = (1,-1,3)$
2. $e_1 = (1,1,-1), e_2 = (1,2,1), e_3 = (1,0,2);$ $f_1 = (-1,1,1), f_2 = (2,1,0), f_3 = (1,-1,3)$
3. $e_1 = (0,2,1), e_2 = (1,-1,1), e_3 = (1,0,2);$ $f_1 = (1,-1,1), f_2 = (2,-1,0), f_3 = (1,-1,3)$
4. $e_1 = (0,1,2), e_2 = (1,0,0), e_3 = (1,0,2);$ $f_1 = (1,1,-1), f_2 = (2,-1,0), f_3 = (1,-1,3)$
5. $e_1 = (-2,1,1), e_2 = (1,0,1), e_3 = (-1,0,2);$ $f_1 = (0,1,1), f_2 = (-2,1,0), f_3 = (1,-1,3)$
6. $e_1 = (0,3,1), e_2 = (1,2,1), e_3 = (1,0,2);$ $f_1 = (1,1,1), f_2 = (2,-1,0), f_3 = (-1,1,3)$
7. $e_1 = (2,1,1), e_2 = (-1,0,-1), e_3 = (1,0,2);$ $f_1 = (1,1,0), f_2 = (2,1,0), f_3 = (1,-1,3)$
8. $e_1 = (0,-1,-1), e_2 = (1,3,1), e_3 = (1,0,2);$ $f_1 = (1,1,1), f_2 = (2,1,0), f_3 = (2,-1,3)$
9. $e_1 = (0,-1,-1), e_2 = (1,-2,1), e_3 = (1,0,2);$ $f_1 = (1,1,1), f_2 = (2,1,0), f_3 = (1,2,3)$
10. $e_1 = (0,1,1), e_2 = (1,0,1), e_3 = (1,0,2);$ $f_1 = (1,1,1), f_2 = (3,-1,0), f_3 = (1,2,0)$
11. $e_1 = (-1,2,1), e_2 = (1,3,1), e_3 = (1,0,2);$ $f_1 = (-2,0,1), f_2 = (2,1,0), f_3 = (0,-1,3)$
12. $e_1 = (0,1,1), e_2 = (1,0,1), e_3 = (1,0,2);$ $f_1 = (1,1,1), f_2 = (2,1,0), f_3 = (1,-1,3)$
13. $e_1 = (-2,1,1), e_2 = (1,2,1), e_3 = (1,-1,2);$ $f_1 = (2,-1,1), f_2 = (2,2,0), f_3 = (1,-1,3)$
14. $e_1 = (-1,0,1), e_2 = (1,0,-2), e_3 = (1,0,2);$ $f_1 = (-1,-1,1), f_2 = (-3,1,0), f_3 = (1,-1,3)$

15. $e_1 = (2,1,1), e_2 = (1,0,1), e_3 = (1,2,2);\qquad f_1 = (1,1,1), f_2 = (2,1,0), f_3 = (1,0,-2)$
16. $e_1 = (0,1,-1), e_2 = (1,2,1), e_3 = (1,0,2);\qquad f_1 = (3,1,3), f_2 = (2,1,0), f_3 = (1,-1,-1)$
17. $e_1 = (2,1,1), e_2 = (1,-1,1), e_3 = (1,0,2);\qquad f_1 = (-1,2,1), f_2 = (2,1,0), f_3 = (1,-1,3)$
18. $e_1 = (2,1,1), e_2 = (1,0,1), e_3 = (1,0,-2);\qquad f_1 = (1,1,1), f_2 = (-3,1,0), f_3 = (-1,2,3)$
19. $e_1 = (0,1,1), e_2 = (1,0,1), e_3 = (1,0,2);\qquad f_1 = (1,1,1), f_2 = (2,1,0), f_3 = (1,-1,3)$
20. $e_1 = (0,-2,1), e_2 = (0,0,1), e_3 = (1,1,2);\qquad f_1 = (-2,1,1), f_2 = (-1,1,0), f_3 = (1,-2,1)$
21. $e_1 = (2,-1,-1), e_2 = (1,0,1), e_3 = (-1,2,2);\qquad f_1 = (1,2,1), f_2 = (-2,1,0), f_3 = (1,-1,3)$
22. $e_1 = (0,3,1), e_2 = (3,0,1), e_3 = (1,0,2);\qquad f_1 = (1,3,1), f_2 = (-2,1,0), f_3 = (-1,-1,2)$
23. $e_1 = (0,1,1), e_2 = (1,0,2), e_3 = (1,0,2);\qquad f_1 = (-1,1,1), f_2 = (-2,-1,0), f_3 = (2,-1,3)$
24. $e_1 = (0,2,3), e_2 = (1,-2,1), e_3 = (-1,0,2);\qquad f_1 = (1,0,4), f_2 = (1,-2,0), f_3 = (4,-1,3)$
25. $e_1 = (0,1,1), e_2 = (3,0,1), e_3 = (1,0,2);\qquad f_1 = (1,1,1), f_2 = (1,1,-4), f_3 = (-1,-1,3)$
26. $e_1 = (3,-1,1), e_2 = (1,0,1), e_3 = (1,2,2);\qquad f_1 = (-1,2,1), f_2 = (2,1,0), f_3 = (1,-1,1)$
27. $e_1 = (0,1,3), e_2 = (1,0,-2), e_3 = (-1,0,2);\qquad f_1 = (4,1,1), f_2 = (2,-1,0), f_3 = (1,-1,2)$
28. $e_1 = (0,1,5), e_2 = (-1,0,1), e_3 = (1,0,-3);\qquad f_1 = (0,1,1), f_2 = (0,1,0), f_3 = (1,-1,3)$
29. $e_1 = (0,1,1), e_2 = (1,0,1), e_3 = (1,0,3);\qquad f_1 = (1,1,1), f_2 = (-2,1,0), f_3 = (1,-1,3)$
30. $e_1 = (3,-2,1), e_2 = (0,0,1), e_3 = (1,0,2);\qquad f_1 = (1,-1,-1), f_2 = (2,1,0), f_3 = (1,3,-3)$

Задание 3. Найти общее решение однородной системы линейных уравнений и фундаментальную систему решений:

1. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 4x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 - 3x_5 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 - 3x_4 + 5x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 - 7x_5 = 0. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ 4x_1 - 10x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 0, \\ \qquad x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 0. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 0. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0, \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 0. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 0, \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 0. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 0. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

17. $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0, \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 0. \end{cases}$

18. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 0, \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0, \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 0, \\ 6x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 14x_3 - 31x_4 = 0. \end{cases}$

20. $\begin{cases} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 0, \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = 0. \end{cases}$

21. $\begin{cases} 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

22. $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 5x_1 + 11x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - 7x_2 - x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$

24. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 0. \end{cases}$

25. $\begin{cases} 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0, \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$

26. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ 9x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$

27. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 0. \end{cases}$

28. $\begin{cases} 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0, \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$

29. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ 9x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$

30. $\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 4x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$

5. Индивидуальное задание по теме «Линейные операторы»

Вариант 1.

1.Определить, является ли оператор $\psi : V \to V$ линейным, если $V = R^3$, $\forall\ x = (x_1, x_2, x_3)$ $\psi(x) = (x_1 + k_1, x_2 + k_2, x_3 + k_3)$, где $k \in R^3$.

2. Оператор ψ векторного пространства V ($\dim V = 3$) в некотором базисе (e_1, e_2, e_3) имеет матрицу A. Показать, что система векторов (e_1', e_2', e_3') образует базис в V и найти матрицу оператора ψ в этом базисе, если:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} e_1' &= -2e_1 - e_2 + 3e_3, \\ e_2' &= e_1 + e_2 + 2e_3, \\ e_3' &= -e_1 - e_2 - 3e_3. \end{aligned}$$

3. Линейный оператор $\psi : R^3 \to R^3$ в базисе (e_1, e_2, e_3) имеет матрицу A. Найти матрицу B этого оператора в базисе (e_1', e_2', e_3'), если:

$$\begin{aligned} e_1 &= (-1, 1, 1), \\ e_2 &= (0, 2, 3), \\ e_3 &= (2, 3, 1), \end{aligned} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 8 \\ 5 & -1 & -5 \\ -7 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} e_1' &= (-2, 1, 2), \\ e_2' &= (3, 3, 1), \\ e_3' &= (0, 1, 1). \end{aligned}$$

4. Найти: 1) ранг и образ линейного оператора;

2) дефект и ядро линейного оператора, если линейный оператор ψ в базисе (e_1, e_2, e_3, e_4) задан матрицей

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -3 & -1 \\ 4 & -17 & 11 & 2 \\ -3 & 12 & -10 & -4 \\ -1 & 0 & -5 & 7 \end{pmatrix}.$$

5. Линейный оператор $\psi : V \to V$ векторного пространства V задан в некотором базисе матрицей A. Найти собственные значения и собственные векторы, если:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -4 \\ -4 & -3 & 2 \\ 8 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

Вариант 2.

1. Определить, является ли оператор $\psi : V \to V$ линейным, если $V = R^n$, $\psi(x) = (x_1, 2x_2, \ldots, nx_n)$ $\forall$ $x \in V$.
2. Оператор ψ векторного пространства V ($\dim V = 3$) в некотором базисе (e_1, e_2, e_3) имеет матрицу A. Показать, что система векторов (e_1', e_2', e_3') образует базис в V и найти матрицу оператора ψ в этом базисе, если:
$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -5 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} e_1' &= 3e_1 + e_2 + 2e_3, \\ e_2' &= 5e_1 + 4e_2 + 5e_3, \\ e_3' &= e_1 + 2e_2 + 2e_3. \end{aligned}$$
3. Линейный оператор $\psi : R^3 \to R^3$ в базисе (e_1, e_2, e_3) имеет матрицу A. Найти матрицу B этого оператора в базисе (e_1', e_2', e_3'), если:
$$\begin{aligned} e_1 &= (0, -1, 3), \\ e_2 &= (1, 3, 1), \\ e_3 &= (0, 1, -2), \end{aligned} \quad A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & -5 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} e_1' &= (3, -2, 2), \\ e_2' &= (0, 0, 1), \\ e_3' &= (-2, 1, -2). \end{aligned}$$
4. Найти: 1) ранг и образ линейного оператора;
2) дефект и ядро линейного оператора, если линейный оператор ψ в базисе (e_1, e_2, e_3, e_4) задан матрицей
$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 & -4 \\ 3 & 10 & 4 & 13 \\ -2 & -5 & 3 & -3 \\ 0 & 4 & 19 & -8 \end{pmatrix}.$$
5. Линейный оператор $\psi : V \to V$ векторного пространства V задан в некотором базисе матрицей A. Найти собственные значения и собственные векторы, если:
$$A = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 10 \\ 1 & -1 & 1 \\ 6 & 0 & -8 \end{pmatrix}.$$

Вариант 3.

3. Определить, является ли оператор $\psi : V \to V$ линейным, если $V = R^3$, $\psi(x) = (x_1, 2x_2, 3x_3)$ $\forall\ x \in V$.
4. Оператор ψ векторного пространства V ($\dim V = 3$) в некотором базисе (e_1, e_2, e_3) имеет матрицу A. Показать, что система векторов (e_1', e_2', e_3') образует базис в V и найти матрицу оператора ψ в этом базисе, если:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} e_1' &= -3e_1 - 9e_2 - 4e_3, \\ e_2' &= e_1 + 3e_2 + e_3, \\ e_3' &= 2e_1 + 5e_2 + 2e_3. \end{aligned}$$

5. Линейный оператор $\psi : R^3 \to R^3$ в базисе (e_1, e_2, e_3) имеет матрицу A. Найти матрицу B этого оператора в базисе (e_1', e_2', e_3'), если:

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, -1), \\ e_2 &= (-1, 1, 1), \\ e_3 &= (-1, -2, 2), \end{aligned} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} e_1' &= (0, -1, -1), \\ e_2' &= (1, 0, 1), \\ e_3' &= (1, -1, 1). \end{aligned}$$

4. Найти: 1) ранг и образ линейного оператора;

2) дефект и ядро линейного оператора, если линейный оператор ψ в базисе (e_1, e_2, e_3, e_4) задан матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 5 & -14 & 14 & -3 \\ 4 & -15 & -4 & 9 \\ 3 & -11 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

5. Линейный оператор $\psi : V \to V$ векторного пространства V задан в некотором базисе матрицей A. Найти собственные значения и собственные векторы, если:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 6 \\ -6 & 8 & 6 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вариант 4.

1. Определить, является ли оператор $\psi : V \to V$ линейным, если $V = R^3$, $\forall\ x = (x_1, x_2, x_3)$ $\psi(x) = (x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3)$.
2. Оператор ψ векторного пространства V ($\dim V = 3$) в некотором базисе (e_1, e_2, e_3) имеет матрицу A. Показать, что система векторов (e_1', e_2', e_3') образует базис в V и найти матрицу оператора ψ в этом базисе, если:
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -3 \\ -4 & 1 & 3 \\ 3 & 9 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} e_1' = 3e_1 + 4e_3, \\ e_2' = 6e_1 - e_2 + 7e_3, \\ e_3' = 5e_1 - e_2 + 6e_3. \end{matrix}$$
3. Линейный оператор $\psi : R^3 \to R^3$ в базисе (e_1, e_2, e_3) имеет матрицу A. Найти матрицу B этого оператора в базисе (e_1', e_2', e_3'), если:
$$\begin{matrix} e_1 = (1, 2, 1), \\ e_2 = (1, 0, 2), \\ e_3 = (0, 3, -1), \end{matrix} \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -4 \\ 3 & -1 & -2 \\ -1 & -3 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} e_1' = (0, -1, 0), \\ e_2' = (-1, 1, -2), \\ e_3' = (1, -1, 3). \end{matrix}$$
4. Найти: 1) ранг и образ линейного оператора;

2) дефект и ядро линейного оператора, если линейный оператор ψ в базисе (e_1, e_2, e_3, e_4) задан матрицей
$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & -4 & -6 \\ -1 & 0 & -8 & 8 \\ -3 & -10 & 16 & 4 \end{pmatrix}.$$
5. Линейный оператор $\psi : V \to V$ векторного пространства V задан в некотором базисе матрицей A. Найти собственные значения и собственные векторы, если:
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 4 & -3 & 8 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Вариант 5.

1. Определить, является ли оператор $\psi : V \to V$ линейным, если $V = R^3$, $\forall\ x = (x_1, x_2, x_3)\ \psi(x) = (x_1 - x_2, 0, x_3 + x_2)$.
2. Оператор ψ векторного пространства V ($\dim V = 3$) в некотором базисе (e_1, e_2, e_3) имеет матрицу A. Показать, что система векторов (e_1', e_2', e_3') образует базис в V и найти матрицу оператора ψ в этом базисе, если:
$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 4 \\ 7 & 6 & -4 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} e_1' = 7e_1 - 6e_2 + 3e_3, \\ e_2' = 3e_1 - 2e_2 + 2e_3, \\ e_3' = e_2 + e_3. \end{array}$$
3. Линейный оператор $\psi : R^3 \to R^3$ в базисе (e_1, e_2, e_3) имеет матрицу A. Найти матрицу B этого оператора в базисе (e_1', e_2', e_3'), если:
$$\begin{array}{l} e_1 = (-1, -2, 1), \\ e_2 = (-2, 1, -2), \\ e_3 = (3, 2, 0), \end{array} \quad A = \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} e_1' = (-1, 2, 1), \\ e_2' = (-1, 1, 0), \\ e_3' = (1, -2, -2). \end{array}$$
4. Найти: 1) ранг и образ линейного оператора;

2) дефект и ядро линейного оператора, если линейный оператор ψ в базисе (e_1, e_2, e_3, e_4) задан матрицей
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & 2 & -1 \\ 3 & -6 & 0 & -3 \\ 4 & -12 & -8 & 8 \end{pmatrix}.$$
5. Линейный оператор $\psi : V \to V$ векторного пространства V задан в некотором базисе матрицей A. Найти собственные значения и собственные векторы, если:
$$A = \begin{pmatrix} -4 & 9 & 3 \\ -4 & 7 & 1 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}.$$

Вариант 6.

1. Определить, является ли оператор $\psi : V \to V$ линейным, если $V = R^3$, $\forall\ x = (x_1, x_2, x_3)$ $\psi(x) = (x_1^2, x_2, x_3)$.
2. Оператор ψ векторного пространства V ($\dim V = 3$) в некотором базисе (e_1, e_2, e_3) имеет матрицу A. Показать, что система векторов (e_1', e_2', e_3') образует базис в V и найти матрицу оператора ψ в этом базисе, если:
$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} e_1' &= -e_1 - e_2 + 3e_3, \\ e_2' &= 2e_1 + 3e_2 - e_3, \\ e_3' &= -e_1 - e_2 + 2e_3. \end{aligned}$$
3. Линейный оператор $\psi : V \to V$ ($\dim V = 3$) переводит векторы $a_1,\ a_2,\ a_3$ в векторы $b_1,\ b_2,\ b_3$ соответственно. Найти матрицу этого оператора в том же базисе, в котором заданы координаты векторов
$$\begin{aligned} a_1 &= (-1, 1, 0), & b_1 &= (0, -1, 4), \\ a_2 &= (1, 0, -3), & b_2 &= (-2, 2, 2), \\ a_3 &= (-1, 1, -1), & b_3 &= (4, -2, 1). \end{aligned}$$
4. Найти: 1) ранг и образ линейного оператора;

2) дефект и ядро линейного оператора, если линейный оператор ψ в базисе (e_1, e_2, e_3, e_4) задан матрицей
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 2 \\ -4 & 3 & -13 & -9 \\ 2 & -2 & 9 & 8 \\ -3 & 4 & -18 & -17 \end{pmatrix}.$$
5. Линейный оператор $\psi : V \to V$ векторного пространства V задан в некотором базисе матрицей A. Найти собственные значения и собственные векторы, если:
$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ -8 & -3 & 4 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вариант 7.

1. Определить, является ли оператор $\psi : V \to V$ линейным, если $V = R^3$, $\forall\ x = (x_1, x_2, x_3)$ $\psi(x) = (x_1 + 5, x_2, x_3)$.
2. Оператор ψ векторного пространства V $(\dim V = 3)$ в некотором базисе (e_1, e_2, e_3) имеет матрицу A. Показать, что система векторов (e_1', e_2', e_3') образует базис в V и найти матрицу оператора ψ в этом базисе, если:
$$A = \begin{pmatrix} -4 & -1 & -3 \\ 5 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} e_1' &= -2e_1 + 2e_2 + e_3, \\ e_2' &= 8e_1 - 9e_2 - 6e_3, \\ e_3' &= -e_1 + e_2 + e_3. \end{aligned}$$
3. Линейный оператор $\psi : V \to V$ $(\dim V = 3)$ переводит векторы a_1, a_2, a_3 в векторы b_1, b_2, b_3 соответственно. Найти матрицу этого оператора в том же базисе, в котором заданы координаты векторов
$$\begin{aligned} a_1 &= (3, 2, -1), & b_1 &= (0, -2, -1), \\ a_2 &= (-2, -1, 1), & b_2 &= (5, 5, -1), \\ a_3 &= (2, 2, -1), & b_3 &= (0, 4, -1). \end{aligned}$$
4. Найти: 1) ранг и образ линейного оператора;

2) дефект и ядро линейного оператора, если линейный оператор ψ в базисе (e_1, e_2, e_3, e_4) задан матрицей
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 & 0 \\ -2 & 7 & -6 & 4 \\ 3 & -11 & 9 & -6 \\ 1 & -4 & 6 & -8 \end{pmatrix}.$$
5. Линейный оператор $\psi : V \to V$ векторного пространства V задан в некотором базисе матрицей A. Найти собственные значения и собственные векторы, если:
$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ -8 & -4 & 2 \\ -4 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вариант 8.

1. Определить, является ли оператор $\psi : V \to V$ линейным, если $V = R^3$, $\forall\ x = (x_1, x_2, x_3)$ $\psi(x) = (x_1 + x_2 + x_3, x_3, x_2)$.

2. Оператор ψ векторного пространства V ($\dim V = 3$) в некотором базисе (e_1, e_2, e_3) имеет матрицу A. Показать, что система векторов (e_1', e_2', e_3') образует базис в V и найти матрицу оператора ψ в этом базисе, если:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -6 & 1 & -7 \\ 1 & 3 & -5 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} e_1' &= -e_1 + e_2 + e_3, \\ e_2' &= -2e_1 + 6e_2 + 3e_3, \\ e_3' &= 3e_1 - 6e_2 - 4e_3. \end{aligned}$$

3. Линейный оператор $\psi : V \to V$ ($\dim V = 3$) переводит векторы $a_1,\ a_2,\ a_3$ в векторы $b_1,\ b_2,\ b_3$ соответственно. Найти матрицу этого оператора в том же базисе, в котором заданы координаты векторов

$$\begin{aligned} a_1 &= (-1, 1, 0), & b_1 &= (0, -1, 4), \\ a_2 &= (1, 0, -3), & b_2 &= (-2, 2, 2), \\ a_3 &= (-1, 1, -1), & b_3 &= (4, -2, 1). \end{aligned}$$

4. Найти: 1) ранг и образ линейного оператора;

2) дефект и ядро линейного оператора, если линейный оператор ψ в базисе (e_1, e_2, e_3, e_4) задан матрицей

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -3 & -3 \\ 1 & -4 & 11 & 3 \\ -5 & 1 & 3 & -11 \end{pmatrix}.$$

5. Линейный оператор $\psi : V \to V$ векторного пространства V задан в некотором базисе матрицей A. Найти собственные значения и собственные векторы, если:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & -8 & -5 \end{pmatrix}.$$

Вариант 9.

1. Определить, является ли оператор $\psi : V \to V$ линейным, если $V = R^3$, $\forall\ x = (x_1, x_2, x_3)$ $\psi(x) = (2x_1, x_2 + 3, x_3)$.
2. Оператор ψ векторного пространства V ($\dim V = 3$) в некотором базисе (e_1, e_2, e_3) имеет матрицу A. Показать, что система векторов (e_1', e_2', e_3') образует базис в V и найти матрицу оператора ψ в этом базисе, если:
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 5 \\ 2 & 4 & 5 \\ -2 & -6 & -7 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} e_1' &= -5e_1 - 5e_2 + 6e_3, \\ e_2' &= 4e_1 + 4e_2 - 5e_3, \\ e_3' &= 2e_1 + e_2 - e_3. \end{aligned}$$
3. Линейный оператор $\psi : V \to V$ ($\dim V = 3$) переводит векторы a_1, a_2, a_3 в векторы b_1, b_2, b_3 соответственно. Найти матрицу этого оператора в том же базисе, в котором заданы координаты векторов
$$\begin{aligned} a_1 &= (-4, 1, 0), & b_1 &= (-2, 4, -2), \\ a_2 &= (-3, -1, 1), & b_2 &= (-1, 2, -2), \\ a_3 &= (3, -1, 0), & b_3 &= (5, 1, -1). \end{aligned}$$
4. Найти: 1) ранг и образ линейного оператора;

2) дефект и ядро линейного оператора, если линейный оператор ψ в базисе (e_1, e_2, e_3, e_4) задан матрицей
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -3 \\ -4 & 11 & -15 & 12 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 3 & -13 & 16 & -9 \end{pmatrix}.$$
5. Линейный оператор $\psi : V \to V$ векторного пространства V задан в некотором базисе матрицей A. Найти собственные значения и собственные векторы, если:
$$A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 4 \\ 6 & 9 & -8 \\ 6 & 7 & -6 \end{pmatrix}.$$

Вариант 10.

1. Определить, является ли оператор $\psi : V \to V$ линейным, если $V = R^3$, $\forall\ x = (x_1, x_2, x_3)$ $\psi(x) = (x_2 + x_3, 2x_1 + x_3, 3x_1 - x_2 + x_3)$.

2. Оператор ψ векторного пространства V ($\dim V = 3$) в некотором базисе (e_1, e_2, e_3) имеет матрицу A. Показать, что система векторов (e_1', e_2', e_3') образует базис в V и найти матрицу оператора ψ в этом базисе, если:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} e_1' &= -e_2 - e_3, \\ e_2' &= -5e_1 + 2e_2 + 3e_3, \\ e_3' &= 9e_1 - 5e_2 - 7e_3. \end{aligned}$$

3. Линейный оператор $\psi : V \to V$ ($\dim V = 3$) переводит векторы a_1, a_2, a_3 в векторы b_1, b_2, b_3 соответственно. Найти матрицу этого оператора в том же базисе, в котором заданы координаты векторов

$$\begin{aligned} a_1 &= (-2, -3, 0), & b_1 &= (5, 5, 3), \\ a_2 &= (1, 2, 1), & b_2 &= (1, 2, -1), \\ a_3 &= (0, 0, -1), & b_3 &= (0, 0, -1). \end{aligned}$$

4. Найти: 1) ранг и образ линейного оператора;

2) дефект и ядро линейного оператора, если линейный оператор ψ в базисе (e_1, e_2, e_3, e_4) задан матрицей

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & -8 & 2 \\ -4 & -18 & 0 & 12 \\ -1 & -1 & 14 & -11 \end{pmatrix}.$$

5. Линейный оператор $\psi : V \to V$ векторного пространства V задан в некотором базисе матрицей A. Найти собственные значения и собственные векторы, если:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 8 \\ 2 & 1 & 3 \\ -4 & -2 & -6 \end{pmatrix}.$$

6. Индивидуальное задание по теме «Квадратичные формы»

Вариант 1

1. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа:
$x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 3x_2^2 - 6x_2x_3 - 2x_3^2$.
2. Привести квадратичную форму к каноническому виду ортогональным преобразованием:
$4x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.

Вариант 2

1. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа:
$x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 3x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2$.
2. Привести квадратичную форму к каноническому виду ортогональным преобразованием:
$3x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 - x_1x_3 + x_2x_3$.

Вариант 3

1. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа:
$x_1^2 + 4x_1x_2 - x_2^2 - 2x_2x_3 + 4x_3^2$.
2. Привести квадратичную форму к каноническому виду ортогональным преобразованием:
$-x_1^2 - x_2^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 6x_1x_3 + 6x_2x_3$.

Вариант 4

1. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа:
$x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + x_3^2$.
2. Привести квадратичную форму к каноническому виду ортогональным преобразованием:
$x_1^2 - 7x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3$.

Вариант 5

1. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа:
$x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2^2 + 12x_2x_3 + 4x_3^2$.
2. Привести квадратичную форму к каноническому виду ортогональным преобразованием:
$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$.

Вариант 6

1. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа:
$4x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 + 5x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$.
2. Привести квадратичную форму к каноническому виду ортогональным преобразованием:
$3x_1^2 - 7x_2^2 + 3x_3^2 + 8x_1x_2 - 8x_1x_3 - 8x_2x_3$.

Вариант 7

1. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа:
$4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2^2 + 8x_2x_3 + x_3^2$.

2. Привести квадратичную форму к каноническому виду ортогональным преобразованием:
$x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 5x_1x_3 + x_2x_3$.

Вариант 8

1. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа:
$4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 5x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$.

2. Привести квадратичную форму к каноническому виду ортогональным преобразованием :
$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3$.

Вариант 9

1. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа:
$4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2^2 + 8x_2x_3 + x_3^2$.

2. Привести квадратичную форму к каноническому виду ортогональным преобразованием:
$x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 5x_1x_3 + x_2x_3$.

Вариант 10

1. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа:
$4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 5x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$.

2. Привести квадратичную форму к каноническому виду ортогональным преобразованием:
$x_1^2 - 7x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3$.

7. Индивидуальное задание по теме «Канонический вид уравнения квадрики»

Задание: Привести квадрику к каноническому виду и построить:

1. $6x^2 - 2y^2 + 6z^2 + 4xz + 8x - 4y - z + 1 = 0$
2. $x^2 + y^2 + 5z^2 - 6xy + 2xz - 2yz - 4x + 8y - 12z + 14 = 0$
3. $2x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 2xy - 4xz + 2yz + 2x - 10y - 2z - 1 = 0$
4. $2x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy + 2yz + x + y + z = 0$
5. $7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz + 2x + y + z + 2 = 0$
6. $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 8xz - 4yz + y + z + 10 = 0$
7. $x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 2yz + 2x + z + 8 = 0$
8. $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 10xz + 4yz + 4y + z + 6 = 0$
9. $4y^2 - 3z^2 + 4xy - 4xz + 8yz + 4x + y - 6 = 0$
10. $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 8xy + 8xz - 8yz + z + 4 = 0$
11. $2x^2 + 9y^2 + 2z^2 - 4xy + 4yz + 2x + y - 8 = 0$
12. $-4x^2 - 4y^2 + 2z^2 - 4xy + 8xz - 8yz + x + y + z = 0$

4.3. Комплект экзаменационных билетов по дисциплине

Для студентов специальности 010701 – «Физика» предусмотрен экзамен в I и II учебных семестрах.

В экзаменационном билете предусмотрено два вопроса на проверку знаний теоретического материала и два практических задания для проверки практических навыков решения задач.

Примерные варианты экзаменационных билетов для специальности 010701 – «Физика».

I семестр

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры
«___»______________ 200_ г.
Заведующий кафедрой Труфанова Т.В.
Утверждаю:____________

Кафедра МАиМ
Факультет ИФ
Курс I
Дисциплина Аналитическая геометрия и линейная алгебра

Экзаменационный билет № 1

1. Скалярное произведение векторов, его свойства.
2. Взаимное расположение прямой и плоскости. Угол между прямой и плоскостью.
3. Найти вектор x, коллинеарный вектору a={2;1;-1} и удовлетворяющий условию xa=3.
4. Вычислить значение корня $\sqrt[4]{-5}$.

II семестр

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Утверждено на заседании кафедры
«___»______________ 200_ г.
Заведующий кафедрой Труфанова Т.В.
Утверждаю:____________

Кафедра МАиМ
Факультет ИФ
Курс I
Дисциплина Аналитическая геометрия и линейная алгебра

Экзаменационный билет № 1

1. Минор. Разложение определителя по элементам ряда.
2. Собственный вектор, собственное значение линейного оператора.
3. Решить матричное уравнение: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
4. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа: $4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2^2 + 8x_2x_3 + x_3^2$.

5. НЕОБХОДИМОЕ ТЕХНИЧЕСКОЕ И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

Лекции и практические занятия проводятся в стандартной аудитории, оснащенной в соответствии с требованиями преподавания теоретических дисциплин.

6. КАРТА ОБЕСПЕЧЕННОСТИ ДИСЦИПЛИНЫ КАДРАМИ ПРОФЕССОРСКО-ПРЕПОДАВАТЕЛЬСКОГО СОСТАВА

Лекционные и практические занятия по дисциплине "Аналитическая геометрия и линейная алгебра" для специальности 010701 – «Физика» проводят доцент кафедры математического анализа и моделирования, к.ф.-м.н. Ермак Наталья Валентиновна, старший преподаватель кафедры МАиМ Кван Наталья Владимировна, старший преподаватель кафедры МАиМ Салмашова Елена Михайловна.