Министерство образования Российской Федерации

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Факультет математики и информатики

Н.В. Кван, А.Г. Масловская

ОРГАНИЗАЦИЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ ПО ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКЕ

ЧАСТЬ I

Учебно – методическое пособие

Благовещенск
2003

ББК
К

Печатается по решению редакционно – издательского совета факультета математики и информатики Амурского государственного университета

Кван Н.В., Масловская А.Г.

Организация самостоятельной работы студентов по дискретной математике. Часть I. Учебно – методическое пособие. Благовещенск: Амурский гос. ун – т., 2003.

Пособие разработано в помощь студентам, изучающим темы «Элементы теории множеств» и «Комбинаторика» по курсу «Дискретная математика» в соответствии с рабочей программой и содержанием государственного образовательного стандарта по специальностям 0101 и 0102. Пособие содержит теоретические сведения, решения типовых упражнений, задачи для самостоятельного решения, индивидуальные задания по темам «Множества», «Комбинаторика», вопросы для самопроверки.

Рецензенты: А.Н. Семочкин, доцент кафедры информатики БГПУ,
канд. физ.-мат. наук;

© Амурский государственный университет, 2003

ВВЕДЕНИЕ

Дискретная математика занимает важное место в системе математического образования будущих математиков. Данный курс тесно связан с основными математическими дисциплинами специальности 010100 и 010200: алгебра, линейная алгебра, теория чисел, математическая логика, математический анализ, компьютерные науки.

Рабочая программа по курсу «Дискретная математика», разработанная на основе государственного стандарта, предусматривает проведение 18 лекционных, 9 практических занятий со студентами I курса по специальности 010100 и 18 практических занятий со студентами I курса специальности 010200 во втором семестре.

Государственный образовательный стандарт высшего профессионального образования по дискретной математике предусматривает изучение тем: множества, отношения, функциональные отношения, элементы комбинаторики.

Данное учебно - методическое пособие содержит материал для организации самостоятельной работы студентов по темам первых пяти практических занятий: «Множества», «Отношения», «Функциональные отношения», «Комбинаторные правила. Теория соединений», «бином Ньютона». Здесь приводятся необходимые теоретические сведения, подробные решения типовых примеров, задания для самостоятельного решения, вопросы для самопроверки а также два индивидуальных задания по темам практических занятий «Элементы теории множеств» и «Элементы комбинаторики».

1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Теория множеств была создана немецким математиком Георгом Кантором (1845-1918) во второй половине XIX века. Большинство разделов современной математики обычно излагают на базе теории множеств.

1.1. Понятие множеств. *Понятие множества* относится к основным или фундаментальным понятиям математики, которые не могут иметь строгого определения как абстрактное математическое понятие. Математическое определение множества выделилось из привычных представлениях о совокупности, классе, группе и т.д. Можно говорить о множестве студентов университета, о множестве целых чисел, о множестве точек плоскости и т.п.

Под множеством будем понимать любое собрание определенных и различных между собой объектов, мыслимое как единое целое.

Множество A считается заданным, если относительно любого предмета a можно установить, принадлежит ли этот предмет множеству A. Утверждение, что a принадлежит A (является элементом множества A) записывают так: $a \in A$. Если a не принадлежит A, то пишут: $a \notin A$. Формула $A \ni a$ означает, что множество A содержит элемент a.

Множество, содержащее конечное число элементов, называется конечным, в противном случае множество называется бесконечным. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым множеством и обозначается $\varnothing$.

1.2. Способы задания множеств. Множество может быть задано или определено различными способами.

I) *Задание множества перечислением всех его элементов*. При определении множества все перечисляемые элементы заключают в фигурные скобки, подчеркивая тем самым тот факт, что данные элементы рассматриваются в совокупности.

Примеры.

1) Множество цифр в десятичной системе исчисления: $M=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$;

2) Множество планет Солнечной системы: $P=\{$Меркурий, Венера, Земля, Марс, Юпитер, Сатурн, Уран, Нептун, Плутон$\}$;

3) Множество целых чисел: $Z=\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

II) *Задание множества с помощью описания характеристического свойства*, выделяющего элементы данного множества среди элементов основного множества.

Примеры.

1) Множество цифр в десятичной системе исчисления:

$$M = \{i : i - \text{целое}, 0 \le i \le 0\}$$

2) Множество корней уравнения $x^2 - 6x + 5 = 0$: $Q = \{x : x^2 - 6x + 5 = 0\}$

III) *Графическое задание множеств.*

Примеры.

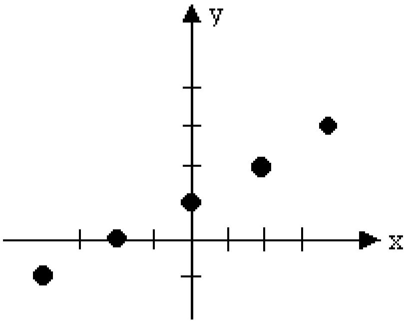


рис. 1

1) Множество целых пар чисел (x, y), удовлетворяющих равенству: $x–2y+2=0$ (см. рис. 1)

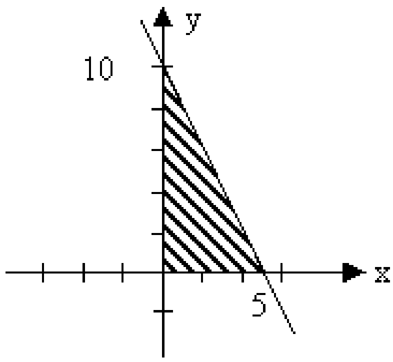


рис. 2

2) Множество решений системы неравенств (см. рис. 2)

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + y \leq 10 \end{cases}$$

1.3. Диаграммы Эйлера – Венна. При рассмотрении множеств удобно пользоваться наглядными изображениями.

Картинки, интерпретирующие множества и операции над ними, называются *диаграммами Эйлера-Венна*. При составлении диаграмм пользуются следующей графической символикой. Множество изображается частью плоскости, ограниченной замкнутым контуром, чаще всего контуром круга, элемент множества обозначается точной на плоскости (см. рис. 3).

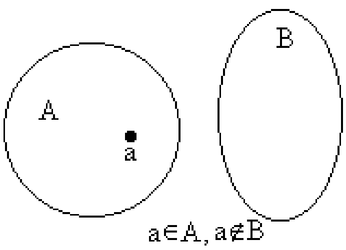


Рис. 3

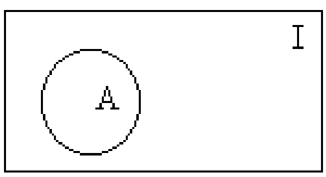


Рис. 4

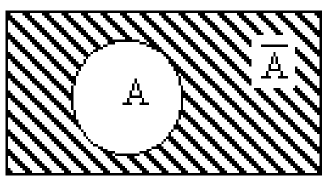


Рис. 5

1.4. Универсальное множество. Дополнение множества. Рассматривая какое – то конкретное множество, всегда можно указать, частью какого более широкого множества является данное множество. Элементы всех множеств, которые будем рассматривать, одновременно являются элементами этого широкого фиксированного множества, называемого *универсальным*. Универсальное множество обозначают через I и при геометрическом изображении ограничивают контуром прямоугольника (см. рис. 4).

Пример.

1) Пусть J – множество нечетных чисел: J = {1, 3, 5, …}, тогда за универсальное множество I примем множество натуральных чисел.

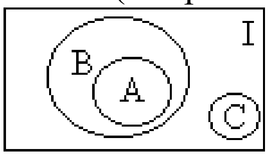
Выбор фундаментального или универсального множества зависит от целей исследования.

2) Пусть A – множество ромбов. Тогда за универсальное множество I можно принять B – множество всех четырехугольников.

Дополнением множества A относительно универсального множества I называется множество элементов из I, которые не входят в A (см. рис. 5).

Пример. Дополнением множества рациональных чисел в множестве R действительных чисел является множество иррациональных чисел.

1.5. Включение. Равенство множеств. Пусть A и B – два множества. Говорят, что множество A содержится в множестве B, если любой элемент множества A является элементом множества B. В этом случае, говорят также, что A является подмножеством B: $A \subset B$ (см. рис. 6)



$A \subset B, C \not\subset B$

рис. 6

Пример. Множество четных чисел является подмножеством множества целых чисел.

Пусть одновременно справедливы утверждения $A \subset B$ и $B \subset A$. Тогда каждый элемент множества A является элементом множества B и каждый элемент множества B является элементом множества A, т.е. множества A и B. В этом случае говорят, что множества A и B совпадают или равны $A = B$.

Пример. Каждое из множеств букв: A = {м, н, о, ж, е, с, т, в, а} и B = {ж, е, м, а, н, с, т, в, о} являются подмножеством другого: $A \subset B$, $B \subset A$. Поэтому $A = B$.

Очевидны следующие утверждения:

1) Любое множество является своим подмножеством:

$$A \subset A$$

2) Пустое множество содержится в любом множестве:

$$\varnothing \subset A$$

1.6. Множество подмножеств. Для каждого множества M существует множество, элементами которого являются подмножества множества M. Это множество $P(M)$ включает в качестве элементов и само множество M и пустое множество $\varnothing$. Множество $P(M)$ называется *множеством всех подмножеств* множества M или множеством – степенью. Введем обозначение $|M|$ для количества элементов конечного множества M, называемое мощностью множества.

Пример. Составим множество $P(M)$ от множества $M = \{a, в, c\}$. Элементами этого множества будут: множества, состоящие из одного элемента: $\{a\}$, $\{в\}$, $\{c\}$; множества, состоящие из двух элементов $\{a, в\}$, $\{a, c\}$, $\{в, c\}$. И наконец, множество содержащее все элементы множества M: $\{a, в, c\}$. Тогда:

$B(M) = \{\varnothing, \{a\}, \{в\}, \{c\}, \{a, в\}, \{в, c\}, \{a, c\}, \{a, в, c\}\}$.

Мощность этого множества $P(M)$ равна:

$$P(M) = 2^{|M|};\ \text{т.е.}\ |P(M)| = 2^3 = 8$$

1.7. Операции над множествами. *Объединением* двух множеств A и B называется множество $A \cup B$, которое состоит из всех элементов множеств A и B и не содержит никаких других элементов (см. рис. 7).

Пример.

1) Пусть $A = \{x : x \in \mathrm{Z}, x^2–8x + 7 < 0\}$, $B = \{x : x \in \mathrm{N}, x^2 - 3x–4 \le 0\}$, тогда $A \cup B = \{2, 3, 4\}$

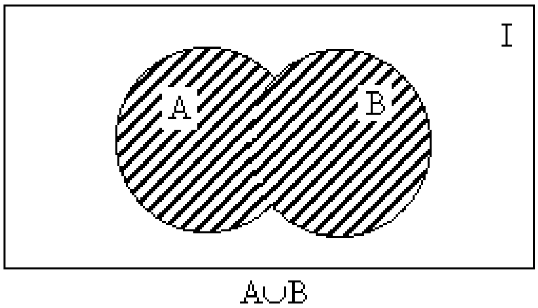
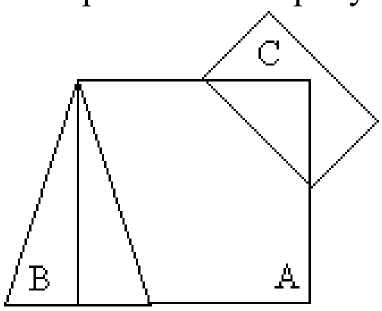


рис. 7

2) Если A, B, C – фигуры, изображенные на рис 8(а), то $D = A \cup B \cup C$ будет фигурой, изображенной на рисунке 8 (б).



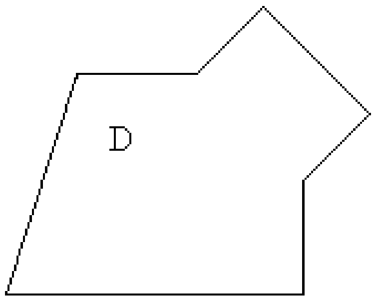
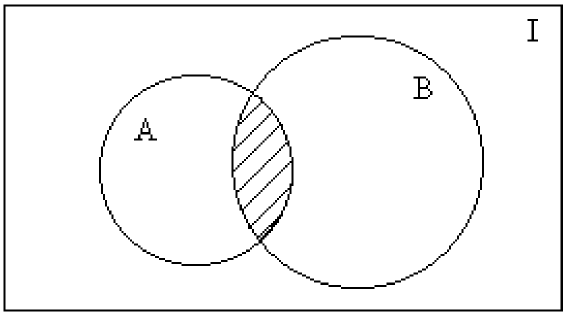


рис. 8(а) рис. 8(б)

Пересечением двух множеств A и B называется такое множество $A \cap B$, которое состоит из всех элементов, содержащихся в обоих множествах A и B, и не содержит никаких других элементов (см. рис. 9).



A∩B

рис. 9

Примеры.

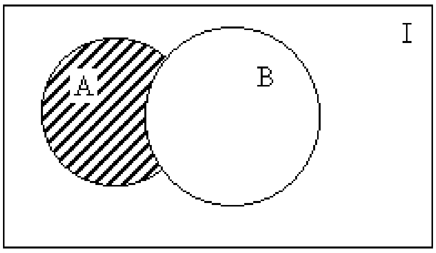
1) A – множество целых чисел, делящихся на 2, B – множество целых чисел, делящихся на 3. Тогда $A \cap B$ – множество целых чисел, делящихся на 6.

2) D– множество простых чисел, C – множество четных чисел, тогда $D \cap C = \{2\}$.

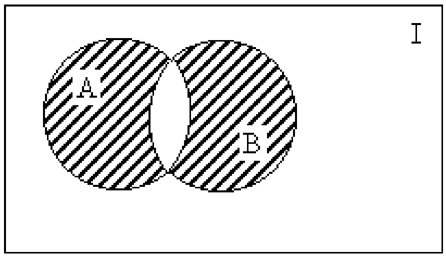
Теорема. Множества относительно операций дополнения, объединения и пересечения образуют булеву алгебру множеств, т.е. для них выполнены 19 основных равенств:

0. $\overline{\overline{A}} = A$	Закон двойного дополнения
1. $A \cap B = B \cap A$	Коммутативный закон пересечения
2. $A \cup B = B \cup A$	Коммутативный закон объединения
3. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	Ассоциативный закон пересечения
4. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	Ассоциативный закон объединения
5. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	Дистрибутивный закон относительно пересечения
6. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	Дистрибутивный закон относительно объединения
7. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	Первый закон де Моргана
8. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	Второй закон де Моргана
9. $A \cap A = A$	Идемпотентность пересечения
10. $A \cup A = A$	Идемпотентность объединения
11. $A \cup I = I$	
12. $A \cap I = A$	
13. $A \cap \varnothing = \varnothing$	
14. $A \cup \varnothing = A$	
15. $A \cap (A \cup B) = A$	
16. $A \cup (A \cap B) = A$	
17. $A \cap \overline{A} = \varnothing$	
18. $A \cup \overline{A} = I$	

Разностью двух множеств A и B называется множество $A \backslash B$, содержащее те и только те элементы множества A, которые не являются элементами множества B (см. рис. 10).



$A \setminus B$



$A \Delta B$

рис. 10 рис. 11

Очевидно, что:

19. $A \setminus B = A \cap \overline{B}$

Пример.

Пусть $x = \{2, 5, 8, 10\}$ $y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$x \setminus y = \{8, 10\}$ $y \setminus x = \{1, 3, 4\}$

Симметрической разностью множеств A и B называется множество (см. рис. 11):

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Пример.

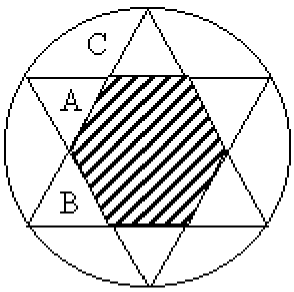
$x = (-\infty; 2]$ $y = (0; 7]$

$x \Delta y = (-\infty; 0] \cup (2; 7]$

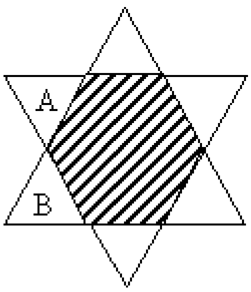
Пример.

Выразим заштрихованные множества выразить через множества A, B, C, используя операции объединения, пересечения и дополнения.

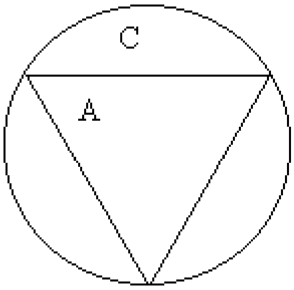
а)



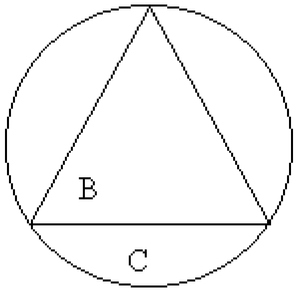
Изобразим пересечение множеств A и B:



Рассмотрим множества A и C, B и C. Они связаны отношением включения:



$A \subset C$

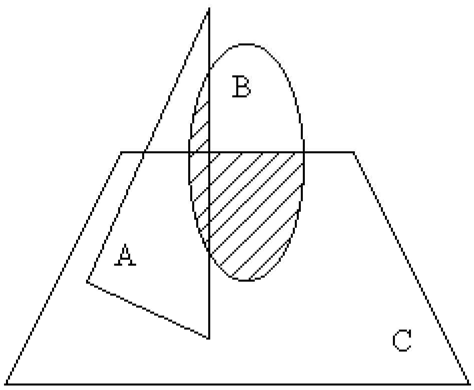


$B \subset C$

Поэтому заштрихованное множество выражается как:

$$A \cap B \cap C$$

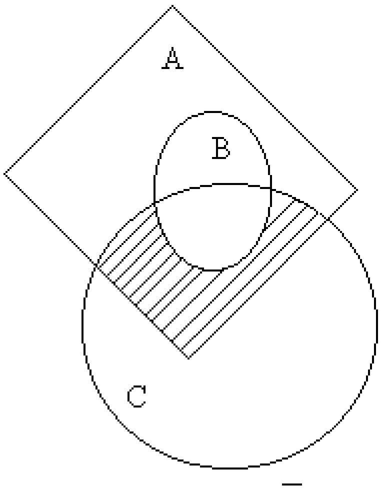
b)



$(A \cap B) \cup (B \cap C)$

(обосновать самостоятельно)

c)



$A \cap C \cap \overline{B}$

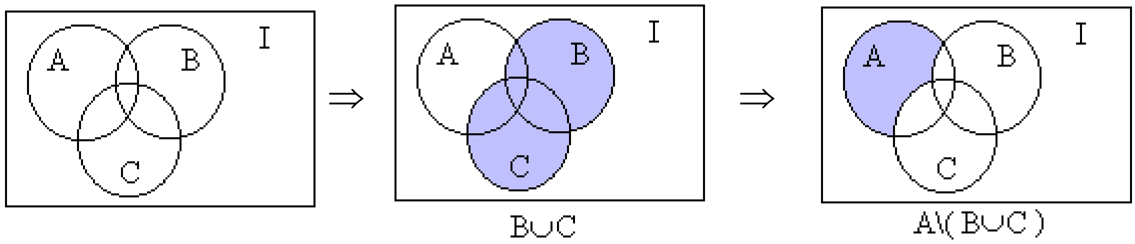
(обосновать самостоятельно)

Задача 1. Обосновать равенство с помощью диаграмм Эйлера-Венна:

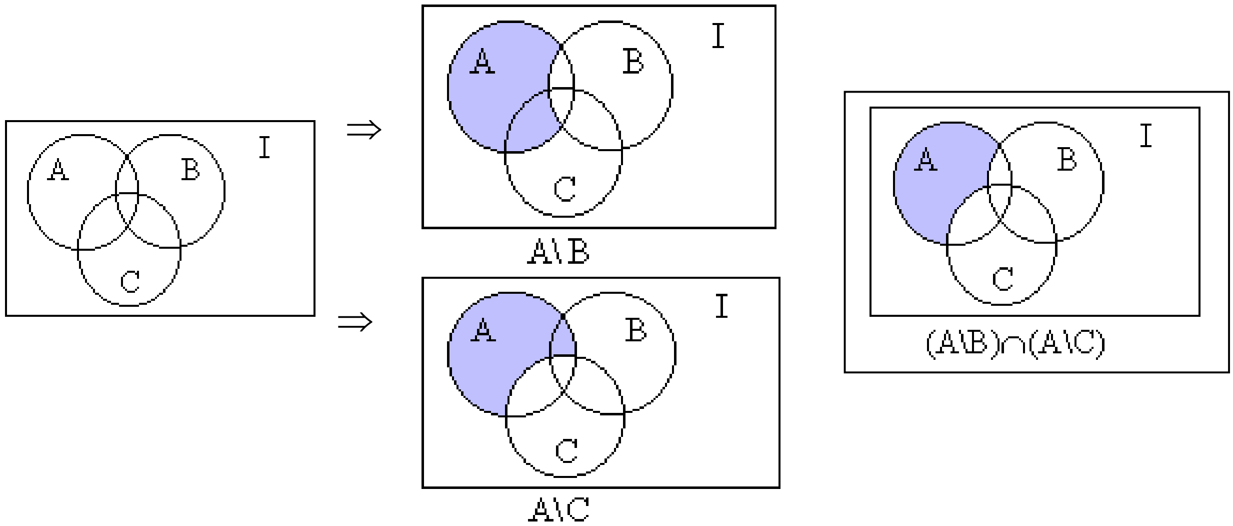
$$A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C).$$

Решение:

Рассмотрим диаграммы Эйлера-Венна для левой части равенства:



Рассмотрим диаграммы Эйлера-Венна для правой части равенства:



Очевидно, что диаграммы для левой и правой частей равенства совпадают.

Задача 2. Доказать справедливость равенства методом двустороннего включения:

$$A\backslash(B\cup C)=(A\backslash B)\cap(A\backslash C).$$

Решение:

1) Покажем, что $A\backslash(B\cup C)\subset (A\backslash B)\cap(A\backslash C)$:

Пусть $x \in A\backslash(B\cup C) \Rightarrow x \in A$ и $x \notin (B\cup C) \Rightarrow x \in A$ и $x \notin B$ и $x \notin C \Rightarrow x \in A$ и $x \notin B$ и $x \in A$ и $x \notin C \Rightarrow x \in A\backslash B$ и $x \in A\backslash C \Rightarrow x \in (A\backslash B)\cap(A\backslash C)$.

2) Покажем обратное: $(A\backslash B)\cap(A\backslash C)\subset A\backslash(B\cup C)$.

Пусть $x \in (A\backslash B)\cap(A\backslash C) \Rightarrow x \in A\backslash B$ и $x \in A\backslash C \Rightarrow x \in A$ и $x \notin B$ и $x \in A$ и $x \notin C \Rightarrow x \in A$ и $x \notin B$ и $x \notin C \Rightarrow$ x $\in A$ и $x \notin (B\cup C) \Rightarrow x \in A\backslash(B\cup C)$.

Включение в обе стороны выполняется, поэтому исходное равенство верно.

Задача 3. Доказать справедливость равенства, используя формулы алгебры множеств: $A\backslash(B\cup C)=(A\backslash B)\cap(A\backslash C)$.

Решение:

Преобразуем левую часть данного равенства, используя формулы алгебры множеств:

$A \setminus (B \cup C) \xrightarrow{(19)} A \cap (\overline{B \cup C}) \xrightarrow{(7)} A \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) \xrightarrow{(10)} (A \cap \overline{B}) \cap (A \cap \overline{C}) \xrightarrow{(19)}$
$(A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.
Тождество доказано.

Вопросы для самоконтроля

1. Равны ли множества:
   a) $\{1, 2, 3\}$ и $\{3, 1, 2, 1\}$;
   b) $\{x, x \in \mathrm{R}, x^2\text{-}2x\text{-}2=0\}$ и $\{x, x \in \mathrm{N}, x^2\text{-}2x\text{-}2=0\}$?
2. Пусть N_{H} - множество дней недели. Какова мощность множества N_{H}?
3. Является ли множество $M=\{x, x \in \mathrm{N}, x^2\text{-}1=0\}$ одноэлементным?
4. Какие из элементов множества $B=\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{1\}\}$ являются его подмножествами?
5. Является ли одно из следующих двух множеств собственным подмножеством другого: $A_1 = \{1, \{1, 2\}\}$, $A_2 = \{\{1, 2\}, 2\}$?
6. Укажите множество всех подмножеств множества $L = \{1, 2, \{3, 4\}\}$?
7. Является ли множество $A=\{x\text{: } 1/x>0\}$ дополнением множества $B=\{x\text{: } x \le 0\}$ в множестве R действительных чисел?
8. Является ли множество решений системы:
   $$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 0 \end{cases} \text{ пустым?}$$
9. Пусть E - "множество учащихся в некоторой школе", F - "множество лиц женского пола в этой школе". Какое множество будет:
   a) пересечением E и F;
   b) дополнением к F?
10. Множество A - "работник, с выслугой лет более трех", B - "начальник отдела". Какое множество будет являться объединением A и B, какое множество можно выбрать универсальным для A и B?

Упражнения для самостоятельного решения

1. Задать множества перечислением элементов:
   a) $A = \{x : x \in Z, x^2 - 6x + 5 < 0\}$;
   b) $B = \{x, x \in R, x^2 + 1 = 0\}$;
   c) $C = \{x, x \in N, \ln(x^2 - 3)\}$;
2. Равны ли множества:
   a) $\{2, 4, 5\}$ и $\{2, 4, 2, 5\}$
   b) $\{\{1, 2\}, 3\}$ и $\{\{1\}, \{2, 3\}\}$
   c) $\{\mathrm{x} \in \mathrm{Z} : 4 \mid \mathrm{x} \wedge 15 \mid \mathrm{x}\}$ и $\{\mathrm{x} \in \mathrm{Z} : 20 \mid \mathrm{x} \wedge 30 \mid \mathrm{x}\}$

d) $\{x \in R : \dfrac{1}{x-2} < 1\}$ и $\{x \in R : x > 3\}$;

e) $\{x \in R : x^2 - 2x + 3 = 0\}$ и $\varnothing$

3. Перечислите все подмножества множества A:

a) $A = \{3, 5, 8\}$

b) $A = \{\{1\}, \{2\}, 2, 3\}$

4. Вставьте между множествами символ $\in$ или $\subseteq$ так, чтобы получилось истинное высказывание:

a) $\{1\}$ $\qquad$ $\{1, \{1, 2\}\}$

b) $\{5, 2\}$ $\qquad$ $\{5, 2, \{5, 2\}\}$

5. Установить, какие из пар множеств связаны отношением включения:

a) X – множество параллелограммов

Y – множество квадратов

b) X – множество прямоугольных треугольников с острым углом 45°

Y – множество равнобедренных треугольников

6. Найти объединение и пересечение множеств A и B:

a) $A = \{x : x \in Z,\ \ x : 5\}$ $\quad B = \{x : x \in Z,\ \ x : 10\}$

b) $A = \{x : x \in Z,\ \ x : 8\}$ $\quad B = \{x : x \in Z,\ \ x : 6\}$

c) $A = \{1, 2, 3\}$ $\quad B = \{\{1, 2\}, 5, 10\}$

7. Найти $A \cup B$, $A \cap B$, $\overline{A}, \overline{B}$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \Delta B$, если:

a) $A = (-\infty; 4)$ $\qquad B = [0; 4]$

b) $A = (-10; 10]$ $\qquad B = (0; \infty)$

c) $A = (-\infty; 5]$ $\qquad B = (2; 8)$

8. Определить операции $\cup$, $\cap$, \ через:

a) Δ, $\cap$

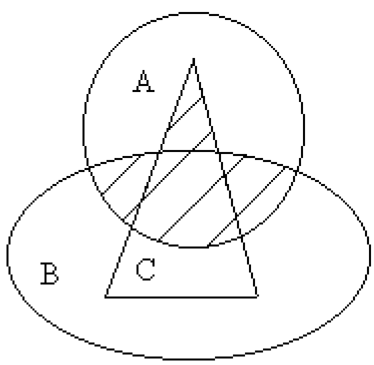
b) Δ, $\cup$

9. Доказать, что нельзя определить:

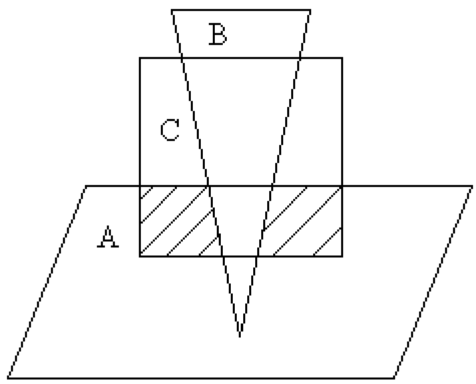
a) \ через $\cap$, $\cup$

b) $\cup$ через $\cap$, \

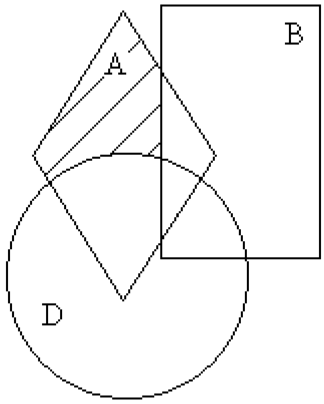
10. Заштрихованные множества выразить через множества A, B, C, D, используя операции объединения, пересечения и дополнения.



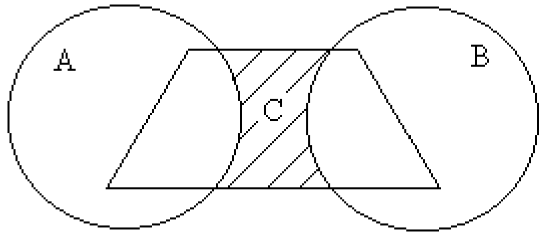
a)



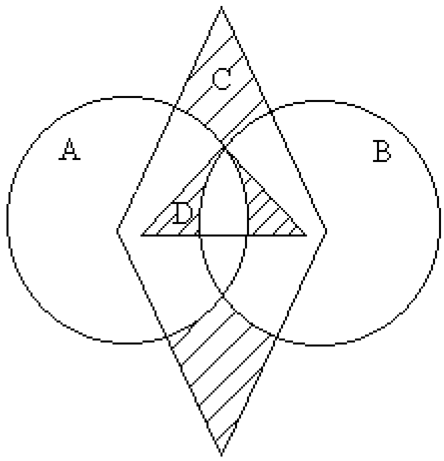
b)



c)



d)



e)

11. Обосновать равенства с помощью диаграмм Эйлера – Венна:

a) $A\cap(B\Delta C) = (A\cap B)\Delta(A\cap C)$;

b) $A\backslash(B\backslash C) = (A\backslash B)\cup A\cap C$;

c) $A\backslash(B\cup C) = (A\backslash B)\cap(A\backslash C)$.

12. Решить систему уравнений:

a) $\begin{cases} A\cap x = B \\ A\cup x = C \end{cases}$, где B $\subseteq$ A $\subseteq$ C;

b) $\begin{cases} A\cup x = B\cap x \\ A\cap x = C\cup x \end{cases}$;

c) $\begin{cases} A\setminus x = x\setminus B \\ x\setminus A = C\setminus x \end{cases}$.

13. Доказать справедливость равенств:

a) $A\cap B = (A\cup B)\backslash(A\Delta B)$;

b) $(B\backslash C)\backslash(B\backslash A) = A\backslash C$;

c) $A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$;

d) $(A\backslash B)\cup(B\backslash A) = (A\cup B)\backslash(A\cap B)$;

e) $A\backslash(B\backslash M) = (A\backslash B)\cup(A\cap M)$;

f) $A\cap(B\Delta C) = (A\cap B)\Delta(A\cap C)$;

g) $A\backslash \mathrm{B} = A\Delta(A\cap B)$.

14. Верны ли равенства? Если не верны, то в какую сторону имеет место включение?

$$a)\ A\backslash(B\cup C) = (A\backslash B)\backslash C;$$
$$b)\ A\cup(B\backslash C) = (A\cup B)\backslash C.$$

15. Упростить выражение:

$$a)\ (A\backslash B)\cup(A\cap B);$$
$$b)\ \left(A\cap B\right)\cap\overline{B};$$
$$c)\ \left(A\cap B\right)\cup\left(A\cap\overline{B}\right)\cup\left(\overline{A}\cap B\right);$$
$$d)\ \left(\overline{\overline{(A\cup B)}\cap(\overline{A}\cup\overline{B})}\right)$$
$$e)\ \overline{A}\cup\overline{C}\cup C\cup(A\cap\overline{C})\cup(A\cup C)$$
$$f)\ \left(\overline{\overline{A}\cup\overline{B}}\right)\cup\left(\overline{\overline{A}\cup B}\right)$$

16. Доказать следующие тождества:

$$a)\ \left(\bigcup_{k\in K} Ak\right) = \bigcap_{k\in K}(-Ak)$$
$$b)\ \bigcup_{k\in K} B\cap Ak = B\cap\left(\bigcup_{k\in K} Ak\right)$$

17. Пусть $x_L = \{x\in R : x > L\}$. Найдите $\bigcap_{L\in N} x_L$, $\bigcup_{L\in N} x_L$.

2. ОТНОШЕНИЯ НА МНОЖЕСТВАХ

2.1. Понятие отношения. Понятие *отношения* относится к фундаментальным понятиям математики. Термин «отношение» впервые встречается в определении множества по Бурбаки: «Множество образуется из элементов, обладающих некоторыми свойствами и находящимися в некоторых отношениях между собой или с элементами других множеств».

Примером отношения может служить отношение или равенство множеств:

$$A\subset B,\quad C=D,$$

принадлежность элемента множеству:

$$a\in X,\quad b\notin X,$$

родственные отношения:

«Николай – отец Александра»,

понятие отношение распространяется и на геометрические объекты:

«треугольник S подобен треугольнику S'»

и т.д.

Чтобы охарактеризовать отношение необходимо перечислить все такие наборы элементов, в каждом из которых один элемент находится в рассматриваемом отношении с другими элементами. Отношения, в котором участвуют два объекта, принято называть *бинарными*.

Также можно определить и другие виды отношений: касающиеся трех объектов – тернарные, одного объекта – унарные и т.д.

<u>2.2. Упорядоченная пара. Бинарные отношения.</u> Введем понятие упорядоченного набора, имеющего конечное число элементов.

Упорядоченной парой (x, y) называется множество, состоящее из двух элементов x и y, расположенных в определенном порядке. Аналогично можно определить набор из n – элементов, - это множество, все n – элементы которого занумерованы натуральными числами 1, 2, …, n. Такой набор обозначают через: $(x_1, x_2,\ldots, x_n)$. Пары (x_1, y_1) и (x_2, y_2) считаются равными, тогда и только тогда, когда $x_1=x_2$, $y_1=y_2$.

<u>2.3. Декартово произведение множеств.</u> Прямым (или декартовым) произведением двух множеств X и Y называется множество, состоящее из всевозможных упорядоченных пар элементов, в которых первый элемент принадлежит X, а второй – множеству Y. Прямое произведение обозначается: $X\times Y$, а его элементы (x, y) где $x\in X$, $y\in Y$. Очевидно, если $X\neq Y$, то $X\times Y\neq Y\times X$.

Также можно определить прямое произведение $X_1\times X_2\times,\ldots,\times X_n$ любого конечного семейства множеств $X_1,X_2,\ldots,X_n$. Оно состоит из всевозможных упорядоченных наборов $(x_1,\ldots, x_n)$, где $x_i\in X_i$, $i=\overline{1,n}$. Если $X_1=X_2=,\ldots,=X_n$, то $X_1\times X_2\times,\ldots,\times X_n=X^n$.

Любое n – местное отношение есть подмножество прямого произведения некоторых множеств $X_1, X_2,\ldots, X_n$.

<u>Пример.</u> Пусть R^1 – множество всех вещественных чисел. I – отрезок [0, 1]. Тогда $I^2=I\times I$ можно интерпретировать как единичный квадрат на плоскости (рис.1), а $R^{-1}\times I$ как множество точек на плоскости, лежащих между параллельными прямыми (рис. 2).

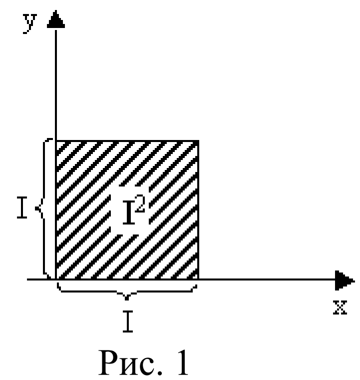


Рис. 1

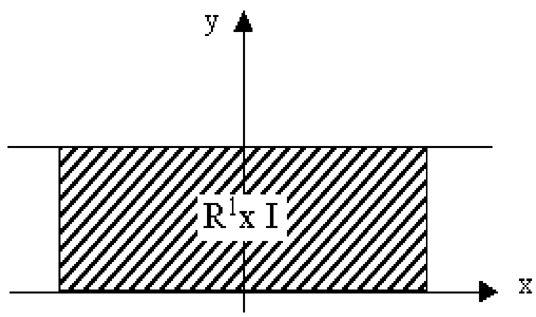


Рис. 2

Бинарным (или двуместным) *отношением* ρ называется множество упорядоченных пар декартового произведения множеств. Если ρ есть некоторое отношение и пара (x, y) принадлежит этому отношению, то наряду с записью $(x,y)\in\rho$ употребляется запись: $x\rho y$ («x находится в отношении ρ к y»). Часто в литературе для обозначения отношений используется буква R: xRy (от английского relation – отношение). Элементы x и y называются координатными или компонентами отношения.

Областью определения бинарного отношения ρ называется множество $D_\rho = \{x : \text{существует } y, \text{ что } x\rho y\}$.

Областью значения бинарного отношения ρ называется множество $E_\rho = \{y : \text{существует } x, \text{ что } x\rho y\}$.

Примеры.

1. Множество $\{\{1, 2\}, \{2, 4\}, \{3, 3\}, \{2, 1\}\}$ – бинарное отношение.

2. Отношение равенства на множестве действительных чисел есть множество: $\{(x, y) : x\in R, y\in R, x=y\}$. Для этого отношения: область определения $D_\rho=R$ и область значения $E_\rho=R$.

Для бинарного отношения обычным образом определены теоретико-множественные операции объединения, пересечения и т.д.

Задача 1. Для бинарного отношения ρ $\{(x, y) : x^2+y^2< 1\}$ найдите D_ρ и E_ρ.

Решение: $D_\rho = \{x : \text{существует } y \text{ такой, что } x^2+y^2< 1\} = \{x : -1 <x< 1\}$. $E_\rho = \{y : -1 <y< 1\}$.

Задача 2. Пусть $A = \{0, 1\}$. Перечислите элементы множеств A^2, A^3.

Решение: $A^2 = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$. $A^3 = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 1)\}$.

Задача 3. Пусть $A\subseteq C$, $B\subseteq C$. Докажите, что $A\times B = (A\times C)\cap(C\times B)$.

Доказательство:

Докажем равенство методом двустороннего включения.

Пусть $(a, b)\in A\times B \Rightarrow a\in A, b\in B \Rightarrow (a\in A, b\in C)$ и $(a\in C, b\in B)$ (так как, $A\subseteq C$, $B\subseteq C$) $\Rightarrow (a, b) \in A\times C$ и $(a, b) \in C\times B \Rightarrow (a, b)\in(A\times C)\cap(C\times B)$.

Обратно, пусть $(a, b)\in(A\times C)\cap(C\times B) \Rightarrow (a, b)\in A\times C, (a, b)\in C\times B \Rightarrow a\in A, b\in B \Rightarrow (a, b)\in A\times B$.

Обратным отношением для ρ называется отношение:

$$\rho^{-1} = \{(x, y) : (y, x) \in \rho\}$$

Композицией отношений ρ_1 и ρ_2 называется отношение $\rho_2\circ\rho_1 = \{(x, z) : \text{существует } y, \text{ такое, что } (x, y) \in \rho_1 \text{ и } (y, z) \in \rho_2\}$.

Для любых бинарных отношений выполняются следующие свойства:

1. $(\rho^{-1})^{-1} = \rho$
2. $(\gamma\circ\varphi)^{-1} = \varphi^{-1}\circ\gamma^{-1}$.

Каждое отношение ρ есть подмножество декартового произведения некоторых множеств X и Y таких, что $D_\rho \le X$, $E_\rho \le Y$. Если $X=Y$, то говорят, что ρ есть отношение на множестве X.

Задача. Пусть $\rho_1 =\{(x, y) \in R\times R : x \cdot y > 0\}$ и $\rho_2 =\{(x,y) \in R\times R : (x+y)\in z\}$. Найди $\rho_1\circ\rho_2$.

Решение:

$\rho_1\circ\rho_2 = \{(x, y) : \text{существует z такое, что } (x, z)\in\rho_2 \text{ и } (z, y)\in\rho_1\} = \{(x, y) : \text{существует такое } z, \text{ что } (x + z)\in Z \text{ и } z \cdot y >0\}$. Если $y \ne 0$, то такое z всегда найдется. Поэтому $\rho_1\circ\rho_2 = R\times(R\setminus\{0\})$.

2. 4. Свойства отношений на множествах.

Если для некоторой пары элементов x и y и некоторого отношения ρ одновременно $x\rho y$ и $y\rho x$, то такое отношение называется *симметричным*.

Пример.

Отношение параллельности и перпендикулярности прямых на плоскости является симметричным:

$$x \parallel y \leftrightarrow y \parallel x$$

$$x \perp \mathrm{y} \leftrightarrow y \perp x.$$

Отношение ρ, для которого из выполнения условий $x\rho y$ и $y\rho x$ вытекает, что $x=y$, называется *антисимметричным*.

Пример.

Отношение "меньше, либо равно" является антисимметричным: Если $x\leq y$ и $y \leq x$, то $x = y$.

Если элемент x находится в отношении ρ и самому себе : $x\rho x$, то такое отношение называется *рефлексивным*.

Пример.

Отношение равенства является рефлексивным:

$$x = x$$

Отношение ρ называется *транзитивным*, если из двух условий $x\rho y$ и $y\rho z$ вытекает, что справедливо $x\rho z$.

Пример.

Отношение "x является делителем y" является транзитивным, если

$$y \,\vdots\, x \quad z \,\vdots\, y, \quad \text{то} \quad z \,\vdots\, x.$$

Отношение ρ называется *ассиметричным*, если $x\rho y$ и $y\rho x$ не выполняются одновременно ни для одной пары (x, y), $x\in X$, $y\in Y$.

Пример.

Отношение "больше" является ассиметричным, поскольку либо $x < y$, либо $y > x$.

Отношение ρ называется *связным*, если для любых x и y отношение $x\neq y$ влечет за собой, что $x\rho y$ или $y\rho x$.

Пример.

Отношение "больше или равно" является связным: Если $x\neq y$, то либо $x\geq y$, либо $y\geq x$.

2.5. Отношение эквивалентности. Отношение ρ, являющееся одновременно рефлексивным, симметричным и транзитивным отношением на множестве X называется *отношением эквивалентности* на множестве X.

Примеры.

1. Отношение подобия на множестве треугольников есть отношение эквивалентности.

2. Отношение сравнимости по модулю натурального числа n на множестве целых чисел: $x\equiv y \bmod (n)$ тогда и только тогда, когда $(x-y)$ делится на n. Это отношение рефлексивно на Z, т.к. для любого $x\in \mathrm{Z}$, $x - x = 0$, и, следовательно, делится на n. Это отношение симметрично, т.к. если $x - y$

делится на n, то и $y - x$ делится на n. Это отношение транзитивно, т.к. если $(x - y)$ делится на n, то для некоторого целого t имеем $x - y = t_1 n$, а если $(y - z)$ делится на n, то для некоторого целого t_2 имеем $y - z = t_2 n$. Отсюда $x - z = (t_1+t_2) \cdot n$, т.е. $x - z$ делится на n.

Пусть ρ - отношение эквивалентности на множестве X. *Классом эквивалентности*, порожденным элементом x, называется подмножество множества X, состоящее из тех элементов $y \in X$, для которых $x \rho y$. Класс эквивалентности, порожденный элементом x обозначается $[x]$:

$$[\mathrm{x}] = \{y : y \in X, x\rho y\}.$$

Пример 1. Пусть S – совокупность всех прямых на плоскости. Рассмотрим отношение параллельности прямых на множестве S. Тогда каждый класс эквивалентности состоит из прямых, имеющих одно и то же направление.

Пример 2. Отношение сравнимости по модулю числа n на множестве Z порождают следующие класса эквивалентности: вместе с любым $a \in \mathrm{Z}$ класс эквивалентности содержит все числа вида $a + k \cdot n$, где k – целое. Очевидно, что все числа 0, 1, …, n-1 порождают различные классы эквивалентности: [0], [1],…, [n-1]. Они называются классами вычетов по модулю n.

Разбиением множества X называется совокупность попарно непересекающихся множеств X таких, что каждый элемент множества X принадлежит одному и только одному из таких подмножеств.

Пример. Пусть $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Тогда $\{\{1, 2\}, \{3, 5\}, 4\}$ – разбиение множества X.

Теорема. Всякое разбиение множества X определяет на X отношение эквивалентности ρ: $x \ \rho \ y \Leftrightarrow x$ и y принадлежит одному подмножеству разбиения.

Теорема. Всякое отношение эквивалентности ρ определяет разбиение множества X на классы эквивалентности относительно этого отношения.

Совокупность классов эквивалентности элементов множества X по отношению эквивалентности ρ называется фактор – множеством множества X по отношению ρ и обозначается X / ρ.

2.6. Отношение порядка. Часто приходится иметь дело с упорядоченными множествами, например, слова в словаре упорядочены лексикографически, ученики могут быть упорядочены по росту, упорядочен натуральный ряд чисел и т.д.

Рассмотрим множество X каких либо элементов. Отношение ρ в X называется *отношением строгого порядка*, если оно ассиметрично и транзитивно, и *отношением нестрогого порядка*, если оно антисимметрично и транзитивно.

Связное отношение порядка называется отношением *линейного* (или совершенного) *порядка*.

Каждому отношению порядка ρ в X соответствует обратное ему отношение ρ^{-1}, которое также является отношением порядка.

Пример. Отношению «меньше» во множестве R обратно отношение «больше».

Если отношение порядка ρ связано, то противоположное ему отношение $\bar{\rho}$ является отношением порядка. При этом, если ρ - строгое отношение порядка, то $\bar{\rho}$ - отношение нестрогого порядка, и обратно.

Пример. Отношению строгого порядка «меньше» в множестве R противоположно отношение нестрогого порядка «больше, или равно».

Множество с заданным на нем отношением порядка ρ называют упорядоченным. Часто обозначают: $<$ - отношение строгого порядка, $\leq$ - нестрогого порядка.

Если A – подмножество множества X, на котором задано отношение порядка ρ, то на A также задано отношение порядка, индуцированное отношением ρ.

Пример. Имея обычное отношение порядка в множестве R, получаем отношение порядка и в любом его подмножестве.

Пусть A – подмножество упорядоченного множества X. Назовем элемент $a \in A$ наименьшим в A, если для любого $x \in A$ имеем $a \leq x$.

Очевидно, что в A может существовать не более одного наименьшего элемента.

Упорядоченное множество X называется вполне упорядоченным, если любое его непустое подмножество имеет наименьший элемент.

Пример. Множество N натуральных чисел – вполне упорядоченное.

Элемент $a \in X$ называется минимальным в X, если в X нет ни одного элемента x, такого, что $x < a$. Ясно, что если в X есть наименьший элемент, то он является единственным минимальным элементом в X. Вообще говоря, в X может не быть ни одного минимального элемента, а может быть бесконечно много таких элементов.

Пример. В множестве $N' = N \setminus \{1\}$ отношение "a делится на $в$" задает порядок, для которого минимальными элементами будут все простые числа (и только они).

Задача 1. Доказать, что для произвольных множеств A, B, C и D имеет место равенство: $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$.

Решение.

Докажем равенство методом двустороннего включения.

1) Пусть $x=(x_1,x_2)$, где $x_1 \in (A \cap B)$, $x_2 \in (C \cap D) \Rightarrow x_1 \in A$ и $x_1 \in B$, $x_2 \in C$ и $x_2 \in D \Rightarrow x_1 \in A$, $x_2 \in C$ и $x_1 \in B$, $x_2 \in D \Rightarrow (x_1,x_2) \in (A \times C)$ и $(x_1,x_2) \in (B \times D) \Rightarrow (x_1,x_2) \in (A \times C) \cap (B \times D)$. Таким образом, $x \in (A \times C) \cap (B \times D)$.

2) Обратно, пусть $x=(x_1,x_2) \in (A \times C) \cap (B \times D)$. Тогда $x_1 \in A$, $x_2 \in C$ и $x_1 \in B$, $x_2 \in D \Rightarrow x_1 \in A$ и $x_1 \in B$, $x_2 \in C$ и $x_2 \in D \Rightarrow x_1 \in (A \cap B)$, $x_2 \in (C \cap D)$. Отсюда следует, что $x \in (A \cap B) \times (C \cap D)$.

Равенство доказано.

Задача 2. Отношение R на множестве Z целых чисел определяется условием: $xRy \equiv$ разность $(x-y)$ делится на 5. Доказать, что R является отношением эквивалентности.

Решение:

Отношение R рефлексивно: $x-x=0$ делится на 5. Оно также симметрично: если $x-y=5q$, $q\in$Z , то $y-x=5(-q)$, $-q\in$Z. Наконец, отношение R транзитивно: если $x-y=5q_1$, $q_1\in$Z и $y-z=5q_2$, $q_2\in$Z, то имеем: $x-z=5(q_1+q_2)$, $q_1+q_2\in$Z. Следовательно, данное отношение есть отношение эквивалентности.

Вопросы для самоконтроля

1. Сколько элементов содержит множество $A_1\times A_2$, если A_1 имеет n элементов, а A_2 – m элемнтов?
2. Пусть $A = \{1, 2\}$ $B = \{3, 5\}$. Пересекаются ли множества А$\times B$ и $B\times A$?
3. Для любых ли множеств A, B, C справедливы следующие равенства? Приведите пример.

   а) $A\times B = B\times A$;

   б) $A\times(B\times C) = (A\times B)\times C$.
4. Перечислите все элементы бинарного отношения ρ: x ρ $y \Leftrightarrow x \mid$ y на множестве $A = \{4, 5, 6, 7,8,9,10,11,12,13,14,15,16\}$
5. Приведите три примера бинарных отношений на множестве N, удовлетворяющих поочередно только одному из свойств рефлексивности, симметричности и транзитивности.
6. Постройте бинарное отношение, которое не симметрично, не рефлексивно, не транзитивно.
7. Является ли отношение $x\cdot y\geq 0$ на множестве R отношением эквивалентности?
8. Множество $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ разбито на классы $M_1 = \{1\}$ $M_2=\{2,3,4\}$ $M_3 = \{5, 6\}$. Какое множество картежей из $A\times A$ будет принадлежать соответствующему отношению эквивалентности?
9. Задайте отношение простого порядка на множестве $\{a, b, c\}$. Сколькими способами это можно сделать?
10. Приведите пример такого отношения простого порядка на множестве A, что в A не найдется элемента, предшествующего всем остальным элементам?
11. Какие множества будут являться областью определения и областью значения для бинарного отношения ρ, определенного на множестве R: x ρ $y \Leftrightarrow x \leq y$?

Упражнения для самостоятельного решения

1. Перечислите элементы множеств $A\times B$, $B\times A$:

   а) $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3\}$

   b) $A = \{1\}$, $B = \{3, 4, 5\}$

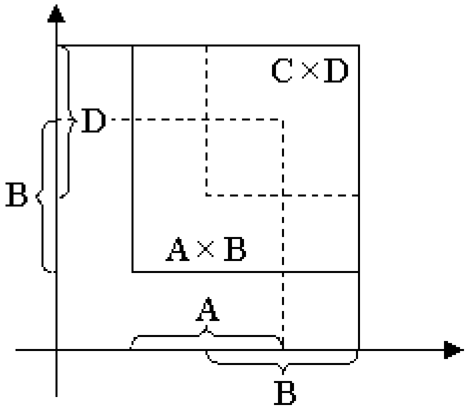
2. Найди геометрическую интерпретацию следующих множеств:

a) $[a, b]\times[c, d]$, где $[a, b]$ и $[c, d]$ – отрезки вещественных прямых;

b) $[a, b]^2$;

c) $[a, b]^3$.

3. Исходя из наглядной иллюстрации заключить, справедливо ли равенство: $(A\times B)\cup(C\times D) = (A\cup C)\times(B\cup D)$



4. Доказать справедливость равенства:

a) $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$;

b) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$;

c) $A \times (B \cap C) = (\mathrm{A} \times B) \cap (A \times C)$;

d) $(A \times B) \cup (\mathrm{C} \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$;

e) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$;

f) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

5. Для каждого из следующих бинарных отношений, определенных на множестве R, найдите область определения, область значений и изобразите на плоскости множество всех точек (x, y) таких, что $x\ \rho\ y$:

a) $x\ \rho\ y \Leftrightarrow y^2 = x$;

b) $x\ \rho\ y \Leftrightarrow x + y =1$;

c) $x\ \rho\ y \Leftrightarrow y = \log_2 x$;

d) $x\ \rho\ y \Leftrightarrow y = \sin x$.

6. Найди D_ρ, E_ρ, ρ^{-1}, $\rho\circ\rho$, $\rho\circ\rho^{-1}$, $\rho^{-1}\circ\rho$ для отношений:

a) $\rho = \{(x, y) : x, y \in \mathrm{N}, x$ делит $y\}$

b) $\rho = \{(x, y) : x, y \in \mathrm{R}$, и $\mathrm{x} + y \le 0$

c) $\rho = \{(x, y) : x, y \in \mathrm{R}$, и $2\ x \ge 3\ y\}$

7. Для каждого из следующих бинарных отношений выясните, какими свойствами (рефлексивным, симметричным, антисимметричным, транзитивным) оно обладает и какими не обладает. дайте обоснование:

7.1. Отношения определены на множестве R

a) $x\ \rho\ y \Leftrightarrow x^2 = \mathrm{y}^2$;

b) $x\ \rho\ y \Leftrightarrow \mathrm{x}\cdot\mathrm{y} > 1$;

c) $x\ \rho\ y \Leftrightarrow y = |x|$;

7.2. На множестве Z

a) $x\ \rho\ y \Leftrightarrow x \le y +1$;

b) $x \rho y \Leftrightarrow 2x = 3y$;

c) $x \rho y \Leftrightarrow (x - y)$ ⋮ 3;

7.3. На множестве Z^+

a) $x \rho y$ у $\Leftrightarrow$ x ⋮ y ;

b) $x \rho y \Leftrightarrow$ числа x и y четные;

c) $x \rho y \Leftrightarrow |x - y| \leq 3$;

7.4. На множестве всех прямых плоскости

a) $x \rho y \Leftrightarrow x \parallel y$;

b) $x \rho y \Leftrightarrow x$ пересекается с y;

c) $x \rho y \Leftrightarrow x \perp y$;

7.5. На множестве отношений людей

a) x ρ y ⇔ человек x отец y;

b) x ρ y⇔ люди x и y одной национальности;

c) x ρ y ⇔ человек x выше y.

8. Заполнить таблицу, указав, какими из свойств обладают следующие отношения.

Множество	Отношение	Рефлексивность	Симметричность	Асимметричность	Антисимметричность	Транзитивность	Связанность
P(U)	$A \subset B$						
P(U)	$A \cap B \neq \varnothing$						
P(U)	$B = A'$						
любое	$a = b$						

a ⋮

любое	$a \neq b$						
N							
N	$a \mid b$						
N	D $(a, b) = 1$						
N	$a \equiv b \pmod{m}$						
R	$a > b$						
R	$a \geq b$						
R	$a < b$						
R	$a \leq b$						
R_+	$a = \lambda b, \quad \lambda \in Q_+$						
Высказывательные формы	$a \Leftrightarrow b$						
Высказывательные	$a \Rightarrow b$						

формы							
Фигуры	$a \cong b$						
Фигуры	$a \sim b$						
Прямые	$a \parallel b$						
Прямые	$a \perp b$						
Лучи	$a \uparrow\uparrow b$						
Лучи	$a \uparrow\downarrow b$						
Векторы	Коллинеарность						
Плоскости	$\alpha \parallel \beta$						
Плоскости	$\alpha \perp \beta$						
Окружности	Касание						
Окружности	Концентричность						
Окружности	Ортогональность						

9. Доказать, что следующие отношения являются отношениями эквивалентности и найти классы эквивалентности этих отношений:

a) $x \rho y \Leftrightarrow$ многоугольник x подобен многоугольнику y;

b) $x \rho y \Leftrightarrow$ люди x и y одной национальности;

c) $x \rho y \Leftrightarrow$ последние буквы слов x и y совпадают.

10. Отношение ρ на множестве Z определяется условием: $x \rho y \Leftrightarrow (x - y) \vdots 5$. Доказать, что ρ является отношением эквивалентности и найти его классы эквивалентности.

11. Сколько различных отношений эквивалентности можно задать на трехэлементном множестве $\{a_1\ a_2\ a_3\}$?

12. Задано множество кортежей $\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5,5)\} = D$ из $A \times A$, где $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Указать на какие классы эквивалентности разбивается A. Проверить, что множество кортежей задает отношение эквивалентности на A.

13. Множество $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ разбито на классы $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2=\{3\}$, $A_3 = \{4, 5\}$, $A_4 = \{6, 7, 8, 9\}$. Образовать множество всех кортежей из $A \times A$, принадлежащих соответствующему отношению эквивалентности.

14. Для данных отношений определить какие из них являются отношениями порядка и какого типа:

a) $x \rho y \Leftrightarrow$ слово x предшествует слову y в алфавитном порядке;

b) $x \rho y \Leftrightarrow$ слово x не предшествует слову y в алфавитном порядке;

c) $x \rho y \Leftrightarrow$ человек x по меньшей мере на 2 года моложе человека y;

d) $x \rho y \Leftrightarrow$площадь прямоугольника x не больше площади прямоугольника y;

e) $x \rho y \Leftrightarrow$ разность $y \setminus x$ непустая.

3. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ОТНОШЕНИЯ

3.1. Функциональные отношения. Обратимые функциональные отношения. Функциональные отношения связаны с понятием функции, заданной на некотором множестве X.

Функция f задана на некотором множестве X, если каждому элементу x из X поставлен в соответствие один определенный элемент $y=f(x)$ из некоторого множества Y.

Если множество Z содержит оба множества X и Y, то задание функции полностью определяется множеством всевозможных кортежей вида $<x, f(x)>$ из $Z\times Z$, где x – любой элемент из X , а $f(x)$ – соответствующий ему элемент из Y. Такое множество кортежей называется *графиком функции f*.

Пример.

Если функция f каждому x из R ставит в соответствие число x^2 из R, то график функции состоит из всевозможных кортежей вида $<x,x^2>$ множества R×R и изображается параболой.

Отношение, которому принадлежат в точности все кортежи графика функции f, называется *функциональным отношением* для функции f.

Основная особенность этого отношения состоит в том, что ему не могут принадлежать никакие два кортежа $<x, y_1>$, $<x, y_2>$, первые элементы которых равны, а вторые – нет (каждому $x\in X$ соответствует, по определению функции, в точности один элемент y из Y).

Примеры.

1) Множество кортежей вида $<x,1>$ из R×R задает функциональное отношение для функции f, определенной на R и тождественно равной 1.

2) Множество кортежей вида $<x, \sin(x)>$ задает функциональное отношение для функции, которая каждому числу x ставит в соответствие число $\sin(x)$.

3) Множество кортежей $\{<1, 2>, <2, 3>, <1, 3>\}$ не задает никакого функционального отношения, так как содержит разные кортежи с одинаковыми первыми элементами.

Вторые элементы кортежей, принадлежащих некоторому функциональному отношению, могут и совпадать, поскольку различным элементам x_1 и x_2 из X функция f может ставить в соответствие один и тот же элемент y из Y (рис. 1).

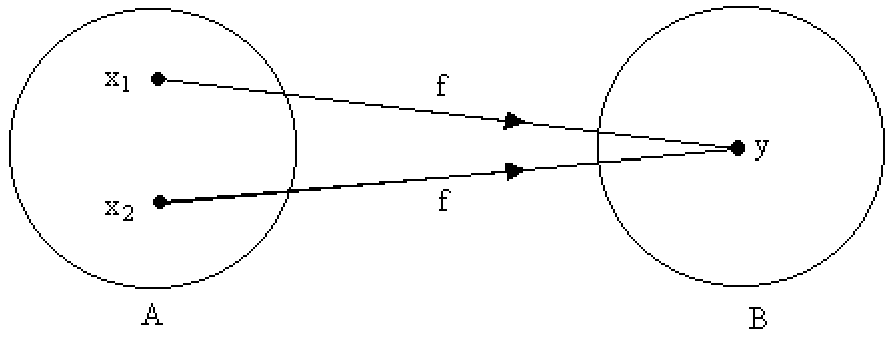


Рис. 1.

В случае, когда разным элементам из X ставят в соответствие разные элементы из Y можно определить так называемую обратную функцию f^{1} (рис. 2).

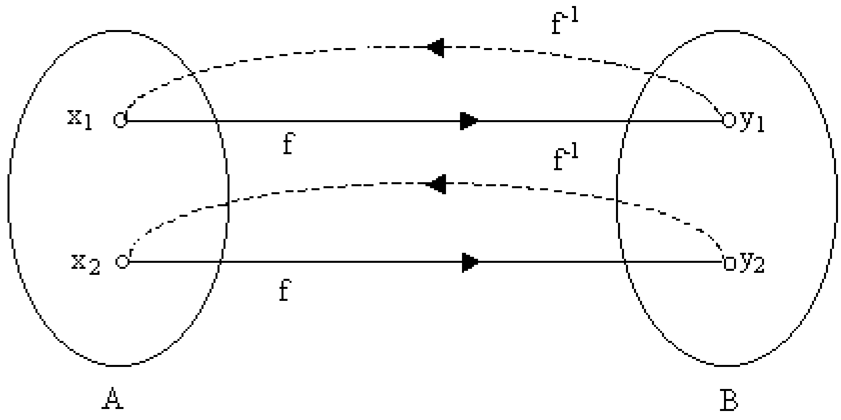


Рис. 2.

Обратная функция f^{1} – это функция, которая каждому значению функции f из Y ставит в соответствие единственный элемент x из X, такой, что $f(x)=y$.

Функция f при этом называется обратимой, и соответствующее функциональное отношение называется обратимым.

<u>Пример.</u> Пусть функция f определена на множестве {1, 2, 3} так, что $f(x)=(-1)^{x}$. Тогда множество кортежей, принадлежащих функциональному отношению: <1, -1>, <2, 1>, <3, -1>. Функциональное отношение необратимо, так как для y=-1 определены $x_1=1$, $x_2=3$ такие, что $f(x)=y$.

<u>3.2 Образ и прообраз множества при отображении.</u> Две функции f_1 и f_2 называются *равными*, если они состоят из одних и тех же элементов: f_1: $X_1 \to Y_1$ и f_2: $X_2 \to Y_2, f_1 = f_2 \Leftrightarrow X_1=X_2, Y_1=Y_2$.

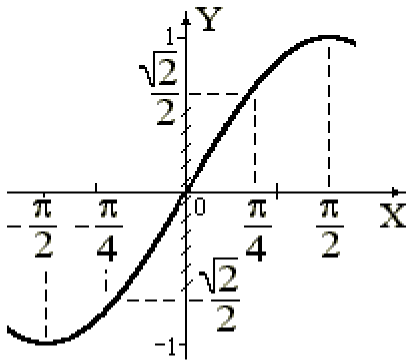
Область определения функции обозначается D_f, а *область значений* – R_f. Если $D_f=X$ и $R_f=Y$, то говорят, что функция f задана на множестве X со значениями во множестве Y и осуществляет отображение множества X во множество Y. Это отображение обозначается таким образом: f: $X \to Y$.

Элемент $y=f(x)$ называется *образом элемента* x при отображении f, а элемент x – *прообразом элемента* y.

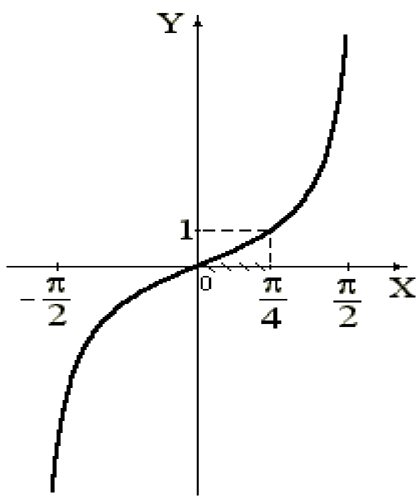
Если множество $A \subset X$, то через $f(A)$ обозначается множество образов всех элементов множества A. Множество $f(A)$ называется *образом множества* A при отображении f. Пусть дано отображение f: $X \to Y$, множество всех элементов в X, образы которых при отображении f содержатся в данном множестве $B \subset Y$, называется *полным прообразом множества* B при отображении f и обозначается $f^{1}(B)$.

<u>Примеры.</u>

1) Если дано отображение f: $\mathrm{R}\to[-1, 1]$, $y=f(x)=\sin(x)$, $x\in\mathrm{R}$, $y\in[-1, 1]$, то образом множества $A=[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}], A\subset X$ при отображении f будет множество образов всех элементов множества A: $f(A)=[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}]$.



2) Если дано отображение f, $f(x)=\mathrm{tg}(x)$, где x − любое вещественное число, для которого определен $\mathrm{tg}(x)$, то прообразом множества $B=[0, 1]\subset Y$ ($Y=R$), будет множество всех элементов в X, образы которых содержатся в B при отображении f: $f^{-1}(B)=[0,\frac{\pi}{4}]$.



<u>3.3 Функция одной и нескольких переменных.</u> Если задано отображение f: $A\to B$, где A и B − подмножества из R, то f: $A\to B$ называют вещественной функцией одной вещественной переменной. Для такой функции обычно применяют обозначение $y=f(x)$, $y=y(x)$ и т. п. Аналогично, говорят, что отображение f: $A\to B$ является вещественной функцией двух переменных, если $A\subset\mathrm{R}^2$, $B\subset\mathrm{R}$. В этом случае для элементов множества A применяют обозначение вида (x,y) или (x_1, x_2), а функцию обозначают через $z=f(x, y)$ или $y=f(x_1, x_2)$.

Точно также, считая, что $A \subset \mathrm{R}^n$ и $B \subset \mathrm{R}$ можно дать определение вещественной функции $y=f(x_1, x_2, \ldots x_n)$, зависящей от n вещественных переменных $x_1, x_2, \ldots x_n$.

<u>3.4. Композиция отображений.</u> Пусть даны отображения f: $X \to Y$ и g: $Y \to Z$. Композицией отображений f и g (сложным отображением) называется отображение $g \circ f$: $X \to Z$, определяемое следующим: $(g \circ f)(x) \equiv g(f(x))$. Композицию отображений f и g иногда называют их произведением. В том случае, когда f и g именуются функциями, $g \circ f$ называют также сложной функцией, построенной по f и g (см. рис. 3).

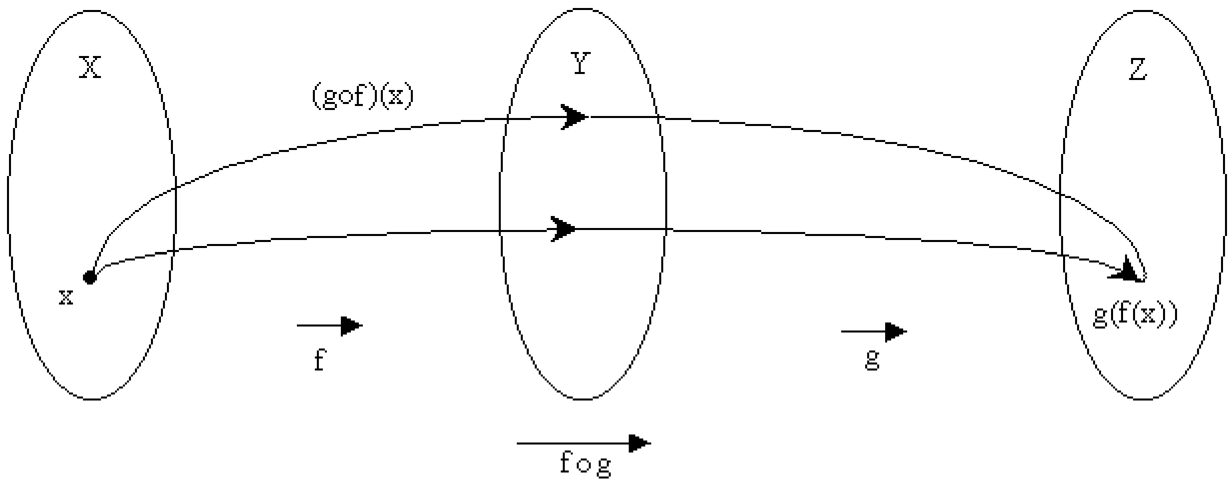


Рис. 3

Операция композиции отображений ассоциативна. Если даны отображения: f: $X \to Y$, g: $Y \to Z$ и h: $Z \to W$, то для любого x ($x \in X$): $(h \circ (g \circ f))(x) = ((h \circ g) \circ f)(x)$

Свойство ассоциативности позволяет опускать скобки при построении композиции нескольких отображений.

Коммутативностью операция композиции не обладает, т.е. можно построить такие отображения f и g, что $g \circ f \neq f \circ g$.

<u>Пример</u>. Пусть $f(x) = \sin(x)$ и $g(x) = x^2$.

Определим $(f \circ g)(x) = \sin(x^2)$ и $(g \circ f)(x) = (\sin x)^2$.
Очевидно, что, вообще говоря, $\sin(x^2) \neq (\sin x)^2$.

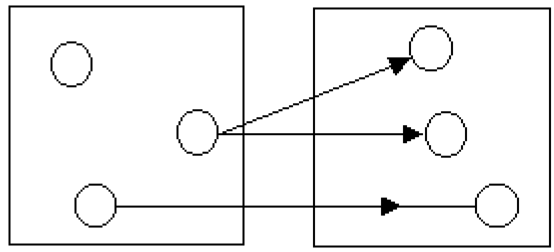
<u>3.5. Типы отображений.</u> Выделяют три основных типа отображений: сюрьективные, инъективные и биективные.

Отображение f: $X \to Y$ называется *сюрьективным*, если $\forall y \in Y : f^{-1}(\{y\}) \neq 0$.

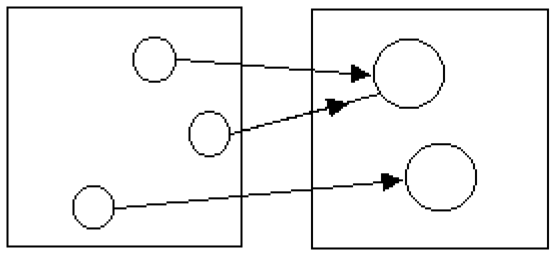
Отображение f: $X \to Y$ называется *инъективны*м, если $\forall x_1 \in X, \forall x_2 \in X : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Отображение f: $X \to Y$ называется *биективным*, если оно сюрьективно и инъективно.

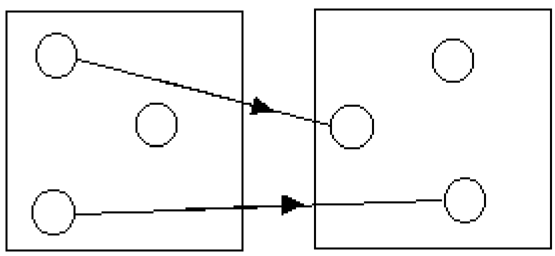
Схематические рисунки иллюстрируют определения функции (a), инъективного (b), сюрьективного (c) и биективного (d) отображений (рис. 4).



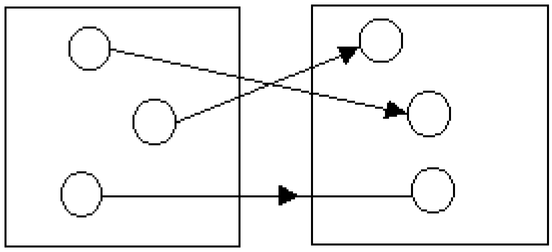
a - отношение, но не функция



b - инъекция, но не сюрьективно



c - сюрьекция, но не инъекция



d - биекция
Рис. 4.

<u>Примеры.</u>

1) Отображение $f: R \to [-1;1], x \alpha \ \sin x$ является сюрьективным (все элементы из [-1; 1] являются образами элементов из R), но не инъективным (существуют $x_1 \neq x_2$, но $f(x_1) = f(x_2)$).

2) $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to R, \ x \alpha \ \sin x$, отображение f инъективно $\left(\forall x_1, x_2 \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] f(x_1) \neq f(x_2)\right)$, но не сюрьективно (элементы из R : (-∞; -1) и (1;+∞) не являются образами элементов из $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$)

3) $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1;1], \ x \alpha \ \sin x$, отображение f биективно.

Вопросы для самоконтроля

1. Является ли отношение простого порядка на множестве, содержащем более двух элементов, функциональным?
2. Является ли бинарное отношение ρ всюду определенным, функциональным: $\{\langle x, y\rangle \in Z \times Z \mid y = |x|\}$ Почему?
3. Обратимо ли функциональное отношение, задаваемое всеми кортежами вида: $\langle x, \cos(x)\rangle$, где $x \in$R? Изменится ли ответ, если ограничиться числами x между 0 и π?
4. Приведите пример отображения $R \to R^+$.
5. Является ли множество [1; 2] образом множества [1; 4] при отображении f: $R^+ \to R^+$, $x \alpha \ \sqrt{x}$?
6. Является ли множество {2} прообразом множества {0} при отображении f: R→R, $x \alpha \ x^2 - 4$?
7. Сколько всего существует отображений множества A={1, 2} в себя? Какие из них инъективны, сюрьективны?
8. Приведите примеры отображений:
   a) инъекция, но не сюрьекция;
   b) сюрьекция, но не инъекция;

c) биекция.

9. Какое отображение будет являться обратным для отображения *f*: $R \to R^{+}$, $x\,\alpha\;\; e^{x}$.

10. Какое отображение будет являться композицией отображений: *f*: $x\,\alpha\;\; x^{3}$, g: $x\,\alpha\;\; x^{2}$?

Упражнения для самостоятельного решения

1. Для каждого из следующих бинарных отношений исследуйте, является ли оно всюду определенным, функциональным, ответ обоснуйте:

a) $\left\{\langle x, y\rangle \in R^{+} \times R \,\middle|\, y^{2} = x\right\}$;

b) $\left\{\langle x, y\rangle \in N \times N \,\middle|\, x = y^{2}\right\}$;

c) $\left\{\langle x, y\rangle \in R^{+} \times R \,\middle|\, x = \dfrac{y-1}{y+1}\right\}$;

d) $\left\{\langle x, y\rangle \in [-1;1] \times R \,\middle|\, x = \sin y\right\}$;

e) $\left\{\langle x, y\rangle \in R \times R \,\middle|\, x = \lg y\right\}$;

f) $\left\{\langle x, y\rangle \in Z \times Z \,\middle|\, y = |x|\right\}$.

2. Проверить, какие из следующих отношений функциональные и какие из функциональных обратимы:

a) На множестве N натуральных чисел. $xR_1y \equiv$число x меньше числа y;

b) На множестве N натуральных чисел $xR_2y \equiv$число y – наименьшее четное число, не превосходящее x;

c) На множестве Z^{+} целых положительных чисел $xR_3y \equiv$число y есть наименьший простой делитель числа x;

d) На множестве всех окружностей на плоскости $xR_4y \equiv$окружность x имеет тот же центр, что и окружность y, и в 2 раза меньший радиус;

e) На некотором множестве людей $xR_5y \equiv$человек y есть родитель человека x.

3. Обратимо ли функциональное отношение, задаваемое всеми кортежами вида $<x, \sin(x)>$, где $x \in R$? Изменится ли ответ, если ограничиться числами x между 0 и π? Между $-\dfrac{\pi}{2}$ и $\dfrac{\pi}{2}$?

4. Приведите примеры отображений

а) $R \to R$	в) $R^{+} \to R$	д) $Z \to N$
б) $R \to R^{+}$	г) $R \to \{0; 1\}$	е) $R \to N$

5. Докажите, что каждое из следующих бинарных отношений является отображением R в R и найдите его образ.

a) $\left\{\langle x, y\rangle \in R \times R \,\middle|\, y = x^{2} - 1\right\}$;

b) $\left\{\langle x, y\rangle \in R \times R \,\middle|\, y = 2^{x}\right\}$;

c) $\left\{\langle x, y\rangle \in R \times R \,\middle|\, y = 2^{x^2+3x+4}\right\}$;

d) $\left\{\langle x, y\rangle \in R \times R \,\middle|\, y = \log_2 |x|\right\}$;

e) $\left\{\langle x, y\rangle \in R \times R \,\middle|\, y = \log_2\left(x^2 + 3x + 3\right)\right\}$.

6. Найдите $f(A)$, где $A = \left\{\langle x, y\rangle \in R \times R \,\middle|\, y = 2x + 3\right\}$ для следующих отображений:

a) $f : \langle x, y\rangle \mapsto \langle y, x\rangle$;

b) $f : \langle x, y\rangle \mapsto \langle -y, -x\rangle$;

c) $f : \langle x, y\rangle \mapsto \langle x, -y\rangle$;

d) $f : \langle x, y\rangle \mapsto \langle y - 2, x + 2\rangle$.

7. Найдите прообраз множества {0} при следующих отображениях R $\to$ R:

а) $x \mapsto \sin(x)$ б) $x \mapsto \lg(x^2 + 1)$ в) $x \mapsto x^2 + x + 2$

8. Пусть $\alpha : x \mapsto x^2$, $\beta : x \mapsto x^3$ - отображения R $\to$ R. Найдите $\alpha \circ \beta$, $\beta \circ \alpha$.

9. Пусть $\alpha : x \mapsto x + 1$, $\beta : x \to 2^x$ отображения R в R. Найдите $\alpha \circ \beta \circ \alpha$, $\alpha^2 \circ \beta$, $\alpha \circ \beta^2$, $\beta \circ \alpha \circ \beta$. Являются ли отображениями R в R отношения α^{-1}, β^{-1}?

10. Для каждого из следующих отображений исследуйте, является ли оно инъективным, сюръективным. Ответ обоснуйте:

a) $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R} \quad x \mapsto x^2 + 3x + 5$;

b) $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R} \quad x \mapsto x^3 + 3x$;

c) $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R} \quad x \mapsto e^x$;

d) $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R} \quad x \mapsto 3^{2x} + x$;

e) $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R} \quad x \mapsto x^3 + 3x$

f) $f : \mathrm{Z} \times \mathrm{Z} \to \mathrm{Z}, \quad \langle a, b\rangle \mapsto a + b$;

g) $f : \mathrm{Z} \to \mathrm{Z} \times \mathrm{Z}, \quad a \mapsto \langle a, b\rangle$.

4. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

При решении многих практических задач приходится выбирать из некоторой совокупности объектов элементы, обладающие тем или иным свойством, располагать эти элементы в определенном порядке и т. д. Поскольку в задачах такого типа речь идет о тех или иных комбинациях объектов, их называют *комбинаторными задачами*. Область математики, в которой изучаются комбинаторные задачи, называют *комбинаторикой*.

Приведем несколько примеров комбинаторных задач.

1. Определить сколькими способами могут быть распределены золотая, серебряная и бронзовая медали между участвующими командами в чемпионате мира по футболу.
2. Расположить числа 1, 2,… 9 так, чтобы они образовывали "магический квадрат" (матрица, сумма элементов которой по каждому столбцу, по каждой строке и по обеим диагоналям одна и та же).
3. Узнать, сколькими способами из 5 юношей и 7 девушек можно выбрать команду для эстафетного бега, если в нее должно войти 4 юноши и 4 девушки и т. п.

4.1. Комбинаторные правила. Правило произведения. Если объект A_1 может быть выбран k_1 способами, затем для каждого из таких выборов объекта A_1 другой объект A_2 может быть выбран k_2 способами, затем для каждого из таких выборов и объекта A_1 и объекта A_2 третий объект A_3 может быть выбран k_3 способами и т. д., включая m - ый объект A_m, который может быть выбран k_m способами, то объект, состоящий в выборе m объектов вместе, т. е. объект " A_1 и A_2 и A_3 и … и A_m" может быть выбран $k_1\ k_2\ k_3 \dots k_m$ способами.

Пример. Выясним, сколькими способами можно осуществить путешествие по маршруту: Благовещенск - Владивосток - Южно - Сахалинск, если из Благовещенска до Владивостока можно добраться автотранспортом, поездом, самолетом, теплоходом; из Владивостока до Южно - Сахалинска - теплоходом и самолетом. Очевидно, что число разных путей из Благовещенска до Южно - Сахалинска равно 4×2=8, так как, выбрав один из четырех возможных способов путешествия от Благовещенска до Владивостока, имеем два возможных способа путешествия от Владивостока до Южно - Сахалинска (рис. 1).

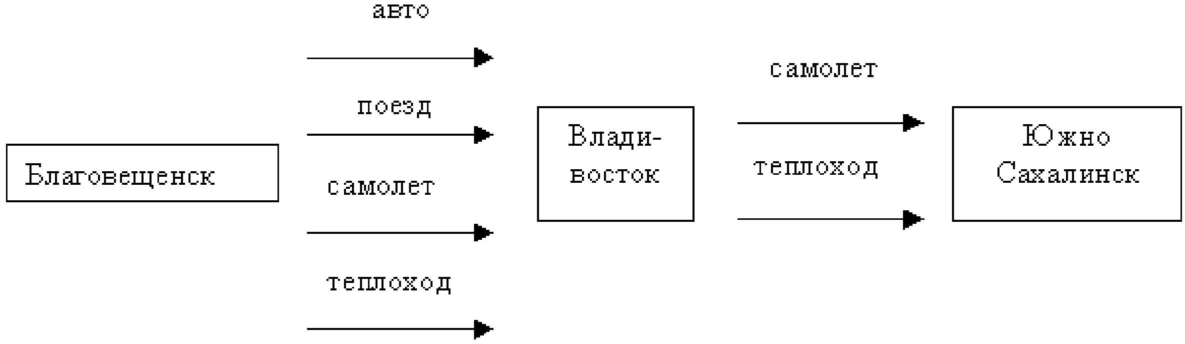


Рис. 1

На языке теории множеств это правило формулируется следующим образом: если множества A и B конечны, то число пар в их декартовом произведении $A \times B$ равно произведению чисел элементов этих множеств:

$$n(A \times B)=n(A)\cdot n(B) \qquad (1)$$

Задача. В розыгрыше первенства по футболу принимают участие 18 команд. Сколькими способами могут быть распределены золотая, серебряная и бронзовая медали, если любая команда может получить только одну медаль?

Решение. Одну из медалей, например, бронзовую, может получить одна из 18 команд (18 возможностей). После того как определится бронзовый призер, обладателем другой медали, например золотой, может стать одна из оставшихся 17 команд (17 возможностей). После того как определились бронзовый и золотой призеры, обладателем серебряной медали может быть одна из оставшихся 16 команд (16 возможностей). Следовательно, общее число способов, которыми могут быть распределены золотая, серебряная и бронзовая мебдали, равно $18 \cdot 17 \cdot 16 = 4896$.

Правило суммы. Пусть даны m действий A_1, A_2, …, A_m таких, что выполнение любого их них не зависит от выполнения остальных действий. Если: действие A_1 можно выполнить k_1 способами, действие A_2 можно выполнить k_2 способами, …, действие A_m можно выполнить k_m способами, тогда, действие, состоящее в том, что выполняется любое из действий, можно выполнить $k_1+k_2+\ldots+k_m$ способами.

На языке теории множеств это правило формулируется следующим образом: если пересечение конечных множеств A и B пусто, $A \cap B=\varnothing$, то число элементов в их объединении равно сумме чисел элементов множеств A и B:

$$n(A \cup B)=n(A)+n(B) \qquad (2)$$

Пример. Если на блюде лежат 7 яблок и 4 груши, то выбрать один плод можно 7+4=11 способами.

Справедливо следующее утверждение: если конечные множества A_1, A_2, …, A_m попарно не пересекаются, т. е. если $A_j \cap A_k=\varnothing$ при $j\neq k$, то имеет место равенство:

$$n(A_1 \cup A_2 \cup\ldots \cup A_m)=n(A_1)+n(A_2)+\ldots +n(A_m) \qquad (3)$$

Рассмотрим теперь случай, когда множества могут иметь непустые пересечения. Для любых конечных множеств A и B верно равенство:

$$n(A \cup B)=n(A)+n(B)-n(A \cap B) \qquad (4)$$

Формула (4) является частным случаем более общей формулы, которую называют *формулой перекрытий* или *формулой включений и исключений*. В случае трех переменных она имеет вид:

$n(A \cup B \cup C)=n(A)+n(B)+n(\mathrm{C})-\mathrm{n}(A \cap \mathrm{B})-n(B \cap C)-n(A \cap C)+n(A \cap B \cap C)$.

Пример. Если множество A состоит из букв {а, б, в, г, д, е}, а множество B из букв {г, д, е, ж, з}, то их объединением является множество {а, б, в, г, д, е, ж, з}, а пересечением - множество {г, д, е}. При этом $n(A)=6$, $n(B)=5$, $n(A \cap B)=3$, $n(A \cup B)=8$, что согласуется с формулой (4).

Задача. Каждый ученик класса - либо девочка, либо блондин, либо любит математику. В классе 20 девочек, из них 12 блондинок, и одна блондинка любит математику. Всего в классе 24 ученика - блондина, математику из них любят 12, а всего учеников (мальчиков и девочек), которые любят математику, 17, из них 6 девочек. Сколько учеников в данном классе?

Решение. Если A - множество девочек, B - блондинов, C - учеников, которые любят математику, то $n(A \cup B \cup C)$ - искомое число. $A \cap B$ - множество блондинок, $A \cap C$ - множество девочек, которые любят математику, $B \cap C$ - множество всех блондинов (мальчиков и девочек), которые любят математику, $A \cap B \cap C$ - множество блондинок, которые любят математику. Тогда $n(A \cup B \cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A \cap B)-n(A \cap C)-n(B \cap C)+n(A \cap B \cap C)=20+24+17-(12+6+12)+1=32$.

4.2. Теория соединений. При выборе m элементов из n различных элементов принято говорить, что они образуют *соединение из n элементов по m*.

В зависимости от того, имеет ли значение порядок элементов в соединении или нет, а также от того, входят в соединение все n элементов или только часть их, различают три вида соединений.

Виды соединений:

1. Соединения, отличающиеся друг от друга составом элементов или их порядком, каждое из которых содержит m ($m \leq n$) элементов, взятых из n различных элементов, называются *размещениями* из n элементов по m.

Например, все размещения из элементов a, b, c, d по два:

$$ab, ba, ac, ca, ad, da, bc, cb, bd, db, cd, dc.$$

2. Соединения, каждое их которых содержит n различных элементов взятых в определенном порядке, называются *перестановками* из n элементов.

Например, все перестановки элементов a, b, c:

$$abc, acb, bac, bca, cab, cba.$$

3. Соединения, отличающиеся друг от друга по крайней мере одним элементом, каждое из которых содержит m элементов, взятых из n различных элементов, называются *сочетаниями* из n элементов по m. Порядок следования элементов не учитывается.

Например, все сочетания из элементов a, b, c, d, e по три:

abc, abd, abe, acd, ace, ade, bcd, bce, bde, cde.

Соединения, в каждом из которых любой из n различных элементов входит один раз, называют *соединениями без повторений*.

Соединения, в каждом из которых из n различных элементов может входить более одного раза называют *соединениями с повторениями*.

Соединения без повторений. Задача о числе размещений без повторений. Упорядоченное множество длины k, составленное из элементов m - элементного множества X, называют размещениями без повторений из m элементов множества X по k. Число таких размещений обозначают A_m^k и вычисляют как:

$$A_m^k = \frac{m!}{(m-k)!}.$$

Задача. Сколькими способами можно выбрать старосту и заместителя в группе из 20 студентов.

Решение. В этом случае пары, выбираемые из 20 студентов, упорядоченные, так как Иванов с Петровым, например, образуют пару двумя способами:

1) Иванов - староста, Петров - заместитель;

2) Петров - староста, Иванов - заместитель.

Поэтому, мы имеет дело с размещениями.

$$A_{20}^{2} = \frac{20!}{18!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18!}{18!} = 20 \cdot 19 = 380 .$$

<u>Задача о числе перестановок без повторений.</u> Перестановкой без повторений из m элементов называют размещение без повторений из этих элементов по m.

Число перестановок из m элементов обозначают P_m. Так как $P_m = A_m^m$, то:

$$P_m = m!$$

Задача. Сколькими способами 6 человек могут сесть на 6 стульев?

Решение. Занумеруем стулья числами 1, 2, 3, 4, 5, 6 и обозначим человека, севшего на k-й стул, через x_k. Тогда $(x_1,\ldots,x_6)$ - перестановка из имен этих шести людей, причем каждой такой перестановке соответствует один и только один способ размещения на стульях. Значит, число способов равно $P_6 = 6! = 720$.

<u>Задача о числе сочетаний без повторений.</u> k - элементные подмножества m - элементного множества X называют сочетаниями без повторений из элементов этого множества по k. Их число обозначают C_m^k и вычисляют по формуле:

$$C_m^k = \frac{m!}{k!(m-k)!} .$$

Задача 1. Сколькими способами можно выбрать двух дежурных в группе из 20 студентов.

Решение. Здесь имеем дело с выборкой 2 студентов из 20. Поскольку дежурные равнозначны, то пара дежурных неупорядоченная, т.е. Иванов и Петров, например, могут составить только одну пару. Следовательно, мы имеем дело с сочетаниями.

$$C_{20}^{2} = \frac{20!}{18! \cdot 2!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18!}{18! \cdot 2} = 190 .$$

Пользуясь формулой числа сочетаний из n по m можно заключить справедливость равенства: $C_n^m = C_n^{n-m}$, которое принято назвать *правилом симметрии*.

Одним из важных правил для числа сочетаний является *правило Паскаля*: $C_{n+1}^m = C_n^{m-1} + C_n^m$.

Задача 2. Из двух математиков и десяти экономистов надо составить комиссию в составе восьми человек. Сколькими способами может быть составлена комиссия, если в нее должен входить хотя бы один математик?

Решение. В указанной комиссии может быть либо один математик и семь экономистов, либо два математика и шесть экономистов.

Выбор одного математика из двух возможен $C_2^1 = 2/1 = 2$ способами, а семи экономистов из десяти - $C_{10}^7 = C_{10}^3 = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120$ способами. По правилу произведения число способов выбора комиссии из одного математика и семи экономистов равно $C_2^1 C_{10}^7 = 2 \cdot 120 = 240$.

Выбор двух математиков из двух возможен $C_2^2 = \dfrac{1 \cdot 2}{1 \cdot 2} = 1$ способом, а выбор шести экономистов из десяти возможен $C_{10}^6 = C_{10}^4 = 210$ способами. По правилу произведения число способов выбрать комиссию из двух математиков и шести экономистов равно $C_2^2 C_{10}^6 = 1 \cdot 210 = 210$.

Общее число способов выбора комиссии с одним математиком или комиссии с двумя математиками по правилу суммы равно

$$C_2^1 C_{10}^7 + C_2^2 C_{10}^6 = 240 + 210 = 450.$$

Указанная комиссия может быть выбрана 450 способами.

Приведем другой способ решения этой задачи.

Всего комиссии по восемь человек из 12 человек можно составить

$$C_{12}^8 = C_{12}^4 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 11 \cdot 5 \cdot 9 = 45 \cdot 11 = 495$$

способами. Эти комиссии можно разбить на два типа:

а) к одному типу относится комиссия, состоящая только из экономистов;

б) к другому типу относится комиссия, в которую входит хотя бы один математик.

Так как число способов выбрать комиссию в составе восьми человек из десяти экономистов равно $C_{10}^8 = C_{10}^2 = \dfrac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} = 5 \cdot 9 = 45,$ то число способов составить комиссию в составе восьми человек, в которую входит хотя бы один математик, ровно: 495 - 45.

<u>Соединение с повторениями.</u> <u>Задача о числе размещений с повторениями.</u> Кортежи длины *k*, составленные из элементов *m* - элементного множества *X*, называют размещениями с повторениями из *m* элементов по *k*. Число этих кортежей обозначают $\overline{A_m^k}$ и вычисляют как: $\overline{A_m^k} = m^k$.

Задача 3. На практическом занятии студентам было предложено решить у доски две задачи, по одному студенту на каждую. Сколькими способами преподаватель может вызвать студентов для решения этих двух задач?

Решение. В данном случае преподаватель может вызвать одного и того же студента для решения, как первой, так и второй задачи, следовательно, выборка, состоящая из двух студентов, будет повторная. Кроме того, эта выборка упорядоченная. Здесь мы имеем дело с размещениями с повторениями: $\overline{A_{20}^{2}} = 20^{2} = 400$ способов.

Задача 4. Найти число всех подмножеств *n* элементного множества *X*.

Решение. Будем раскладывать элементы множества *X* в два ящика. Каждому подмножеству *A* множества X соответствует способ раскладки, при котором элементы подмножества попадают в первый ящик, а остальные элементы – во второй. Обратно, каждая раскладка однозначно определяет подмножество элементов, попавших в первый ящик. Поэтому общее число подмножеств в *X* равно числу способов раскладки элементов множества по двум ящикам, т. е. равно $2^{n(X)}=2^{k}$.

<u>Задача о числе перестановок с повторениями.</u> Перестановкой с повторениями состава (k_1, k_2,…, k_m) из элементов (a_1, a_2, …, a_m) называют любой кортеж длины $k=k_1+k_2+\ldots+k_m$, в который элемент a_1 входит k_1 раз, …, элемент a_m - k_m раз. Число таких перестановок обозначают $P(k_1, k_2,\ldots, k_m)$ и вычисляют как:

$$P(k_1,k_2,...,k_m) = \frac{k!}{k_1!k_2!...k_m!} = \frac{(k_1+k_2+...+k_m)!}{k_1!k_2!...k_m!}.$$

Задача 5. Сколько "слов" можно получить, переставляя буквы в слове "математика"?

Решение. Слово "математика" является кортежем длины 10, имеющим состав (2, 3, 2, 1, 1, 1) (буква "м" входит два раза, буква "а" - три раза, и т. д.). Значит, при перестановках букв получится: $P(2,3,2,1,1,1) = \frac{10!}{2!3!2!1!1!1!} = 151200$ "слов".

<u>Задача о числе сочетаний с повторениями.</u> Пусть имеются предметы m видов и из них составляется набор, содержащий k элементов. Два таких набора считаются одинаковыми в том и только в том случае, когда они имеют одинаковый состав. Такие наборы называют сочетаниями с повторениями из m элементов по k элементам, обозначают $\overline{C_m^k}$ и вычисляют как: $\overline{C_m^k} = C_{m+k-1}^{k}$.

Задача 6. Сколько наборов из 7 пирожных можно составить, если в продаже имеются 4 сорта пирожных?

Решение. Искомое число равно:

$$\overline{C_4^7} = C_{4+7-1}^{7} = C_{10}^{7} = C_{10}^{3} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3} = 120.$$

Итак, можно составить 120 наборов.

<u>4.3. Бином Ньютона.</u> Для каждого натурального *n* и любых *x* и *a* справедливо равенство – бином Ньютона:

$$(x+a)^n = C_n^0 x^{n-0} a^0 + C_n^1 x^{n-1} a^1 + \ldots + C_n^m x^{n-m} a^m + \ldots + C_n^n x^{n-n} a^n.$$

Это равенство принято называть *биномом Ньютона* или формулой Ньютона, его правую часть – *биномиальным разложением* (в сумму) или разложением бинома, а коэффициенты $C_n^0, C_n^1, C_n^2, ..., C_n^m$ - биномиальными коэффициентами.

Свойства разложения бинома:

1. Число всех членов разложения на единицу больше показателя степени бинома, т. е. равно $n+1$.
2. Сумма показателей степеней x и а каждого члена разложения равна показателю степени бинома, т. е. $(n-m)+m=n$.
3. Общий член разложения (обозначим его T_{m+1}) имеет вид: $T_{m+1} = C_n^m x^{n-m} a^m, m = 0,1,...,n.$ Т обозначает член разложения, а индекс $m+1$ - его порядковый номер в разложении бинома, считая слева направо.
4. Биномиальные коэффициенты членов разложения, равноотстоящих от концов разложения, равны между собой. Это следует из правила симметрии: $C_n^m = C_n^{n-m}, m = 0,1,...,n$.
5. Каждый биномиальный коэффициент C_n^m разложения, начиная со второго, равен предшествующему биномиальному коэффициенту C_n^{m-1}, умноженному на дробь $\frac{n-(m-1)}{m}, m = 1,2,3,...,n.$
6. Если показатель степени бинома - четное число ($n=2l$), то число членов разложения равно $2l+1$. Если показатель степени бинома - нечетное число ($n=2p+1$), то число членов разложения равно $2p+2$.
7. Сумма биномиальных коэффициентов членов разложения, стоящих на нечетных местах, равна сумме биномиальных коэффициентов, стоящих на четных местах, и равно 2^{n-1}, т. е. $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + ... = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + ... = 2^{n-1}$.

Задача 7. Доказать, что для каждого $b>1$ и каждого натурального числа $n>1$ верно неравенство Бернулли: $b^n>1+n(b-1)$.

Решение. Если положить $t=b-1$, тогда $t>0$, $b=1+t$, и доказываемое утверждение можно сформулировать следующим образом: для каждого положительного t и каждого натурального $n>1$ справедливо неравенство $(1+t)^n>1+nt$. Действительно, по формуле бинома Ньютона верно равенство: $(1+t)^n = 1 + nt + \frac{n(n-1)}{2}t^2 + ... + C_n^m t^m + ... + C_n^n t^n$. Так как по условию $t>0$, то в написанном разложении все члены строго положительны. Поскольку $n\geq2$, то в разложении имеется, по меньшей мере три члена, значит, $(1+t)^n \geq 1 + nt + \frac{n(n-1)}{2}t^2 > 1 + nt$, т. е. $(1+t)^n>1+nt$, или в первоначальном обозначении $b^n>1+n(b-1)$. Тем самым неравенство Бернулли доказано.

Задача 8. Доказать тождество: $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + ... + nC_n^n = n2^{n-1}$.

Решение. Воспользуемся равенством: $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$. Тогда получим:

$$nC_{n-1}^0 + nC_{n-1}^1 + nC_{n-1}^2 + ... + nC_{n-1}^{n-1} = n \cdot 2^{n-1}$$

$$n \cdot (C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 + ... + C_{n-1}^{n-1}) = n \cdot 2^{n-1}$$

в скобках мы имеем сумму биномиальных коэффициентов разложения $(x+a)^m$, где x=1, a=1, m=n-1:

$$(1+1)^{n-1} = C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + ... + C_{n-1}^{n-1} = 2^{n-1}$$

Итак, $n \cdot 2^{n-1} = n \cdot 2^{n-1}$.

Задача 9. Найти номер члена разложения бинома $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x}\right)^{16}$, не содержащего x.

Решение.

Для общего члена разложения имеем

$$T_{m+1} = C_{16}^m \left(\sqrt[3]{x}\right)^{16-m} \left(\frac{1}{x}\right)^m = C_{16}^m x^{\frac{16-m}{3}} x^{-m} = C_{16}^m x^{\frac{16-4m}{3}}$$

Член разложения не зависит от x; значит, что показатель степени x равен 0, т. е. $\frac{16-4m}{3} = 0;$ отсюда находим m=4.

Упражнения для самостоятельного решения

1. Сколько трехзначных четных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, если цифры могут повторяться?

2. Сколько всех четырехзначных чисел можно составить из цифр 1, 5, 6, 7?

3. Сколько существует двухзначных чисел, имеющих обе четные цифры?

4. Сколькими способами можно выбрать согласную и гласную из слова "здание"? из слова "паркет"?

5. Сколькими способами можно указать на шахматной доске два квадрата - белый и черный? Решите ту же задачу, если нет ограничений на цвет квадратов. Решите ее, если надо выбрать два белых квадрата.

6. Сколькими способами можно выбрать на шахматной доске белый и черный квадраты, не лежащие на одной горизонтали или одной вертикали?

7. В отделе научно-исследовательского института работают несколько человек, причем каждый из них знает хотя бы один иностранный язык, 6 человек знают английский язык, 6 - немецкий, 7 - французский, 4 знают английский и немецкий, 3 - немецкий и французский, 2 - французский и английский, один человек знает все три языка. Сколько человек работают в отделе? Сколько из них знают только английский? Сколько человек знают только один язык?

8. В классе 35 учащихся. Из них 20 посещают математический кружок, 11 - физический, 10 учащихся не посещают ни одного из этих кружков. Сколько учеников посещают и математический, и физический кружок? Сколько учащихся посещают только математический кружок?

9. Сколько чисел среди первых 100 натуральных чисел не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5?

10. В корзине лежат 12 яблок и 10 апельсинов. Ваня выбирает либо яблоко, либо апельсин, после чего Надя выбирает из оставшихся фруктов и яблоко, и апельсин. Сколько возможно таких выборов? При каком выборе Вани у Нади больше возможностей выбора?

11. Сколько можно составить сигналов из 6 флажков различного цвета, взятых по 2?

12. Сколько всего семизначных телефонных номеров, в каждом из которых ни одна цифра не повторяется?

13. Сколько существует двузначных чисел, в которых цифра десятков и цифра единиц различные и нечетные?

14. Сколькими способами можно составить трехцветный полосатый флаг, если имеются ткани 5 различных цветов? Решите ту же задачу при условии, что одна полоса должна быть красной.

15. В профком избрано 9 человек. Из них надо выбрать председателя, его заместителя, секретаря и культорга. Сколькими способами это можно сделать?

16. Сколько различных трехзначных чисел можно воспроизвести с помощью трех карточек с цифрами 1, 2, 3?

17. Сколькими способами 7 книг разных авторов можно расставить на полки в один ряд?

18. Сколькими способами можно разложить 8 различных писем по 8 различным конвертам, если в каждый конверт кладется только одно письмо?

19. Сколькими способами можно поставить 8 шашек на черные поля доски?

20. Сколькими способами могут расположиться в турнирной таблице 10 футбольных команд, если известно, что ни какие 2 команды не набрали поровну очков?

21. На собрании должны выступить 5 человек: А, Б, В, Г, Д. Сколькими способами можно расположить их в списке ораторов, если Б не должен выступать до того, как выступил А? Решите ту же задачу, если Б должен выступить сразу после А?

22. 12 человек играют в городки. Сколькими способами они могут набрать команду из 4 человек на соревнования?

23. В выпуклом семиугольнике проведены всевозможные диагонали, при этом никакие три из них не пересекаются в одной точке. Сколько точек пересечения указанных диагоналей?

24. Дано 5 различных чисел: α, β, γ, λ, μ. Сколько можно составить всевозможных произведений из этих чисел, состоящих из:

a) двух различных множителей;

b) трех различных множителей;
c) четырех различных множителей;
d) пяти различных множителей?

25. У Нины есть 7 разных книг по математике, а у Славы - 9 разных книг по философии. Сколькими способами они могут обменяться друг с другом по 5 книг?

26. Сколько существует делителей числа 210?

27. Из 3 офицеров и 12 солдат нужно составить патруль в количестве 10 человек. Сколькими способами это можно сделать, если в патруль должен входить хотя бы один офицер?

28. Сколькими способами можно разделить 6 различных конфет между 3 детьми?

29. Сколько существует пятизначных номеров, не содержащих цифру 8? Не содержащих цифр 0 и 8? Составленных из цифр 2, 3, 5, 7?

30. Сколькими способами можно разложить 12 различных деталей по трем ящикам?

31. Каждый телефонный номер состоит из 7 цифр. Сколько всего телефонных номеров, не содержащих других цифр, кроме 2, 3, 5 и 7?

32. Буквы азбуки Морзе состоят из символов - точка и тире. Сколько букв получим, если потребуем, чтобы каждая буква состояла не более чем из пяти указанных символов?

33. Если под k - буквенным словом понимать слово, состоящее из k букв, то сколько 10 - буквенных различных слов можно написать, используя только две буквы a, b?

34. Имеются яблоки двух сортов. Сколько можно составить различных наборов из 3 яблок?

35. Сколько всего чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, в каждом из которых цифры расположены в неубывающем порядке?

36. Сколько будет костей домино, если использовать в их образовании все цифры?

37. Сколько существует треугольников, длины сторон которых принимают одно из следующих значений: 4, 5, 6, 7 см.?

38. Сколько можно построить различных прямоугольных параллелепипедов, длины ребер которых выражаются натуральными числами от 1 до 10?

39. Сколько всех семизначных чисел, у каждого из которых цифра 6 встречается три раза, а цифра 5 - четыре раза?

40. Сколькими способами можно переставить буквы в слове "абракадабра", "какао", чтобы получались всевозможные различные наборы букв?

41. 10 человек надо разбить на три группы соответственно по 2, 3, 5 человек в группе. Сколькими способами это можно сделать?

42. Сколькими способами можно упаковать 9 различных книг в трех бандеролях соответственно по 2, 3, 4 книги в каждой бандероли?

43. Сколькими способами можно распределить 7 молодых специалистов по трем цехам, которым соответственно нужны 1, 2, 4 специалиста?

44. Решить уравнение:

$$\frac{m!-(m-1)!}{(m+1)!}=\frac{1}{6}, \text{где } m \geq 1, m \in N$$

45. Решить неравенство:

$$\frac{1}{n-2}\cdot\left(\frac{5}{n+1}\cdot\frac{(n+1)!}{(n-3)!4!}-\frac{n(n-1)!}{12(n-3)(n-4)!2!}\right)\leq 5$$

46. Доказать, что:

a) $A_{n+k}^{n+2}+A_{n+k}^{n+1}=k^2 A_{n+k}^{n}$

b) $A_n^k = A_{n-1}^k + kA_{n-1}^{k-1}$

48. Доказать тождество:

a) $C_n^0+\frac{1}{2}C_n^1+\ldots+\frac{1}{n+1}C_n^n=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$

b) $C_n^1-2C_n^2+\ldots+(-1)^{n-1}nC_n^n=0$

49. Доказать, что для каждого положительного числа b < 1 и каждого натурального числа n > 1 верно неравенство:

$$b^n<\frac{1}{n(1-b)}$$

50. Вычислить сумму:

$C_5^0+2C_5^1+2^2C_5^2+2^3C_5^3+2^4C_5^4+2^5C_5^5$.

51. Найти алгебраическую сумму коэффициентов многочлена относительно x, получаемого в разложении бинома $(3x\text{-}4)^{17}$.

52. Найти 13 – ый член разложения бинома $\left(\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}\right)^{15}$.

53. Найти пятый член разложения бинома $\left(\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{3a}}\right)^n$, если отношение биномиального коэффициента четвертого члена к биноминальному коэффициенту третьего члена равно 10/3.

54. Найти сумму биноминальных коэффициентов членов, стоящих на нечетных местах в разложении бинома $(x+y)^n$, если биномиальный коэффициент третьего члена на 9 больше биномиального коэффициента второго члена.

55. Найти седьмой член разложения бинома $\left(a^2\sqrt{a}+\frac{\sqrt[3]{a}}{a}\right)^n$, если биномиальный коэффициент третьего члена равен 36.

56. Сколько членов разложения бинома $\left(\sqrt[5]{3}+\sqrt[3]{7}\right)^{36}$ являются целыми числами?

57. В разложении бинома $\left(\sqrt{y}+\dfrac{1}{2\sqrt[4]{y}}\right)^{n}$ первые три коэффициента образуют арифметическую прогрессию. Найти все его члены, в каждом из которых показатель степени основания y есть некоторое натуральное число.

ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ
ПО ТЕМЕ: "ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ".

Вариант 1

1. Доказать теоретико-множественное тождество методом двухстороннего включения. Обосновать равенство с помощью диаграмм Эйлера-Венна.

$$(A \cup B) \setminus M = (A \setminus M) \cup (B \setminus M)$$

2. Упростить выражение:

$$\left(\overline{\overline{A} \cup \overline{B}}\right) \cup \left(\overline{\overline{A} \cup B}\right)$$

3. Доказать, что для любых множеств A, B, C справедливо равенство:

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

4. Для следующего бинарного отношения выяснить какими свойствами оно обладает (рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность). Дать обоснование ответа.

Отношение ρ задано на множестве R.

$$x \, \rho \, y \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$$

5. Для следующего отображения исследовать, является ли оно инъективным, сюрьективным, биективным. Ответ обосновать.

$$f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}, \quad x \; \alpha \; \frac{x^3}{8}$$

Вариант 2

1. Доказать теоретико-множественное тождество методом двухстороннего включения. Обосновать равенство с помощью диаграмм Эйлера-Венна.

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

2. Упростить выражение:

$$\left(\overline{\overline{\overline{P} \cup K} \cup P}\right) \cup P$$

3. Доказать, что для любых множеств A, B, C справедливо равенство:

$$(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$$

4. Для следующего бинарного отношения выяснить какими свойствами оно обладает (рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность). Дать обоснование ответа.

Отношение ρ задано на множестве Z.

$$x \,\rho\, y \Leftrightarrow 7 \mid (x + y)$$

5. Для следующего отображения исследовать, является ли оно инъективным, сюрьективным, биективным. Ответ обосновать.

$$f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}, \quad x \mapsto \sqrt{x+2}$$

Вариант 3

1. Доказать теоретико-множественное тождество методом двухстороннего включения. Обосновать равенство с помощью диаграмм Эйлера-Венна.

$$(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$$

2. Упростить выражение:

$$\overline{\left(\left(\overline{\mathrm{x}} \cup \mathrm{y}\right) \cap \left(\overline{\mathrm{y}} \cup \mathrm{z}\right)\right)} \cup \overline{\left(\overline{\mathrm{x}} \cup \mathrm{z}\right)}$$

3. Доказать, что для любых множеств A, B, C справедливо равенство:

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

4. Для следующего бинарного отношения выяснить какими свойствами оно обладает (рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность). Дать обоснование ответа.

Отношение ρ задано на множестве Z^{+}.

$$x \,\rho\, y \Leftrightarrow y = x + 1$$

5. Для следующего отображения исследовать, является ли оно инъективным, сюрьективным, биективным. Ответ обосновать.

$$f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}, \quad x \mapsto x^2 - 4x + 7$$

Вариант 4

1. Доказать теоретико-множественное тождество методом двухстороннего включения. Обосновать равенство с помощью диаграмм Эйлера-Венна.

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$

2. Упростите выражение:

$$\overline{\left(\left(\overline{\mathrm{P}} \cup \mathrm{Q}\right) \cap \left(\overline{\mathrm{Q}} \cup \overline{\mathrm{P}}\right)\right)}$$

3. Доказать, что для любых множеств A, B, C справедливо равенство:

$$(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$$

4. Для следующего бинарного отношения выяснить какими свойствами оно обладает (рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность). Дать обоснование ответа.

Отношение ρ задано на множестве R.

$$x \,\rho\, y \Leftrightarrow x^2 + x = y^2 + y$$

5. Для следующего отображения исследовать, является ли оно инъективным, сюрьективным, биективным. Ответ обосновать.

$$f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}, \quad x \mapsto 5^x + x$$

Вариант 5

1. Доказать теоретико-множественное тождество методом двухстороннего включения. Обосновать равенство с помощью диаграмм Эйлера-Венна.

$$A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \cap \left(A \cup \overline{C}\right)$$

2. Упростить выражение:

$$\left(\overline{A} \cup B\right) \cap \left(\overline{B} \cup A\right) \cap \left(\left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right)\right)$$

3. Доказать, что для любых множеств *M*, *N*, *P*, *Q* справедливо равенство:

$$(M \cap N) \times (P \cap Q) = (M \times P) \cap (N \times Q)$$

4. Для следующего бинарного отношения выяснить какими свойствами оно обладает (рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность). Дать обоснование ответа.

Отношение ρ задано на множестве Z.

$$x \,\rho\, y \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$$

5. Для следующего отображения исследовать, является ли оно инъективным, сюрьективным, биективным. Ответ обосновать.

$$f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}, \quad x \mapsto e^x + 5$$

Вариант 6

1. Доказать теоретико-множественное тождество методом двухстороннего включения. Обосновать равенство с помощью диаграмм Эйлера-Венна.

$$\overline{A} \cup \left(A \cap B\right) = B \cap \overline{A}$$

2. Упростите выражение:

$$\overline{\left(\overline{\mathrm{P}} \cup \mathrm{Q}\right) \cap \left(\mathrm{P} \cup \overline{\mathrm{Q}}\right)} \cup \left(\overline{\mathrm{P}} \cup \mathrm{Q}\right)$$

3. Доказать, что для любых множеств A, B, C справедливо равенство:

$$(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$$

4. Для следующего бинарного отношения выяснить какими свойствами оно обладает (рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность). Дать обоснование ответа.

Отношение ρ задано на множестве Z^{+}.

$$x \,\rho\, y \Leftrightarrow \text{НОД}\,(x, y) \neq 1$$

5. Для следующего отображения исследовать, является ли оно инъективным, сюрьективным, биективным. Ответ обосновать.

$$f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}, \quad x \mapsto \lg\left(x^2 + 1\right)$$

Вариант 7

1. Доказать теоретико-множественное тождество методом двухстороннего включения. Обосновать равенство с помощью диаграмм Эйлера-Венна.

$$\left(A \setminus \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \setminus B\right) = \left(B \cup \overline{A}\right) \cap \left(A \cup \overline{B}\right)$$

2. Упростить выражение:

$$\overline{\left(\overline{\mathrm{P}} \cup \mathrm{Q}\right)} \cup \left(\overline{\left(\overline{\mathrm{P}} \cup \overline{\mathrm{Q}}\right)} \cup \overline{\mathrm{P}}\right)$$

3. Доказать, что для любых множеств X, Y, Z справедливо равенство:

$$X \times (Y \cup Z) = (X \times Y) \cup (X \times Z)$$

4. Для следующего бинарного отношения выяснить какими свойствами оно обладает (рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность). Дать обоснование ответа.

Отношение ρ задано на множестве R.

$$x \,\rho\, y \Leftrightarrow x - y \in \mathrm{Z}$$

5. Для следующего отображения исследовать, является ли оно инъективным, сюрьективным, биективным. Ответ обосновать.

$$\mathrm{f} : \mathrm{R} \to \mathrm{R}, \quad x \mapsto \sin 2x + 1$$

Вариант 8

1. Доказать теоретико-множественное тождество методом двухстороннего включения. Обосновать равенство с помощью диаграмм Эйлера-Венна.

$$(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

2. Упростить выражение:

$$\overline{\left(\left(\overline{P}\cup Q\right)\cap\left(\overline{P}\cup\overline{Q}\right)\right)}\cup\overline{P}$$

3. Доказать, что для любых множеств X, Y, Z справедливо равенство:

$$(X \times Z) \cap (Z \times Y) = (X \cap Y) \times Z$$

4. Для следующего бинарного отношения выяснить какими свойствами оно обладает (рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность). Дать обоснование ответа.

Отношение ρ задано на множестве Z.

$$x \,\rho\, y \Leftrightarrow 5 \mid (x - y)$$

5. Для следующего отображения исследовать, является ли оно инъективным, сюрьективным, биективным. Ответ обосновать.

$$f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}, \quad x \,\alpha\, 3^{x^2+x}$$

Вариант 9

1. Доказать теоретико-множественное тождество методом двухстороннего включения. Обосновать равенство с помощью диаграмм Эйлера-Венна.

$$(A \setminus B) \cup \left(\overline{A} \setminus \overline{B}\right) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

2. Упростить выражение:

$$\left(\overline{\overline{\overline{\mathrm{P}} \cup \mathrm{Q}}}\right) \cup \left(\left(\overline{\mathrm{P} \cup \mathrm{Q}}\right) \cup \mathrm{P}\right)$$

3. Доказать, что для любых множеств E, F, G справедливо равенство:

$$(E \times F) \cup (\mathrm{E} \times G) = E \times (F \cup G)$$

4. Для следующего бинарного отношения выяснить какими свойствами оно обладает (рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность). Дать обоснование ответа.

Отношение ρ задано на множестве Z^+.

$$x \,\rho\, y \Leftrightarrow x \neq y$$

5. Для следующего отображения исследовать, является ли оно инъективным, сюрьективным, биективным. Ответ обосновать.

$$f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}, \quad x \,\alpha\, tg\frac{x}{2}$$

Вариант 10

1. Доказать теоретико-множественное тождество методом двухстороннего включения. Обосновать равенство с помощью диаграмм Эйлера-Венна.

$$\left(\overline{A} \setminus \overline{B}\right) \cup \left(\overline{B} \setminus \overline{A}\right) = \left(A \cup B\right) \setminus \left(A \cap B\right)$$

2. Упростить выражение:

$$\left(\overline{\overline{\mathrm{P}} \cap \overline{\mathrm{Q}}}\right) \cup \left(\left(\overline{\mathrm{P}} \cup \mathrm{Q}\right) \cap \mathrm{P}\right)$$

3. Доказать, что для любых множеств A, B, C справедливо равенство:

$$(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$$

4. Для следующего бинарного отношения выяснить какими свойствами оно обладает (рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность). Дать обоснование ответа.

Отношение ρ задано на множестве Z.

$$x \,\rho\, y \Leftrightarrow y \le x + 3$$

5. Для следующего отображения исследовать, является ли оно инъективным, сюрьективным, биективным. Ответ обосновать.

$$f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}, \quad x \mapsto x^3 + 3x^2 - 3x + 1$$

ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ ПО ТЕМЕ: "КОМБИНАТОРИКА".

Вариант 1

1. Вычислить:

a) $\dfrac{(n-2)!}{n!}$;

b) $\dfrac{\frac{1}{3}C_6^2 - \frac{1}{28}C_8^3 + \frac{1}{65}C_{15}^3}{P_3 \cdot A_5^3}$

2. Решить уравнение:

$$\frac{C_{2n}^{n+1}}{C_{2n+1}^{n-1}} = \frac{16}{29}$$

3. Найти все $n \in \mathrm{N}$, удовлетворяющие условию:

$$\frac{A_{n+2}^4}{P_{n+2}} - \frac{143}{4P_{n-1}} < 0$$

4. Найти все n и $m \in \mathrm{N}$, удовлетворяющие условию:

$$C_{n+2}^m : C_{n+2}^{m+1} : C_{n+2}^{m+2} = 0{,}6 : 1 : 1$$

5. Разложить по формуле бинома Ньютона и упростить:

$$\frac{1}{27}\left(\sqrt{3} - \sqrt{15}\right)^6$$

6. Сумма биномиальных коэффициентов разложения $\left(2nx + \dfrac{1}{2nx^2}\right)^{3n}$ равна 64, определить слагаемое, не содержащее x.

7. Собрание из 80 человек избирает председателя, секретаря и трех членов ревизионной комиссии. Сколькими способами это можно сделать?

8. Из вазы, где стоят 10 красных и 4 розовых гвоздики, выбирают один красный и два розовых цветка. Сколькими способами это можно сделать?

9. Сколькими способами можно разместить семерых гостей по 3-м комнатам?

Вариант 2

1. Вычислить:

a) $\left(\frac{P_5}{A_5^4}+\frac{P_4}{A_5^3}+\frac{P_3}{A_5^2}+\frac{P_2}{A_5^1}\right)A_5^2$;

b) $\frac{50!}{48!}-\frac{30!}{28!}$

2. Решить уравнение:

$$A_{x+1}^{x-1}+2P_{x-1}=\frac{30}{7}P_x$$

3. Найти все $n\in N$, удовлетворяющие условию:

$$C_{n+5}^4-\frac{143}{96}\cdot\frac{P_{n+5}}{P_{n+3}}<0$$

4. Найти все n и $m\in N$, удовлетворяющие условию:

$$C_{n+1}^{m+1}:C_{n+1}^{m}:C_{n+1}^{m-1}=5:3:3$$

5. Найти в биномиальном разложении $\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)^{18}$ член, не содержащий x.

6. В разложении $\left(a+\frac{1}{a}\right)^{12}$ по формуле бинома Ньютона найти коэффициент при a^8.

7. Двадцать человек надо разбить на три группы соответственно по 5, 7, 8 человек в группе. Сколькими способами это можно сделать?

8. Сколькими способами из группы в 30 человек можно выбрать 5 в актив университета?

9. Из 5 красных роз и 2 желтых роз нужно составить букет из 3 цветов, в которой должна входить хотя бы одна желтая роза. Сколькими способами это можно сделать?

Вариант 3

1. Вычислить:

$$\text{a) } \frac{(m+2)!}{m!};$$

$$\text{b) } \frac{C_n^3 C_n^1}{\left(C_n^2\right)^2} + \frac{P_n P_{n+1}\left(n^2 - n\right)^2}{4\left(C_n^2\right)^2 (n!)^2}$$

2. Решить уравнение:

$$\frac{P_{n+5}}{A_{n+4}^k \cdot P_{n+4-k}} = 15$$

3. Доказать справедливость равенства:

$$n \cdot C_{2n}^n = (n+1) \cdot C_{2n}^{n+1}$$

4. Найти все $n \in \mathrm{N}$, удовлетворяющие условию:

$$C_{13}^n < C_{13}^{n+2}$$

5. Найти два средних члена разложения:

$$\left(a^3 + ab\right)^{21}$$

6. В разложении $\left(\frac{x}{3} - \frac{3}{x}\right)^{12}$ по формуле бинома Ньютона найти коэффициент при x^4.

7. В студенческой конференции принимают участие 25 студентов. Сколькими способами могут быть распределены три призовых места?

8. Сколькими способами можно распределить 120 комплектов игрушек по трем детским садам, которым соответственно требуется 20, 30 и 70?

9. Сколько делителей у числа 105?

Вариант 4

1. Вычислить:

$$\text{a) } \frac{C_{21}^4}{C_{19}^3 + C_{19}^4 + C_{20}^3};$$

b) $\left(\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}\right)n!$

2. Решить уравнение:

$$A_x^{x-3} = x \cdot P_{x-2}$$

3. Доказать справедливость равенства:

$$C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}$$

4. Найти все $n \in N$, удовлетворяющие условию:

$$C_{n+5}^4 - \frac{143}{96} \cdot \frac{P_{n+5}}{P_{n+3}} < 0$$

5. Разложить по формуле бинома Ньютона и упростить:

$$\left(x+\frac{1}{2x}\right)^8$$

6. Найти два средних члена разложения:

$$\left(a^3 - ab\right)^{23}$$

7. Сколько существует пятизначных чисел, которые делятся на два?

8. Пять учеников следует разделить по трем параллельным классам. Сколькими способами это можно сделать?

9. Десять групп занимаются в десяти расположенных подряд аудиториях. Сколько существует вариантов расписания, при которых группы № 1 и № 2 находились бы в соседних аудиториях?

Вариант 5

1. Вычислить:

a) $(m+1)! \cdot \left(\frac{1}{m!}+\frac{1}{(m+1)!}\right)$;

b) $\frac{A_5^2}{P_2}+\frac{A_{10}^5}{7P_5}$

2. Решить уравнение:

$$A_x^3 + C_x^{x-2} = 14x$$

3. Найти все $n \in \mathrm{N}$, удовлетворяющие условию:

$$C_{n+5}^{4} - \frac{143}{96}\frac{P_{n+5}}{P_{n+3}} < 0$$

4. Доказать справедливость равенства:

$$C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 = C_5^3 + C_5^4 + C_5^5$$

5. Разложить по формуле бинома Ньютона и упростить:

$$\left(\sqrt{6} + \sqrt{12}\right)^4$$

6. Найти в биномиальном разложении $\left(z + \frac{1}{z^3}\right)^{16}$ член, не содержащий z.

7. Поезд метро делает 16 остановок, на которых выходят все пассажиры. Сколькими способами могут распределится между этими остановками 100 пассажиров, вошедших в поезд на конечной остановке?

8. Сколькими способами можно разложить три различных шара по трем корзинам?

9. Сколько всего четырехзначных чисел, делящихся на 2?

Вариант 6

1. Вычислить:

a) $\frac{100!}{99!} - \frac{99!}{98!}$;

b) $C_5^3 C_4^2 + C_4^2 C_3^1 + C_3^1 C_3^0$

2. Решить уравнение:

$$A_n^3 + 3A_n^2 = \frac{1}{2}P_{n+1}$$

3. Найти все $n \in \mathrm{N}$, удовлетворяющие условию:

$$C_{n+1}^{n-1} < 21$$

4. Найти x и y, если:

$$A_x^{y-1} : A_{x-1}^{y} : \left(C_{x-2}^{y} + C_{x-2}^{y-1}\right) = 21 : 60 : 10$$

5. Разложить по формуле бинома Ньютона и упростить:

$$\left(1+2x\right)^5$$

6. Найти два средних члена разложения:

$$\left(a^3+ab\right)^{31}$$

7. Из группы студентов, в которой 10 хорошистов и 5 отличников, выбирают 5 хорошистов и 3 отличников. Сколькими способами это можно сделать?

8. Сколькими способами можно расположить в ряд три белых и пять черных шаров?

9. Сколькими способами можно разместить 10 книг по 4 полкам?

Вариант 7

1. Вычислить:

a) $\dfrac{A_{12}^{6}\cdot 5!}{A_{11}^{9}}$;

b) $\dfrac{n!}{(n-3)!\cdot A_n^2}-\dfrac{P_{n+1}}{(n+2)!}$

2. Решить уравнение:

$$C_{x+1}^{x-2}+2C_{x-1}^{3}=7(x-1)$$

3. Найти все $n\in N$, удовлетворяющие условию:

$$5C_n^3<C_{n+2}^4$$

4. Найти x и y, если:

$$\left(A_{x-1}^{y}+yA_{x-1}^{y-1}\right):A_x^{y-1}:C_x^{y-1}=10:2:1$$

5. Найти два средних члена разложения:

$$\left(a^3+ab\right)^{30}$$

6. Найти пятый член разложения:

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^{13}$$

7. Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр 2, 3, 4?

8. Сколькими способами можно разместить 10 различных книг по 5 полкам?

9. Из семи солдат и трех офицеров необходимо составить патруль из 4 человек, включающий хотя бы одного офицера. Сколькими способами это можно сделать?

Вариант 8

1. Вычислить:

$$\text{a) } \frac{A_{12}^4 - A_{11}^4}{A_{10}^3};$$

$$\text{b) } \frac{1 + C_7^4 + C_7^3 - C_8^4}{1 + C_{10}^5 + C_{10}^6 - C_{11}^6} + \frac{A_3^2}{P_2}$$

2. Решить уравнение:

$$\frac{P_{n+5}}{A_{n+3}^{k+3} \cdot P_{n-k}} = 240$$

3. Найти все $n \in \mathrm{N}$, удовлетворяющие условию:

$$\frac{C_{n-1}^{n-3}}{A_{n+1}^4} < \frac{1}{14P_3}$$

4. Найти x и y, если:

$$C_{x+1}^{y} : C_x^{y+1} : C_x^{y-1} = 6 : 5 : 1$$

5. Найти пятый член разложения:

$$\left(\sqrt{z} + z\right)^{10}$$

6. При каких значениях x четвертое слагаемое разложения $(5 + 2x)^{16}$ больше двух соседних с ним слагаемых?

7. Сколько всего шестизначных телефонных номеров, в каждом из которых ни одна цифра не повторяется?

8. Сколькими способами можно выбрать 2 блюда из 10 предложенных в меню?

9. У одного коллекционера 25 монет, у другого – 15. Сколькими способами они могут поменяться друг с другом по 10 монет?

Вариант 9

1. Вычислить:

$$\text{a) } \frac{C_{100}^{98} + C_{1000}^{998}}{C_{1000}^{2} + C_{100}^{2}};$$

$$\text{b) } \frac{A_5^3 - A_5^2}{P_2} + \frac{P_5}{P_2}$$

2. Решить уравнение:

$$A_x^2 \cdot C_x^{x-1} = 48$$

3. Найти все $n \in \mathrm{N}$, удовлетворяющие условию:

$$C_{n-1}^4 - C_{n-1}^3 - \frac{5}{4} A_{n-2}^2 < 0$$

4. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} A_x^y + 3C_x^y = 90 \\ A_x^y - 2C_x^y = 40 \end{cases}$$

5. Найти шестой член разложения:

$$\left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)^{15}$$

6. Сумма коэффициентов 2 – го и 3 – го слагаемых разложения $\left(\sqrt[5]{x^2} - \frac{1}{2\sqrt[6]{x}}\right)^n$ равна 25,5. Написать член, не содержащий x.

7. Два почтальона должны разнести 10 писем по 10 адресам. Сколькими способами они могут распределить эту работу?

8. Сколькими способами можно составить список из 10 учеников?

9. Из семи мужчин и четырех женщин надо выбрать 6 человек так, чтобы среди них было не менее двух женщин. Сколькими способами это можно сделать?

Вариант 10

1. Вычислить:

a) $\dfrac{A_{12}^4 - A_{11}^4}{A_{10}^3}$;

b) $\dfrac{1}{n+2} \cdot \left(C_{n+3}^2 - 2C_{n+2}^3 + C_{n+2}^2\right) + \dfrac{n^2 - 5n}{6}$

2. Решить уравнение:

$$P_{n+3} = 720 A_n^5 \cdot P_{n-5}$$

3. Найти все $n \in \mathrm{N}$, удовлетворяющие условию:

$$C_{n+1}^{n-2} - C_{n+1}^{n-1} \le 0$$

4. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{A_y^x}{P_{x-1}} + C_y^{y-x} = 126 \\ P_{x+1} = 720 \end{cases}$$

5. Найти шестой член разложения:

$$(1 - 2z)^{21}$$

6. Сумма биномиальных коэффициентов с нечетными номерами в разложении $\left(ax + x^{-\frac{1}{4}}\right)^n$ равна $5/2$. Найти слагаемое, не содержащее x.

7. Сколько способами можно переставить буквы в слове а) алгебра, b) геометрия, чтобы получились всевозможные различные наборы букв?

8. Сколькими способами можно рассадить на скамейке 6 человек?

9. В отделе работают 10 географов, 7 геологов и 3 метеоролога. Сколькими способами можно сформировать экспедицию, состоящую из 3 географов, 2 геологов и 1 метеоролога?

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Акимов О. Е.* Дискретная математика: логика, группы, графы: Учебное пособие. М.: Лаб. Базовых знаний, 2001. – 376 с.
2. *Ерусалимский Я. М.* Дискретная математика: теория, задачи, приложения: Учеб. пособие. – 3 – е изд. – М.: Вузовская книга, 2000. – 280 с.
3. *Лавров*
4. *Липский В.* Комбинаторика для программистов: пер. с польск. –М.: Мир, 1988.-213 с.
5. *Логинов Б.М.*Лекции и упражнения по курсу «Введение в дискретную математику». Калуга, 1998.- 424 с.
6. *Москинова Г.И.*Дискретная математика. Математика для менеджера в примерах и упражнениях: Учебное пособие. М.: Логос, 2000.-240с.
7. *Новиков Ф.А.* Дискретная математика для программистов: Учебник. – СПб.: Питер, 2000. – 301 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение……………………………………………………………………...3
1. Элементы теории множеств..………………………………………….4
2. Отношения на множествах…..…………………………………….….8
3. Функциональные отношения………..……………………………...…13
4. Элементы комбинаторики………………….……………………...…..17
Индивидуальное задание по теме «Элементы теории множеств»…………...29
Индивидуальное задание по теме «Элементы комбинаторики»……………..32
Библиографический список……………………….………………………36

Наталья Владимировна Кван,
старший преподаватель кафедры МАиМ АмГУ
Анна Геннадьевна Масловская,
ассистент кафедры МАиМ АмГУ

Организация самостоятельной работы студентов по дискретной математике. Часть I.
Учебно - методическое пособие.

Изд - во АмГУ. Подписано к печати 0.0.03. Формат 60x84/16.
Усл. печ. л. , уч. – изд. л. 2,25. тираж 100. Заказ .