Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
Амурский государственный университет
(ГОУВПО «АмГУ»)

УТВЕРЖДАЮ
Зав. кафедрой ИиУС
___________ А.В. Бушманов
«___» _________ 2007 г.

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Учебно-методический комплекс дисциплины

для специальности
230102 – Автоматизированные системы обработки информации и управления;

Составитель:
Семичевская Н.П.

2007 г.

Печатается по решению
редакционно-издательского совета
факультета математики
и информатики
Амурского государственного
университета

Дискретная математика для специальности 230102 «Автоматизированные системы обработки информации и управления»: учебно-методический комплекс дисциплины. / Семичевская Н.П. – Благовещенск. Изд-во Амурского гос. ун-та, 2007. 183с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. ВЫПИСКА ИЗ ГОСУДАРСТВЕННОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО СТАНДАРТА ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Направление подготовки дипломированного специалиста
654600 – Информатика и вычислительная техника

Специальность
230102 – Автоматизированные системы обработки информации и управления.

Квалификация – *инженер*

Индекс	Наименование дисциплин и их основные разделы	Всего часов
ЕН.Ф.01.03	*Дискретная математика.*	140
	Множества и их спецификации; диаграммы Венна; отношения; свойства отношений; разбиения и отношение эквивалентности; отношение порядка; функции и отображения; операции; основные понятия теории графов; маршруты; циклы; связность; планарные графы; переключательные функции (ПФ); способы задания ПФ; специальные разложения ПФ; неполностью определенные (частные) ПФ; минимизация ПФ и неполностью определенных ПФ; теорема о функциональной полноте; примеры функционально-полных базисов; разрешимые и неразрешимые проблемы; схемы алгоритмов; схемы потоков данных.	

2. РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

Федеральное агентство по образованию РФ
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
(ГОУВПО «АмГУ»)

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по УНР
____________Е.С.Астапова
«___»_____________2005 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

по дисциплине "Дискретная математика"
для специальности 230102 «Автоматизированные системы обработки информации и управления»
курс 1 семестр 2

Лекции 36 (час.) Экзамен 2 семестр

Практические (семинарские) занятия 54 (час.) Зачет 2 семестр

Лабораторные занятия__ (час.)

Самостоятельная работа 30/20(РГР) (час.)

Всего часов 120 /20(РГР) час.

Составитель Семичевская Наталья Петровна

Факультет Математики и информатики

Кафедра Информационных и управляющих систем

2005 г.

Рабочая программа составлена на основании Государственного образовательного стандарта ВПО по специальности 230102 «Автоматизированные системы обработки информации и управления»

Рабочая программа обсуждена на заседании кафедры Информационных и управляющих систем

« _____» _______________2005 г., протокол №______

Заведующий кафедрой___________________ А.В.Бушманов

Рабочая программа одобрена на заседании УМС 230102 «Автоматизированные системы обработки информации и управления»

«______» _______________2005 г., протокол №______

Председатель__________________ А.В.Бушманов

СОГЛАСОВАНО
Начальник УМУ
_____________Г.Н.Торопчина

«____»_____________2005 г.

СОГЛАСОВАНО
Председатель УМС факультета
_______________Е.Л.Еремин

«_____»________________2005 г.

СОГЛАСОВАНО
Заведующий выпускающей кафедрой
_____________А.В.Бушманов

«____»_____________2005 г.

«Дискретная математика»

1. Цели и задачи дисциплины, ее место в учебном процессе

В современной математической науке исследования в областях, традиционно относящихся к дискретной математике, занимают все более заметное место. Это объясняется необходимостью создания и эксплуатации современных электронных вычислительных машин, средств передачи и обработки информации, автоматизированных систем управления и проектирования.

Цель преподавания дисциплины «Дискретная математика» научить студентов основам дискретной математики, где дискретность понимается как противоположность непрерывности. В настоящее время наряду с такими классическими разделами математики, как математический анализ, дифференциальные уравнения в учебных планах специальности «Автоматизированные системы обработки информации и управления» и многих других специальностей появились разделы по математической логике, булевой алгебре, комбинаторике и теории графов.

Курс предназначен для студентов 230102 «Автоматизированные системы обработки информации и управления», специализирующихся в области автоматизированного управления и проектирования, вычислительной техники, системного программирования, передачи информации.

В курсе «Дискретная математика» излагаются основные понятия теории множеств и теории функций, основы булевой алгебры, логики высказываний и логики предикатов, введение в теорию графов.

Перечень дисциплин, усвоение которых студентами необходимо при изучении дисциплины: «Математический анализ», «Линейная алгебра и геометрия» (алгебра матриц), «Программирование» (Алгоритмизация, Рекурсивные функции и процедуры).

2 Содержание дисциплины

Федеральный компонент

Дисциплина «Дискретная математика» является дисциплиной, входящей в блок общематематических и естественно научных дисциплин федерального компонента для специальности 230102 «Автоматизированные системы обработки информации и управления». Государственный стандарт – ЕН.Ф.01.03.

Множества и их спецификации; диаграммы Венна; отношения; свойства отношений; разбиения и отношение эквивалентности; отношение порядка; функции и отображения; операции; основные понятия теории графов; маршруты; циклы; связность; планарные графы; переключательные функции (ПФ); способы задания ПФ; специальные разложения ПФ; неполностью определенные (частичные) ПФ; минимизация ПФ и неполностью определенных ПФ; теорема о функциональной полноте; примеры функционально-полных базисов; разрешимые и неразрешимые проблемы; схемы алгоритмов; схемы потоков данных.

2.2. Содержание лекций **- 36 час**

Множества, функции, отношения

Тема 1. Множества и операции над ними. Способы задания множеств. Соответствия и функции. Отображения и функции. Способы задания функций. Отношения. Свойства отношений. Отношения эквивалентности. Отношения порядка. (6ч.)

Тема 2. Элементы общей алгебры. Определение алгебры. Операции на множествах и их свойства. Свойства бинарных алгебраических операций. Гомоморфизм и изоморфизм. Полугруппы, группы, решетки. (4ч.)

Введение в логику

Тема 3. Функции алгебры логики. Суперпозиции и формулы. (4ч.)

Тема 4. Булева алгебра. Совершенная дизъюнктивная нормальная форма. Булева алгебра функций и эквивалентные преобразования в ней. Теоремы о СДНФ и СКНФ (принципы построения форм). Булева алгебра и теория множеств. Функциональные схемы в алгебре логики. (6ч.)

Тема 5. Логика высказываний. Тождественно-истинные высказывания. Доказательства в логике высказываний. (4ч.)

Тема 6. Язык логики предикатов. Кванторы, область действия квантора. Истинные формулы и эквивалентные соотношения. Методы доказательства в логике предикатов. (4ч.)

Тема 7. Полнота и замкнутость. Алгебра Жигалкина и линейные функции. Монотонные функции. Теоремы о функциональной полноте. (2ч.)

Основные понятия теории графов

Тема 8. Ориентированные, неориентированные графы, различные виды графов. Локальные характеристики графов. Части графов. (2ч.)

Тема 9. Плоские и неплоские графы. Реализация графов. Теорема о реализации. Изоморфизм графов. (2ч.)

Тема 10. Представление графов. Основные свойства графов. (2ч.)

Практические занятия - 54часа

1. Понятия множества и подмножества. Объединение, пересечение, разбиение и разность множеств. Прямое произведение множеств. (4ч.)
2. Булеан конечного множества. Построение булеана. (2ч.)
3. Соответствия и функции. Отображения и функции. Способы задания функций. Композиции и суперпозиции. (6ч.)
4. Отношения. Свойства отношений. Отношения эквивалентности. Отношения порядка. (4ч.)
5. Алгебры: поле действительных чисел, конечное поле характеристики p, булева алгебра. Ассоциативная, коммутативная и дистрибутивная алгебраические операции. Пример гомоморфизма и изоморфизма. (4ч.)
6. Функции алгебры логики. Суперпозиции и формулы. (6ч.)
7. Булева алгебра. Разложение функций по переменным. Совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ). Метод Блейка-Порецкого. (6ч.)
8. Полнота и замкнутость. Алгебра Жигалкина и линейные функции. Замкнутые классы. Монотонные функции. (4ч.)
9. Логика предикатов. Кванторы, область действия квантора. Истинные формулы и эквивалентные соотношения. Методы доказательства в логике предикатов. (6ч.)
10. Логика высказываний. Тождественно-истинные высказывания. Доказательства в логике высказываний. (4ч.)
11. Ориентированные, неориентированные графы, различные виды графов. Локальные характеристики графов. Части графов. Плоские графы. Реализация графов. Изоморфизм графов. (6ч.)
12. Представление графов матричное и списочное. (2ч.)

2.3 Самостоятельная работа студентов - 30 ч./ 20 РГР

В течение семестра студентами должны быть выполнены и сданы следующие промежуточные виды контрольных работ:

1. Контрольная работа №1 «Соответствия, Функции, Операции»
2. Контрольная работа №2 «Логические функции, СДНФ, СКНФ»
3. Контрольная работа №3 «Матричное представление графов»
4. РГР№1 «Множества, соответствия, функции, отношения»
5. РГР№2 «Булева алгебра логики. Логика предикатов»
6. РГР№3 «Теория графов»
7. Самостоятельная работа «Теория графов»
8. Коллоквиум «Теория множеств, соответствий, функций, операций»

Вопросы к коллоквиуму по дискретной математике

МНОЖЕСТВА

1. Записать тождества, иллюстрирующие ассоциативность, коммутативность, дистрибутивность бинарных операций над множествами.

2. Записать тождества де-Моргана и тождества Порецкого.
3. Записать тождества поглощения и тождества склеивания.
4. Булеан множества. Построение булеана множества.
5. Множество степень. Мощность множества сепень.

СООТВЕТСТВИЕ, ФУНКЦИИ, ОТНОШЕНИЯ

6. Что называется соответствием. Область определения и область значения соответствия.
7. Полностью определенное и сюръективное соответствие.
8. Какое соответствие называют функциональным. Пример.
9. Определение обратного соответствия.
10. Определение взаимнооднозначного соответствия. Пример.
11. Определение отображения. Преобразование.
12. Инъекция, сюръекция, биекция. Пример.
13. Определение обратной функции. Условие существование обратной функции.
14. Определение композиции функций. Показать на примере преобразований конечных множеств.
15. Способы задания функций.
16. Определение n-местного отношения.
17. Матрица бинарного отношения.
18. Рефлексивность/антирефлексивность отношений. Пример.
19. Симметричность/антисимметричность отношений. Пример.
20. Транзитивность отношений.
21. Транзитивное замыкание.
22. Отношение эквивалентности. Пример.
23. Отношение порядка. Пример.
24. Толерантное отношение. Пример.

ОПЕРАЦИИ, АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

25. Определение n-арной операции. Пример унарной операции.
26. Бинарная операция. Пример бинарных операций над множествами.
27. Ассоциативность бинарных операций. Показать на примере.
28. Коммутативность бинарных операций. Показать на примере.
29. Дистрибутивность слева/справа бинарных операций. Пример.
30. Понятие алгебры. Носитель алгебры.
31. Понятие алгебры. Тип алгебры.
32. Понятие алгебры. Сигнатура алгебры.
33. Полугруппа. Абелева полугруппа.
34. Группа. Абелева группа.
35. Алгебраические системы. Алгебры.
36. Алгебраические системы. Модели.
37. Понятие решетки. Пример.

Вопросы к зачету
по дисциплине «Дискретная математика»

Часть 1

МНОЖЕСТВА

1. Записать тождества, иллюстрирующие ассоциативность, коммутативность, дистрибутивность бинарных операций над множествами.
2. Записать тождества де-Моргана и тождества Порецкого.
3. Записать тождества поглощения и тождества склеивания.
4. Булеан множества. Построение булеана множества.

5. Множество степень. Мощность множества сепень.

СООТВЕТСТВИЕ, ФУНКЦИИ, ОТНОШЕНИЯ

6. Что называется соответствием. Область определения и область значения соответствия.
7. Полностью определенное и сюръективное соответствие.
8. Какое соответствие называют функциональным. Пример.
9. Определение обратного соответствия.
10. Определение взаимнооднозначного соответствия. Пример.
11. Определение отображения. Преобразование.
12. Инъекция, сюръекция, биекция. Пример.
13. Определение обратной функции. Условие существование обратной функции.
14. Определение композиции функций. Показать на примере преобразований конечных множеств.
15. Способы задания функций.
16. Определение n-местного отношения.
17. Матрица бинарного отношения.
18. Рефлексивность/антирефлексивность отношений. Пример.
19. Симметричность/антисимметричность отношений. Пример.
20. Транзитивность отношений.
21. Транзитивное замыкание.
22. Отношение эквивалентности. Пример.
23. Отношение порядка. Пример.
24. Толерантное отношение. Пример.

ОПЕРАЦИИ, АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

25. Определение n-арной операции. Пример унарной операции.
26. Бинарная операция. Пример бинарных операций над множествами.
27. Ассоциативность бинарных операций. Показать на примере.
28. Коммутативность бинарных операций. Показать на примере.
29. Дистрибутивность слева/справа бинарных операций. Пример.
30. Понятие алгебры. Носитель алгебры.
31. Понятие алгебры. Тип алгебры.
32. Понятие алгебры. Сигнатура алгебры.
33. Полугруппа. Абелева полугруппа.
34. Группа. Абелева группа.
35. Алгебраические системы. Алгебры.
36. Алгебраические системы. Модели.
37. Понятие решетки. Пример.

Часть2

АЛГЕБРА ЛОГИКИ

38. Понятие алгебры логики. Определение функции алгебры логики. Теорема о мощности множества $P_2(n)$.
39. Логические функции двух переменных. Табличное задание логической функции n-переменных.
40. Логические функции n переменных. Представление функций картами Вейча.
41. Разложение логических функций по переменным. Лемма о разложении.
42. СДНФ. Теорема о представлении формулы алгебры высказываний.
43. СКНФ. Теорема о представлении формулы алгебры высказываний.
44. Минимизация СДНФ. Метод Блейка-Порецкого.
45. Алгебра Жигалкина и линейные функции.
46. Представление логических функций в базисах.

47. Линейные логические функции.
48. Монотонные логические функции.
49. Самодвойственные логические функции.
50. Полнота и замкнутость множества $P_2(n)$.

Вопросы к экзамену по курсу «Дискретная математика»

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

1. Способы представления множеств.
2. Операции над множествами (теоретико-множественные операции).
3. Ассоциативность, коммутативность, дистрибутивность бинарных операций над множествами.
4. Запись тождества де-Моргана и тождества Порецкого.
5. Запись тождества поглощения и тождества склеивания.
6. Конечные множества. Мощность множества.
7. Булеан множества. Построение булеана множества. Теорема о числе всех подмножеств конечного множества.
8. Прямое произведение множеств. Теорема о мощности множества, которое есть прямое произведение множеств.
9. Множество степень. Мощность множества степень.
10. Теорема Кантора. Парадокс Кантора.
11. Теоремы о счетных множествах.

СООТВЕТСТВИЕ, ФУНКЦИИ, ОТНОШЕНИЯ

12. Что называется соответствием. Область определения и область значения соответствия. Полностью определенное и сюръективное соответствие.
13. Функциональное соответствие. Примеры.
14. Определение обратного соответствия. Пример построения обратного соответствия.
15. Определение взаимно однозначного соответствия. Утверждение о мощности множеств A и B, между которыми существует взаимно однозначное соответствие. Пример.
16. Понятие функции и отображения. Примеры.
17. Понятие n-местной функции. Примеры функций типа $R^2 \to R$.
18. Инъективное, сюръективное, биективное отображения. Пример.
19. Определение обратной функции. Условие существование обратной функции.
20. Определение композиции функций. Показать на примере преобразований конечных множеств $\alpha:M\to M$, $\beta:M\to M$.
21. Способы задания функций.
22. Определение n-местного отношения. Матрица бинарного отношения.
23. Понятие обратного отношения. Операции дополнения, объединения, пересечения, заданные на отношениях. Примеры.
24. Рефлексивность/антирефлексивность отношений. Примеры.
25. Симметричность/антисимметричность отношений. Примеры.
26. Транзитивность отношений. Примеры.
27. Отношение эквивалентности. Отношение порядка. Примеры.

ОПЕРАЦИИ, АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

28. Определение n-арной операции. Унарные и бинарные операции. Пример бинарных операций на множествах.

29. Ассоциативность, коммутативность и дистрибутивность бинарных операций. Показать на примерах.

30.Понятие алгебры. Носитель алгебры. Тип алгебры. Сигнатура алгебры. Понятие булевой алгебры. Примеры.

31. Теорема о булевой алгебре логики.

32. Понятие полугруппы и группы. Примеры абелевых полугрупп и групп.

33.Гомоморфизм и изоморфизм алгебр. Основное тождество гомоморфизма. Пример.

34. Алгебраические системы. Алгебры и модели.

35. Понятие решетки. Пример.

АЛГЕБРА ЛОГИКИ

36. Понятие алгебры логики. Определение функции алгебры логики. Теорема о мощности множества $P_2(n)$.
37. Логические функции двух переменных. Табличное задание логической функции n-переменных.
38. Разложение логических функций по переменным. Лемма о разложении.
39. СДНФ. Теорема о представлении формулы алгебры высказываний.
40. СКНФ. Теорема о представлении формулы алгебры высказываний.
41. Минимизация СДНФ.
42. Алгебра Жигалкина и линейные функции.
43. Теоремы о функциональной полноте.
44. Истинные формулы и эквивалентные соотношения в логике предикатов.

ТЕОРИЯ ГРАФОВ

45. Определение графа. Ориентированные и неориентированные графы.
46. Локальные характеристики графа.
47. Теорема Эйлера о рукопожатиях.
48. Изоморфизм графов.
49. Геометрические графы. Плоские и неплоские графы. Теорема о правильной реализации.
50. Полные графы. Части графа.
51. Матричное представление графов (ориентированных и неориентированных).

К зачету у студента должны быть сданы все расчетно-графические работы и выполнены семестровые контрольные работы.

На зачете надо ответить на два теоретических вопроса (Часть 1, Часть 2) и решить одну практическую задачу. Студенты, которые сдали 1 часть на коллоквиуме, сдают зачет только по Части 2: один вопрос теоретический и практическая задача.

Критерий оценки ответа на зачете:

Зачет получают студенты, 1) не имеющие задолженностей по семестровым работам; 2) сдавшие и защитившие РГР и самостоятельную работу; 3) ответившие на теоретический вопрос зачета; 4) решившие задачу

Не зачет получают студенты, которые в течение семестра 1) не сдавали работы по текущему контролю в семестре, 3) не смогли отчитаться по РГР №1, РГР №2, Самостоятельной работе по «Теории графов»; 4) имеющие более 50% пропусков лекционных и практических занятий; 5) не ответили на теоретические зачетные вопросы, 6) не смогли решить практическую задачу.

Экзамен принимается у студентов получивших зачет (т.е. у студентов не имеющих семестровых задолженностей) и ставится за знание теории и умение решать практические задачи по всем разделам «Дискретной математики».

Экзаменационный билет состоит из 2-х теоретических вопросов и одной практической задачи.

***Критерии оценок на экзамене*:** В семестре студентом должны быть выполнены работы текущего контроля (контрольные работы, РГР, самостоятельные работы), а также посещение лекций и практических занятий.

Студенту на экзамене предлагается два теоретических и один практический вопрос.

«Отлично» - студент не имеет долгов по семестровым отчетным работам, ответ на теоретический материал полный, хорошо владеет материалом и отвечает на дополнительные вопросы с пониманием, приводит примеры, (освещены два теоретических вопроса), задача решена полностью с пояснениями.

«Хорошо» - студент не имеет долгов по семестровым отчетным работам, ответ на теоретический материал неполный, хорошо отвечает на дополнительные вопросы, приводит примеры, задача решена полностью с пояснениями.

«Удовлетворительно» - студент не имеет задолженностей, ответ на теоретический материал должен быть полный (хотя бы по одному из двух теоретических вопросов), ответы на дополнительные вопросы по теоретическому экзаменационному материалу должны быть близкими к теории, задача решена, хотя бы схематически.

«Неудовлетворительно» - студент не имеет задолженностей, отвечает по билету плохо (ни на один теоретический вопрос не дал ответа), не может ответить ни на один дополнительный вопрос, задача не решена даже схематически.

Основная литература

1. Москинова Г.И. Дискретная математика. Математика для менеджера в примерах и упражнениях: Уч.пособие. – М.: Логос, 2000. - 240с.
2. Асеев Г. Г. Дискретная математика [Текст]: учеб. пособие / Г.Г. Асеев, О.М. Абрамов, Д.Э. Ситников. - Ростов н/Д: Феникс; Харьков: Торсинг, 2003. - 144 с.
3. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. – 3-е изд., стереотипное. – М.: «высшая школа», 2001.- 384 с.
4. Шевелев Ю.П. Высшая математика 6. Дискретная математика. Ч.2: Теория конечных автоматов. Комбинаторика. Теория графов (для автоматизированной технологии обучения): Учебное пособие. – Томск: Том. гос. ун-т систем управления и радиоэлектроники, 1999. – 120 с.
5. **Семичевская Н.П. Введение в теорию графов: практикум по дискретной математике. Уч. методич. пособие, Благовещенск, Амурский гос. ун-тет, 2002.**

Дополнительная литература

1. Кузнецов О.П., Адельсон-Вельский Г.М. Дискретная математика для инженера. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Энергоатомиздат, 1988. - 480с.
2. Нефедов В.Н., Осипова В.А. Курс дискретной математики. М., 1992.
3. Бауэр Ф.Л., Гооз Г. Информатика Вводный курс: Часть 2, М.: Мир, 1990.
4. Никифоров А. Книга о логике. М.: «Гнозис», 1996.
5. Манин Ю.И. Доказуемое и недоказуемое. М.: «Советское радио», 1979.
6. Смаллиан Р. Как же называется эта книга? М.: Мир, 1981.
7. Смаллиан Р. Принцесса или тигр? М.: Мир, 1985.
8. Смаллиан Р. Алиса в стране смекалки. М.: Мир, 1987.
9. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. М.: Мир, 1984.
10. Гарднер М. А ну-ка, догадайся! М.: Мир, 1984.
11. Кориков А.М., Сафьянова Е.Н. Основы системного анализа и теории систем: Учебное пособие. – Томск: изд-во Том. ун-та, 1989. – 207 с.
12. Оре О. Теория графов. – М.: Наука, 1980. – 352 с.
13. Основы кибернетики. Математические основы кибернетики / Под. ред. К.А. Пупкова. – М.: Высш. школа, 1974. – 416 с.
14. Горбатов В.А. Основы дискретной математики. – М.: Высш. школа, 1986. – 312 с.
15. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. – М.: Мир, 1978. – 432 с.
16. Кузин Л.Т. Основы кибернетики.: В 2 т. Т. 2. Основы кибернетических моделей. – М.: Энергия, 1979. – 584 с.
17. Кнут Д. Искусство программирования для ЭВМ. т.2. Получисленные алгоритмы. М.: Мир, 1997.
18. Виленкин Н.Я. Популярная комбинаторика. – М.: Наука, 1975. – 328 с.
19. Риордан Дж. Введение в комбинаторный анализ. – М. ИЛ, 1963. – 288 с.
20. Рыбников К.А. Введение в комбинаторный анализ. – М.: Изд-во МГУ, 1985. – 312 с.
21. Шевелев Ю.П. Высшая математика 5. Дискретная математика. Ч.1: Теория множеств. Булева алгебра (для автоматизированной технологии обучения): Учебное пособие. – Томск: Том. гос. ун-т систем управления и радиоэлектроники, 1998. – 114 с.

4.УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ (ТЕХНОЛОГИЧЕСКАЯ) КАРТА ДИСЦИПЛИНЫ «Дискретная математика»

Номер недели	Номер темы	Вопросы, изучаемые на лекции	Занятия (номера)		Используемые нагляд. и метод. пособия	Самостоятельная работа студентов		Форма контроля
			(семин.)Практич	Лаборат.		Содержание	Часы	
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	1,2,3	1		К.			
2	1	4,5,6	2		К.			
3	1	7,8,9	3		К.			
4	2	1,2,3	3		К.			
5	2	4,5,6	4		М.п.	РГР№1	10	К.р.№1
6	3	1	5,6		М.п.	Коллокв	5	
7	3	2	6		М.п.			
8	4	1,2	7		М.п.			
9	4	3,4	7		М.п.			
10	4	5,6	8		М.п.			К.р.№2
11	5	1,2	9		М.п.			
12	5	3	9,10		М.п.			
13	6	1,2	10		М.п.	РГР№2	10	
14	6	3,4	11		М.п.			
15	7	1-4	11		М.п.			
16	8	1-3	11,12		М.п.	РГР№3	5	С.р.
17	9	1-4	12		М.п.			К.р.№3
18	10	1,2						Тест, зачет

Используемые обозначения

1. РГР № 1 «Множества, соответствия, функции, отношения»
2. РГР №2 «Булева алгебра логики. Логика предикатов»
3. РГР №3 «Теория графов. Представление графов»
4. С.р. – самостоятельная работа по теме «Теория графов»
5. К.- карточки с задачами к темам
6. М.п.- методическое пособие

3. ГРАФИК САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

Содержание	Объем в часах	Сроки и форма контроля
Контрольная работа №1	2	5 неделя
Контрольная работа №2	2	10 неделя
Контрольная работа №3	2	17 неделя
Выполнение расчетно-графических работ:		
РГР№1 «Множества, соответствия, функции, отношения»	10	5 неделя
РГР№2 «Булева алгебра логики. Логика предикатов»	6	13 неделя
РГР№3 «Теория графов. Представление графов»	4	16 неделя
Подготовка к коллоквиуму	2	
Подготовка к тестированию	2	18 неделя
Итого	30ч /20ч. РГР	

4. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПРОВЕДЕНИЮ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

По каждой практической работе студенты выполняют домашнюю работу, требования к выполнению домашних работ указаны в методических разработках к практическим работам.

В течение семестра студенты выполняют контрольные работы, расчетно-графические работы по тематике предложенной в рабочей программе. Подготовка к контрольной работе предусматривает изучение материалов лекции и демонстрацию умения решать предложенные задачи в контрольной работе. При выполнении расчетно-графических работ студент должен использовать материал лекций и навыки решения задач, приобретенные на практических занятиях.

5. ПЕРЕЧЕНЬ УЧЕБНИКОВ, УЧЕБНЫХ ПОСОБИЙ

Основная литература

1. Москинова Г.И. Дискретная математика. Математика для менеджера в примерах и упражнениях: Уч.пособие. – М.: Логос, 2000. - 240с.
2. Асеев Г. Г. Дискретная математика [Текст]: учеб. пособие / Г.Г. Асеев, О.М. Абрамов, Д.Э. Ситников. - Ростов н/Д: Феникс; Харьков: Торсинг, 2003. - 144 с.
3. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. – 3-е изд., стереотипное. – М.: «высшая школа», 2001.- 384 с.
4. Шевелев Ю.П. Высшая математика 6. Дискретная математика. Ч.2: Теория конечных автоматов. Комбинаторика. Теория графов (для автоматизированной технологии обучения): Учебное пособие. – Томск: Том. гос. ун-т систем управления и радиоэлектроники, 1999. – 120 с.
5. **Семичевская Н.П. Введение в теорию графов: практикум по дискретной математике. Уч. методич. пособие, Благовещенск, Амурский гос. ун-тет, 2002.**
6. **Семичевская Н.П. Расчетно-графические работы по дискретной математике. Уч. методич. пособие, Благовещенск, Амурский гос. ун-тет, 2007, 108с. (Эл вариант)**

Дополнительная литература

1. Кузнецов О.П., Адельсон-Вельский Г.М. Дискретная математика для инженера. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Энергоатомиздат, 1988. - 480с.
2. Нефедов В.Н., Осипова В.А. Курс дискретной математики. М., 1992.
3. Бауэр Ф.Л., Гооз Г. Информатика Вводный курс: Часть 2, М.: Мир, 1990.
4. Никифоров А. Книга о логике. М.: «Гнозис», 1996.
5. Манин Ю.И. Доказуемое и недоказуемое. М.: «Советское радио», 1979.
6. Смаллиан Р. Как же называется эта книга? М.: Мир, 1981.
7. Смаллиан Р. Принцесса или тигр? М.: Мир, 1985.
8. Смаллиан Р. Алиса в стране смекалки. М.: Мир, 1987.
9. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. М.: Мир, 1984.
10. Гарднер М. А ну-ка, догадайся! М.: Мир, 1984.
11. Кориков А.М., Сафьянова Е.Н. Основы системного анализа и теории систем: Учебное пособие. – Томск: изд-во Том. ун-та, 1989. – 207 с.
12. Оре О. Теория графов. – М.: Наука, 1980. – 352 с.
13. Основы кибернетики. Математические основы кибернетики / Под. ред. К.А. Пупкова. – М.: Высш. школа, 1974. – 416 с.
14. Горбатов В.А. Основы дискретной математики. – М.: Высш. школа, 1986. – 312 с.
15. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. – М.: Мир, 1978. – 432 с.
16. Кнут Д. Искусство программирования для ЭВМ. т.2. Получисленные алгоритмы. М.: Мир, 1997.
17. Виленкин Н.Я. Популярная комбинаторика. – М.: Наука, 1975. – 328 с.
18. Риордан Дж. Введение в комбинаторный анализ. – М. ИЛ, 1963. – 288 с.
19. Рыбников К.А. Введение в комбинаторный анализ. – М.: Изд-во МГУ, 1985.– 312 с.

20. Шевелев Ю.П. Высшая математика 5. Дискретная математика. Ч.1: Теория множеств. Булева алгебра (для автоматизированной технологии обучения): Учебное пособие. – Томск: Том. гос. ун-т систем управления и радиоэлектроники, 1998. – 114 с.

6. КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

Тематический план лекций

№	Содержание лекций	Часы
Тема 1	Множества и операции над ними. Способы задания множеств. Соответствия и функции. Отображения и функции. Способы задания функций. Отношения. Свойства отношений. Отношения эквивалентности. Отношения порядка.	6ч.
Тема 2	Элементы общей алгебры. Определение алгебры. Операции на множествах и их свойства. Свойства бинарных алгебраических операций. Гомоморфизм и изоморфизм. Полугруппы, группы, решетки.	4ч.
Тема 3	Функции алгебры логики. Суперпозиции и формулы.	4ч.
Тема 4	Булева алгебра. Совершенная дизъюнктивная нормальная форма. Булева алгебра функций и эквивалентные преобразования в ней. Теоремы о СДНФ и СКНФ (принципы построения форм). Булева алгебра и теория множеств. Функциональные схемы в алгебре логики.	6ч.
Тема 5	Логика высказываний. Тождественно-истинные высказывания. Доказательства в логике высказываний.	4ч.
Тема 6	Язык логики предикатов. Кванторы, область действия квантора. Истинные формулы и эквивалентные соотношения. Методы доказательства в логике предикатов.	4ч.
Тема 7	Полнота и замкнутость. Алгебра Жигалкина и линейные функции. Монотонные функции. Теоремы о функциональной полноте.	2ч.
Темы 8-10	Основные понятия теории графов. Представление графов. Основные свойства графов.	6ч.
ИТОГО		36ч.

ЛЕКЦИЯ 1

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

Понятия множества и подмножества.

Одним из основных понятий математики являются понятия *множества* и его *элементов*. Множество состоит из элементов. Принадлежность элемента a множеству М обозначается $a \in$ М; не принадлежность обозначается $a \notin$ М или $a \bar{\in}$ М.

Понятие множества, как и любое другое исходное понятие математической теории, не определяется. В качестве исходных обычно выбирают понятия, в понимании которых не возникает существенных разногласий (различия в понимании которых не нарушают правильности ни одного положения теории).

Опр. 1. Множество А называется *подмножеством* множества В (обозначение А$\subseteq$В; знак $\subseteq$- включения), если всякий элемент А является элементом В. При этом говорят, что В содержит или покрывает А.

Опр. 2. Множества А и В *равны*, если элементы этих множеств совпадают, или если А$\subseteq$В и В$\subseteq$А. Второй вариант определения равенства множеств указывает и на наиболее типичный метод доказательства того, что данные множества равны, заключающийся в доказательстве сначала утверждения А$\subseteq$В, а затем В$\subseteq$А.

Например. M_3 - множество всех решений уравнения $sin\ x$ =1, элементами множества M_3 являются числа, решения этого уравнения. M_4 - множество всех чисел вида $\frac{\pi}{2} + \kappa\pi, \kappa \in N_0$. Тригонометрическая теорема M_3 $=M_4$, состоящая из двух утверждений: а) всякое решение уравнения вида $sin\ x$ =1 имеет вид $\frac{\pi}{2} + \kappa\pi, \kappa \in N_0$ ($M_3 \subseteq M_4$); б) всякое число вида $\frac{\pi}{2} + \kappa\pi, \kappa \in N_0$ является решением уравнения $sin\ x$ =1 ($M_4 \subseteq M_3$).

Если А$\subseteq$В и А $\neq$ В, то А называется *собственным*, строгим или истинным подмножеством В и обозначается А$\subset$ В ($\subset$ - знак строгого включения).

Заметим, сто в случае множества множеств возникает опасность смешения знаков $\in$ и $\subset$, $\subseteq$. Например, верно футбольная команда «Арарат» (множество ее футболистов) $\in$ множеству всех футбольных команд высшей лиги в сезоне 1985 г. Но неверно футбольная команда «Арарат» (множество ее футболистов) $\subset$ множеству всех футбольных команд высшей лиги в сезоне 1985 г.(эти множества разной природы).

Конечные и бесконечные множества.

Опр. 3.Множества, состоящие из конечного числа элементов – *конечные*, из бесконечного числа элементов – *бесконечными*.

Опр. 4. Число элементов в конечном множестве называется *мощностью множества* М (кардинальное число) и часто обозначается $|M|$. Мощность бесконечного множества – более сложное понятие.

Опр. 5. Будем считать, что выбрано фиксированное достаточно «широкое» множество, за пределы которого не выходит ни одно рассматриваемое множество. Элементы всех рассматриваемых множеств являются элементами этого фиксированного множества, называемого *универсальным*. Обозначение *U* или *I*.

Наряду с универсальным множеством рассматривается множество, не содержащее элементов.

Опр. 6. Множество мощности 0 (не содержащее элементов), называется *пустым* и обозначается $\varnothing$. Принято считать, что пустое множество является подмножеством любого множества.

Пустое множество введено для удобства и единообразия языка. Например, если исследуется множество объектов, обладающих каким-либо свойством, выясняется, что таких объектов не существует, гораздо удобнее сказать, что исследуемое множество пусто, чем объявлять его не существующим.

СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ МНОЖНСТВ.

1.Списком своих элементов (перечислением).
2.Порождающей процедурой.
3.Описанием характеристических свойств, которыми обладают элементы множества.
4.Графическое представление множеств, представление диаграммами Эйлера-Виенна.

*Виенн Диего (1834-1923) – английский математик (Кембридж)

Списком задаются лишь конечные множества. Список заключается в фиг.скобки {a, d, f}. Задание типа N=1, 2, 3,…- это не список, а условное обозначение.

Порождающая процедура описывает способ получения элементов множества из уже полученных либо из других объектов. Элементами множества считаются все объекты, которые могут быть построены с помощью такой процедуры. Например, множество M^{2^n} =1, 2, 4, 8, 16,… (рекурсивное или индуктивное правило). Весьма распространенной порождающей процедурой является образование множеств из других множеств с помощью операций над множествами.

Пример.

1. Порождающая процедура для множества **N**

a)$1\in$ **N** ; b) если $n\in$ **N**, то **n**$+1\in$ **N**.

2. Порождающая процедура для $M_2{}^n$ – множество чисел, являющихся степенями двойки

a) $1 \in M_2^n$; b) если $m \in M_2^n$, то $2m \in M_2^n$.

Задание множества описанием свойств его элементов, наиболее обычно. В случае, когда свойство элементов M может быть описано коротким выражением (предикатом) P(x) (обозначающим «x обладает свойством P»), M задается при помощи обозначения $M=\{x| P(x)\}$, которое читается так: «M – это множество x, обладающих свойством P».

Пример.

$M_{2^n} = \{ x| x=2^k , k\in N_0\}$.

$P_A(x) \equiv$ “$x\in A$”,

$P_{\varnothing}(x) \equiv$ “$x\in \varnothing$ ”- тождественно ложный предикат.

$\mathbf{N}=\{x| x>0, x\in \mathbf{Z}\}$.

$M_{2n}= \{n| n/2 \in \mathbf{N}$ и $n\in \mathbf{N}\}$.

$M_{3n} =\{m|$ m кратное $3\}$.

К описанию свойств естественно предъявить требование точности и недвусмысленности. Например, множество всех хороших фильмов 2000г. разные люди зададут разными списками; сами критерии, по которым производится отбор, при этом будут различными. Такое множество нельзя считать строго заданным. Надежным способом точно описывать свойство элементов данного множества служит задание распознающей (разрешающей) процедуры, которая для любого объекта устанавливает, обладает ли он данным свойством и, следовательно, является элементом данного множества или нет. Например, для M_{2^n} , т.е. для свойства «быть степенью двойки», разрешающей процедурой может служить любой метод разложения целых чисел на простые множители. Процедура не является порождающей.

В чем трудности вопроса о задании множеств? Одна из основных трудностей заключается в том, что даже из множеств, точность описаний которых не вызывает сомнений, с помощью вполне законных средств можно сконструировать описания множеств. Которые приводят к противоречиям – парадоксам теории множеств. Примером является «множество всех множеств». По смыслу своего описания оно должно содержать все мыслимые множества. Но оно само содержится в множестве своих подмножеств в качестве элемента. Точный комментарий этого примера должен опираться на понятие мощности бесконечного множества.

ЛЕКЦИЯ 2

ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ.

Опр. 7. *Объединением* множеств A и B (обозначение - $A\cup B$) называется множество, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A, B. Символически: $A\cup B = \{x|\ x\in A$ или $x\in B\}$.

$P_{A\cup B}(x)=P_A(x)\vee P_B(x)$.

Опр. 7'. Объединение произвольной (в том числе и бесконечной) совокупности множеств обозначается как $\bigcup_{A\in S} A$ («объединение всех множеств A, принадлежащих совокупности S»). Если множества совокупности занумерованы индексами, то используются другие обозначения $\bigcup_{i=1}^{k} A_i$ (S - конечная совокупность) или $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ (S - бесконечная совокупность и ее множества занумерованы подряд натуральными числами).

Опр. 8. *Пересечением* множеств A и B (обозначение - $A\cap B$) называется множество, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат и A и B. Символически: $A\cap B = \{x|\ x\in A$ и $x\in B\}$. $P_{A\cap B}(x)=P_A(x)\wedge P_B(x)$.

Аналогично определяется пересечение произвольной совокупности множеств.

Опр. 9-10. Система множеств, в которой все попарные пересечения множеств пусты, называется *разбиением множества* U всех элементов этих множеств, а множества такой системы называются *классами или блоками* разбиения.

Опр.11. *Разностью* множеств A и B (обозначение – $A\backslash B$) называется множество, состоящее из всех тех элементов A, которые не содержатся в B. Символически: $A\backslash B = \{x|\ x\in A$ и $x\notin B\}$. $P_{A\backslash B}(x) = P_A(x)\wedge\neg P_B(x)$.

В отличие от двух предыдущих операций разность, строго двухместна (определена только для двух множеств) и некоммутативна: A\B$\neq$ B\A. Если A\B =$\emptyset$, то A$\subseteq$ B.

Опр. 12. *Дополнением* (до U) множества A называется множество всех элементов, не принадлежащих A (но принадлежащих U). $P_{\overline{A}}(x) \equiv \neg P_A(x)$.

Символически: $\overline{A}$ = U\A. (Множество U должно быть либо задано, либо очевидно из контекста, в противном случае проще пользоваться выражением U\A).

Симметрическая разность множеств A и B: A⊕B=(A\B) $\cup$ (B\A).

Теорема о булевой алгебре множеств Множества относительно операций дополнения, объединения, пересечения образуют булеву алгебру множеств, для них выполнены основные равенства:

Законы и тождества алгебры множеств:

a)коммутативность:

$X\cup Y=Y\cup X$

$X\cap Y=Y\cap X$

b)ассоциативность:

$(X\cup Y)\cup Z=X\cup (Y\cup Z)= X\cup Y\cup Z$

$(X\cap Y)\cap Z=X\cap (Y\cap Z)= X\cap Y\cap Z$

c)дистрибутивность:

$(X\cup Y)\cap Z=(X\cap Z)\cup (Y\cap Z)$

$(X\cap Y)\cup Z=(X\cup Z)\cap (Y\cup Z)$

d)идемпотентность:

$X\cap X=X$, $X\cup X=X$

e)законы де-Моргана:

$\overline{X\cup Y}=\overline{X}\cap\overline{Y}$

$\overline{X\cap Y}=\overline{X}\cup\overline{Y}$

f)закон двойного дополнения:

$\overline{\overline{X}}$=X

g)законы $\varnothing$ и I (универсальное множество):

$X \cup I=I$

$X \cap I=X$

$X \cap \varnothing=\varnothing$

$X \cup \varnothing=X$

h)тождества Порецкого:

$X \cup (\overline{X} \cap Y)= X \cup Y$

$X \cap (\overline{X} \cup Y)= X \cap Y$

i)тождества поглощения:

$X \cup (X \cap Y)=X$

$X \cap (X \cup Y)=X$

j) тождества склеивания:

$(X \cap Y) \cup (X \cap \overline{Y})=X$

$(X \cup Y) \cap (X \cup \overline{Y})=X$

ЛЕКЦИЯ 3

ПРЯМОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ МНОЖЕСТВ

Векторы и прямые произведения.

Вектор (“кортеж”) – упорядоченный набор элементов.

Понятие вектора будем считать, как и понятие множества, неопределенным.

Опр. 13,14 Элементы, образующие вектор, называются координатами или компонентами вектора. Координаты нумеруются слева на право. Число координат называется размерностью или длиной вектора.

В отличие от элементов множества координаты вектора могут совпадать.

Пример: (0, 5, 4, 5, 8)

Два вектора равны, если они имеют одинаковую длину и соответствующие координаты их равны. $(a_1, \ldots, a_m) = (b_1, \ldots, b_n)$, если m=n и $a_1 = b_1$,, …, $a_m = b_n$.

Опр. 15 *Прямым произведением множеств* A и B ($A \times B$) называется множество всех пар (a,b), таких,что $a \in A$, $b \in B$.

Если A=B, то обе координаты принадлежат A. Призведение обозначается A^2.

Опр. 16 Прямым произведением множеств $A_1, \ldots, A_n$ ($A_1 \times \ldots \times A_n$) называется множество всех векторов $(a_1, \ldots, a_n)$ длины n, таких, что $a_1 \in A_1$, …, $a_n \in A_n$. $A \times \ldots \times A$ обозначается A^n.

Теорема 1. Пусть $A_1, \dots, A_n$ - конечные множества и $|A_1|=m_1, \dots, |A_n|=m_n$. Тогда мощность множества $A_1 \times \dots \times A_n$ равна произведению мощностей $A_1, \dots, A_n$:

$|A_1 \times \dots \times A_n| = m_1 \dots m_n$.

Доказательство (методом мат.индукции):

Следствие: $|A^n|=|A|^n$.

Опр.17,18 *Проекцией вектора v* на i-ю ось ($пр_i v$) называется его i-я компонента. Проекцией вектора $v=(a_1, \dots, a_n)$ на оси с номерами $i_1, \dots, i_k$ называется вектор $(a_{i_1}, \dots, a_{i_k})$ длины k ($пр_{i_1, \dots, i_k} v$).

Опр. 19 Пусть V- множество векторов одинаковой длины. Тогда *проекцией множества V* на i-ю ось называется множество проекций всех векторов из V на i-ю ось: $пр_i V = \{пр_i v | v \in V\}$.

СООТВЕТСТВИЯ, ОТОБРАЖЕНИЯ, ФУНКЦИИ

Соответстия

Опр. 20 *Соответствием* между множествами A и B называется подмножество $G \subseteq A \times B$.

Если $(a, b) \in G$, то говорят, что b соответствует a при соответствии G.

Опр. 21, 22 *Областью определения соответствия* называется множество $пр_1 G$, множество $пр_2 G$ – *областью значений соответствия.*

Опр. 23 Если $пр_1 G = A$, то соответствие называется *всюду определенным (полностью определенным)*, в противном случае соответствие называется *частичным.*

Опр. 24 Если $пр_2 G = B$ соответствие называется *сюръективным.*

Опр. 25,26 Множество всех $b \in B$, соответствующих элементу $a \in A$, называется *образом* a в B при соответствии G. Множество всех a, которым соответствует b, называется *прообразом* b в A при соответствии G.

Если $C \subseteq пр_1 G$, то образом множества C называется объединение образов всех элементов C. Аналогично определяется прообраз множества D для любого D= $пр_2$ G.

Опр. 27 Соответствие G называется функциональным (или однозначным), если образом любого элемента из $пр_1 G$ является единственный элемент из $пр_2$ G.

Опр. 28 Соответствие G между A и B называется *взаимно однозначным*, если

1.G всюду определено, т.е. ($пр_1 G=A$),

2.G сюръективно, т.е. ($пр_2 G=B$),

3.функционально (образом любого элемента из $пр_1 G$ является единственный элемент из $пр_2$ G),

4.прообразом любого элемента из $пр_2$ G является единственный элемент из $пр_1 G$.

Пример.

Круг G радиуса 1 с центром в точке (3, 2), т.е. множество пар действительных чисел (x,y), удовлетворяющих соотношению $(x-3)^2 + (y-2)^2 <= 1$, задает соответствие между R и R (осью абсцисс и осью ординат).$G=\{(x,y) | \ (x-3)^2 + (y-2)^2 <= 1; \ x,y \in R\}$ Данное соответствие не является функциональным.

Примером функционального соответствия между действительными числами служит дуга ABC см. график.

Для задания соответствия необходимо указать не только множество G, но и множества A и B, т.е. указать, подмножеством какого прямого произведения является G.

Способы задания соответствий:

Взаимно однозначные соответствия и мощности множеств.

Если между конечными множествами A и B существует взаимно однозначное соответствие, то |A|=|B|. Действительно, если это не так, то либо |A|>|B|, и тогда, поскольку отображение всюду определено, в A найдутся два элемента, которым соответствует один и тот же элемент $b \in B$ (нарушится единственность образа), либо $|A|<|B|$, и тогда, поскольку отображение сюръективно, в B найдутся два элемента, соответствующих одному и тому же $a \in A$ (нарушится единственность прообраза). Существенными оказываются все четыре свойства взаимно однозначного соответствия.

Этот факт 1) позволяет установить равенство мощностей двух множеств, не вычисляя этих мощностей; 2) дает возможность вычислить мощность множества, установив его взаимно однозначное соответствие с множеством, мощность которого известна или легко вычисляется.

Теорема 2.(о мощности булеана конечного множества A) Если для конечного множества A $|A|=n$, то число всех подмножеств A равно 2^n, т.е. $2^{|A|}$.

Доказательство:

(по построению булеана множества A)

Занумеруем каждый элемент множества A, т.е. $A = \{a_1, \ldots a_n\}$. Рассмотрим множество B_n множество двоичных векторов (из 0 и 1) длины n. Каждому подмножеству $A^* \subseteq A$ поставим в соответсвие вектор из множества B_n $b=(b_1, \ldots,b_n)$ по следующему правилу:

$$b_i = \begin{cases} 1, \text{ если } a_i \in A^* \\ 0, \text{ если } a_i \notin A^*. \end{cases}$$

Установленное соответствие между множеством всех подмножеств множества A и множеством двоичных векторов длины n B_n является взаимно-однозначным (биективным). Поэтому число подмножеств множнства A или мощность булеана конечного множества A равно мощности множества B_n. Мощность множества B_n – мощность множества, которое есть прямое произведение двухэлемнтного множества $B=\{0,1\}$ n раз, т.е. $| B_n | = \{0,1\}\times 0,1\}\times\ldots\times\{0,1\} = 2*2*\ldots*2 = |B|^n=2^n$.

Утверждение: Множества *равномощны*, если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие.

Для конечных множеств утверждение доказывается с помощью теоремы 2, для бесконечных множеств оно является определением равномощности.

ЛЕКЦИЯ 4

СЧЕТНЫЕ МНОЖЕСТВА

Опр.29 Множества, равномощные N (множество натуральных чисел), называются счетными.

Всякое бесконечное множество «считается» если найдется способ показать, как нумеруются его элементы.

Опр. 30 Мощность счетного множества E $|E| = \aleph_0$ (алеф нуль).

Пример.

Множество векторов вида $(n, 2^{n-1})$, $n \in N$, задает взаимно однозначное соответствие между множеством N натуральных чисел и множеством M_{2^n} степеней двойки. Множество M_{2^n} счетно.

Любое бесконечное подмножество **N** счетно.

Пусть $N^* \subset N$. Выберем в N^* наименьший элемент и обозначим его n_1; в $N^* \setminus \{ n_1 \}$ выберем наименьший элемент и обозначим его n_2; и т.д. Для всякого натурального числа имеется лишь конечное множество меньших натуральных чисел, то любой элемент N^* получит свой номер. Эта нумерация, т.е. соответствие (n_i, i), и есть взаимно однозначное соответствие между N^* и N.

Теоремы о счетных множествах

Теорема 1. Всякое бесконечное множество содержит счетное подмножество.

Теорема 2. Всякое бесконечное подмножество счетного множества счетно.

Теорема 3. Множество всех целых чисел **Z** счетно.

Теорема 4. Объединение счетного множества A и конечного множества B счетно.

Теорема 5. Объединение конечного множества счетных множеств счетно.

Теорема 6. Декартово произведение двух счетных множеств A и B счетно.

Доказательство:

Представим декартово произведение как таблицу

B\A	a1	a2	a3	a4	a5	…	…
b1	(a1,b1)	(a2,b1)	(a3,b1)	(a4,b1)	(a5,b1)		
b2	(a1,b2)	(a2,b2)	(a3,b2)	(a4,b2)	(a5,b2)		
b3	(a1,b3)	(a2,b3)	(a3,b3)	(a4,b3)	(a5,b3)		
b4	(a1,b4)	(a2,b4)	(a3,b4)	(a4,b4)	(a5,b4)		
b5	(a1,b5)	(a2,b5)	(a3,b5)	(a4,b5)	(a5,b5)		

…

Проведем нумерацию элементов декартового произведения методом треугольника.

n=

(ai,bj) =

Задача: Как по номеру n найти пару (ai,bj)?

Теорема 7. Объединение счетного множества счетных множеств A, B, C, … счетно.

Теорема 8. Множество всех рациональных чисел **Q** счетно.

Теорема 9. Множество всех алгебраических чисел счетно.

Алгебраическим называется число, являющееся корнем алг.уравнения:

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_0 = 0$, где a_i ($0 <= i <= n$) – целые числа и 0.

НЕСЧЕТНЫЕ МНОЖНСТВА

Опр. 31 Мощность несчетного множества есть *континуум*. Множества такой мощности называются континуальными.

Теорема 10. Мощность булеана бесконечного счетного множества E превышает мощность множества E. $|B(E)|>|E|$, $\aleph_1 > \aleph_0$.

Множество B(E) несчетно и его мощность равна мощности континуума.

Теорема Кантора: Множество всех действительных чисел отрезка [0,1) не является счетным.

Доказательство (диагональным методом Кантора):

Предположим, что все действительные числа можно пронумеровать. Запишем одну под другой бесконечные десятичные дроби из интервала [0,1):

0,a1 a2 a3 a4 …

0,b1 b2 b3 b4 …

0,c1 c2 c3 c4 …

0,d1 d2 d3 d4 …

… … … …

Получим матрицу содержащую счетное множество строк, в каждой из которых содержится бесконечное число десятичных цифр. (Для строгости изложения десятичные цифры следовало заменить символами Кенинга). Допустим, что в матрице нет ни одной пары равных между собой чисел. Все ли действительные числа окажутся в матрице? Нет. Воспользуемся диагональным методом Кантора и найдем число, которое отсутствует в матрице, т.е. оказалось незанумерованным. Суть метода: если в первом числе первая после запятой цифра (a1) не равна, например 3, то в искомое число после запятой записываем 3. Если же a1=3, то записываем, допустим 2. Переходим ко второму числу матрицы. Если b2 не равно 3, то записываем на втором месте 3. Если b2=3, то записываем 2. Переходим к третьему числу c3 и повторяем процедуру и т.д. до бесконечности. Очевидно, что получившееся число отсутствуетв списке, т.к. оно отличается от первого числа первой после запятой цифрой, от второго числа – второй после запятой цифрой, от третьего – третьей и т.д. Таким образом, полученное число отсутствует в списке, но принадлежит множеству действительных чисел интервала [0, 1).

Полученное число не является единственным отсутствующим в списке. Достаточно вместо цифр 3 и 2 взять какие-нибудь другие и будут получаться другие числа отсутствующие в списке. Даже если найденные числа включиьт в общий список, то и в расшмренном списке будут находиться незанумерованные числа.

Утверждение 1: Мощность булеана счетного множества E равна мощности множества всех действительных чисел интервала [0,1) и эти множества эквивалентны $|B(\mathrm{E})| = |[0,1)|$. Они являются несчетными и характеризуются кардинальным числом $\aleph_1$.

Утвержение 2: Множество всех подмножеств счетного множества континуально.

Мощность континуума не самая большая мощность среди бесконечных множеств.

Теорема о множествах мощности континуума. Объединение множества мощности континуума и счетного множества имеет мощность континуума.

В 1878 г. Кантор Георг высказал предположение, что всякое множество действительных либо конечно, либо счетно, либо несчетно (т.е. эквивалентно множеству всех действительных чисел). Оставим конечные множества. Тогда по Кантору всякое бесконечное десятичное число принадлежит либо счетному множеству **N**, либо нечсетному множеству M с кардинальным числом $2^{\aleph_0}$ $|M| = \aleph_1 = 2^{|N|} = 2^{\aleph_0}$. $\aleph_1 > \aleph_0$, $|M| > |\mathbf{N}|$, где M первое после счетного множество, мощность которого превышает мощность счетного множества. *Первое ли это множество? Кто это доказал ?*

$|\mathbf{N}| <= |E| <= |M|$ существует ли такое E?

Гипотеза континуума. *Верно ли, что мощность множества всех подмножеств счетного множества - есть первая мощность, превосходящая мощность множества всех натуральных чисел?*

В 1938 г. Курт Гедель (1906-1978) австрийский логик и математик показал, что континуум- гипотеза не может быть опровергнута традиционными средствами теории множеств.

В 1966 г. П.Коэн доказал независимость гипотезы континуума от других аксиом теории множеств.

Парадокс Кантора.

Как показывается в теории множеств (методом аналогичным диагональному методу Кантора), для множества любой мощности множество его подмножеств имеет более высокую мощность. Поэтому не существует множества максимальной мощности. Парадокс как раз и заключается в том, что "множество всех множеств" должно содержать все множества и, следовательно, иметь максимальную мощность, что противоречит теории множеств.

ЛЕКЦИЯ 5

ОТОБРАЖЕНИЯ И ФУНКЦИИ

Опр. 32 *Функцией* называется функциональное соответствие.

Если функция f устанавливает соответствие между множествами A и B, то говорят, что функция f имеет тип $A \to B$ ($f: A \to B$).

Каждому элементу a из области определения функция f ставит в соответствие единственный элемент b из области значений ($f(a)=b$). Элемент a называется *аргументом* функции f, b – *значением* функции f от a.

Полностью определенная функция $f: A \to B$ называется *отображением* A и B. Образ A при отображении f обозначается f(A).

Опр. 33 Пусть $f:X \to Y$, $B \subseteq Y$. Прообразом множества B при отображении f называется множество $f^{-1}(B) (\subseteq X)$ определяемое следующим: $x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$.

Опр. 34 Пусть $f:X \to Y$, $A \subseteq X$. Образом множества A при отображении f называется множество $f(A) (\subseteq Y)$ определяемое следующим:

$y \in f(A) \Leftrightarrow f^{-1}(\{y\}) \cap A \neq \emptyset$.

Типы отображений.

Опр. 35 Отображение $f:X\to Y$ называется *сюръективным*, если $\forall y(\in Y)\ f^{-1}(\{y\})\neq\varnothing$.

Опр. 36 Отображение $f:X\to Y$ называется *инъективным*, если $\forall x_1(\in X)\forall x_2(\in X)\ (x_1\neq x_2)\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$.

Опр. 37 Отображение $f:X\to Y$ называется *биективным*, если оно сюръективно и инъективно.

Пример

$\sin:R\to[-1;1]$ – сюръективное отображение, но не инъективное.

$\sin:[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]\to R$ – инъективное отображение, но не сюръективное.

$\sin:[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]\to[-1;1]$ – биективное отображение.

Опр. 38 Отображение $f:X\to Y$ – сюръективно, если уравнение f(x)=y, где x – неизвестное, y – параметр, имеет хотя бы одно решение при любом значении параметра $y\in Y$.

Опр. 39 Пусть X – множество. Тождественным на X отображением называется отображение $e_X:X\to X$, определяемое следующим: $e_X(x)=x,\ \forall x\in X$.

Опр. 40 Отображение называется обратимым слева (справа), если существует отображение $f_L^{-1}:Y\to X$ ($f_R^{-1}:Y\to X$) такое, что

$f_L^{-1}\circ f=e_X$

($f\circ f_R^{-1}=e_Y$).

Опр. 41 Отображение $f:X\to Y$ называется обратимым, если существует отображение $f^{-1}:Y\to X$ такое, что $f^{-1}\circ f=e_X$; $f\circ f^{-1}=e_Y$.

Критерии односторонней обратимости и критерий обратимости.

Теорема 1: Для того, чтобы отображение $f:X\to Y$ было обратимым слева, необходимо и достаточно, чтобы f было инъективным.

Теорема 2: Для того, чтобы отображение $f:X\to Y$ было обратимым справа, необходимо и достаточно, чтобы f было сюръективно.

Теорема 3: Для того, чтобы отображение $f:X\to Y$ было обратимым, необходимо и достаточно, чтобы f было биективным.

Доказательства в книге «Дискретная математика» Я. М. Ерусалимский.

Множества инъективных и биективных отображений.

Опр. 42 Пусть X, Y – непустые множества. Обозначим через $In\ Y^X$ множество инъективных отображений из X в Y:

$f \in In\ Y^X \Leftrightarrow f:X \to Y$ – инъективное отображение.

Теорема (критерий непустоты для конечных множеств): Пусть X, Y –непустые конечные множества.

Для того чтобы $In\ Y^X$ было непусто, необходимо и достаточно, чтобы |Y|>=|X|.

Опр. 43 Пусть X, Y – множества, обозначим через $Bi\ Y^X$ множество биективных отображений множества X во множество Y:

$f \in Bi\ Y^X \Leftrightarrow f:X \to Y$ – биективное отображение.

Теорема (критерий непустоты $Bi\ Y^X$): Пусть X, Y –непустые конечные множества. Для того чтобы $Bi\ Y^X$ было непусто, необходимо и достаточно, чтобы |X|=|Y|.

Если соответствие f при этом сюръективно, т.е. каждый элемент B имеет прообраз в A, то говорят, что имеет место отображение A на B (сюръективное отображение).

Если f(A) состоит из единственного элемента, то f называется функцией-константой.

Отображение типа $A \to A$ называют *преобразованием* множества A.

Функции f и g равны, если область определения – одно и то же множество A и для любого $a \in A$ f(a)=g(a).

Опр. 44 Функция типа $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \to B$ называется n-местной функцией, функция n аргументов ($f(a_1,a_2,\ldots,a_n)=b$, где $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, … $a_n \in A_n$, $b \in B$).

Сложение, умножение, вычитание и деление являются двухместными функциями на R, т.е. функциями типа $R^2 \to R$.

Опр. 45 Пусть дано соответствие $G \subseteq A \times B$. Если соответствие $H \subseteq B \times A$ таково, что $(b,a) \in H$ тогда и только тогда, когда $(a,b) \in G$, то соответствие H называется *обратным* к G (G^{-1}).

Опр. 46 Если соответствие, обратное, к функции $f:A \to B$, является функциональным, то оно называется функцией обратной к f (f^{-1}).

В обратном соответствии образы и прообразы меняются местами.

Утверждение: Для существования функции, обратной к $f:A \to B$, необходимо, чтобы каждый образ из области значений f имел единственный прообраз.

! Для функции f:A→ B обратная функция существует тогда и только тогда, когда f является взаимно однозначным соответствием между областью определения и областью значений.

Пример. Функция sin(x) имеет тип R→ R. Отрезок [-π /2, π /2] она взаимно однозначно отображает на отрезок [-1, 1]. На отрезке [-1, 1] для функции sin(x) существует обратная функция arcsin(x).

Опр. 47 Пусть даны функции f:A→ B и g :B→ C. Функция h:A→ C называется *композицией* функций f и g ($f \circ g$), если имеет место равенство h(x)=g(f(x)), где $x \in A$. Часто говорят, что функция h получена подстановкой f в g.

Примеры композиций.

Теоремы о композиции отображений.

Теорема 4: Если f:X→ Y и g:Y→ Z – инъективное отображение, то $g \circ f$: :X→ Z – инъективное отображение.

Теорема 5: Если f:X→ Y и g:Y→ Z – сюръективное отображение, то $g \circ f$: :X→ Z – сюръективное отображение.

Теорема 6: Если f:X→ Y и g:Y→ Z – биективное отображение, то $g \circ f$: :X→ Z – биективное отображение.

Опр. 48 *Суперпозиция* $f_1, \ldots, f_n$ - это функция, полученная из $f_1, \ldots, f_n$ некоторой подстановкой их друг в друга и переименованием аргументов.

Способы заданий функций.

1.Таблица (функции определенные на конечных множествах). (Пример)

2.Формула, описывает функцию как суперпозицию других функций или задает процедуру вычисления функции как некоторую последовательность вычислений исходных функций.

3.Графическое представление функции. (Пример)

Вычисления функций по таблицам, формулам и с помощью графиков являются частным видом вычислительных процедур.

4.Рекурсивная вычислительная процедура, задает функцию f, определенную на N_0 по правилу: 1) задается значение f(0) или f(1); 2) значение f(n+1) определяется через суперпозицию f(n) и других известных функций. (Пример n!)

5.Описание функций, которые не содержат способа вычисления функций. (Пример)

ЛЕКЦИЯ 6

ОТНОШЕНИЯ

Опр. 49 Подмножество $R \subseteq M^n$ называется *n-местным отношением* на множестве M. Говорят, что $a_1, \ldots, a_n$ находятся в отношении R, если $(a_1, \ldots, a_n) \in R$. Одноместное отношение - это просто подмножество M.

Одноместные отношения называют *признаками*: a обладает признаком R, если $a \in R$ и $R \subseteq M$. Свойства одноместных отношений – это свойства подмножеств M.

Наиболее часто встречающиеся и хорошо изученными являются двухместные (бинарные) отношения. Если a,b находятся в отношении R, это записывется как aRb.

Пример.

1)“делиться нацело”

2)“перпендикулярно к”

3)“быть отцом”

4)“жить в одном городе”

5)“сидеть за одной партой”

Для задания бинарных отношений используются способы задания множеств (список пар или). Отношения на конечных множествах обычно задаются списком или матрицей.

Опр. 50 Матрица бинарного отношения на множестве $M=\{a_1, \ldots, a_m\}$ – это квадратная матрица C порядка m, в которой элемент c_{ij} определяется как:

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } a_i R a_j; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пример.

Для конечного множества {1,2,3,4,5,6} матрицы отношений 1)<=, 2)отношение «иметь общий делитель, отличный от единицы», 3) отношение «быть делителем»:

1) 111111	2) 000000	3) 111111
011111	010101	010101
001111	001001	001001
000111	010101	000100
000011	000010	000010
000001	011101	000001

Поскольку отношения на M задаются подмножествами M^2, на них определяются те же операции, что и над множествами (дополнение, объединение, пересечение).

Опр. 51 Отношение называется *обратным* к отношению R (R^{-1}), если $a_i R^{-1} a_j$ тогда и только тогда, когда $a_j R a_i$.

!$(R^{-1})^{-1}$=R.

Свойства бинарных отношений.

1.Рефлексивность

Опр. 52 Отношение R называется *рефлексивным*, если для любого a $\in$ M имеет место aRa. Главная диагональ его матрицы содержит только единицы.

Опр. 53 Отношение R называется *антирефлексивным*, если ни для какого a$\in$ M не выполняется aRa. Главная диагональ его матрицы содержит только нули. (Отношение <= и «иметь общий делитель рефлексивны», отношение < и «быть сыном» антирефлексивны)

2.Симметричность

Опр. 54 Отношение R называется *симметричным*, если для пары (a,b)$\in$ M^2 из aRb следует bRa (для любой пары R выполняется в обе стороны, либо не выполняется вообще). Его матрица симметрична относительно главной диагонали.

Опр. 55 Отношение R называется *антисимметричным*, если $a_i R a_j$ и $a_j R a_i$ следует, что $a_i = a_j$. (Антисимметричное отношение – это <=).

Также имеет место *асимметрическое отношение*, если $a_i R a_j$, но отношение отсутствует между элементами a_j и a_i; *несимметричное отношение*, если оно не является симметричным и не является асимметричным.

! ***Отношение R симметрично тогда и только тогда, когда R=R^{-1}.***

3.Транзитивность

Опр. 56 Отношение R называется *транзитивным*, если для любых a, b, c из aRb и bRc следует aRc. (Отношения =, <=, «жить в одном городе» транзитивны, отношение «быть сыном» не транзитивно).

Опр. 57 Для любого отношения R отношение R*, называемое *транзитивным замыканием* R , определяется как aR*b, если в M существует цепочка из n элементов a=a_1, a_2, …, a_{n-1}, a_n=b, в которой между соседними элементами выполнено R aRa, aRa, …, aRb.

! ***Если R транзитивно, то R*=R.***

ОТНОШЕНИЕ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ И ПОРЯДКА

Опр. 58 Отношение называется *отношением эквивалентности* (или просто эквивалентностью) если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Отношение E для формул – это совпадение формул по написанию называется *графическим равенством*.

Пример

Опр. 59 Отношение наз. *отношением нестрогого порядка*, если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно.

Пример

Опр. 60 Отношение наз. *отношением строгого порядка*, если оно антирефлексивно, антисимметрично и транзитивно. Пример

ЛЕКЦИЯ 7
ЭЛЕМЕНТЫ ОБЩЕЙ АЛГЕБРЫ

Алгебры.

Опр. 61 Множество M с заданной на нем совокупностью операций $\Omega=\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \ldots\}$ т.е. система $A=(M; \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \ldots)$ называется *алгеброй* $(A=(M; \Omega))$; M называется основным, или *несущим множеством алгебры* A (или носителем алгебры).

Функцию типа $\varphi: M^n \to M$ называют n-арной операцией на множестве M; n называется арностью операции φ.

Опр. 62 Вектор арностей операций алгебры называется ее *типом*, совокупность операций Ω - *сигнатурой*.

Опр. 63,64 Множество $M^* \subset M$ называется *замкнутым* относительно n-арной операции φ на M, если $\varphi(M^{*n}) \subseteq M^*$, т.е. если значения φ на аргументах из M* принадлежат M*. Если M* замкнуто относительно всех операций $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \ldots$ алгебры A, то система $A^*=(M^*, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \ldots)$ называется *подалгеброй* A.

Примеры.

1) A={R;+,*}- алгебра называется полем действительных чисел. Тип алгебры (2,2).

2)$N_p=\{0,1,2, \ldots,p-1\}$, $A=(N_p; \oplus, \otimes)$. Операции $\oplus$ “сложение по модулю p” и $\otimes$ “умножение по модулю p”.

3) Множество F одноместных функций на R, т.е. функций $f: R \to R$, вместе с операцией дифференцирования является алгеброй. Множество элементпрных функций замкнуто относительно дифференцирования, поскольку производные элементарных функций элементарны и, следовательно, образует подалгебру данной алгебры.

4) Пусть задано множество U. Множество всех его подмножеств

называется *булеаном* U (обозначение $\Im$ (U)). Алгебра B=($\Im$ (U);$\cup$,$\cap$, $\bar{\ }$) называется булевой алгеброй множества над U, ее тип (2,2,1).

Свойства бинарных алгебраических операций.

Для того чтобы последующие соотношения выглядели более привычно, условимся результат применения бинарной операции φ к элементам a, b записывать не в функциональном виде φ (a,b), а в виде aφ b, так, как это принято для арифметических операций.

Операции заданные на конечных множествах можно задавать таблицами Кели.

Опр. 65 Операция называется *ассоциативной*, если для любых элементов a, b, c (aφ b)φ c=aφ (bφ c).

Сложение и умножение чисел ассоциативны, что и позволяет не ставить скобки в выражениях abc и a+b+c. (Пример неассоциативной операции – возведение в степень). Правда запись a^{b^c} считается допустимой, но служит сокращением выражения $a^{(b^c)}$, а не $(a^b)^c$, которое равно более компактному выражению a^{bc}.

Важным примером ассоциативной операции является композиция отображений.

Опр. 66 Операция называется *коммутативной*, если для любых элементов a,b aφ b=bφ a.

Сложение коммутативно (от перемены мест слагаемых сумма не меняется), так же как и умножение; вычитание и деление некоммутативны. Некоммутативным является умножение матриц. (проверить?)

Опр. 67,68 Операция φ называется *дистрибутивной слева* относительно операции ψ , если для любых a, b, c aφ (bψ c)=(aφ b)ψ (aφ c),
и *дистрибутивной справа* относительно ψ , если (aψ b)φ c=(aφ c)ψ (bφ c).

Дистрибутивность разрешает раскрывать скобки. Например, умножение дистрибутивно относительно сложения слева и справа. Возведение в степень дистрибутивно относительно умножения справа: $(ab)^c=a^c b^c$, но не слева: a^{bc}<>$a^b a^c$. Сложение недистрибутивно относительно умножения:a+bc<>(a+b)(a+c). !Как будет показано позднее, операции пересечения и объединения множеств дистрибутивны относительно друг друга слева и справа.

ЛЕКЦИЯ 8
ГОМОМОРФИЗМ И ИЗОМОРФИЗМ АЛГЕБР

Алгебры с разными типами, очевидно, имеют существенно различное строение. Если же алгебры имеют одинаковый тип, то наличие у них сходств характеризуется с помощью вводимых ниже понятий гомоморфизма и изоморфизма.

Опр. 69 Пусть даны две алгебры A=(K;$\varphi_1,\ldots,\varphi_p$) и B=(M;$\psi_1,\ldots,\psi_p$) одинакового типа. *Гомоморфизмом* алгебры A в алгебру B называется отображение Г: K$\to$ M, удовлетворяющее условию

$$\Gamma(\varphi_i(k^{j1},\ldots,k^{jl(i)})) = \psi_i(\Gamma(k^{j1}),\ldots,\Gamma(k^{jl(i)})) \qquad (1)$$

для всех i=1,…, p [l(i) - арность операций φ_i, ψ_i, которая у них по условию одинакова] и всех $k^{jr} \in$ K.

Смысл условия (1) в том, что независимо от того, выполнена ли сначала операция φ_i в A и затем произведено отображение Г, либо сначала произведено отображение Г, а затем в B выполнена соответствующая операция ψ_i, результат будет одинаков.

Опр. 70 *Изоморфизмом* алгебры A на алгебру B называется взаимно однозначный гомоморфизм.

В этом случае существует обратное отображение Γ^{-1}:M$\to$ K, также взаимно однозначное. Пусть $\Gamma(k^j)=m^j$, $m^j \in$ M. Тогда $k^j = \Gamma^{-1}(m^j)$. заменим в условии (1) левые части этих равенств на правые и применим Γ^{-1} к обеим частям получившегося равенства. Так как $\Gamma^{-1}\Gamma$ является тождественным отображением $\Gamma^{-1}\Gamma(a)=a$, то получим:

$$\varphi_i(\Gamma^{-1}(m^{i1}),\ldots,\Gamma^{-1}(m^{il(i)})) = \Gamma^{-1}(\psi_i(m^{i1},\ldots,m^{il(i)})) \qquad (2)$$

Равенство (2) - это тоже равенство (1) с заменой Г на Γ^{-1}, элементов K на элементы M и переменной местами φ_i и ψ_i; иначе говоря, Γ^{-1}- это изоморфизм B на A.

Если существует изоморфизм A на B, то существует изоморфизм B на A; при этом алгебры A и B называются *изоморфными*.

!Мощности основных множеств изоморфных алгебр равны (при гомоморфизме это равенство может не выполняться). Если A=B, то изоморфизм называется изоморфизмом на себя, или *автоморфизмом*; если B$\subset$ A, то изоморфизм называется изоморфизмом в себя.

Примеры.

1)Q^N - множество всех целых чисел, Q^{2N} - множество всех четных чисел. Алгебры (Q^N;+) и (Q^{2N};+) изоморфны; изоморфизмом является отображение Γ^{2N}:n$\to$ 2n, причем условие (1) здесь имеет вид 2(a+b)=2a+2b. Поскольку $Q^{2N} \subset Q^N$, то Γ^{2N} - изоморфизм (Q^N;+) в себя. Отображение Γ^{-n}:n$\to$ (-n) является для алгебры (Q^N;+) автоморфизмом; условие (1) здесь имеет вид (-a)+(-b)== -(a+b). Для алгебры (Q^N;*) Γ^{-n} не является автоморфизмом, т.к. (-a)*(b)<>-(a*b).
2)
3)

Понятие изоморфизм является одним из важнейших понятий в математике. Его существо можно выразить так, если алгебры А и В изоморфны, то элементы и операции В можно переименовать так, что В совпадает с А. Из условия (1) изоморфизма следует, что любое эквивалентное соотношение в алгебре А сохраняется в любой изоморфной ей алгебре А*. Это позволяет, получив соотношения в алгебре А, автоматически распространить их на все алгебры, изоморфные А.

Распространенное в математике выражение «рассматривать объекты с точностью до изоморфизма» означает, что рассматриваются только те свойства объектов, которые сохраняются при изоморфизме (являются общими для всех изоморфных объектов). В частности изоморфизм сохраняет ассоциативность, коммутативность и дистрибутивность.

ЛЕКЦИЯ 9

ВВЕДЕНИЕ В АЛГЕБРУ ЛОГИКИ

Функции алгебры логики

Рассматриваться будет двухэлементное множество Буля В и двоичные переменные, принимающие значения из В. Элементы множества В часто обозначают 0 и 1, они не являются числами в обычном смысле. Наиболее распространенная интерпретация двоичных переменных – логическая: «истинно», «ложно».

Алгебра, образованная множеством В={0,1} со всеми возможными операциями на нем, называется *алгеброй логики*.

Опр. 71 Функцией алгебры логики (логической функцией) от n переменных называется n-арная операция на В. Итак, логическая функция f(x_1, …, x_n) – функция принимающая значения 0 и 1. Множество всех логических функций обозначается P_2, множество всех логических функций n переменных - P_2(n).

Всякая логическая функция n переменных может быть задана таблицей, в левой части которой перечислены все 2^n наборов значений переменных (двоичных векторов длины n), в правой части – значения функции на этих наборах.

Пример.

x1	*x2*	*x3*	*f*
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0

1 1 1 0

Наборы, на которых логическая функция f=1, называют единичными наборами функции f, наборы на которых f=0 называют нулевыми наборами f.

В таблице наборы расположены в лексико-графическом порядке, который совпадает с порядком возрастания наборов. При любом фиксированном упорядочении наборов логическая функция n переменных полностью определяется вектор-столбцом значений функции.

!Число | P_2 (n)| различных функций n переменных равно числу различных двоичных векторов длины 2^n, т.е. 2^{2^n}.

Опр. 72 Переменная x_i в функции f(x_1, … x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, …, x_n) называется *несущественной или фиктивной* если f(x_1, … x_{i-1}, *0*, x_{i+1}, …, x_n)) = f(x_1, … x_{i-1}, *1*, x_{i+1}, …, x_n) при любых значениях остальных переменных, то есть если изменение значение x_i в любом наборе значений x_1, …, x_n не меняет значения функций. В этом случае функция f(x_1, …, x_n) по существу зависит от n-1 переменной, т. е. представляет собой функцию g(x_1, … x_{i-1}, x_{i+1}, …, x_n) от n-1 переменной.

Говорят, что функция g получена из функции f удалением фиктивной переменной, а функция f полученной из g введением фиктивной переменной, причем эти функции по определению считаются равными.

Например, f(x_1, x_2, x_3) =g(x_1, x_2, x_3) означает, что при любых значениях x_1, x_2, x_3 f=g независимо от значений x_3.

Примеры логических функций.

Логических функций одной переменной – четыре.

Табл.1

x	φ_0	φ_1	φ_2	φ_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Функции φ_0 и φ_3 - константы 0 и 1 соответственно (значения функций не зависят от значения переменной, и, переменная x для них несущественна).

Функция φ_1 “повторяет” x: φ_1(x)=x.

Функция φ_2 называется отрицанием x (функция НЕ) и обозначается $\bar{x}$, $\neg x$. Ее значение противоположно значению x.

Логических функций двух переменных – 16.

Табл.2

x_1	x_2	ψ_0	ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_4	ψ_5	ψ_6	ψ_7	ψ_8	ψ_9	ψ_{10}	ψ_{11}	ψ_{12}	ψ_{13}	ψ_{14}	ψ_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
		0	& $\wedge$ $\bullet$					$\oplus$	+ $\vee$	$\downarrow$	$\equiv$	$\neg x_2$			$\rightarrow$ $\supset$	|	**1**

Функции константы 0 и 1 - ψ_0 и ψ_{15} (функции с двумя несущественными переменными). Формально эти функции отличаются от φ_0 и φ_3. Все функции в табл.1 – унарные операции на B, а все функции в табл.2 – бинарные операции на B.

Функция $\psi_1(x_1, x_2)$ называется *конъюнкцией* x_1 и x_2. Значение функции равно 1, только если x_1 и x_2 равны 1, поэтому ее называют часто функцией И. Еще одно название функции – логическое умножение, поскольку ее таблица совпадает с таблицей обычного умножения для чисел 0 и 1.

Функция $\psi_7(x_1, x_2)$ называется *дизъюнкцией* x_1 и x_2. Она равна 1, если x_1 или x_2 равен 1. Поэтому ее называют функцией ИЛИ.

Функция $\psi_6(x_1, x_2)$ называется *сложение по модулю 2*. Она равна 1, когда значения аргументов различны, и равна 0, когда они равны. Поэтому функцию иногда называют неравнозначностью.

Функция $\psi_9(x_1, x_2)$ называется *эквивалентностью* или *равнозначностью*. Она равна 1, когда значения аргументов равны, и равны 0, когда они различны.

Функция $\psi_{13}(x_1, x_2)$ – *импликация*, читается «если x_1, то x_2)».

Функция $\psi_8(x_1, x_2)$ – *стрелка Пирса*.

Функция $\psi_{14}(x_1, x_2)$ – *штрих Шифера*.

Остальные функции специальных названий не имеют и легко выражаются через перечисленные.

В функциях ψ_3 и ψ_{12} переменная x_2 фиктивна ($\psi_3(x_1, x_2)=x_1$, $\psi_{12}(x_1, x_2)=\neg x_1$). В функциях ψ_5 и ψ_{10} фиктивна переменная x_1 ($\psi_5(x_1, x_2)= x_2$, $\psi_{10}(x_1, x_2)=\neg x_2$). Таким образом, из 16 функций двух переменных шесть функций имеют фиктивные переменные. С ростом n доля функций, имеющих фиктивные переменные, убывает и стремится к нулю.

Суперпозиции и формулы.

Понятие формулы.

Пусть дано множество (конечное или бесконечное) $\Sigma=\{f_1, \ldots, f_m, \ldots\}$. Символы переменных $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ будем считать формулами глубины 0.

Опр. 73 Формула F имеет *глубину* k+1, если F имеет вид $f_i(F_1, \ldots, F_{ni})$, где $f_i \in \Sigma$, n_i - число аргументов f_i, $F_1, \ldots, F_{ni}$ - формулы, максимальная из глубин которых равна k. $F_1, \ldots, F_{ni}$ - называются *подформулами* F; f_i называется *внешней или главной* операцией формулы F. Все подформулы формул $F_1, \ldots, F_{ni}$ также называют подформулами F.

Например, $f_2(x_1, x_2, x_3)$ – это формула глубины 1, а $f_3(f_1(x_3, x_1), f_2(x_1, f_3(x_1, x_2)))$ – формула глубины 3, содержащая одну подформулу глубины 2 и две подформулы глубины 1.

В дальнейшем конкретные формулы будут иметь привычный вид, при котором знаки функций стоят между аргументами (такую запись называют *инфиксной*).

Например, если f_1 обозначает дизъюнкцию, f_2 - конъюнкцию, а f_3 - сложение по mod 2, то приведенная выше формула примет вид:

$$(x_3 \vee x_1) \oplus (x_1 \&(x_1 \oplus x_2)).$$

Опр. 74 Все формулы, содержащие только символы переменных, скобки и знаки функций из множества Σ, называются *формулами над* Σ.

Примеры.

СПОСОБЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

1. аналитический (запись функции в виде формулы)
2. табличный (таблица истинности функции)
3. матричный (карты Вейтча, ее модификация – диаграмма Карно)
4. в виде набора номеров минтермов
5. графический (построение граф-схем)
6. числовое представление

ЛЕКЦИЯ 10

БУЛЕВА АЛГЕБРА ЛОГИКИ

Булева алгебра функций и эквивалентные преобразования в ней.

Опр. 75 Всякая алгебра типа (2,2,1) наз. булевой алгеброй, если ее операции удовлетворяют соотношениям 1-12.

Теорема о булевой алгебре логики

Алгебра (P_2, &, $\vee$, $\neg$), основным множеством которой является множество логических функций, а операциями дизъюнкция, конъюнкция и отрицание (причем операции удовлетворяют следующим тождествам 1-12), называется *булевой алгеброй логических функций*.

Свойства булевых операций

1. ассоциативность $\vee$ и &
2. коммутативность $\vee$ и &
3. дистрибутивность $\vee$ относительно &
4. дистрибутивность & относительно $\vee$
5. идемпотентность $\vee$ и &
6. закон двойного отрицания
7. свойства констант
8. правила де Моргана
9. закон противоречия: $x \& \neg x = 0$
10. закон «исключенного третьего»: $x \vee \neg x = 1$
11. поглощение $x \vee xy = x$; $x(x \vee y) = x$
12. склеивание $xy \vee x \neg y = x$
13. обобщенное склеивание $xz \vee y \neg z \vee xy = xz \vee y \neg z$.

Эквивалентные преобразования являются мощным средством доказательства эквивалентности формул в алгебре логики.

АЛГЕБРЫ ЖЕГАЛКИНА, ПИРСА, ШЕФФЕРА

ЛЕКЦИЯ 11

Разложение функций по переменным. Совершенная дизъюнктивная нормальная форма СДНФ.

Введем обозначение $x^0 = \neg x$, $x^1 = x$. Пусть α - параметр, равный 0 или 1. Тогда $x^\alpha = 1$, если $x = \alpha$, и $x^\alpha = 0$, если $x \neq \alpha$.

Лемма1.(о разложении по переменной) Всякая логическая функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ может быт представлена в следующем виде:

$$f(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n) = \bigvee_{\alpha_1 \ldots \alpha_m} x_1^{\alpha_1} \ldots x_m^{\alpha_m} f(\alpha_1, \ldots, \alpha_m, x_{m+1}, \ldots, x_n), \qquad (1)$$

где m<=n, дизъюнкция берется по всем 2^m наборам значений переменных $x_1, \dots, x_m$.

Опр. 76 Равенство (1) называется разложением по переменным $x_1, \dots, x_m$.

Например, при n=4, m=2 разложение (1) имеет вид:

f(x_1, x_2, x_3, x_4)= $\neg x_1 \neg x_2$ f(0, 0, x_3, x_4) $\vee$ $\neg x_1 x_2$ f(0, 1, x_3, x_4) $\vee$ $x_1 \neg x_2$ f(1, 0, x_3, x_4) $\vee$ $x_1 x_2$ f(1, 1, x_3, x_4).

При m=1 получаем разложение функции по одной переменной f($x_1, x_2, \dots, x_n$) = $\neg x_1$f(0, $x_2, \dots, x_n$) $\vee$ x_1f(1, $x_2, \dots, x_n$). Аналогичное разложение справедливо для любой из n переменных.

Опр. 77 Другой случай – разложение по всем n переменным (m=n). При этом все переменные в правой части (1) получают фиксированные значения и функции в конъюнкциях правой части становятся равными 0 или 1, что дает:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigvee_{f(\sigma_1,\dots,\sigma_n)=1} x_1^{\sigma_1} \dots x_n^{\sigma_n}, \qquad (2)$$

где дизъюнкция берется по всем наборам ($\sigma_1, \dots, \sigma_n$), на которых f =1.

Такое разложение называется *совершенной дизъюнктивной нормальной формой* (СДНФ) функции f.

СДНФ функции f содержит ровно столько конъюнкций, сколько единиц в таблице f; каждому единичному набору ($\sigma_1, \dots, \sigma_n$) соответствует конъюнкция всех переменных, в которой x_i взято с отрицанием, если σ_i=0, и без отрицания, если σ_i =1. Т. о., существует взаимно однозначное соответствие между таблицей функции f и ее СДНФ, и, следовательно, СДНФ для всякой логической функции единственна (с точностью до порядка букв и конъюнкций).

Теорема 1. Для любой формулы алгебры высказываний, отличной от тождественно ложной, существует ее представление в виде (2), которое называется СДНФ.

Теорема 2. Для любой отличной от тождественно ложной формулы алгебры высказываний существует и единственное ее представление в виде СДНФ – дизъюнкции полных совершенных элементарных конъюнкций (слагаемых вида $x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots x_n^{\sigma_n}$).

Теорема 3. Для любой отличной от тождественно истинной формулы алгебры высказываний существует и единственное ее представление в виде совершенной конъюнктивной нормальной формы (СКНФ) – конъюнкции полных совершенных элементарных дизъюнкций (т.е. сомножителей вида $x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2} \vee \dots \vee x_n^{\sigma_n}$).

Опр. 78 Пусть $V^n = \{x^1, \neg x^1, x^2, \neg x^2, \ldots, x^n, \neg x^n\}$ и пусть $v(\neq \emptyset) \subset V^n$. *Элементарной конъюнкцией*, порожденной подмножеством v, называется конъюнкция всех элементов v.

Опр. 79 Элементарная конъюнкция называется *совершенной*, если в нее не входит никакая из переменных одновременно с отрицанием этой переменной.

Опр. 80 Элементарная конъюнкция называется полной, если в ней представлены все переменные.

Опр. 81 Дизъюнктивной нормальной формой называется (ДНФ) называется дизъюнкция элементарных конъюнкций.

Опр. 82 Конъюнктивной нормальной формой (КНФ) называется конъюнкция элементарных дизъюнкций.

Теорема 4. Для любой формулы алгебры высказываний существуют равносильные ей ДНФ и КНФ.

Принцип построения СДНФ/СКНФ по таблице истинности функции

n	$x1$ $x2$ $x3$	$f(x1,x2,x3)$
0	0 0 0	f1
1	0 0 1	f2
2	0 1 0	f3
3	0 1 1	f4
4	1 0 0	f5
5	1 0 1	f6
6	1 1 0	f7
7	1 1 1	f8

1. Рассматриваем наборы на которых значения функции f_i равны 1.

2. Выписываем полные элементарные конъюнкции по наборам (x1,x2,x3) на которых значения функции $f_i = 1$ по правилу: переменные, которые в наборе имеют значение 0 в полную элементарную конъюнкцию входят с отрицанием, переменные, которые в наборе имеют значение 0 в полную элементарную конъюнкцию входят без отрицания.

3. Полные элементарные конъюнкции соединяем знаками дизъюнкций. (Для функции тождественно-ложной СДНФ построить нельзя, т.к. нет значений функции равных 1).

Аналогично строится СКНФ, только с точностью наоборот.

Метод Блейка-Порецкого приведения СДНФ к ДНФ.

ЛЕКЦИЯ 12

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКУЮ ЛОГИКУ

ЛОГИКА ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Понятие формулы логики высказываний

Истинность и ложность формул логики высказываний

Тождественно истинные (логически правильные) схемы рассуждений

Правило заключения m.p. (Modus Ponens) $\dfrac{A \to B, A}{B}$

Правило отрицания m.t. (Modus Tollens) $\dfrac{A \to B, \neg B}{\neg A}$

Правила утверждения – отрицания (Modus Ponendo-Tollens)

a) $\dfrac{A \oplus B, A}{\neg B}$, b) $\dfrac{A \oplus B, B}{\neg A}$

Правила отрицания – утверждения (Modus Tollen-Ponens)

a) $\dfrac{A \oplus B, \neg A}{B}$, b) $\dfrac{A \oplus B, \neg B}{A}$

c) $\dfrac{A \vee B, \neg A}{B}$, d) $\dfrac{A \vee B, \neg B}{A}$

Правило транзитивности (упрощенное правило силлогизма)

$$\frac{A \to B, B \to C}{A \to C}$$

Закон противоречия

$$\frac{A \to B, A \to \neg B}{\neg A}$$

Закон непротиворечия выражается формулой $\neg$ (p&$\neg$p) (неверно, что p и не p)

Правила дилемм

а) Простая конструктивная дилемма $\dfrac{A \to C, B \to C, A \vee B}{C}$

b) Сложная конструктивная дилемма $\frac{A \to B, C \to D, A \vee C}{B \vee D}$

c) Простая деструктивная дилемма $\frac{A \to B, A \to C, \neg B \vee \neg C}{\neg A}$

d) Сложная деструктивная дилемма $\frac{A \to B, C \to D, \neg B \vee \neg D}{\neg A \vee \neg C}$

ЛЕКЦИЯ 13

ЯЗЫК ЛОГИКИ ПРЕДИКАТОВ

Предикаты.

Опр.83 *Предикатом* $P(x_1, \ldots, x_n)$ называется функция $P:M^n \to B$, где M — произвольное множество, а $B=\{0,1\}$ — двоичное множество. Иначе говоря, n-местный предикат, определенный на M, — это *двузначная функция от n аргументов*, принимающих значения в произвольном множестве M. M называется *предметной областью* предиката, а $x_1, \ldots, x_n$ — *предметными переменными.* В принципе ничто не мешает определить предикат в более общем виде как функцию $P:M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n \to B$, т.е. разрешить разным аргументам принимать значения из разных множеств. Иногда это оказывается удобным; однако, как правило, в логике предикатов исходят из первого определения.

Для любых M и n существует взаимно однозначное соответствие между n-местными отношениями и n-местными предикатами на M: а) каждому n-местному отношению R соответствует предикат P, такой, что $P(a_1, \ldots, a_n) =1$, если и только если $(a_1, \ldots, a_n, n) \in R$; б) всякий предикат $P(x_1, \ldots, x_n)$ определяет отношение R, такое, что $(a_1, \ldots, a_n) \in R$, если и только если $P(a_1, \ldots, a_n) = 1$. При этом R задает *область истинности* предиката P.

Всякой функции $f:M^n \to M$ можно поставить в соответствие (n+1) -местный предикат P, такой, что $P(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}) = 1$, если и только если $f(a_1, \ldots, a_n)=a_{n+1}$. Поскольку функция должна быть однозначной, то это соответствие требует, чтобы для любого $a_{n+1}^* \neq a_{n+1}$ $P(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}^*) =0$. Поэтому обратное соответствие [от (n+1) -местного предиката к n-местной функции] возможно не всегда, а только при выполнении указанного условия.

Отступление.

С логической точки зрения двоичные объекты, которые рассматривались в предыдущих параграфах, — это высказывания, которые могут быть истинными или ложными. Формулы — это составные высказывания, истинность которых определяется истинностью входящих в них элементарных высказываний (обозначаемых буквами) и логическими операциями над элементарными высказываниями, причем сами операции (такие, как отрицание, конъюнкция, импликация и т. д.) имеют довольно прозрачный логический смысл. Однако, работая с этими объектами, мы практически не обращались к их логическому содержанию и обходились теоретико-множественной или алгебраической интерпретацией, рассматривая их как функции на двоичных векторах или как элементы алгебр. Этот подход оказался эффективным во многом благодаря тому, что области определения функций алгебры логики конечны и имеют довольно простую структуру. Кроме того, опыт приложений алгебры логики показал, что функционально-алгебраическая интерпретация операций над двоичными объектами оказывается не менее содержательной и плодотворной, чем логическая интерпретация.

С предикатами дело обстоит иначе. Значение логики предикатов, которая как частный случай включает и логику высказываний, заключается не столько в ее собственных конкретных приложениях (хотя таковые имеются), сколько в том, что она образует основу логического языка математики. С ее помощью удается формализовать и точно исследовать основные методы построения математических теорий. Логика предикатов является важным средством построения развитых логических языков и формальных систем. Поэтому логическая интерпретация предикатов является основной, и мы ее будем в дальнейшем придерживаться.

Выражение $P(a_1, \ldots, a_n)$ (и другие, более сложные выражения логики предикатов), где $a_1, \ldots, a_n \in M$, будем понимать как высказывание «$P(a_1, \ldots, a_n) = 1$» или в соответствии с логической интерпретацией как «$P(a_1, \ldots, a_n)$ истинно», а выражение $P(x_1, \ldots, x_n)$, где $x_1, \ldots, x_n$ — переменные, как переменное высказывание, истинность которого определяется подстановкой элементов M вместо $x_1, \ldots, x_n$. При этом $P(x_1, \ldots, x_n)$ — это логическая (двоичная) переменная, а $x_1, \ldots, x_n$ — нелогические переменные. Поскольку предикаты принимают два значения и интерпретируются как высказывания, из них можно образовывать выражения логики высказываний, т.е. формулы вида $P_1(x_1,x_2) \vee \neg(P_2(x_3,x_4) \,\&\, P_1(x_2,x_4))$. Эта формула может рассматриваться и как составная булева формула, описывающая функцию алгебры логики от трех логических переменных $P_1(x_1,x_2)$ $P_1(x_2,x_4)$ $P_2(x_3,x_4)$ [$P_1(x_1,x_2)$ и $P_1(x_2,x_4)$ — разные логические переменные, так как предикат P_1 в этих выражениях зависит от разных переменных], и как составной четырехместный предикат, значение которого определяется четырьмя предметными переменными x_1, x_2, x_3, x_4.

В дальнейшем, если это не вызовет разночтений, будем употреблять одинаковые обозначения для отношений и соответствующих им предикатов; при этом, помимо функциональных обозначений вида $P(x)$, $P(x_1,x_2)$, для двухместных предикатов будем пользоваться обозначениями вида x_1Px_2, которые уже употреблялись для бинарных отношений.

Пример 1.

а. Предикат $x_1>x_2$ — это двухместный предикат, предметной областью которого могут служить любые множества действительных чисел. Высказывание $6>5$ истинно, а высказывания $7>7$ и $3>10$ ложны.

Различные подстановки чисел вместо одной предметной переменной дают различные одноместные предикаты: $x_1>5$, $x_1>0$, $7>x_1$ и т. д.

б. Великая теорема Ферма, не доказанная до сих пор. утверждает, что для любого целого n>2 не существует натуральных чисел *x, y, z,* удовлетворяющих равенству $x^n + y^n = z^n$. Если этому равенству поставить в соответствие предикат $P_F(x, y, z, n)$, истинный тогда и только тогда, когда оно выполняется, а через $N(x)$ обозначить предикат «*x* — натуральное число», то теорема Ферма равносильна утверждению «выражение $N(x) \& N(y) \& N(z) \& N(n) \& (n>2) \rightarrow P_F(x, y, z, n)$ верно для любых чисел *x, y, z, n*».

в. В описаниях вычислительных процедур и, в частности, в языках программирования часто встречаются указания типа «повторять цикл до тех пор, пока переменные *x* и *y* не станут равными, либо прекратить вычисление цикла после 100 повторений». Если обозначить через *i* счетчик повторений, то описанное здесь условие описывается выражением $(x=y)\vee(i>100)$, а указание в целом принимает вид: «повторять, если $\neg((x=y)\vee(i>100))$».

Кванторы.

Пусть *P(x)* —предикат, определенный на *M*. Высказывание «для всех *x* из *M, P(x)* истинно» обозначается $\forall x P(x)$ (множество *M* не входит в обозначение и должно быть ясно из контекста).

Опр. 84,85 Знак $\forall x$ называется *квантором общности;* другое его обозначение (*x*). Высказывание «существует такой *x* из *M,* что *P*(*x*) истинно» обозначается $\exists x P(x)$. Знак $\exists$ называется *квантором существования;* другое его обозначение (*Ex*).

Опр. 86 Переход от *P*(*x*) к $\forall x P(x)$ или к $\exists x P(x)$ называется связыванием переменной *x,* а также навешиванием квантора на переменную *x* (или на предикат *P*), иногда—квантификацией переменной *x*.

Опр. 87, 88 Переменная, на которую навешен квантор, называется *связанной;* несвязанная переменная называется *свободной.*

Смысл связанных и свободных переменных в предикатных выражениях различен. Свободная переменная — это обычная переменная, которая может принимать различные значения из *M;* выражение *P*(*x*) —переменное высказывание, зависящее от значения *x*. Выражение $\forall x P(x)$ не зависит от переменной *x* и при фиксированных *P* и *M* имеет вполне определенное значение. Это, в частности, означает, что переименование связанной переменной, т. е. переход от $\forall x P(x)$ к $\forall y P(y)$, не меняет истинности выражения. Переменные, являющиеся по существу связанными, встречаются не только в логике. Например, в выражениях $\sum_{x=1}^{100} f(x)$ или $\int_a^b f(x)dx$ переменная *x* связана; при фиксированной *f* первое выражение равно определенному числу, а второе становится функцией от a и b.

Навешивать кванторы можно и на многоместные предикаты, и вообще на любые логические выражения, которые при этом заключаются в скобки. Выражение, на которое навешивается квантор $\forall x$ или $\exists x$, называется *областью действия квантора;* все вхождения переменной x в это выражение являются связанными. Навешивание квантора на многоместный предикат уменьшает в нем число свободных переменных и превращает его в предикат от меньшего числа переменных.

Пример 2.

а. Пусть $P(x)$ — предикат «x—четное число». Тогда высказывание $\forall xP(x)$ истинно на любом множестве четных чисел и ложно, если M содержит хотя бы одно нечетное число; высказывание $\exists xP(x)$ истинно на любом множестве, содержащем хотя бы одно четное число, и ложно на любом множестве нечетных чисел.

б. Теорема Ферма (см. пример 1) формулируется следующим образом: $\forall x\forall y\forall z\forall n\ (N(x)\ \&\ N(y)\ \&\ N(z)\ \&\ N(n)\ \&\ (n>2) \to \neg P_F(x, y, z, n)\ )$.

в. Рассмотрим двухместный предикат $x \geq y$ на множествах M с отношением нестрогого порядка и различные квантификации его переменных. $\forall x(x\geq y)$ —одноместный предикат от y; если M — множество неотрицательных чисел, то этот предикат истинен в единственной точке: y=0. $\forall x\forall y(x\geq y)$—высказывание, истинное на множестве, состоящем из одного элемента, и ложное на любом другом множестве. $\exists x\exists y(x\geq y)$ истинно на любом непустом множестве. Высказывание $\exists x\forall y(x\geq y)$ («существует x, такой, что для любого y $x\geq y$») утверждает, что в M имеется единственный максимальный элемент. Оно истинно на любом конечном множестве целых чисел, но ложно на множестве {1/2, 2/3, 3/4, ..., n/(n+l)…} или на множестве двоичных векторов, из которого удален вектор, состоящий из одних единиц. Высказывание $\forall y\exists x(x\geq y)$ утверждает, что для любого элемента y существует элемент x не меньший, чем y; оно истинно на любом непустом множестве ввиду рефлексивности отношения $\geq$.

Последние два высказывания говорят о том, что ***перестановка кванторов существования и общности меняет смысл высказывания и условия его истинности.***

ЛЕКЦИЯ 14

Истинные формулы и эквивалентные соотношения логики предикатов.

При логической (истинностной) интерпретации формул логики предикатов возможны три основные ситуации.

Опр. 89 Если в области *M* для формулы *F* существует такая подстановка констант вместо всех переменных, что *F* становится истинным высказыванием, то формула *F* называется *выполнимой* в области *M*. Если существует область *M*, где *F* выполнима, то *F* называется просто *выполнимой.*

Пример выполнимой формулы: $\exists xP(x,y) \to \forall xP(x,y)$.

Опр. 90 Если формула *F* выполнима в *M* при любых подстановках констант, то она называется *тождественно истинной* в *M*.

Формула, тождественно истинная в любых М, называется *тождественно истинной или общезначимой.*

Например, формула $\exists xP(x,y) \to\forall xP(x,y)$ тождественно истинна для всех *M*, состоящих из одного элемента, а формула $\forall x(P(x)\vee\neg P(x))$ тождественно истинна.

Опр. 91 Если формула *F* невыполнима в *M*, она называется *тождественно ложной* в *M*.

Если *F* невыполнима ни в каких *M*, она называется *тождественно ложной,* или *противоречивой.*

Например, формула $P_1(x,y)\&\neg P_1(x,z)\&P_2(x)\&\neg P_2(\text{y})\&\neg P_2(z)$ тождественно ложна на любой области *M*, если $|\text{M}|\leq 2$ (предлагаем это проверить). Формула $\exists x\ (P(x)\&\neg P(x))$ тождественно ложна.

Опр. 92 Формулы называются *эквивалентными,* если при любых подстановках констант они принимают одинаковые значения.

В частности, ***все тождественно истинные формулы (и все ложные формулы) эквивалентны.***

Отметим, что если F_1 и F_2 эквивалентны в соответствии с этим определением, то формула $F_1 \sim F_2$ тождественно истинна.

Множество истинных формул логики предикатов входит в любую теорию, и, следовательно, его исследование является важнейшей целью логики предикатов. В частности, как следует из сделанного ранее замечания, в нем содержатся все эквивалентные соотношения логики предикатов. В этом исследовании прежде всего возникают две проблемы: получение истинных формул и проверка формулы на истинность. Если вспомнить классификацию способов задания множеств, то первая проблема — это проблема построения порождающей процедуры, а вторая — проблема разрешающей процедуры для множества истинных формул. Те же проблемы встают и в логике высказываний. Однако там есть стандартная разрешающая процедура: вычисление формул на наборах значений переменных. С ее помощью порождающую процедуру для множества M_m тождественно истинных высказываний можно организовать следующим образом: строим последовательно все формулы, вычисляем каждую из них на всех наборах и включаем в M_m только те, которые истинны на всех наборах. Аналогичная процедура в логике предикатов сталкивается с большими трудностями, связанными с тем, что предметные и предикатные переменные имеют в общем случае бесконечные области определения. Поэтому прямой перебор всех значений невозможен, и приходится использовать различные косвенные приемы.

Покажем их на примере некоторых эквивалентных соотношений

$$\neg(\exists x P(x)) \sim \forall x \neg P(x). \qquad (1)$$

Пусть для некоторого предиката P и области M левая часть истинна. Тогда не существует $a \in M$, для которого $P(a)$ истинно; следовательно, для всех a $P(a)$ ложно, т.е. $\neg P(a)$ истинно, и правая часть истинна. Если же левая часть ложна, то существует $a \in M$, для которого $P(a)$ истинно, и, следовательно, правая часть ложна. Аналогично доказывается

$$\neg(\forall x P(x)) \sim \exists x \neg \mathrm{P}(x). \qquad (2)$$

Докажем теперь дистрибутивность $\forall x$ относительно конъюнкции и $\exists x$ относительно дизъюнкции

$$\forall x(P_1(x) \;\&\; P_2(x)) \sim \forall x P_1(x) \;\&\; \forall x P_2(x). \qquad (3)$$

Пусть левая часть соотношения истинна для некоторых P_1 и P_2. Тогда для любого $a \in M$ истинно $P_1(a) \& P_2(a)$, поэтому $P_1(a)$ и $P_2(a)$ одновременно истинны для любых a, и, следовательно, $\forall x\ P_1(x) \& \forall x\ P_2(x)$ истинно. Если же левая часть ложна, то для некоторого $a \in M$ ложно либо $P_1(a)$, либо $P_2(a)$, а следовательно, ложно либо $\forall x P_1(a)$, либо $\forall x P_2(a)$, и правая часть ложна. Аналогично доказывается

$$\exists x(P_1(x) \vee P_2(x)) \sim \exists x P_1(x) \vee \exists x P_2(x). \qquad (4)$$

Если же $\forall x$ и $\exists x$ в этих соотношениях поменять местами, то получатся соотношения, верные лишь в одну сторону:

$$\exists x(P_1(x) \;\&\; P_2(x)) \to \exists x P_1(x) \;\&\; \exists x P_2(x); \qquad (5)$$

$$(\forall x P_1(x) \vee \forall x P_2(x)) \to \forall x\ (P_1(x) \vee P_2(x)). \qquad (6)$$

В таких случаях говорят, что левая часть — более сильное утверждение, чем правая, поскольку она требует для своей истинности выполнения более жестких условий, чем правая. Так, в (5) в левой части требуется, чтобы $P_1(a)$ и $P_2(a)$ были истинны для одного и того же a, тогда как в правой части P_1 и P_2 могут быть истинны при различных a_1 и a_2. В (6) левая часть требует, чтобы хотя бы один предикат выполнялся для всех $a \in M$; в правой части достаточно, чтобы один предикат был истинен там, где ложен другой. В этих рассуждениях по существу уже содержатся доказательства; окончательное их уточнение предоставляем читателю. Пример, когда (5) и (6) в обратную сторону неверны: $P_1(x)$: «x—четное число», $P_2(x)$: «x—нечетное число».

Приведем без доказательства еще несколько соотношений:

$$\forall x \forall y\ P(x,y) \sim \forall y \forall x P(x,y)$$

(7)

$$\exists x \exists y\, P(x,y) \sim \exists y \exists x P(x,y)$$

(8)

Пример 2, в показывает, что перестановка различных кванторов не является эквивалентностью.

Пусть Y — переменное высказывание или формула, не содержащая *x*. Тогда

$$\forall x(P(x) \,\&\, \mathrm{Y}) \sim \forall x P(x) \,\&\, \mathrm{Y};$$

(9)

$$\forall x(P(x) \vee \mathrm{Y}) \sim \forall x P(x) \vee \mathrm{Y};$$

(10)

$$\exists x(P(x) \,\&\, \mathrm{Y}) \sim \exists x P(x) \,\&\, \mathrm{Y};$$

(11)

$$\exists x(P(x) \vee \mathrm{Y}) \sim \exists x P(x) \vee \mathrm{Y};$$

(12)

Эти соотношения означают, что формулу, не содержащую *x,* можно выносить за область действия квантора, связывающего *x*.

О методах доказательства в логике предикатов.

Метод доказательства формул, содержащих переменные, путем непосредственной подстановки в них констант называется *методом интерпретаций или методом моделей*. Подстановка констант позволяет интерпретировать формулу как осмысленное утверждение об элементах конкретного множества *M*. Поэтому такой метод, выясняющий истинность формул путем обращения к ее возможному смыслу, называется также семантическим (т. е. смысловым). Метод интерпретаций удобен для доказательства выполнимости формул или их неэквивалентности, поскольку и в том, и в другом случае достаточно найти одну подходящую подстановку. Он удобен также для исследования истинности формул на конечных областях. Дело в том, что если область *M* конечна, $M=\{a_1,..., a_n\}$, то кванторы переходят в конечные формулы логики высказываний:

$$\forall x P(x) \sim P(a_1) \,\&\, P(a_2) \,\&\ldots\&\, P(a_n); \qquad (13)$$

$$\exists x P(x) \sim P(a_1) \vee P(a_2) \vee\ldots\vee P(a_n) \qquad (14)$$

Заменив все кванторы в формуле по этим соотношениям, любую формулу логики предикатов можно перевести в формулу, состоящую из предикатов, соединенных знаками логических операций. Истинность такой формулы на конечной области проверяется конечным числом подстановок и вычислений.

Для бесконечных же областей в общем случае, и прежде всего при доказательстве тождественной истинности формул метод интерпретаций, как уже отмечалось, связан с большими трудностями. Поэтому для построения множества истинных формул в логике предикатов выбирается другой путь. Это множество порождается из исходных формул (аксиом) с помощью формальных процедур — правил вывода. Слово «формальный» (которое часто противопоставляется слову «содержательный») подчеркивает здесь то обстоятельство, что при переходе от одних выводимых формул к другим не происходит какого-либо обращения к содержанию, смыслу формул. Используются лишь формальные, внешние свойства последовательностей символов, образующих формулы, причем эти свойства полностью описываются правилами вывода.

ЛЕКЦИЯ 15

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕОРИИ ГРАФОВ

Ориентированный граф

Опр1.*Ориентированным графом (орграфом)* G=(X,Г) называется упорядоченная пара (X,Г), где X есть непустое множество объектов некоторой природы – *вершин* графа, а Г – многозначное отображение множества X на себя.

Поскольку многозначное отображение Г:X→X полностью определяется перечислением пар вида (x,y), $y \in$ Гx.

Опр2. *Ориентированным графом* G=(X,Г) называется упорядоченная пара (X,U), где X есть непустое множество *вершин* орграфа, а U есть множество упорядоченных пар элементов из X,U=$\{(x,y)\} \subseteq$X*X, называемых *дугами* орграфа.

Рис.

Пусть u=(x,y) – дуга орграфа, вершина x называется началом, а вершина y – концом дуги u. Дуга u исходит из вершины x и заходит в вершину y. И в том, и в другом случае говорят, что дуга *инцидентна* соответствующей вершине.

Опр3. Дуга вида (x,x) называется *петлей.*

Опр4. Вершины соединенные дугой называются *смежными*.

Когда пара вершин x,y может быть соединена несколькими параллельными дугами вида (x,y), полученная конструкция называется *ориентированным мультиграфом*.

Опр5. Граф, у которого существование любой дуги вида (x,y) влечет существование дуги вида (y,x) называется *симметричным*.

Опр6. Ориентированный граф называется полным, если каждая пара вершин в нем соединена дугой.

!Полный граф симметричен.

Неориентированный граф

Опр7. *Неориентированным графом* или просто *графом* G=(X,U) называется упорядоченная пара (X,U), где X есть множество *вершин* графа, а U есть множество неупорядоченных пар элементов из X, называемых *ребрами* графа.

В общем случае у ребер не различают начало и конец, и запись (*x,y*) обозначает то же ребро, что и (*y,x*). Иногда при обходах графа или при движении по ребрам из одной вершины в другую мы будем говорить о начале ребра и его конце, подразумевая при этом, что направление движения создает ориентацию ребра. В графе каждая пара вершин соединена не более чем одним ребром; допущение параллельных ребер приводит к конструкции, именуемой *мультиграфом*.

Локальные характеристики графа

Опр. 8-10. Пусть $x \in X$ – вершина графа G=(X,Г), поставим ей в соответствие три числа $\deg^+(x)$, $\deg^-(x)$ и $\deg x$:

Число дуг, заходящих в вершину x, называется *полустепенью захода* вершины x и обозначается $\deg^+(x)$.

Число дуг, исходящих из вершины x, называется *полустепенью исхода* вершины x и обозначается $\deg^-(x)$.

Общее число дуг, инцидентных вершине x, называется *степенью* вершины и обозначается $\deg x$.

$\deg x = \deg^+(x) + \deg^-(x)$.

Опр.11 Граф $G=(X,U)$ называется *регулярным степени r*, если степени всех вершин одинаковы и равны r ($\deg x=r$, $\forall x\in X$).

Теорема 1. Для любого конечного графа $G=(X,Г)$ ($|Г|<\infty$) имеют место соотношения (1) и (2):

$$\sum_{x\in X} \deg^+(x)= \sum_{x\in X} \deg^-(x)= |Г|, \qquad (1)$$

$$\sum_{x\in X} \deg x=2|Г|. \qquad (2)$$

Без доказательства.

Теорема 2. (**теорема Эйлера о рукопожатиях**) В любом конечном графе $G=(X,Г)$ ($|Г|<\infty$) число вершин нечетной степени четно или равно нулю.

Доказательство:

Представим X в виде объединения двух множеств X_1 и X_2 : $X=X_1 \cup X_2$. X_1- множество вершин x, у которых $\deg x =2k_x +1$, $k_x \in \mathbf{Z}_+$; а X_2 - множество вершин x, у которых $\deg x =2k_x$, $k_x \in \mathbf{Z}_+$.

Тогда, воспользовавшись соотношением (2) теоремы 1, получаем:

$$2|Г| = \sum_{x\in X} \deg x = \sum_{x\in X_1} \deg x +\sum_{x\in X_2} \deg x = \sum_{x\in X_1} (2k_x+1) +\sum_{x\in X_2} 2k_x = 2 \sum_{x\in X_1} k_x + 2 \sum_{x\in X_2} k_x + \sum_{x\in X_1} 1$$

$= 2 \sum_{x\in X} k_x + |X_1|$, получим выражение для $|X_1|$.

$$|X_1| = 2|Г| - 2 \sum_{x\in X} k_x = 2 \left(|Г| - \sum_{x\in X} k_x \right).$$

Правая часть выражения кратна двум или равна нулю, значит, $|X_1|$ кратно двум или равно нулю.

Обозначим множество дуг, заходящих в вершину x как $B(x)$; т.о. $|B(x)| = \deg^+(x)$. А множество дуг, исходящих из x обозначим как $A(x)$; т.о. $|A(x)| = \deg^-(x)$.

Опр.12. Множество вершин, являющихся началами дуг из $B(x)$, обозначается через $Г^{-1}x$ и называются такие вершины *предшественниками* вершины x.

Опр. 13. Множество вершин, являющихся концами дуг из $A(x)$, обозначается через $Гx$ и называются такие вершины *потомкамиками* вершины x. Если вершина x имеет только одного предшественника, то говорят о *предке* вершины x.

Опр 14. Вершина x, инцидентная только дугам вида (x,x), называется *голой.*

Опр15. Вершина, не инцидентная ни одной дуге, называется *изолированной*. Deg изолированной вершины равна нулю.

Входом или началом орграфа называется вершина s, у которой $\deg^+(s) = 0$.

Выходом или конечной вершиной орграфа называется вершина t, у которой $\deg^-(t) = 0$.

Опр16. Путем $\mu[a,b]$ из вершины a в вершину b называется последовательность вершин и дуг вида $a(a,x_1)*x_1\ (x_1,x_2)*x_2\ (x_2,x_3)\ldots x_{n-1}\ (x_{n-1},b)b$. Путь называется *простым*, если ни одна вершина в нем не встречается дважды.

Путь из входа s орграфа в выход t называется *s-t-путем*.

Если в орграфе вершины a и b связаны путем $\mu[a,b]$, то говорят, что вершина b достижима из вершины a или вершина a достигает вершину b.

Опр17. Орграф называется *односторонне связным*, если для любой пары вершин одна достижима из другой.

Опр18. Орграф называется *сильно связным*, если для любой пары вершин каждая из них достижима из другой.

Опр19-20. Путь называется *эйлеровым,* если он содержит все дуги графа по одному разу, и *гамильтоновым*, если он содержит все вершины по одному разу.

Опр21. Путь, начало и конец которого совпадают, т.е. $\mu[a,a]$, называется *контуром* с начальной вершиной a.

Опр22-23. Контур называется *простым,* если ни одна вершина в нем не повторяется дважды, *эйлеровым,* если он содержит все дуги графа по одному разу, и *гамильтоновым,* если он содержит все вершины графа по одному разу.

Опр24. *Длиной пути* или *контура* называется число дуг, входящих в него.

Опр25-26. Контур длины 1 есть петля. Путь длины 0 есть *тривиальный* или *вырожденный* путь.

!Длина эйлерова пути или контура равна числу дуг в орграфе; длина гамильтонова контура равна числу вершин в орграфе, длина гамильтонова пути на единицу меньше числа вершин.

(ЛЕКЦИЯ 16)

ЧАСТИ ГРАФА

Опр27-28. Орграф H=(X*,V) называется *частичным графом* графа G=(X,U), если $X^*\subseteq X$ и $V\subseteq U$, и *суграфом*, если $X^*=X$ и $V\subseteq$

U.

Опр 29. Орграф H=(Y,V) называется *подграфом* графа G=(X,U), если $Y \subseteq X$ и из того, что $(y_1,y_2) \in U$ и $y_1,y_2 \in Y$, следует, что $(y_1,y_2) \in V$.

Другими словами, частичный граф есть орграф, порождаемый некоторым подмножеством дуг исходного орграфа вместе с их концами. Суграф обязательно имеет то же множество вершин, что и исходный (т.е. если порождающее множество дуг инцидентно не всем вершинам исходного графа, то частичный граф дополняется до суграфа за счет изолированных вершин). Подграф порождается некоторым подмножеством вершин исходного графа и теми дугами, оба конца которых принадлежат указанному подмножеству.

Опр30-31. *Зоной* называется сильно связный подграф орграфа. Зона, максимальная относительно включения вершин, называется *компонентой сильной связности* или *бикомпонентой*.

Опр32. Вершина p_0 есть *начальная вершина* подграфа H орграфа G с входом s, если либо p_0 совпадает с s, либо вершина p_0 имеет предшественника в G не принадлежащего H.

Опр33. Вершина q_0 называется *входной вершиной* подграфа H, если существует путь из s в q_0, не содержащий вершин подграфа, отличных от q_0.

Опр34. Внешний потомок вершины подграфа H называется его *выходной вершиной*.

На случай неориентированных графов переносятся почти все введенные выше понятия. Так, две вершины *смежны*, если они соединены ребром; ребро инцидентно своим концам, степень вершины есть число инцидентных ей ребер (полустепени захода и исхода теряют свой смысл).

Говоря о входе или выходе в неориентированном графе, имеют в виду некоторые выделенные вершины; например, откуда начинается и где заканчивается обход.

Для пути и контура в неориентированном графе имеются аналоги: цепь и цикл.

Опр35-36. Цепью $\mu[a,b]$, соединяющей вершины a и b, называется последовательность вершин и ребер вида $a(a, x_1)x_1\ (x_1, x_2)x_2 \ldots\ x_{n-1}\ (x_{n-1}, b)b$. Цепь, начало и конец которой совпадают, называется *циклом*.

Иногда термин "цепь" заменяется термином "путь". Употребление термина "цикл" в случае ориентированных графов, не ведет к путанице, т.к. оно ограничено узкими областями (например, потоки по сетям).

Для цепей и циклов неориентированного графа аналогично тому, как это делалось для орграфов, определяются понятия *простоты*, *эйлеровости*, *гамильтоновости*, а также *длины*. Понятия односторонней и сильной связности теряют смысл, их аналогом служит понятие свзности: граф называется *связным*, если каждая пара вершин связана цепью. Сохраняются понятия *частичного графа*, *суграфа* и *подграфа* с естественной заменой множества дуг на множества ребер.

Деревья

Опр37. *Деревом* называется связный неориентированный граф без циклов.

Теорема 1 устанавливает эквивалентность различных свойств дерева, каждое из которых может служить определением.

Теорема 1. Для графа G=(X,U) следующие утверждения эквивалентны:

G-дерево;

1. Любые две вершины в графе G соединены единственной простой цепью;

Граф G связен и имеет |X|-1 ребер;

Граф G не содержит циклов и имеет |X|-1 ребер;

2. Граф G не содержит циклов, но добавление ребра между любыми двумя несмежными вершинами приводит к появлению одного цикла;

Граф G связен, но утрачивает это свойство после удаления любого ребра.

Без доказательства.

Опр 38. Вершина степени 1 называется *висячей* или *листом*.

Из определения дерева и теоремы 1 вытекает, что всякое дерево имеет по крайней мере две висячие вершины.

Опр 39. Определим расстояние d(x,y) между вершинами x и y в дереве как длину из x в y (число ребер).

Опр 40. Расстояние от вершины x до наиболее удаленной от нее вершины называется эксцентриситетом $e(x)$ вершины x, т.е. $e(x)=\max_y d(x,y)$.

Опр 41. Наименьший из эксцентриситетов $\min_{e(x)}$ называется *радиусом* r(T) дерева T.

Опр. 42 *Центральной вершиной* дерева T называется вершина, у которой эксцентриситет равен радиусу.

Опр. 43 Центром дерева называется множество его центральных вершин.

Можно показать, что каждое дерево имеет центр, состоящий или из одной вершины, или из двух смежных вершин.

Опр. 44 *Ветвью к вершине x дерева T* называется максимальное поддерево, содержащее x в качестве висячей вершины (deg x =1). Т.о., число ветвей к вершине *x* равно ее степени.

Опр. 45 *Вес* вершины *x* есть наибольшее число ребер в ветви к вершине *x*.

!Вес каждой висячей вершины в дереве равен числу ребер в этом дереве.

Опр. 46-47 Вершина *x* называется *центроидной*, если вершина *x* имеет наименьший вес. Центроидом дерева называется множество его центроидных вершин.

!Можно показать, что каждое дерево имеет центроид, состоящий из одной вершины или из двух смежных вершин.

Ориентированные деревья

Опр. 48 Ориентированным корневым деревом Т(*r*) или ордеревом с корнем *r* называется орграф с выделенной вершиной *r*, который удовлетворяет следующим условиям:

а) Т(*r*) – дерево, если не принимать во внимание ориентацию дуг;

б) из корня *r* достижима любая вершина (или корень *r* достижим из любой вершины);

в) в корень *r* не заходит ни одна дуга (или из корня *r* не выходит ни одна дуга).

!Любое дерево можно преобразовать в ордерево, если выбрать некоторую вершину в качестве корня и задать ориентацию дуг. Для определенности будем считать, что все дуги ориентированы от корня.

ЛЕКЦИЯ 17

Дерево-остов или каркас

Опр. 49 *Каркасом* или *остовом* неориентированного графа называется его суграф в виде дерева.

Утверждение 1

Граф G имеет каркас тогда и только тогда, когда он связен.

Алгоритм поиска дерева-остова. В самом деле, если граф связен, то выясним, имеется ли в нем ребро, удаление которого не нарушает связности. В случае, когда таких ребер нет, граф G сам есть дерево в силу свойства 6. Теоремы 1; если же такое ребро есть, то удалим его и выясним, имеется ли в полученном графе ребро, удаление которого не нарушает связности, и т.д. Когда удаление ребер без нарушения связности станет невозможным, получим дерево, множество вершин которого совпадает с множеством вершин G. Проведенное рассуждение дает алгоритм для отыскания некоторого каркаса графа.

Опр. 50 Для орграфа можно определить понятие *оркаркаса*, т.е. суграфа в виде корневого ордерева.

!В орграфе G существует оркаркас с корнем в вершине *r*, если все вершины графа достижимы из *r*.

Полные n-вершинные графы

Опр. 51 *Полным n-вершинным графом* K_n называется неориентированный граф, все вершины которого смежны между собой.

!Для K_n графа справедливо следующее утверждение связывающее равенством количество ребер и количество вершин:
$m=(n(n-1)/2)$, где m – количество ребер в графе; n – количество вершин в графе. (Для полного ориентированного графа количество дуг удваивается $m=n(n-1)$).

Для многих приложений важным является наличие в графе полных подграфов, или *клик*, достаточно большого размера, ибо к этой задаче сводится задача об отыскании максимального множества попарно несмежных вершин.

Двудольные графы

Опр.52 *Двудольным графом* $G=(X_1,X_2,U)$ называется граф, вершины которого разбиты на два непересекающихся подмножества X_1 и X_2 так, что концы ребер $(x,y)\in U$ принадлежат разным подмножествам, т.е. $x\in X_1$, $y\in X_2$. Другими словами, граф называют двудольным, если множество его вершин можно разбить на два подмножества X_1 и X_2, так чтобы каждое ребро соединяло вершину из X_1 с вершиной из X_2.

Рис. Двудольный граф.

Опр.53 Двудольный граф называется полным $K_{n,m}$ если каждая вершина из X_1 соединена с каждой вершиной из X_2.

! В двудольном полном графе количество ребер $N=n\times m$.

Опр.54 Двудольный граф $K^{1,m}$ называется *звездным*.

Свойство двудольных графов: Все циклы имеют четную длину. Заметим, что здесь нуль есть четное число, так что к двудольным графам относятся и деревья.

Изоморфизм графов. Геометрические графы. Реализуемость в R_3.

Опр. 55 Графы G1 и G2 называются *изоморфными*, если существует взаимнооднозначное соответствие (изоморфизм) между множествами их вершин, при котором количество ребер, соединяющих любые две вершины в одном графе, равно количеству ребер, соединяющих соответствующие вершины в другом. Взаимооднозначное отображение $\alpha:V(G)\to V(G^1)$, сохраняющее смежность.

Для того чтобы показать изоморфизм достаточно найти взаимное соответствие, а не изоморфизм показать намного сложнее, надо показать структурное несоответствие.

Опр. 56 *Геометрическим графом* называется граф, у которого множество вершин – множество отмеченных точек в R_2 или в R_3, множество дуг – множество параметризованных отрезков непрерывных кривых в R_2 или в R_3, концами которых являются соответствующие им вершины графа.

! Для любого графа существует изоморфный ему геометрический граф (и в R_2, и в R_3) называемый его геометрической реализацией.

Опр61. Геометрический граф называется *правильно реализованным* (правильным), если его дуги не имеют общих точек, отличных от вершин графа.

Опр. 57 Граф называется *плоским* (планарным), если у него существует правильная реализация в $\mathbf{R_2}$.

Теорема 4. Теорема о правильной реализации. Для любого графа существует его правильная реализация в $\mathbf{R_3}$.

Опишем конструкцию, позволяющую построить правильную реализацию. Возьмем в $\mathbf{R_3}$ произвольную прямую l. Вершинам графа G(X,U) поставим в соответствие отмеченные точки на этой прямой (точки будем обозначать теми же буквами, что и вершины графа G).

Каждой дуге графа G будет соответствовать своя плоскость, проходящая через l. Если дуга $u\in U$ такова, что u =(x,y), x≠y, то в соответствующей плоскости построим на отрезке [x, y] как на диаметре полуокружность; если u =(z, z), то в соответствующей плоскости изобразим единичную окружность, касательную к l в точке z. Эта конструкция дает правильную реализацию графа в $\mathbf{R_3}$.

ЛЕКЦИЯ 18

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГРАФОВ в памяти ЭВМ

Представление графов в памяти ЭВМ существенно зависит от типов структур данных, допускаемых используемым алгоритмическим языком и типом ЭВМ.

Матричное представление

Важной особенностью графов, позволяющей использовать их для моделирования систем и процессов, является возможность приписывать ребрам (дугам) и вершинам веса, в качестве которых чаще всего выступают числа или наборы чисел. Без ограничения общности можно считать, что во взвешенном графе веса приписаны только ребрам (дугам). Во взвешенном графе длина пути (контура, цепи, цикла) определяется как сумма или произведение весов входящих в него дуг. Существуют более сложные способы определения длины пути (в таких случаях это оговаривается особо). Веса дуг часто называют длинами, стоимостью, временем и т.д. в зависимости от конкретной модели.

Представление с помощью матрицы смежности – одно из самых распространенных, т. к. более удобно в описании алгоритмов на графах. Для графов с большим числом дуг это достаточно компактное представление, особенно если есть возможность работать с двоичными битами в машинном слове. К недостаткам следует отнести большой расход памяти при работе с графами, имеющими небольшое число дуг (матрица смежности при этом получается весьма разряженной), а также невозможность уменьшения трудоемкости алгоритмов в том случае, когда она пропорциональна числу дуг, а не числу вершин.

Опр. 58 *Матрицей смежности* A(G) графа G с n вершинами называется квадратная матрица порядка n с элементами a_{ij}:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если существует дуга (ребро) } (x_i, x_j); \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

!Матрица смежности неориентированного графа симметрична относительно главной диагонали, поэтому достаточно хранить в памяти только ее половину.

!В случае ориентированного графа входу соответствует столбец из нулей, выходу – строка из нулей, число единиц в i-ой строке равно полустепени исхода вершины x_i ($deg^-(x_i)$), число единиц в j-м столбце равно полустепени захода вершины x_j ($deg^+(x_j)$).

Матрица смежности полностью определяет структуру графа (с точностью до изображения на плоскости и нумерации вершин), в том числе и взвешенного (в матрице смежности которого элемент a_{ij} полагаем равным весу дуги (x_i, x_j)).

Пусть $G_1=(X,U_1)$, $G_2=(X,U_2)$ – два графа с одним и тем же множеством вершин, A_1 и A_2 - их матрицы смежности. Тогда матрица $A_1 \otimes A_2$ ($\otimes$-логическое сложение), определяет объединение графов, т.е. $G_1 \cup G_2 = (X, U_1 \cup U_2)$. Предположение о равенстве множеств вершин в графах - не ограничение, так как множество вершин графа всегда можно пополнить изолированными вершинами, соответствующими отсутствующим в графе G_1 вершинам из графа G_2, и наоборот. При этом размерности матриц смежности будут одинаковыми, и i-ой вершине одного графа будет соответствовать i-ая вершина другого.

Пример 1.

Матрицы смежности ориентированного и неориентированного графов.

$$A(G_1)=\begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix} \qquad A(G_2)=\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{matrix}$$

G1: G2:

Представление с помощью матрицы инциденций определяет граф однозначно (с точностью до изоморфизма), но применяется крайне редко в силу большой разреженности матрицы и практического отсутствия алгоритмов, работающих на такой структуре данных.

Опр. 59 *Матрицей инцидентности* B(G) графа G с n вершинами и m дугами называется прямоугольная матрица размера n*m с элементами b_{ij}:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если вершина } x_i, \text{ есть начало дуги } u_j; \\ -1, \text{ если вершина } x_i, \text{ есть конец дуги } u_j; \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Замечание: В определении отсутствует случай, когда в вершине x_i имеется петля. Большинство авторов используют дополнительное значение для b_{ij} (например, какой-нибудь символ “1 и или выражение -1”).

Опр. 60 Матрицей достижимости R(G) графа G с n вершинами называется квадратная матрица порядка n с элементами r_{ij}:

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если вершина } x_j \text{ достижима из } x_i; \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Списочное представление

Представление с помощью списков смежности является главной альтернативой представления с помощью матрицы смежности.

Опр.1 *Список смежности* для вершины *v* есть просто список вершин из множества Г*v* (потомки вершины *v*), т.е. это список концов дуг, исходящих из вершины *v* в случае орграфа, или список смежных с *v* вершин в случае графа.

Граф представляется с помощью $|X|$ списков смежности, по одному для каждой вершины. Если число дуг в орграфе существенно мало по сравнению с полным графом, то этот способ представления весьма эффективен. Списки смежности занимают объем памяти $|X|+|E|$ и легко реализуются с помощью списочных структур. Часто используются различные варианты списков смежности, например, задаются списки вершин из $\Gamma^{-}v$, совместные списки из Г*v* и $\Gamma^{-}v$ и т.д. Менее удобен этот способ представления для задания взвешенных графов, ибо тогда возникает дополнительная задача хранить где-то веса дуг и устанавливать соответствующие связи между дугами и весами.

Пример2.

Задание графов с помощью списков смежности.

G1:

x1: *x2,x3;*

x2: *0;*

x3: *x2,x4,x5;*

x4: *x5;*

x5: *x6;*

x6: *x4;*

G2:

x1: *x2,x4;*

x2: *x1,x3,x4;*

x3: *x2,x4;*

x4: *x1,x2,x3,x5,x6;*

x5: *x4,x6;*

x6: *x4,x5;*

Представление с помощью списка дуг применяется в тех случаях, когда необходимо иметь отдельную, независимую нумерацию дуг. При этом способе каждой дуге сопоставляется тройка $\langle u, x, y\rangle$, где u- дуга, x- ее начало, y-ее конец. Этот способ представления легко обобщается на случай взвешенных графов. Он более приспособлен для хранения различной информации о дугах.

Представление графов кодами

Пусть G – неориентированный граф, A(G) – его матрица смежности (т.к. матрица симметрична относительно главной диагонали, то будем рассматривать только ее верхний треугольник A*). Запишем строки A* последовательно одну за другой и рассмотрим полученную последовательность из нулей и единиц как двоичное число. Меняя нумерацию вершин, будем для одного и того же графа получать разные двоичные числа.

Наибольшее из них определяется для графа однозначно и носит название ***кода Харари***. Код Харари определяет граф однозначно, поэтому, например, задачу определения изоморфизма двух графов можно свести к сравнению соответствующих кодов Харари. Этот метод столь же неэффективен, как и другие методы установления изоморфизма двух произвольных графов. Нумерация вершин (и матрица смежности), соответствующая коду Харари, носит название канонической и используется при перечислении (генерировании) графов с заданными свойствами.

Код Прюфера может быть использован для задания деревьев, поскольку допускает реализацию ограниченного числа алгоритмов, работающих с такой структурой данных. Пусть T – дерево с множеством вершин $\{b_1,\ldots,b_n\}$. Сопоставим дереву T последовательность $[a_1,\ldots,a_{n-2}]$ по следующему правилу:

a) Полагаем i=1.

В последовательности 1,2, …,n (*) путем просмотра слева направо ищем номер первой висячей вершины. Пусть это будет b_i.

h)Ищем, с какой вершиной смежна вершина b_i. Пусть это будет a_i. Запоминаем a_i.

В последовательности (*) вычеркиваем b_i.

Из дерева T удаляем вершину b_i.

Полагаем i:=i+1.

b) Если i<n-1, то переходим к шагу 2. Если i=n-1, то выдаем последовательность $[a_1,\ldots,a_{n-2}]$. Это и есть код Прюфера.

Пример.3

Рис.

Для дерева на рис. Код Прюфера равен [8,4,4,4,2,2]. Код Прюфера взаимно однозначно кодирует деревья. В случае корневого ордерева процедура получения кода Прюфера аналогична. Необходимо только на последнем месте указывать корневую вершину и при распаковке кода исключать эту вершину из просмотра последовательности (*).

Пример 4.
Рис.

Код Прюфера [7,4,4,4,2,2,7].

Код Прюфера дает возможность доказать теорему Кэли о числе помеченных деревьев.

Теорема 2. (Кэли) Число помеченных n-вершинных деревьев равно n^{n-2}.
Доказательство теоремы не приводится.

!Код Прюфера является оптимальным по памяти кодированием деревьев.

Опр. 2 Кодирование называется *оптимальным*, если $\lim_{n \to \infty}(j(n)/H(n))=1$, где $H(n) = \log |U_n|$, $|U_n|$, - мощность множества U_n.

Пусть $U= \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$, где U_n - конечное множество. Предположим, что при каком то способе кодирования элементов из U для запоминания одного элемента из U_n используется самое большее j(n) битов памяти.
Для оценки энтропии H(n) для множества деревьев с n вершинами по теореме 2 имеем H(n) = (n-2) log n. Отсюда следует, что кодирование деревьев кодом Прюфера является оптимальным, т.к. для хранения кода необходимо j(n) = (n-2) log n битов памяти,

поэтому $\lim_{n \to \infty}$ (j(n)/H(n))=1.

При задании дерева списками смежности $\lim_{n \to \infty}$ (j(n)/H(n))=3 для неориентированных графов и $\lim_{n \to \infty}$ (j(n)/H(n))=2 для ориентированных.

Историческая справка по теории графов.

«Сколько существует графов?» - этот вопрос актуально поставлен в теории графов. Это первая задача, которую пытаются решить ученые. Джорж Пойа уже подсчитал число графов с заданными числами вершин и ребер. Отправляясь от его формул, сравнительно просто удалось перечислить корневые графы, связные графы и ориентированные графы. Впоследствии были решены и другие задачи перечисления для других разнообразных типов графов. Но множество задач пока не решены.

Хотя Эйлер и решил ряд задач перечисления для некоторых типов триангулированных многоугольников, расположенных на плоскости, все же существенные шаги в теории перечисления графов были сделаны лишь в девятнадцатом столетии. Кэли решил перечислительные задачи для трех типов деревьев: помеченных, корневых и обычных. Несколько раньше всемирно известный инженер-электрик Кирхгоф нашел в неявной форме число остовов произвольного заданного связного графа, а значит, в частности, - число помеченных деревьев. Далее следует указать трактат майора П.А. Мак-Магона, в котором немного затронуты задачи перечисления графов, - это один из наиболее ранних примеров поддержки военными исследований в области комбинаторики (не считая работ Архимеда). До Пойа был еще один кудесник, в совершенстве владеющий искусством комбинаторных вычислений. Это – неизвестный герой Дж. Говард Редфилд, который написал всего лишь одну статью на тему о перечислении графических объектов, однако в ней он предвосхитил многие более поздние методы и результаты. Его статья была долгое время почти неизвестна. И только после появления знаменитой работы Пойа, послужившей толчком для многочисленных современных научных исследований в теории перечисления графов, были по достоинству оценены заслуги Редфилда.

Хотя мы ограничиваемся рассмотрением задач перечисления различных видов графов, существует много других типов конфигураций, которые можно перечислить описываемыми методами. Автоматы, конечные топологии, булевы функции, ожерелья и химические изомеры – все эти структуры при беглом взгляде нельзя отнести к теоретико-графовым. Однако с помощью искусственных превращений все они преобразуются в графы и подграфы, и это позволяет решить для них соответствующие задачи перечисления.

Различным методам построения транзитивных замыканий посвящена обширная литература; один из первых алгоритмов, по-видимому принадлежит Дж. Бэйкеру; также одним из первых, но наиболее часто применяемых является алгоритм С. Уоршалла. Алгоритм Уоршалла послужил основой для создания целого ряда других алгоритмов. Среди них алгоритмы Л.Торелли, П.Пурдома и А.Мунро. Алгоритм Торелли имеет трудоемкость $O(n^4)$ и расчитан на работу с графами, заданными списками смежности; алгоритм Пурдома имеет трудоемкость $O(n^3)$ при прочих равных условиях. Укажем еще на алгоритм Арлазорова-Диница-Кронрода-Фараджева с трудоемкостью $O(n^3/\log n)$. Алгоритм замыкания относительно множества вершин принадлежит Мартынюку; аналогичный алгоритм, но с трудоемкостью $O(n^2)$ был предложен ранее А.П. Ершовым. Впервые Ершовым было сформулировано понятие гамака.

Простейший матричный алгоритм отыскания бикомпонент, описанный в лекциях, принадлежит, по-видимому С.Рамамурти. Долгое время была надежда получить на основе этого алгоритма простой алгоритм отыскания иерархии зон, что оказалось неоправданным. Наиболее эффективные алгоритмы основаны на обходе графа, представленного списками смежности, с использованием стратегии поиска в глубину. К алгоритмам такого рода относятся алгоритм И.А. Фараджева (описан в книге В.А. Евстигнеева), а также алгоритмы А.В. Карзанова и Р.Тарьяна.

Одним из первых алгоритмов перечисления контуров является алгоритм Дж.Тьернана, его стратегия была использована в алгоритме А.Берзтисса и др. Улучшенный алгоритм был предложен Х.Вайнблатом. Р.Тарьян показал, что существуют графы на которых алгоритм Вайнблата имеет экспоненциальную трудоемкость, и предложил другой метод с трудоемкостью $O(nm)$ на контур; такую же трудоемкость имеет алгоритм Арлазарова-Ускова-Фараджева. Алгоритм с трудоемкостью $O(n+m)$ на контур был предложен Р.Ридом и Р.Тарьяном.

Алгоритм Килдала был опубликован в 1973г. Вариант алгоритма Килдала принадлежит Дж.Каму и Дж.Ульману. Он основан на поиске в глубину.

Кратчайшим путям посвящена обширная литература, наиболее распространенные методы Форда, Дейкстры и др. изложены во многих книгах по прикладным аспектам теории графов. Алгоритм отыскания путей между заданными вершинами в обыкновенном графе принадлежит С.Межику, во взвешенном графе – С. Цукияме. Метод отыскания кратчайшего пути, проходящего через заданное множество вершин, принадлежит Х.Габову.

Задачи о покрытиях вершин графа излагаются в работе С. Нтафоса и С. Хакими, метод построения приведенного покрытия дуг орграфа - по работе И.С. Грунского и Д.В. Сперанского.

7. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

План практических работ

№	Содержание практического занятия	Часы
1	Понятия множества и подмножества. Объединение, пересечение, разбиение и разность множеств. Прямое произведение множеств.	4ч.
2	Булеан конечного множества. Построение булеана. Мощность множества и мощность булеана.	2ч.
3	Соответствия и функции. Отображения и функции. Способы задания функций. Композиции и суперпозиции.	6ч.
4	Отношения. Свойства отношений. Отношения эквивалентности. Отношения порядка.	4ч.
5	Алгебры: поле действительных чисел, конечное поле характеристики p, булева алгебра. Ассоциативная, коммутативная и дистрибутивная алгебраические операции. Пример гомоморфизма и изоморфизма.	6ч.
6	Функции алгебры логики. Суперпозиции и формулы.	4ч.
7	Булева алгебра. Разложение функций по переменным. Совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ). Метод Блейка-Порецкого.	6ч.
8	Полнота и замкнутость. Алгебра Жигалкина и линейные функции. Замкнутые классы. Монотонные функции.	4ч.
9	Логика предикатов. Кванторы, область действия квантора. Истинные формулы и эквивалентные соотношения. Методы доказательства в логике предикатов.	6ч.
10	Логика высказываний. Тождественно-истинные высказывания. Доказательства в логике высказываний.	6ч.
11	Ориентированные, неориентированные графы, различные виды графов. Локальные характеристики графов. Части графов. Плоские графы. Реализация графов. Изоморфизм графов.	4ч.
12	Представление графов матричное и списочное.	2ч.
Итого		54

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №1

МНОЖЕСТВА И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

Одним из основных понятий математики являются понятия *множества* и его *элементов*. Множество состоит из элементов. Принадлежность элемента a множеству М обозначается $a \in$ М; не принадлежность обозначается $a \notin$ М или $a \overline{\in}$ М.

Опр. 1. Множество А называется *подмножеством* множества В (обозначение $A \subseteq B$; знак $\subseteq$ - включения), если всякий элемент А является элементом В. При этом говорят, что В содержит или покрывает А.

Опр. 2. Множества А и В *равны*, если элементы этих множеств совпадают, или если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$. (Второй вариант определения равенства множеств указывает и на наиболее типичный метод доказательства того, что данные множества равны, заключающийся в доказательстве сначала утверждения $A \subseteq B$, а затем $B \subseteq A$.).

Если $A \subseteq B$ и $A \neq B$, то А называется *собственным*, строгим или истинным подмножеством В и обозначается $A \subset B$ ($\subset$- знак строгого включения).

Заметим, сто в случае множества множеств (*булеан* $\boldsymbol{\beta}$) возникает опасность смешения знаков $\in$ и $\subset$, $\subseteq$. Конечные и бесконечные множества.

Опр. 3.Множества, состоящие из конечного числа элементов – *конечные*, из бесконечного числа элементов – *бесконечными*.

Опр. 4. Число элементов в конечном множестве называется *мощностью множества* М (кардинальное число) и часто обозначается |М|. Мощность бесконечного множества – более сложное понятие.

Опр. 5. Будем считать, что выбрано фиксированное достаточно «широкое» множество, за пределы которого не выходит ни одно рассматриваемое множество. Элементы всех рассматриваемых множеств являются элементами этого фиксированного множества, называемого *универсальным*. Обозначение *U* или *I*.

Опр. 6. Множество мощности 0 (не содержащее элементов), называется *пустым* и обозначается ∅. Принято считать, что пустое множество является подмножеством любого множества.

Обозначения для множеств, принятые в математике:

N – множество натуральных чисел (не включая 0);

$\boldsymbol{Z}$,$\boldsymbol{Z}_{+}$,$\boldsymbol{Z}_{-}$ - множество целых чисел, множество целых положительных/отрицательных чисел;

Q – множество рациональных дробей вида p/q (p,q ∈ ***Z***);

R - множество действительных чисел;

C – множество комплексных чисел.

СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ МНОЖЕСТВ

1. Списком своих элементов (перечислением).
2. Порождающей процедурой.
3. Описанием характеристических свойств, которыми обладают элементы множества.
4. Графическое представление множеств, представление диаграммами Эйлера-Виенна.

*Виенн Диего (1834-1923) – английский математик (Кембридж)

Списком задаются лишь конечные множества. Список заключается в фиг.скобки {a, d, f}. Задание типа N=1, 2, 3,…- это не список, а условное обозначение.

Задание 1 Описать множества списком элементов

1. Множество натуральных чисел кратных 13, не превышающих 127. Определить мощность множества.
2. Множество простых чисел больших числа 15 и меньших числа 55. Определить мощность множества.
3. Множество целых чисел, положительных, кратных 7 не больших 29. Определить мощность множества.
4. Множество целых чисел, кратных 9 не больших 19. Определить мощность множества.
5. Множество целых чисел от –5 до 8. Определить мощность множества.
6. Задать списком множество β(W) всех подмножеств множества W, если W={∇,   , ∑}. Определить мощность множества β(W).

Порождающая процедура описывает способ получения элементов множества из уже полученных либо из других объектов. Элементами множества считаются все объекты, которые могут быть построены с помощью такой процедуры. Например, множество M_{2^n} =1, 2, 4, 8, 16,… (рекурсивное или индуктивное правило). Весьма распространенной порождающей процедурой является образование множеств из других множеств с помощью операций над множествами.

Пример.

1. Порождающая процедура для множества **N**

a) $1 \in \mathbf{N}$; b) если $n \in \mathbf{N}$, то $\mathbf{n}+1 \in \mathbf{N}$.

2. Порождающая процедура для M_2^n – множество чисел, являющихся степенями двойки

a) $1 \in M_2^n$; b) если $m \in M_2^n$, то $2m \in M_2^n$.

Задание 2 Описать множества рекурсивной и не рекурсивной порождающей процедурой:

1. Множество всех натуральных чисел кратных 5.

2. Множество натуральных чисел степеней 5, не превышающих числа 800.

3. Множество натуральных чисел от 76, не превышающих числа 189.
4. Множество натуральных нечетных чисел от 4, не превышающих числа 321.
5. Множество натуральных четных чисел степеней 3 от 6, не превышающих числа 199.

Задание 3 Верны ли следующие утверждения:

1. $2, 4, 7 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$;
2. $\{1, 2\} \in \{\{1,2,3\}, \{1,4\}, 1,3,5\}$;
3. $2 \in \{\{1,2\},\{2\},\{3,5,6\}\}$;
4. $\{2\} \in \{\{1\},\{2\}\}$;
5. $\{1,2\} \subseteq \{\{1\},\{2\},\{3\}\}$;
6. $\{1\} \subset \{\{1,2\},\{2,3,4\},1\}$;
7. $1,3 \subseteq \{1,2,3,4,5\}$;
8. $\{q,w,e,r\}=\{\{w,r\},\{q\},\{e,r\}\}$;
9. $\{a,b,c,d\}=\{a,b,d,c\}$;
10. $\{a,b,c\} \subseteq \{a,b,c,d,e,f\}$.

Задание множества описанием свойств его элементов, наиболее обычно. В случае, когда свойство элементов М может быть описано коротким выражением (предикатом) P(x) (обозначающим «*x обладает свойством P*»), М задается при помощи обозначения $M=\{x \mid P(x)\}$, которое читается так: «M – это множество x, обладающих свойством P». Например, M_{2^n} ={ x | x=2^k, k∈N_0}.

$P_A(x) \equiv$ “x∈ A”,

$P_\varnothing(x) \equiv$ “x∈ ∅”- тождественно ложный предикат.

Пример.

1. **N**={x | x>0, x∈ **Z**}.

1. M_{2n}= {n | n/2 ∈ **N** и n∈ **N**}.
2. M_3 ={m | m кратное 3}.

Задание 4

Описать множества характеристическим предикатом:

1. Множество всех натуральных чисел кратных 5, четных.
2. Множество натуральных чисел степеней 2.
3. Множество положительных, четных чисел.

6. Множество нечетных чисел от 4, не превышающих числа 321.
7. Множество натуральных двузначных, четных чисел.

Задание 5

1. Пусть X = {1, 2, 3},Y = {x| x=y+z; y,z∈ X}. Определить в явном виде (списком элементов) множество Y.
2. Пусть X = {3, 5},Y = {y| y=x+z; x,y∈ X}. Определить в явном виде (списком элементов) множество Y.

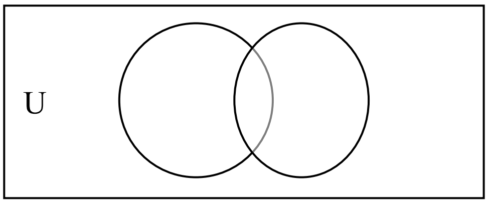
3. Пусть Z = {0, 2}, F = {y| x=y+z; x,z∈ X}. Определить в явном виде (списком элементов) множество F.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №2

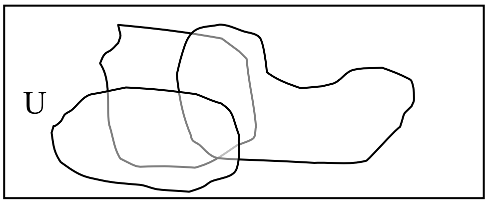
Диаграммы Эйлера – Виенна.

Примеры.

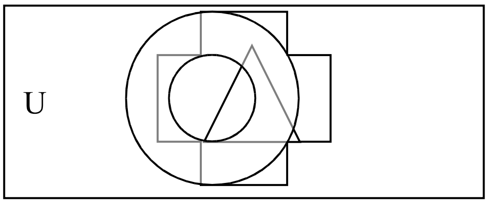
А)



Б)



В)



*Штриховка на диаграмме показывает интересующие нас множества или множества полученные в результате операций над множествами.

Задание 6

Изобразить на диаграмме Эйлера – Виенна следующие множества:

1. X – множество целых положительных чисел без нуля, Y – множество натуральных чисел с нулем, Z – множество положительных вещественных чисел.
2. A – множество четных чисел,B – множество нечетных чисел,C – множество простых чисел, D – множество чисел кратных 7.

3. X – множество целых положительных чисел, Y – множество чисел натурального ряда от 15 до 389, Z={ n| n/2 ∈ **N** и n∈ **N** }.
4. X – множество простых чисел от 11 до 211, Y – множество чисел натурального ряда от 6 до 3999, Z={ n| n/3 ∈ **N** и n∈ **N** }.
5. X – множество целых чисел кратных 7, Y – множество натуральных чисел кратных 5, Z – множество положительных вещественных чисел.

Задание 7

Изобразить на диаграмме Эйлера – Виенна следующие множества и выделить штриховкой множества в которых лежат указанные точки:

1. X – множество чисел кратных 21, Y – множество натуральных чисел с нулем, Z – множество положительных вещественных чисел; а) 84; б) 34.15.
2. X – множество простых чисел от 1 до 21, Y – множество чисел натурального ряда от 6 до 4005, Z={ n| n/4 ∈ **N** и n∈ **N** }; а) 44; б) 189; в)17.
3. A – множество четных чисел,B – множество нечетных чисел,C – множество простых чисел, D – множество чисел кратных 7; а) 99; б)100; в) 14.

БУЛЕАН КОНЕЧНОГО МНОЖЕСТВА

Задание 8

1. Построить булеан конечного множества $\boldsymbol{\beta}$(*), определить мощность булеана |$\boldsymbol{\beta}$(*)|:

а) X={1,2,3,4}; б) Y={v,e,g,k}; в) Z={λ, ν, σ}; г) T={⁄,♦, ♠,♥};

д) G={+, -, ×}; е) L={∑, ∏,Ω}; ж) W={∀, #, %, ≥}; з) S={Ξ, Ω, Ψ};

и) M={α, β, γ, λ}.

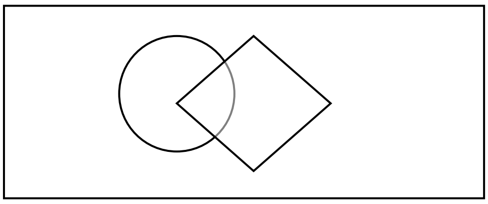
2. Сколько различных подмножеств из а) четырех элементов; б) трех элементов; в) двух элементов содержит пятиэлементное множество?

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №3

ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ.

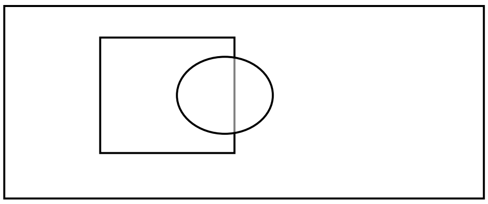
Опр. 7. *Объединением* множеств A и B (обозначение - $A \cup B$) называется множество $A \cup B = \{x |\ x \in A$ или $x \in B\}$.

$P_{A \cup B}(x) = P_A(x) \vee P_B(x)$.



Опр. 8. *Пересечением* множеств A и B (обозначение - $A \cap B$) называется множество $A \cap B = \{x |\ x \in A$ и $x \in B\}$.

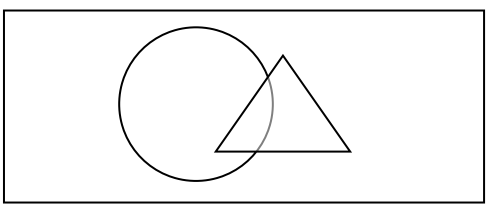
$P_{A \cap B}(x) = P_A(x) \wedge P_B(x)$.



Опр. 9-10. Система множеств, в которой все попарные пересечения множеств пусты, называется *разбиением множества* U всех элементов этих множеств, а множества такой системы называются *классами или блоками* разбиения.

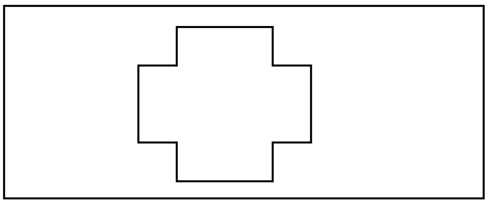
Опр.11. *Разностью* множеств A и B (обозначение – A\B) называется множество $A \setminus B = \{x |\ x \in A$ и $x \notin B\}$.

$P_{A \setminus B}(x) = P_A(x) \wedge \neg P_B(x)$.

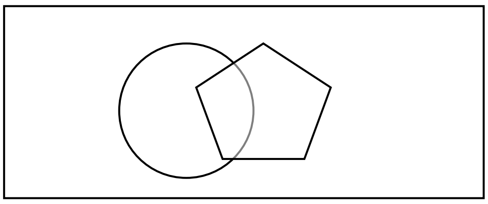


Опр. 12. *Дополнением* (до U) множества A называется множество всех элементов, не принадлежащих A (но принадлежащих U). $P_{\overline{A}}(x) \equiv \neg P_A(x)$.

Символически: $\overline{A}$ = U\A. (Множество U должно быть либо задано, либо очевидно из контекста, в противном случае проще пользоваться выражением U\A.



Симметрическая разность множеств A и B: A⊕B=(A\B) ∪ (B\A).



Задание 9

1. Осуществить операции ∪, ∩, ⊕, /, ⌉ над множествами X={b, c, d}, Y={a, c, d, f, g}, Z={a, b, c, d, e, f, g, h} (X, Y ⊆ Z).

2. Осуществить операции над множествами $B=\{0, 2, 4, 6, 8,\}$, $C=\{1, 3, 5, 7, 9\}$, $U=\{n \mid n\in N_0, 0\leq n<10\}$ ($B, C \subseteq U$).

3. Пусть множества $H= \{i,j,k\}$, $G=\{q,g,e,r\}$, $F=\{q,p,t\}$ $U=\{a,b,c,g,h,\}$. Найти:

а) $(H\cap F) \cup G$; б) $\rceil(G \cap F)$; в) $\rceil H \cup \rceil F$; г) $(H\backslash G) \cup (G\backslash H)$;

д) $(H\cup G) \cup F$; е) $\rceil F \cap \rceil G$; ж) $U\backslash G$; з) $H\backslash \rceil G$.

4.Даны множества X,Y такие, что $X\cap Y = \varnothing$. Определить множества $X\backslash Y$ и $Y\backslash X$?

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №4

АЛГЕБРА МНОЖЕСТВ

Теорема (о булевой алгебре). Множества относительно операций дополнения, объединения, пересечения образуют булеву алгебру множеств, для них выполнены основные равенства:

Законы и тождества булевой алгебры множеств:

a) коммутативность:

$X\cup Y=Y\cup X$

$X\cap Y=Y\cap X$

b) ассоциативность:

$(X\cup Y) \cup Z = X \cup (Y\cup Z) = X\cup Y\cup Z$

$(X\cap Y) \cap Z = X \cap (Y\cap Z) = X\cap Y\cap Z$

c) дистрибутивность:

$(X\cup Y) \cap Z = (X\cap Z) \cup (Y\cap Z)$

$(X \cap Y) \cup Z = (X \cup Z) \cap (Y \cup Z)$

d) идемпотентность:
$X \cap X = X$, $X \cup X = X$

e) законы де-Моргана:
$\overline{X \bigcup Y} = \overline{X} \cap \overline{Y}$

$\overline{X \bigcap Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$

f) закон двойного дополнения:
$\overline{\overline{X}} = X$

g) законы $\varnothing$ и I (универсальное множество):
$X \cup I = I$

$X \cap I = X$

$X \cap \varnothing = \varnothing$

$X \cup \varnothing = X$

h) тождества Порецкого:
$X \cup (\overline{X} \cap Y) = X \cup Y$

$X \cap (\overline{X} \cup Y) = X \cap Y$

i) тождества поглощения:
$X \cup (X \cap Y) = X$

$X \cap (X \cup Y) = X$

j) тождества склеивания:

$(X \cap Y) \cup (X \cap \overline{Y}) = X$

$(X \cup Y) \cap (X \cup \overline{Y}) = X$

Задание 10

1. Применить законы поглощения для упрощения выражений:

а) $(A \cap B) \cup A$; б) $(A \cap B \cap C) \cup B$;

в) $(A \cup D) \cap D$; г) $(A \cup B \cup C) \cap (A \cup B)$;

д) $(A \cap B) \cup (A \cap B \cap C) \cup B$; е) $A \cup A \cap C \cup B$;

ж) $A \cap A \cup B \cap A$; з) $(A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C) \cup B$.

2.Упростить:

а) $A\cap\rceil B\cap\rceil A\cap B$; б) $\rceil(\rceil A\cap(B\cup C))$;

в) $\rceil(A\cup D)\cap(\rceil A\cup\rceil D)$; г) $(B\cup(\rceil B\cap A))\cap A$;

д) $\rceil(\rceil A\cap B)\cup\rceil A$; е) $\rceil(A\cap\rceil B)\cup B$;

ж) $A\cup\rceil(A\cup\rceil B)\cap U$; з) $\rceil(\rceil(\rceil A\cap B)\cup(A\cup\rceil B))$;

и) $\rceil(\rceil A\cup B)\cup\rceil A\cup\rceil B$; к) $(\rceil A\cap B)\cup(A\cap\rceil B)\cup(A\cap B)$;

л) $\rceil(A\cup B)\cap(\rceil A\cup\rceil B)$; м) $C\cup\rceil(A\cap\rceil C)\cup C$.

3. Какие из следующих множеств всегда пусты:

а) $(A\cup B)\cap(\rceil A\cup\rceil B)$; б) $(A\cap B)\cap(C\cap\rceil A)$;

в) $(A\cap B)\backslash B$; г) $\rceil(\rceil A\cup B)\cup A\cup\rceil B$;

д) $B\backslash(B\cap A)$; е) $\rceil(\rceil A\cap\rceil B\cap C)\cap\rceil(\rceil A\cap B)\cap\rceil A\cap C$.

4. Выразить операцию пересечения множеств «$\cap$» через операции объединения «$\cup$» и дополнения «$\rceil$», операцию разности множеств «\» через операции пересечения «$\cap$» и дополнения «$\rceil$», а затем – через объединение «$\cup$» и дополнение «$\rceil$».
5. Проиллюстрировать на диаграмме Эйлера – Виенна тождества: а) идемпотентности; б) ассоциативности операции разности “/”; в) дистрибутивности операции разности “/” относительно операции пересечения ”$\cap$”; г) дистрибутивности операции пересечения ”$\cap$” относительно операции разности “/”.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №5

ДОКАЗАТЕЛЬСТВА В ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ.

Задание 11

1. Используя свойства операций над множествами доказать тождества:

а) $X\cup(\rceil X\cap Y)=X\cup Y$; б) $X\cap(X\cap Y)\cup\rceil Y=X\cup\rceil Y$;

в) $(A\cap B)\cap(B\cap C) = \rceil(\rceil A\cup\rceil C)\cap B$; г) $X\cup\rceil(X\cup Y) = X\cup Y$;

д) $(X\cup Y)\cap(X\cap Y) = X\cap Y$; е) $(X\cup U)\cap(X\cap\varnothing) = \varnothing$.

2. Используя свойства операций над множествами доказать тождества:

а) ассоциативности $\cup$;

б) дистрибутивности $\cap$ относительно $\cup$;

в) дистрибутивности $\rceil$ относительно $\cup$;

г) дистрибутивности $\cap$ относительно $\rceil$;

д) Порецкого;

е) склеивания;

ж) де-Моргана.

3. Доказать справедливость равенств для произвольных множеств, используя соотношение $X\setminus Y=X\cap\rceil Y$:

а) $X \setminus (Y\cup Z) = (X\setminus Y)\cap(X\setminus Z)$; б) $X \setminus (Y\cap Z) = (X\setminus Y)\cup(X\setminus Z)$;

в) $(X\setminus Z)\cap(Y\setminus Z) = (X\cap Y)\setminus Z$; г) $X\cup Y = X\cup(Y\setminus X)$;

д) $X\cap Y = X\setminus(X\setminus Y)$; е) $X = X\setminus(Y\setminus X)$;

ж) $\rceil X\cup Y = \rceil X\cup(X\cap Y) = \rceil(X\setminus Y)$; з) $\rceil X\cap Y = \rceil X\setminus\rceil Y$.

4.Проверить всегда ли справедливо равенство:

$(X\setminus Y)\cup Z = (X\cup Z)\setminus(Y\cup Z)$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №6

ЗАДАЧИ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ.

Задание 12

1. Показать на диаграмме Эйлера-Виенна, что справедливы тождества:

а) $(A\cup B)\cup A=(A\cup B)$;

б) $\rceil(A\cup B\cup C)=\rceil A\cap\rceil B\cap\rceil C$;

в) $A\cap\rceil(\rceil A\cap\rceil B)=A$;

г) $(A\cap B)\cup(\rceil A\cup B)\cup(A\cap\rceil B)=U$;

д) де-Моргана;

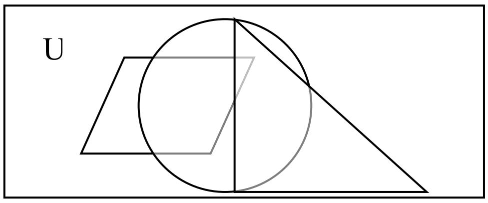
е) $((A\cap\rceil B)\cup C)\cap(\rceil A\cap B)\cap\rceil C=\varnothing$;

ж) склеивания;

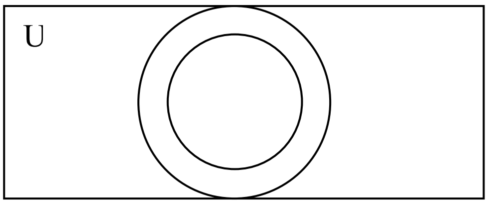
з) дистрибутивности.

2. Какое множество изображено заштрихованной фигурой? (Написать несколько формул к каждому рисунку)

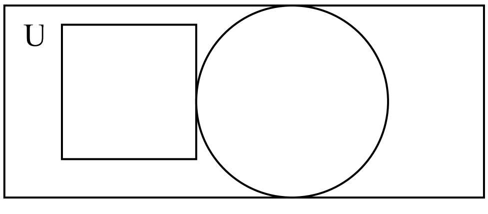
А)



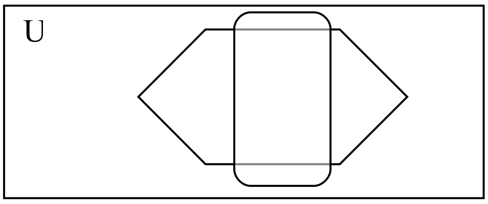
Б)



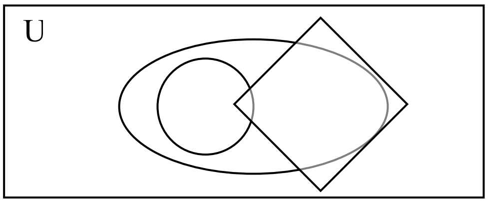
В)



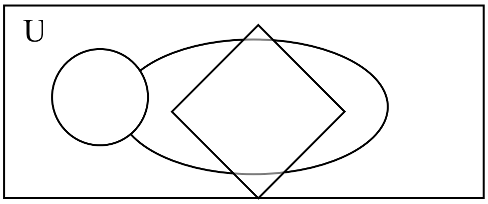
Г)



Д)



Е)



Задание 13

Решить задачи, используя диаграммы Элера-Виенна.

1. В двух параллельных группах учатся 45 студентов, из них 25 девушек. Хорошистов всего 30 человек, из них 16 девушек. Спортом занимаются 28 человек, из них 18 девушек. Среди занимающихся спортом 17 хорошистов. 15 девушек учатся

хорошо и в то же время занимаются спортом. Сколько юношей занимаются спортом и хорошо учатся? Не противоречивы ли сведения?

2. Из 80 студентов занимаются баскетболом 30 человек, легкой атлетикой 25 человек, шахматами 40 человек. Баскетболом и легкой атлетикой 8 человек, шахматами и легкой атлетикой 10 человек, шахматами и баскетболом 5 человек. Тремя видами спорта занимаются три человека. Сколько студентов занимаются только баскетболом, только шахматами, только легкой атлетикой?

3. В отделе НИИ работают несколько человек, причем каждый из них знает хотя бы один иностранный язык. Английский знают 6 человек, немецкий – 6 человек, французский – 7человек. 4 человека знают английский и немецкий языки, 3 человека – немецкий и французский, 2 – французский и английский, 1 человек знает все три языка. Сколько человек работают в отделе? Сколько человек знают только английский, только немецкий, только французский языки?

4. Из 20 студентов группы изучают французский язык 8 человек, немецкий - 9 человек, английский - 10 человек. Из студентов, изучающих два языка 3 человека изучают немецкий и французский, 2 человека – английский и французский и 4 человека изучают немецкий и английский. Сколько студентов вообще не изучают иностранный язык, если известно, что ни один из студентов не изучает три языка одновременно? Сколько студентов изучают только один иностранный язык?

5. Верно ли, что если среди бандитов есть не начальники и среди умывающихся каждый месяц не начальников нет бандитов, то не все бандиты каждый месяц умываются?

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №7

ПРЯМОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ МНОЖЕСТВ

Вектор (“кортеж”) – упорядоченный набор элементов.

Опр. 1 *Прямым произведением множеств* A и B ($A \times B$) называется множество всех пар вида (a,b), таких, что $a \in A$, $b \in B$ ($A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$).

Если A=B, то обе координаты принадлежат A. Произведение $A \times B$ обозначается A^2.

Опр. 2 Прямым произведением множеств $A_1, \ldots, A_n$ ($A_1 \times \ldots \times A_n$) называется множество всех векторов $(a_1, \ldots, a_n)$ длины n, таких, что $a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n$. $A \times \ldots \times A$ обозначается A^n.

Теорема 1. Пусть $A_1, \ldots, A_n$ - конечные множества и $|A_1| = m_1, \ldots, |A_n| = m_n$. Тогда мощность множества $A_1 \times \ldots \times A_n$ равна произведению мощностей $A_1, \ldots, A_n$: $|A_1 \times \ldots \times A_n| = m_1 \ldots m_n$.

Задание 1 Заданы множества:

1. $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{x \mid x=y+z;\ y, z \in X\}$. Определить прямое произведение множеств (списком элементов) $Y \times X$, $X \times Y^2$ и мощности этих множеств.
2. Пусть $X = \{a, b, c, d\}$, $Y = \{1, 3, 5\}$. Определить списком элементов множества $X \times Y$, X^2, $Y^2 \times \{0\}$ и мощности этих множеств.
3. Пусть $B = \{0, 1\}$, $F = \{x, z, t\}$. Определить списком элементов множества B^4, $B \times F \times B$ и мощности этих множеств.
4. Заданы множества $A=\{1, 2\}$, $B=\{1,2,3,4\}$, $C=\{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \mid x>0, 0<y<5\}$.Определить перечислением множества $(A \times B) \cap C$, $(A \times B) \setminus C$.
5. Задано множество G, мощность множества G равна k ($|G| = k$). Определить мощность множества G^n, определить мощность булеана множества G^2 ($\beta(G^2)$).

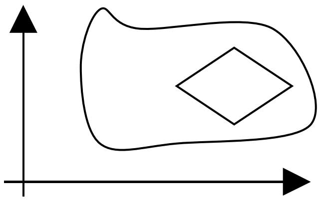
Задание 2

1. Проиллюстрировать на примере утверждение: если $A \subseteq X$ и $B \subseteq Y$, то $A \times B \subseteq X \times Y$.
2. Пусть алфавит A состоит из символов $A=\{f,g,h\}$. Определить множество всех слов длины 1, 2, 3, 4, 5 записанных в алфавите A.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №8

СООТВЕТСТВИЯ

Опр.1 *Соответствием* между множествами A и B называется подмножество $G \subseteq A \times B$.



Если $(a, b) \in G$, то говорят, что b соответствует a при соответствии G.

Опр. 2, 3 *Областью определения соответствия* называется множество $пр_1 G$, множество $пр_2 G$ – *областью значений соответствия*.

Опр. 4 Если $пр_1 G = A$, то соответствие называется *всюду определенным (полностью определенным)*, в противном случае соответствие называется *частичным*.

Опр. 5 Если $пр_2 G = B$ соответствие называется *сюръективным*.

Опр. 6,7 Множество всех $b \in B$, соответствующих элементу $a \in A$, называется *образом* a в B при соответствии G. Множество всех a, которым соответствует b, называется *прообразом* b в A при соответствии G.

Если $C \subseteq пр_1 G$, то образом множества C называется объединение образов всех элементов C. Аналогично определяется прообраз множества D для любого $D \subseteq пр_2 G$.

Опр. 8 ***Соответствие G называется функциональным (или однозначным), если образом любого элемента из $пр_1 G$ является единственный элемент из $пр_2 G$.***

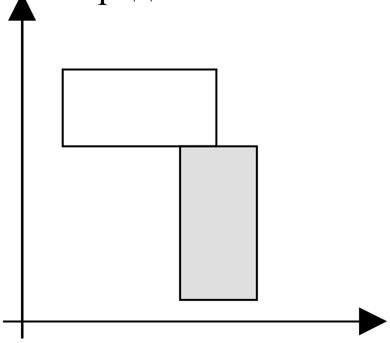
Для задания соответствия необходимо указать не только множество G, но и множества A и B, т.е. указать, подмножеством какого прямого произведения является G.

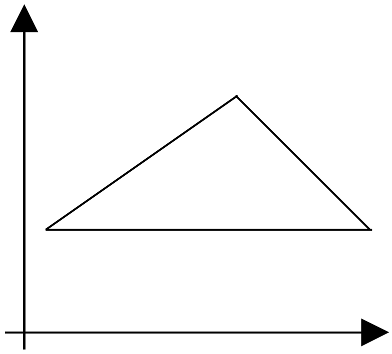
Опр. 9 Пусть дано соответствие $G \subseteq A \times B$. Если соответствие $H \subseteq B \times A$ таково, что $(b,a) \in H$ тогда и только тогда, когда $(a,b) \in G$, то соответствие H называется *обратным* к G (G^{-1}).

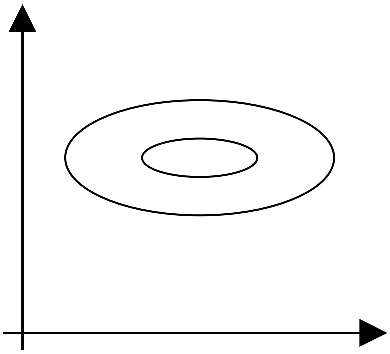
Способы задания соответствий.

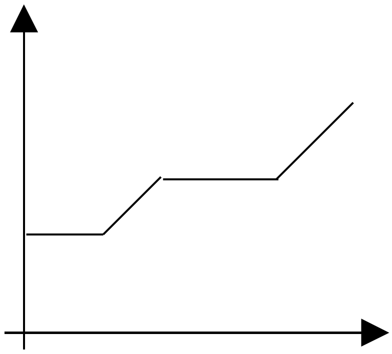
Задание 3

1. Описать соответствия G1, G2, G3, G4, определенные графически. Определить их свойства.









2. На множествах X={2,4,6,8}, Y={1,3,5,7,9} заданы соответствия перечислением своих элементов:G1={(2,1), (2,3), (2,5), (4,5), (4,7), (4,9), (6,1), (6,3), (8,7), (8,9)}; G2={(1,2), (1,4), (3,4), (3,8), (5,6), (5,8), (7,2)}; G3={(2,1), (4,3), (6,5), (8,7), (8,9)}; G4 ={(2,1), (8,3), (4,5), (6,7), (8,9), (2,9), (4,1), (6,3), (8,7)}. Определить свойства соответствий G1, G2, G3, G4.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №9

Взаимно однозначные соответствия.

Опр.10 Соответствие G между A и B называется *взаимно однозначным*, если

1. G всюду определено, т.е. ($пр_1G=A$),
2. G сюръективно, т.е. ($пр_2G=B$),
3. функционально (образом любого элемента из $пр_1G$ является единственный элемент из $пр_2G$),
4. прообразом любого элемента из $пр_2G$ является единственный элемент из $пр_1G$.

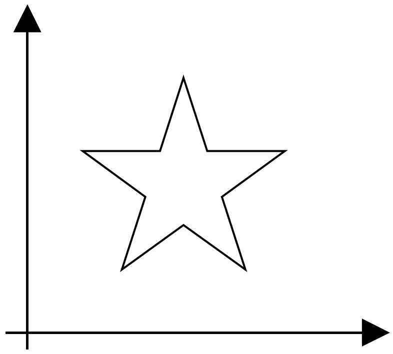
Утверждение: Множества *равномощны*, если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие.

Для конечных множеств утверждение доказывается с помощью теоремы 2, для бесконечных множеств оно является определением равномощности.

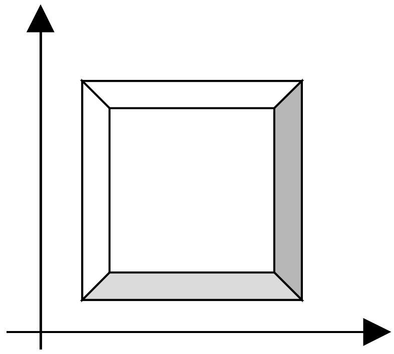
Задание 4

1. Определить какие соответствия являются взаимно однозначными:

а) G1



б) G2



в) $G3=\{(x,y) \mid x^2+y^2 = 1; 0\le x\le 1; 0\le y\le 1\}$;

г) $G4=\{(x,y) \mid x+y=1; 0\le x\le 1; y\le 0\}$

д) $G5=\{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 1; -1\le x\le 1; 0\le y\le 1\}$;

е) $G6=\{(x,y) \mid x+y\le 1; x-y=1; 0\le x\le 1; y\le 0\}$

ж) $G7=\{(x,y) \mid x^2 \le 1; y^2 \le 1; 0\le x\le 1; 0\le y\}$;

з) $G8=\{(x,y) \mid 0\le x\le 1; -1\le y\le 0\}$.

и) $G8=\{(x,y) \mid x^2 = 1; y^2 =1; -1\le x\le 1; 0\le y\}$;

к) $G9=\{(x,y) \mid y=2x-1; x, y\in \mathbf{R}\}$.

Задание 5

1.Определить для соответствий область определения и область значения соответствий. Определить для заданных соответствий обратные соответствия и дополнения:

а) G1={(2,1), (2,3), (2,5), (4,5), (4,7), (4,9), (6,1), (6,3), (8,7), (8,9)};
б) G2={(1,1), (1,2,), (2,3), (2,4), (3,4), (4,5), (5,6), (5,7), (6,7), (6,8)};
в) G3={(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6), (7,7), (8,8), (9,9)};
г) G4={(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,4), (3,5), (3,6), (4,5), (4,6), (5,6)};

д) G5={(1,1), (2,1), (2,2), (3,2), (3,3), (4,3), (4,4), (5,4), (5,5), (6,5), (6,6), (7,6), (7,7), (8,7), (8,8), (9,8) (9,9)}.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №10

ОТОБРАЖЕНИЯ И ФУНКЦИИ

Опр.11 *Функцией* называется функциональное соответствие.

Если функция f устанавливает соответствие между множествами A и B, то говорят, что функция f имеет тип $A\to B$ ($f: A\to B$).

Каждому элементу a из области определения функция f ставит в соответствие единственный элемент b из области значений ($f(a)=b$). Элемент a называется *аргументом* функции f, b – *значением* функции f от a.

Полностью определенная функция $f: A\to B$ называется *отображением* A и B. Образ A при отображении f обозначается f(A).

Опр.12Пусть $f:X\to Y$, $B\subset Y$. Прообразом множества B при отображении f называется множество $f^{-1}(B)(\subset X)$ определяемое следующим:

$x\in f^{-1}(B)\Leftrightarrow f(x)\in B$.

Опр.13 Пусть $f:X\to Y$, $A\subset X$. Образом множества A при отображении f называется множество $f(A)(\subset Y)$ определяемое следующим:

$y\in f(A)\Leftrightarrow f^{-1}(\{y\})\cap A\neq\varnothing$.

Если соответствие f при этом сюръективно, т.е. каждый элемент B имеет прообраз в A, то говорят, что имеет место отображение A на B (сюръективное отображение).

Если f(A) состоит из единственного элемента, то f называется функцией-константой.

Отображение типа $A\to A$ называют *преобразованием* множества A.

Функции f и g равны, если область определения – одно и то же множество A и для любого $a\in A$ $f(a)=g(a)$.

Опр. 14 **Функция типа $A_1\times A_2\times\ldots\times A_n\to B$ называется n-местной функцией, функция n аргументов ($f(a_1,a_2,\ldots,a_n) = b$, где $a_1\in A_1$, $a_2\in A_2$, … $a_n\in A_n$, $b\in B$).**

Сложение, умножение, вычитание и деление являются двухместными функциями на R, т.е. функциями типа $R^2\to R$.

Типы отображений.

Опр.15 Отображение $f:X \to Y$ называется *сюръективным*, если $\forall y(\in Y)\ f^{-1}(\{y\}) \neq \varnothing$.

Опр.16 Отображение $f:X \to Y$ называется *инъективным*, если $\forall x_1(\in X) \forall x_2(\in X)\ (x_1 \neq x_2) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Опр.17 Отображение $f:X \to Y$ называется *биективным*, если оно сюръективно и инъективно.

Опр.15* Отображение $f:X \to Y$ – сюръективно, если уравнение f(x)=y, где x – неизвестное, y – параметр, имеет хотя бы одно решение при любом значении параметра $y \in Y$.

Задание 5

1. Для функций задать несколько типов и исследовать свойства этих функций:

а) $y(x)=x^2+x+5$;
б) $y(x)=log_2 x$;
в) $y(x) = x^n$;
г) $y(x) = e^x$;
д) $y(x) = 5x - 3$
е) $y(x) = -3x^2 - 15$
ж) $y(x) = \ln(x^2+1)$
з) $y(x) = e^{(2x-3)}$.

Опр.18 Пусть X – множество. Тождественным на X отображением называется отображение $e_x:X \to X$, определяемое следующим: $e_x(x)=x,\ \forall x \in X$.

Опр. 19 Если соответствие, обратное, к функции $f:A \to B$, является функциональным, то оно называется функцией обратной к f (f^{-1}).

В обратном соответствии образы и прообразы меняются местами.

Утверждение: Для существования функции, обратной к $f:A \to B$, необходимо, чтобы каждый образ из области значений f имел единственный прообраз.

! Для функции $f:A \to B$ обратная функция существует тогда и только тогда, когда f является взаимно однозначным соответствием между областью определения и областью значений.

Пример. Функция sin(x) имеет тип $R \to R$. Отрезок $[-\pi/2, \pi/2]$ она взаимно однозначно отображает на отрезок [-1, 1]. На отрезке [-1, 1] для функции sin(x) существует обратная функция arcsin(x).

Опр.20 Отображение называется обратимым слева (справа), если существует отображение $f^{-1}_l:Y \to X$ ($f^{-1}_k: Y \to X$) такое, что

$f^{-1}_l \circ f = e_x$

($f \circ f^{-1}_k = e_y$).

Опр.21 Отображение $f:X \to Y$ называется обратимым, если существует отображение $f^{-1}: Y \to X$ такое, что $f^{-1} \circ f = e_x$; $f \circ f^{-1} = e_y$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №11

Опр.22 Пусть даны функции $f:A\to B$ и $g:B\to C$. Функция $h:A\to C$ называется *композицией* функций f и g ($f\circ g$), если имеет место равенство $h(x)=g(f(x))$, где $x\in A$. Часто говорят, что функция h получена подстановкой f в g.

Теоремы о композиции отображений.

Теорема 4: Если $f:X\to Y$ и $g:Y\to Z$ – инъективное отображение, то $g\circ f: :X\to Z$ – инъективное отображение.

Теорема 5: Если $f: X\to Y$ и $g: Y\to Z$ – сюръективное отображение, то $g\circ f: :X\to Z$ – сюръективное отображение.

Теорема 6: Если $f: X\to Y$ и $g: Y\to Z$ – биективное отображение, то $g\circ f: :X\to Z$ – биективное отображение.

Опр.23 *Суперпозиция* $f_1, \ldots, f_n$ - это функция, полученная из $f_1, \ldots, f_n$ некоторой подстановкой их друг в друга и переименованием аргументов.

Задание 7

1. Записать суперпозицию формул:

Задание 6

1. Получить композиции функций:

а) $y(x)=2x$; $g(x)=\log_3 x$;

б) $y(x)=\ln(x)$; $g(x)=e^{5x}$;

в) $\alpha=\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&5&1&4\end{bmatrix}$ $\beta=\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\5&4&3&2&1\end{bmatrix}$

г) $f(x)=\begin{cases}x^3, & |x|>1\\ -x, & |x|<=1\end{cases}$

$g(x)=\begin{cases}x, & x>8\\ 2-x, & |x|<=8\\ 2+x, & x<-8.\end{cases}$

д) $\gamma=\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\2&2&5&1&1\end{bmatrix}$ $\varphi=\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\5&3&3&1&1\end{bmatrix}$

е) $\alpha=\begin{bmatrix}a&b&c\\b&c&a\end{bmatrix}$ $\beta=\begin{bmatrix}a&b&c\\c&b&a\end{bmatrix}$

ж) $y(x)=\ln(x^2+1)$; $g(x)=x^2+x-1$.

з) $f(x)=\begin{cases} x^3/2, & |x|>1 \\ -x+1, & |x|<=1 \end{cases}$

$g(x)=\begin{cases} x-1, & x>5 \\ (2-x)/2, & |x|<=5 \\ 2+x, & x<-5. \end{cases}$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №12

Способы заданий функций.

1. Таблица (функции определенные на конечных множествах).
2. Формула, описывает функцию как суперпозицию других функций или задает процедуру вычисления функции как некоторую последовательность вычислений исходных функций.
3. Графическое представление функции.

Вычисления функций по таблицам, формулам и с помощью графиков являются частным видом вычислительных процедур.

4. Рекурсивная вычислительная процедура, задает функцию f, определенную на N_0 по правилу: 1) задается значение f(0) или f(1); 2) значение f(n+1) определяется через суперпозицию f(n) и других известных функций. (Пример n!)
5. Описание функций, которые не содержат способа вычисления функций. (Пример)

Задание 8

1. Получить таблицы для функций, заданных на интервалах (шаг табулирования h=0.1):

а) $y(x)=\cos(x^2)/x^2$; $x\in[-\pi/2;-\pi/10]$;

б) $y(x)= x^2/(1+\ln(x+1))$; $x\in[0;10]$;

в) $y(x)= tg(x^2)/(1+x^2)$; $x\in[-\pi/4; \pi/4]$;

г) $y(x)= (1+x^2)/(x^4+2)$; $x\in[-1;5]$;

д) $y(x)=(1-x^2)/(1+x^2)$; $x\in[-1;1]$;

е) $y(x)=(1-\sin(x))/(1+x^2)$; $x\in[-\pi; \pi/2]$;

ж) $y(x)=(e^{(1-x)}x^2)/\ln(x)$; $x\in[0;7]$;

з) $y(x)=-x^2/(1+x^2)$; $x\in[-2;2]$.

Построить график функции на заданном интервале, используя математический пакет MathCAD.

2. Задать рекурсивно функции:

а) $f(x)=x+1$; $x\in N_0$;

б) $f(x)= x^n$; $x\in N$;

в) $f(x)= x!$; $x\in[0; 24]$;

г) $f(x,y)= y+x$; $x, y \in N_0$;

д) $f(x,y)= y\cdot x$; $x, y \in N$;

е) $f(x)=3x+1$; $x\in N_0$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №13

ОТНОШЕНИЯ

Опр.1 Подмножество $R \subseteq M^n$ называется *n-местным отношением* на множестве M. Говорят, что $a_1, \ldots, a_n$ находятся в отношении R, если $(a_1, \ldots, a_n) \in R$. Одноместное отношение - это просто подмножество M.

Одноместные отношения называют *признаками*: a обладает признаком R, если $a \in R$ и $R \subseteq M$. Свойства одноместных отношений – это свойства подмножеств M.

Наиболее часто встречающиеся и хорошо изученными являются двухместные (бинарные) отношения. Если a,b находятся в отношении R, это записывется как aRb.

Пример.

1) “делиться нацело”
2) “перпендикулярно к”
3) “быть отцом”
4) “жить в одном городе”
5) “сидеть за одной партой”

Для задания бинарных отношений используются способы задания множеств (список пар или). Отношения на конечных множествах обычно задаются списком или матрицей.

Опр.2 Матрица бинарного отношения на множестве $M=\{a_1, \ldots, a_m\}$ – это квадратная матрица C порядка m, в которой элемент c_{ij} определяется как:

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } a_i R a_j; \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Поскольку отношения на M задаются подмножествами M^2, на них определяются те же операции, что и над множествами (дополнение, объединение, пересечение).

Опр.3 Отношение называется *обратным* к отношению R (R^{-1}), если $a_i R^{-1} a_j$ тогда и только тогда, когда $a_j R a_i$.

$!(R^{-1})^{-1}=R$.

Задание 1

1. Для отношений, заданных на множестве M построить матрицы бинарного отношения, множество M={1,2,3,4,5,6,7,8,9}:

а) R1- “быть не больше”;
б) R2 – “x делится на y без остатка”
в) R3 – “x делитель y”;
г) R4 – “(x+y) - четно”;
д) R5 – “x в два раза меньше y”;
е) R6 – “x на 3 больше y”.

2. Придумать унарные, бинарные, тернарные отношения, заданные на множествах:

а) **N**;

б) **R**;

в) множество студентов обучающихся в группе;

г) множество людей.

Задание 2

1. Найти область определения и область значений для отношений:

R1={(x,y) | x,y∊ P “x делит y”}, P={2, 4, 6, 8};

R2={(x,y) | x,y∊ Z “x + y четное”}, Z={-1, -2, 0, 1, 2};

R3={(x,y) | x,y∊ T “x + y >=0”}, T={-3, -2, -1, 0, 1, 2};

R4={(x,y) | x,y∊ X “x > y на 5”}, X={1, 3, 5, 7, 9}.

2. Выписать все элементы тернарных отношений заданных на множестве Z\{0}:
   1) x+y+x=x y z;
   2) x y z = -x y z, |x y z|<=3;
   3) $x^2 + y^2 + z^2 < 10$;
   4) $x^2 + y^2 + z^2 < 1$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №14

Свойства отношений.

1. Рефлексивность

Опр.4 Отношение R называется *рефлексивным*, если для любого a∊ M имеет место aRa. Главная диагональ его матрицы содержит только единицы.

Опр.5 Отношение R называется *антирефлексивным*, если ни для какого a∊ M не выполняется aRa. Главная диагональ его матрицы содержит только нули. (Отношение <= и «иметь общий делитель рефлексивны», отношение < и «быть сыном» антирефлексивны)

2. Симметричность

Опр.6 Отношение R называется *симметричным*, если для пары (a,b) ∊ M^2 из aRb следует bRa (для любой пары R выполняется в обе стороны, либо не выполняется вообще). Его матрица симметрична относительно главной диагонали.

Опр.7 Отношение R называется *антисимметричным*, если $a_i R a_j$ и $a_j R a_i$ следует, что $a_i = a_j$. (Антисимметричное отношение – это <=).

Также имеет место *асимметрическое отношение*, если $a_i R a_j$, но отношение отсутствует между элементами a_j и a_i; *несимметричное отношение*, если оно не является симметричным и не является асимметричным.

! Отношение R симметрично тогда и только тогда, когда $R = R^{-1}$.

3. Транзитивность

Опр.8 Отношение R называется *транзитивным*, если для любых a, b, c из aRb и bRc следует aRc. (Отношения =, <=, «жить в одном городе» транзитивны, отношение «быть сыном» не транзитивно).

Опр.9 Для любого отношения R отношение R*, называемое *транзитивным замыканием* R , определяется как aR*b, если в M существует цепочка из n элементов $a=a_1$, a_2, …, a_{n-1}, $a_n=b$, в которой между соседними элементами выполнено R aRa, aRa, …, aRb.

! Если R транзитивно, то R*=R.

Задание 3

1. Определить свойства отношений:

а) “x делится на y без остатка”

б) “x в два раза меньше y”;

в) “x брат y”;

г) “x живет с y в одном городе”;

д) “x живет выше на один этаж, чем y ”;

е) “x отец y”;

ж) “x перпендикулярна y”.

2. Придумать отношения удовлетворяющие свойствам:

а) рефлексивное, транзитивное, симметричное;

б) антирефлексивное, несимметричное, транзитивное;

в) рефлексивное, антисимметричное, нетранзитивное;

г) антирефлексивное, антисимметричное, нетранзитивное.

3. Доказать транзитивность следующих отношений:

а) R1=”x делитель y”;

б) R2=”x + y делится на 2 ”;

в) R3=”x + y кратно k ”;

г) R4=”x + y нечетно”;

д) R5=”x превышает y на 5”.

4. Определить обратные и дополнения для заданных отношений:

а) $R_1 = \{(x,y) \mid x,y \in M$;‘x не делится на y’$\}$, M={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9};

б) R_2 ={(x,y) | x,y∈ M;‘x - y делится на 3’}, M={1, 2, 3, 4, 5, 6};
в) R_3 ={(x,y) | x,y∈ M;‘x – y >= 1’}, M={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9};
г) R_4 =‘x отец y’, M- множество людей;
д) R_5 =‘x не ниже ростом y’, M- множество людей;

Отношение эквивалентности и порядка

Опр.10 Отношение называется отношением эквивалентности (или просто эквивалентностью) если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Отношение E для формул – это совпадение формул по написанию называется *графическим равенством*.

Опр.11 Отношение наз. *отношением нестрогого порядка*, если оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно.

Опр.12 Отношение наз. *отношением строгого порядка*, если оно антирефлексивно, антисимметрично и транзитивно.

Задание 4

Какие отношения являются отношениями эквивалентности, отношениями строгого и нестрогого порядка:

а) R_1 = ‘обучаться в одном институте’;

б) R_2 = ‘равночисленность конечных множеств’;

в) R_3 = {(x,y) | (x,y) ∈ $\mathbf{Z}^2$, ‘x-y <4’};

г) R_4 = {(x,y) | (x,y) ∈ $\mathbf{Z}^2$, ‘x-y делится 5’};

д) R_5 = {(x,y) | (x,y) ∈ $\mathbf{Z}^2$, ‘x делится y’};

е) R_6 = {(x,y) | (x,y) ∈ $\mathbf{Z}^2$, ‘x-y <4’};

ж) R_7 = ‘перпендикулярно к’;

з) R_8 = ‘половина от’;

и) R_9 = {(x,y) | (x,y) ∈ $\mathbf{R}^2$, ‘x^2+y^2 <4’}.

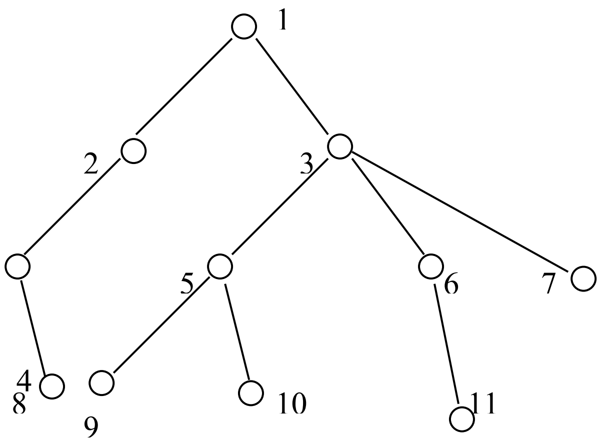
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №16

Операции над бинарными отношениями и их матрицами

Задание 5

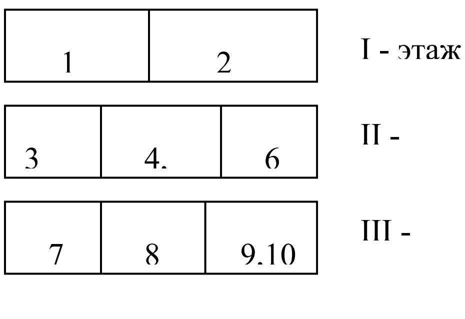
1) На множестве M={1, 2, 3, 4, …, 11} определено отношение R_1 – ‘быть непосредственно связанным с’ и R_2 – ‘быть связанным с’, граф отношений изображен на рисунке1. Задать матрицами отношения: R_1^{-1}, дополнение R_1, R_2^{-1}, дополнение R_2, $R_1 \cap R_2$, $R_1 \cup R_2$, $\rceil R_1$.

Рис.1



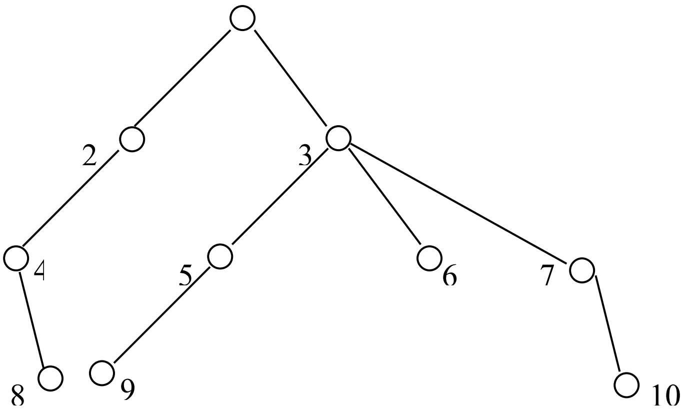
2) На рисунке 2 схематично представлено расположение квартир на трех этажах, в которых проживают 10 человек. Задать матрицами отношения: R_1 – ‘иметь общую стену’; R_1^{-1}, дополнение R_1; R_2 – ‘проживать на одном этаже’; R_2^{-1}, дополнение R_2, $R_1 \cap R_2$, $R_1 \cup R_2$, $\rceil R_1$, $\rceil R_2$. M={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}.

Рис.2



3) 1) На множестве M={1, 2, 3, 4, …, 11} определено отношение R_1 – ‘быть сыном’ и R_2 – ‘быть внуком’, граф отношений изображен на рисунке 3.
Задать матрицами отношения: R_1^{-1}, дополнение R_1, R_2^{-1}, дополнение R_2, $R_1 \cap R_2$, $R_1 \cup R_2$, $\rceil R_2$.

Рис.3



ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №17

АЛГЕБРЫ

Опр.1 Множество M с заданной на нем совокупностью операций $\Omega = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \ldots\}$ т.е. система $A=(M; \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \ldots)$ называется *алгеброй* ($A=(M; \Omega)$); M называется основным, или *несущим множеством алгебры* A (или носителем алгебры).

Опр. 2 Функцию типа $\boldsymbol{\varphi}$**:M^n→M** называют n-арной операцией на множестве M; n называется арностью операции φ. Операцией называют функцию, все аргументы и значения которой принадлежат одному и тому же множеству M.

Опр. 3 Вектор арностей операций алгебры называется ее *типом*, совокупность операций Ω - *сигнатурой*.

Опр. 4,5 Множество $M^*\subset M$ называется *замкнутым* относительно n-арной операции φ: на M, если φ: $(M^{*n})\subseteq M^*$, т.е. если значения φ: на аргументах из M^* принадлежат M^*. Если M^* замкнуто относительно всех операций $\varphi_1, \ldots, \varphi_{:n}, \ldots$ алгебры A, то система $A^* =(M^*; \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \ldots)$ называется *подалгеброй* A.

Примеры.

1) $A=\{R; +,\times\}$- алгебра называется полем действительных чисел. Тип алгебры (2,2).

2) $N_p=\{0,1,2, \ldots,p-1\}$, $A=(N_p; \oplus_p ,\otimes_p)$. Операции $\oplus_p$ "сложение по модулю р" и $\otimes_p$ "умножение по модулю р".

3) Множество F одноместных функций на R, т.е. функций f: R→R, вместе с операцией дифференцирования является алгеброй. Множество элементпрных функций замкнуто относительно дифференцирования, поскольку производные элементарных функций элементарны и, следовательно, образует подалгебру данной алгебры.

4) Пусть задано множество U. Множество всех его подмножеств называется *булеаном* U (обозначение $\beta(U)$). Алгебра $B=(\beta(U); \cup, \cap, \rceil)$ называется булевой алгеброй множества над U, ее тип (2,2,1).

Задание 1.

Определить тип алгебр и сигнатуру:

1) $A_1 = \{\mathbf{R}; \times\}$;
2) $A_2 = \{\mathbf{N_0}; +, -\}$
3) $A_3 = \{\mathbf{Np}; \otimes_p\}$;
4) $A_4 = \{\beta(U); \cap, \rceil\}$;
5) $A_5 = \{\mathbf{N_p}; \otimes_p, \otimes_p\}$;
6) $A_6 = \{\beta(U); \cup, \cap, \rceil\}$.

Функция одного аргумента $\varphi(x) = y$, типа φ:M→M называется унарной операцией.

Примеры унарных операций:
Элементарные функции;
Операция над множествами – дополнение до универсального;
Операции над отношениями – дополнение отношения, обратное отношение, транзитивное и рефлексивное замыкание.

Функция двух аргументов $\varphi(x,y) = z$, типа φ:M×M→M называется бинарной операцией.

Примеры бинарных операций:
Арифметические операции +, ×, /, -, возведение в степень;
Операции над множествами: $\cap$, $\cup$, $\otimes$, /;
Операция композиции функций, отображений, отношений.

Свойства бинарных алгебраических операций.

Опр. 5 Операция называется *ассоциативной*, если для любых элементов a, b, c $(a\varphi b)\varphi c=a\varphi(b\varphi c)$.

Опр. 6 Операция называется *коммутативной*, если для любых элементов a,b $a\varphi b=b\varphi a$.

Опр.7, 8 Операция φ называется *дистрибутивной слева* относительно операции ψ, если для любых a, b, c $a\varphi(b\psi c)=(a\varphi b)\psi(a\varphi c)$,
и *дистрибутивной справа* относительно ψ, если $(a\psi b)\varphi c=(a\varphi c)\psi(b\varphi c)$.

Способы задания операций:

Так как операции являются функциями, то для их задания применимы любые способы задания функций, перечисленные раньше. Наиболее употребимые способы представления унарных и бинарных операций – перечислением элементов или списком всех пар (для унарных операций), а для бинарных операций заданных на конечных множествах один из способов это таблицы Кэли.

Бинарные операции заданные на конечных множествах можно задавать таблицами Кели, для чего слева и сверху таблицы выписываются все значения аргументов a, b из множества M, а на пересечении строки, соответствующей аргументу a, и столбца b, записывается результат операции $\varphi(a,b)$.

Например.
Таблица Кэли для операции «сложение по модулю 3» $\oplus_3$ заданной на множестве $N_3 = \{0,1,2\}$ (результат выполнения операции $\oplus_3$ равен остатку от деления суммы аргументов (a+b) на 3).

$\oplus_3$	**0**	**1**	**2**	$\otimes_3$	**0**	**1**	**2**
0	0	1	2	**0**	0	0	0

1	1	2	0	**1**	0	1	2
2	2	0	1	**2**	0	2	1

Таблица Кэли для операции «умножения по модулю 3» $\otimes_3$.

Задание 2.

1) Написать таблицы Кэли для операций заданных на множествах:

а) Z={1,2,3,4,5}, $\varphi(x,y) = x+y$;

б) B={1,2}, β(B), ∩, ∪;

в) B={1,2}, β(B), ⊗, /;

г) N_5 ={0,1,2,3,4}, $\otimes_5$, $\oplus_5$;

Какие операции замкнуты относительно множества?

2) Определить свойства бинарных операций, заданных таблицами Кэли:

а)

ξ	a	b	c
a	c	a	b
b	a	a	c
c	b	c	b

ζ	a	b	c
a	a	a	a
b	b	b	b
c	c	c	c

б)

P_1	1	2	3
1	1	2	2
2	2	1	3
3	3	3	1

P_2	1	2	3
1	1	3	1
2	1	2	2
3	3	3	2

в)

⊕	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

⊗	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

г)

s	a	b	c	d
a	c	a	d	b
b	b	a	c	b
c	d	b	a	c
d	c	a	b	d

t	a	b	c	d
a	a	c	b	d
b	c	a	d	b
c	d	c	a	d
d	c	a	d	a

д) придумать бинарные операции θ иσ, заданные на множестве из четырех элементов.

2) Определить свойства бинарных операций, дистрибутивность (слева или справа) доказывать:

а) B={1, 2, 3, 4, 5}, β(B) –булеан B, $\{\cap, \cup\}$;

б) N_5 ={0,1,2,3,4}, $\{\otimes_5, \oplus_5\}$;

в) B={1, 2, 3, 4, 5}, β(B) – булеан B, $\{\otimes, /\}$;

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №18

Гомоморфизм и изоморфизм алгебр.

Алгебры с разными типами, очевидно, имеют существенно различное строение. Если же алгебры имеют одинаковый тип, то наличие у них сходств характеризуется с помощью вводимых ниже понятий гомоморфизма и изоморфизма.

Опр. 9 Пусть даны две алгебры $A = (K; \varphi_1, \ldots, \varphi_p)$ и $B = (M; \psi_1, \ldots, \psi_p)$ одинакового типа. *Гомоморфизмом* алгебры A в алгебру B называется отображение Г: K→M, удовлетворяющее условию

$$\Gamma(\varphi_i\ (k_{l1}, \ldots, k_{li})) = \psi_i\ (\Gamma(k_{l1}), \ldots, \Gamma(k_{li})) \qquad (1)$$

для всех i=1,…, p [l(i) - арность операций φ_i, ψ_i, которая у них по условию одинакова] и всех $k_{lr} \in K$.

!Смысл условия (1) в том, что независимо от того, выполнена ли сначала операция φ_i в A и затем произведено отображение Г, либо сначала произведено отображение Г, а затем в B выполнена соответствующая операция ψ_i, результат будет одинаков.

Опр. 10 *Изоморфизмом* алгебры A на алгебру B называется взаимно однозначный гомоморфизм.

В этом случае существует обратное отображение Γ^{-1}: M→K, также взаимно однозначное. Пусть $\Gamma(k_j) = m_j$, $m_j \in M$. Тогда $k_j = \Gamma^{-1}(m_j)$. заменим в условии (1) левые части этих равенств на правые и применим Γ^{-1} к обеим частям получившегося равенства. Так как $\Gamma^{-1}\Gamma$ является тождественным отображением $\Gamma^{-1}\Gamma(a)=a$, то получим:

$$\varphi_i(\Gamma^{-1}(m_{i1}), \ldots, \Gamma^{-1}(m_{il(i)})) = \Gamma^{-1}(\psi_i(m_{i1}, \ldots, m_{il(i)})) \qquad (2)$$

Равенство (2) - это тоже равенство (1) с заменой Г на $Г^{-1}$, элементов К на элементы М и переменной местами φ_i и ψ_i; иначе говоря, $Г^{-1}$- это изоморфизм В на А.

Если существует изоморфизм А на В, то существует изоморфизм В на А; при этом алгебры А и В называются *изоморфными*.

Примеры.

1) $\mathbf{Q}_N$- множество всех целых чисел, $\mathbf{Q}_{2N}$- множество всех четных чисел. Алгебры $(Q_N;+)$ и $(Q_{2N};+)$ изоморфны; изоморфизмом является отображение $Г_{2N}:n \rightarrow 2n$, причем условие (1) здесь имеет вид 2(a+b)=2a+2b. Поскольку $Q_{2N} \subset Q_N$, то $Г_{2N}$ - изоморфизм $(Q_N;+)$ в себя. Отображение $Г_{-n}:n \rightarrow (-n)$ является для алгебры $(Q_N;+)$ автоморфизмом; условие (1) здесь имеет вид (-a)+(-b)== -(a+b). Для алгебры $(Q_N;*)$ $Г_{-n}$ не является автоморфизмом, т.к. $(-a)*(b) \neq -(a*b)$.

Задание 3.

Определить изоморфны ли алгебры:

а) $A=(\mathbf{Z}; +)$ $B=(\mathbf{N_0}; +)$, $Г(x)=|x|$;

б) $A=(\mathbf{Z}_+; +)$ $B=(\mathbf{Z}_+; \times)$, $Г(x)=\log x$;

в) $A=(\mathbf{N_0}; +)$ $B=(\mathbf{N_{2n}}; +)$, $Г(x)=2x$;

г) $A=(\mathbf{N_0}; +)$ $B=(\mathbf{N_{2n}}; \times)$, $Г(x)=2x$;

д) $A=(\mathbf{N}; +)$ $B=(\mathbf{N_5}; \oplus_5)$, $Г(n)$=остаток от деления n на 5, $Г:\mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N_5}$**;**

е) $A=(\mathbf{N}; +)$ $B=(\mathbf{N_2^n}; \times)$, $Г(x)=2^x$;

ж) $A=(\mathbf{N}; \times)$ $B=(\mathbf{N_3}; \otimes_3)$, $Г(n)$=остаток от деления n на 3, $Г:\mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N_3}$**;**

з) $A=(\beta(U); \cup, \cap)$ $B=(B_3; \vee, \&)$, G: $\beta(U) \rightarrow B_3$, $|U|=3$.

Задание 4.

Используя изоморфизм алгебр показать на примере:

1) $(\beta(U); \cup, \cap, \neg)$ и $(B_n; \vee, \&, \urcorner)$ для А, В$\subseteq U$; A={a,i,j}; B={h,b,d} если U={a,b,c,d,e,f,g,h,i,j};

2) $(\beta(U); \cup, \cap, \neg)$ и $(B_n; \vee, \&, \urcorner)$ для А, В $\subseteq U$; A=$\varnothing$; B={1,3,5} если U={1,2,3,4,5};

3) $(\beta(U); \cup, \cap, \neg)$ и $(B_n; \vee, \&, \urcorner)$ для А, В$\subseteq U$; A= U; B=$\varnothing$ если U={ Θ,Σ,Υ,Ω,Ψ};

Задание 5.

1) Пусть заданы алгебры $I=(\mathbf{N_4}; \otimes_4)$ и $J=(\mathbf{N_4}; \oplus_4)$. Проверить является ли отображение $Г = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, гомоморфизмом и изоморфизмом?

2) Пусть заданы алгебры I=($\mathbf{N}_4$; ♣) и J=($\mathbf{N}_4$; ♠), где операции заданы таблицами Кели:

♣	0	1	2	3
0	3	3	1	2
1	2	2	3	1
2	2	2	0	1
3	1	0	1	0

♠	0	1	2	3
0	1	0	0	2
1	2	3	3	0
2	3	0	0	2
3	2	2	1	1

Проверить является ли отображение $\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, гомоморфизмом и изоморфизмом?

3) Пусть заданы алгебры I=($\mathbf{N}_4$; ~) и J=($\mathbf{N}_4$; *), где операции заданы таблицами Кели:

~	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

*	0	1	2	3
0	2	1	2	1
1	0	3	0	3
2	3	1	2	0
3	2	3	0	1

Проверить является ли отображение $\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, гомоморфизмом и изоморфизмом?

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №19

АЛГЕБРА ЛОГИКИ

Функции алгебры логики

Опр. 1 *Функцией алгебры логики* (логической функцией) от n переменных называется n-арная операция на B. Итак, логическая функция f($x_1, \ldots, x_n$) – функция принимающая значения 0 и 1.

Множество всех логических функций обозначается P_2, множество всех логических функций n переменных - $P_2(n)$.

Всякая логическая функция n переменных может быть задана *таблицей истинности*, в левой части которой перечислены все 2^n наборов значений переменных (двоичных векторов длины n), в правой части – значения функции на этих наборах.

Наборы, на которых логическая функция f=1, называют единичными наборами функции f, наборы на которых f=0 называют нулевыми наборами f.

В таблице наборы расположены в лексико-графическом порядке, который совпадает с порядком возрастания наборов. При любом фиксированном упорядочении наборов логическая функция n переменных полностью определяется вектор-столбцом значений функции.

Утверждение

$|P_2(n)| = 2^{2^n}$.

Логические функции одной переменной

Табл.1

x	φ_0	φ_1	φ_2	φ_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Функции φ_0 и φ_3 - константы 0 и 1 соответственно (значения функций не зависят от значения переменной, и, переменная x для них несущественна).

Функция φ_1 “повторяет” x: φ_1(x)=x.

Функция φ_2 называется отрицанием x (функция НЕ) и обозначается $\bar{x}$, $\neg x$. Ее значение противоположно значению x.

Логические функции двух переменных

Табл.2

x_1	x_2	ψ_0	ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_4	ψ_5	ψ_6	ψ_7	ψ_8	ψ_9	ψ_{10}	ψ_{11}	ψ_{12}	ψ_{13}	ψ_{14}	ψ_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
					& $\wedge$ $\bullet$			$\oplus$ Δ	$\vee$ +	$\downarrow$	$\equiv$ $\approx$				$\rightarrow$ $\supset$	|	

Функции константы 0 и 1 - ψ_0 и ψ_{15} (функции с двумя несущественными переменными). Формально эти функции отличаются от φ_0 и φ_3. Все функции в табл.1 – унарные операции на B, а все функции в табл.2 – бинарные операции на B.

Функция $\psi_1(x_1, x_2)$ называется *конъюнкцией* x_1 и x_2. Значение функции равно 1, только если x_1 и x_2 равны 1, поэтому ее называют часто функцией И. Еще одно название функции – логическое умножение, поскольку ее таблица совпадает с таблицей обычного умножения для чисел 0 и 1.

Функция $\psi_7(x_1, x_2)$ называется *дизъюнкцией* x_1 и x_2. Она равна 1, если x_1 или x_2 равен 1. Поэтому ее называют функцией ИЛИ.

Функция $\psi_6(x_1, x_2)$ называется *сложение по модулю 2* (*исключающее или*). Она равна 1, когда значения аргументов различны, и равна 0, когда они равны. Поэтому функцию иногда называют неравнозначностью.

Функция $\psi_9(x_1, x_2)$ называется *эквивалентностью или равнозначностью*. Она равна 1, когда значения аргументов равны, и равны 0, когда они различны.

Функция $\psi_{13}(x_1, x_2)$ – *импликация*, читается «если x_1, то x_2)».

Функция $\psi_8(x_1, x_2)$ – *стрелка Пирса*.

Функция $\psi_{14}(x_1, x_2)$ – *штрих Шифера*.

Остальные функции специальных названий не имеют и легко выражаются через перечисленные.

В функциях ψ_3 и ψ_{12} переменная x_2 фиктивна ($\psi_3(x_1, x_2)=x_1$, $\psi_{12}(x_1, x_2)=\neg x_1$). В функциях ψ_5 и ψ_{10} фиктивна переменная x_1 ($\psi_5(x_1, x_2)= x_2$, $\psi_{10}(x_1, x_2)=\neg x_2$). Таким образом, из 16 функций двух переменных шесть функций имеют фиктивные переменные. С ростом n доля функций, имеющих фиктивные переменные, убывает и стремится к нулю.

Задание 1.

Для функций построить таблицы истинности

1) $f(x_1, x_2, x_3) = ((\neg x_1 \& x_2) \mid x_2) \vee (x_3 \to \neg x_1 \& x_2)$;

2) $f(x_1, x_2, x_3) = ((\neg x_1 \oplus x_2) \mid (x_2 \to (x_3 \wedge x_2))$;

3) $f(x_1, x_2, x_3) = (\neg x_1 \vee x_1) \to x_2 \wedge (x_3 \downarrow x_1)$;

4) $f(x_1, x_2, x_3) = (\neg x_3 \& x_3) \to (x_2 \approx \neg x_3) \downarrow x_1$;

5) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \approx \neg x_2) \to ((x_1 \vee x_3) \downarrow x_2)$;

6) $f(x_1, x_2, x_3) = (\neg x_1 \to x_2) \to ((x_3 \oplus \neg x_3) \mid x_2)$;

7) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \to x_2 \mid x_3) \& (x_1 \oplus \neg x_2 \to x_3)$;

8) $f(x_1, x_2, x_3) = \neg (x_1 | x_2 \downarrow x_3) \vee (x_1 \& x_2 \to x_3)$;

9) $f(x_1, x_2, x_3) = \neg (x_1 \vee x_2) \approx (x_1 \& x_2) \wedge 1$;

10) $f(x_1, x_2, x_3) = (\neg (x_1 \vee x_2 \& x_3) \mid (x_2 \& x_3)) \to 1$.

Понятие формулы.

Пусть дано множество (конечное или бесконечное) $\Sigma = \{f_1, \ldots, f_m, \ldots\}$. Символы переменных $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ будем считать формулами глубины 0.

Опр. 3 Формула F имеет *глубину* k+1, если F имеет вид $f_i(F_1, \ldots, F_{ni})$, где $f_i \in \Sigma$, n_i - число аргументов f_i, $F_1, \ldots, F_{ni}$ - формулы, максимальная из глубин которых равна k. $F_1, \ldots, F_{ni}$ - называются *подформулами* F; f_i

называется *внешней или главной* операцией формулы F. Все подформулы формул $F_1, \ldots, F_{ni}$ также называют подформулами F.

Например, $f_2(x_1, x_2, x_3)$ – это формула глубины 1, а $f_3(f_1(x_3, x_1), f_2(x_1, f_3(x_1, x_2)))$ – формула глубины 3, содержащая одну подформулу глубины 2 и две подформулы глубины 1.

В дальнейшем конкретные формулы будут иметь привычный вид, при котором знаки функций стоят между аргументами (такую запись называют *инфиксной*).

Например, если f_1 обозначает дизъюнкцию, f_2 - конъюнкцию, а f_3 - сложение по mod 2, то приведенная выше формула примет вид:

$$(x_3 \vee x_1) \oplus (x_1 \&(x_1 \oplus x_2)).$$

Определение 4. Все формулы, содержащие только символы переменных, скобки и знаки функций из множества Σ, называются *формулами над* Σ.

Булева алгебра функций и эквивалентные преобразования в ней.

Всякая алгебра типа (2,2,1) наз. булевой алгеброй, если ее операции удовлетворяют соотношениям 1-12.

Теорема о булевой алгебре логики Алгебра (P_2, &, $\vee$, $\neg$), основным множеством которой является множество логических функций, а операциями дизъюнкция, конъюнкция и отрицание (причем операции удовлетворяют следующим тождествам 1-12), называется *булевой алгеброй логических функций*.

Свойства булевых операций

1) ассоциативность $\vee$ и &
2) коммутативность $\vee$ и &
3) дистрибутивность $\vee$ относительно &
   дистрибутивность & относительно $\vee$
4) идемпотентность $\vee$ и &
5) закон двойного отрицания
6) свойства констант
7) правила де Моргана
8) тождества Порецкого
9) закон противоречия: $x\&\neg x = 0$
10) закон «исключенного третьего»: $x \vee \neg x = 1$
11) поглощение $x \vee xy = x$; $x(x \vee y) = x$
12) склеивание $xy \vee x\neg y = x$
13) обобщенное склеивание $xz \vee y\neg z \vee xy = xz \vee y\neg z$.

Эквивалентные преобразования являются мощным средством доказательства эквивалентности формул.

Задание 2.

Доказать следующие тождества

1) ассоциативность $\vee$ и &
2) коммутативность $\vee$ и &
3) дистрибутивность $\vee$ относительно &
   дистрибутивность & относительно $\vee$
4) идемпотентность $\vee$ и &
5) правила де Моргана
6) закон противоречия
7) закон «исключенного третьего»
8) поглощение $x \vee xy = x$; $x(x \vee y) = x$
9) склеивание $xy \vee x\neg y = x$
10) тождества Порецкого

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №20

Разложение функций по переменным. СДНФ

Введем обозначение $x^0 = \neg x$, $x^1 = x$. Пусть α - параметр, равный 0 или 1. Тогда $x^\alpha = 1$, если $x = \alpha$, и $x^\alpha = 0$, если $x \neq \alpha$.

Лемма1.(о разложении по переменной) Всякая логическая функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ может быт представлена в следующем виде:

$$f(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n) = \bigvee_{\alpha 1 \ldots \alpha m} x_1^{\alpha_1} \ldots x_m^{a_m} f(\alpha_1, \ldots, \alpha_m, x_{m+1}, \ldots, x_n),$$

(1)

где m<=n, дизъюнкция берется по всем 2^m наборам значений переменных $x_1, \ldots, x_m$.

Опр. 1 Равенство (1) называется разложением по переменным $x_1, \ldots, x_m$.

Например, при n=4, m=2 разложение (1) имеет вид:

$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \neg x_1 \neg x_2 f(0, 0, x_3, x_4) \vee \neg x_1 x_2 f(0, 1, x_3, x_4) \vee x_1 \neg x_2 f(1, 0, x_3, x_4) \vee x_1 x_2 f(1, 1, x_3, x_4)$.

При m=1 получаем разложение функции по одной переменной $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \neg x_1 f(0, x_2, \ldots, x_n) \vee x_1 f(1, x_2, \ldots, x_n)$. Аналогичное разложение справедливо для любой из n переменных.

Опр. 2 Разложение по всем n переменным (m=n). При этом все переменные в правой части (1) получают фиксированные значения и функции в конъюнкциях правой части становятся равными 0 или 1, что дает:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{f(\sigma 1, \ldots, \sigma n) = 1} x_1^{\sigma 1} \ldots x_n^{\sigma n}, \qquad (2)$$

где дизъюнкция берется по всем наборам $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, на которых f=1.

Такое разложение называется *совершенной дизъюнктивной нормальной формой* (СДНФ) функции f.

СДНФ функции f содержит ровно столько конъюнкций, сколько единиц в таблице f; каждому единичному набору (σ_1, …, σ_n) соответствует конъюнкция всех переменных, в которой x_i взято с отрицанием, если σ_i=0, и без отрицания, если σ_i =1. Т. о., существует взаимно однозначное соответствие между таблицей функции f и ее СДНФ, и, следовательно, СДНФ для всякой логической функции единственна (с точностью до порядка букв и конъюнкций).

Определения

Опр.1 Пусть $V_n=\{x_1,\neg x_1,x_2,\neg x_2,\ldots, x_n,\neg x_n\}$ и пусть v($\neq\varnothing$)$\subset V_n$. *Элементарной конъюнкцией*, порожденной подмножеством v, называется конъюнкция всех элементов v.

Опр.2 Элементарная конъюнкция называется *совершенной*, если в нее не входит никакая из переменных одновременно с отрицанием этой переменной.

Опр.3 Элементарная конъюнкция называется полной, если в ней представлены все переменные.

Опр.4 *Дизъюнктивной нормальной формой* называется (ДНФ) называется дизъюнкция элементарных конъюнкций.

Опр.5 *Конъюнктивной нормальной формой* (КНФ) называется конъюнкция элементарных дизъюнкций.

Задание 3.

Определить какие формулы алгебры логики являются СДНФ и СКНФ, ДНФ, КНФ:

1.f(x,y,z,t)= ¬xyz¬t∨ x¬yzt∨x¬yz¬t ∨ xyzt ∨ xy¬zt

2.f(x,y,z,t)=(¬x∨¬y∨¬z∨¬t)∧(¬x∨¬y∨¬z∨t)∧(¬x∨¬y∨z∨t)∧ (¬x∨y∨z∨t)∧(x∨¬y∨¬z∨¬t)

3. f(x,y,z,t)= ¬x¬y¬z¬t ∨¬x¬y¬zt ∨¬x¬yzt ∨¬xyzt ∨x¬yzt ∨xy¬zt ∨ xyz¬t ∨xy¬z¬t ∨x¬y¬zt ∨¬xyz¬t

4. f(x,y,z,t)=xy¬zt ∨ xyz¬t ∨¬xyzt ∨ x¬yzt

5. f(x,y,z,t)=x∨y∨¬z∨¬t

6. f(x,y,z,t)= ¬(x&y&z&t)∨(x&y&z&t)

7. f(x,y,z,t)= (x∨y∨z∨t) ∧¬(x∨y∨z)

8. f(x,y,z,t)= ¬t

9. f(x,y,z,t)= x∨y∨z∨t

10. f(x,y,z,t)= x∧y∧¬z∧¬t

Принцип построения СДНФ/СКНФ по таблице истинности функции

n	x1 x2 x3	f(x1,x2,x3)

0	0	0	0	f1
1	0	0	1	f2
2	0	1	0	f3
3	0	1	1	f4
4	1	0	0	f5
5	1	0	1	f6
6	1	1	0	f7
7	1	1	1	f8

1. Рассматриваем наборы на которых значения функции f_i равны 1.

2. Выписываем полные элементарные конъюнкции по наборам (x_1,x_2,x_3) на которых значения функции f_i = 1 по правилу: переменные, которые в наборе имеют значение 0 в полную элементарную конъюнкцию входят с отрицанием, переменные, которые в наборе имеют значение 0 в полную элементарную конъюнкцию входят без отрицания.

3. Полные элементарные конъюнкции соединяем знаками дизъюнкций. (Для функции тождественно-ложной СДНФ построить нельзя, т.к. нет значений функции равных 1).

Аналогично строится СКНФ, только с точностью наоборот.

Задание 4.

Для всех функций двух переменных построить соответствующие им СДНФ и СКНФ.

Задание 5.

Для следующих функций построить СДНФ и СКНФ:

1.f(x,y,z,t)= ¬x¬t∨ x¬yt∨¬yz¬t ∨ xyz ∨ x¬zt

2. f(x,y,z,t)=(¬y∨¬z)∧(¬x∨¬y)∧(¬x∨z)∧(¬x∨t)∧(¬y∨¬t)

3. f(x,y,z,t)=¬x¬z¬t ∨¬x¬yt ∨¬yzt ∨¬xyz ∨x¬yt ∨y¬zt∨yz¬t ∨x¬z¬t ∨x¬zt ∨¬xz¬t

4. f(x,y,z,t)=y¬zt ∨ xz¬t ∨¬xyt ∨ x¬yz

5. f(x,y,z,t)=x∨y∨¬z∨¬t

6. f(x,y,z,t)= ¬(x&y&z&t)∨(x&y&z&t)

7. f(x,y,z,t)= (x∨y∨z∨t) ∧¬(x∨y∨z)

8. f(x,y,z,t)=y¬z¬t ∨¬x¬yz ∨¬x¬y¬z ∨¬xyt ∨x¬yz ∨y¬zt ∨xz¬t ∨xyt ∨x¬yt ∨¬xz¬t

9. f(x,y,z,t)=¬x¬y ∨¬xt ∨zt ∨¬xy ∨x¬t ∨y¬z ∨y¬t ∨¬z¬t ∨¬zt ∨¬xz

10. f(x,y,z,t)=¬x¬z¬t ∨¬x¬y¬z ∨¬x¬yt ∨¬xyt ∨¬yzt ∨xy¬z ∨xz¬t ∨ xz¬t ∨y¬zt ∨xyt

11. 10. f(x,y,z,t)= x¬z¬t ∨¬xy¬z ∨¬x¬y¬t ∨¬xy¬t ∨yzt ∨¬xyz ∨x¬zt ∨¬xzt ∨¬yzt ∨¬x¬y¬t

12. 10. f(x,y,z,t)=¬x¬z¬t ∨¬x¬y¬z ∨¬x¬yt ∨¬xyt ∨¬yzt ∨xy¬z ∨xz¬t ∨xz¬t ∨y¬zt ∨¬xy¬t

13. 10. $f(x,y,z,t)=\neg xz\neg t \vee\neg x\neg yz \vee\neg xyt \vee\neg x\neg yt \vee\neg yzt \vee x\neg yz \vee x\neg zt \vee x \neg zt \vee yz\neg t \vee xyt$

14. 10. $f(x,y,z,t)=\neg x\neg z\neg t \vee\neg x\neg y\neg z \vee\neg x\neg yt \vee\neg xyt \vee\neg yzt \vee xy\neg z \vee xz\neg t \vee xz\neg t \vee y\neg zt \vee\neg xy\neg t$

15. 10. $f(x,y,z,t)=\neg xzt \vee\neg x\neg y\neg z \vee\neg x\neg yt \vee\neg yzt \vee xy\neg z \vee x\neg zt \vee\neg yzt \vee xyt$

Для функций построить СДНФ или СКНФ, используя законы 0 и 1.

Задание 6.

Методом Блейка-Порецкого упростить СДНФ. Построить для упрощенной формы схему из логических элементов.

Задание 7.

Привести функции к указанному базису

ПРАКТИЧЕСКИЕ РАБОТЫ №21-23

Для практических работ использовать материалы:
Москинова Г.И. Дискретная математика. Математика для менеджера в примерах и упражнениях: Уч.пособие. – М.: Логос, 2000. - 240с.

ПРАКТИЧЕСКИЕ РАБОТЫ №24-26

Для практических работ использовать материалы:
Семичевская Н.П. Введение в теорию графов: практикум по дискретной математике. Уч. методич. пособие, Благовещенск, Амурский гос. ун-тет, 2002.

8. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Контрольная работа №1

Вариант 1

1. Определить свойства бинарных отношений, заданных на множестве M $=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$: $R1=\{(a,b) \mid$ 'a делитель (a+b)'$\}$, $R2=\{(A, B) \mid$ '$A\subseteq B$', $A, B\in \beta(M)\}$. Транзитивность доказывать. Составить матрицы бинарного отношения для R1, $R1^{-1}$.

2. Определить свойства бинарных операций © и ©˜, заданных таблицами Кэли:

©	a	b
a	a	a
b	b	a

©˜	a	b
a	b	a
b	a	b

3. Упростить выражение: $\neg(A\cap\neg B)\cup B$

4. Определить композицию функций: $f(x) = x^2 + x + 1$, $g(x) = \log_2(x^2 +1)$.

Вариант 2

1. Определить свойства бинарных отношений, заданных на множестве M $=\{2, 4, 6, 8\}$: $R1=\{(x,y) \mid$ 'x меньше (2+y)'$\}$, $R2=\{(A, B) \mid$ '$A\cap B\neq\varnothing$', $A, B\in\beta(M)\}$. Транзитивность доказывать. Составить матрицы бинарного отношения для R1, $R1^{-1}$, дополнение R1.

2. Определить композицию функций: $f(x) = x^3 - 1$, $g(x) = \sqrt{x}$.

3. Задать таблицами Кэли операции булевой алгебры множеств $(\beta(U); \cup, \cap, \neg)$ при $|U|=2$.

4. Доказать тождество $(X\cup Y)\cap Z = (X\cup Z) \cap Y$.

Вариант 3

1. На множестве $\beta(M)$ - булеан $M=\{a, b, c\}$ задано бинарное отношение $R=\{(X,Y) \mid X \cap Y=\varnothing\}$. Определить отношение R списком и матрицей бинарного отношения. Определить матрицы бинарных отношений R^{-1} и дополнение R.

2. Задать таблицами Кэли бинарные операции сложение по модулю 3 ($\oplus_3$) и умножение по модулю 3 ($\otimes_3$), заданные на множестве $N_3 = \{0, 1, 2\}$.

3. Доказать тождество $(X\cup Y)\setminus Z = (X\setminus Z)\cup(Y\setminus Z)$.

4. Определить какие из приведенных отношений являются отношениями эквивалентности, выписывать проверенные свойства отношений эквивалентности:
$R1=\{(x,y)|\ x\geq y\}$;
$R2=\{(x,y)|\ x+y = 2x\}$;
R3={(x,y)| ‘x делитель y’};
R4={(x,y)| ‘x живет с y на одном этаже’}.

Вариант 4

1. На множестве $X=\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ задано бинарное отношение $R=\{(x,y)|\ x+y\leq 3\}$. Определить отношение R списком и матрицей бинарного отношения. Определить свойства R.

2. Проиллюстрировать на примерах коммутативность бинарных операций над множествами $A=\{2,4,6\}$ и $B=\{1,3,5\}$.

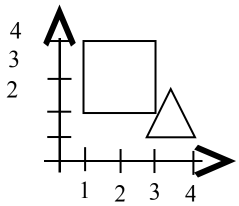
3. Показать на диаграмме Эйлера-Виенна $A\cap B \subseteq A \subseteq A\cup B$, доказать, что верны включения.

4. Определить какие из приведенных отношений являются отношениями нестрогого порядка, выписывать проверенные свойства отношений эквивалентности:
$R1=\{(x,y)|\ x\geq y\}$;
$R2=\{(x,y)|\ x+y = 2x\}$;
R3={(x,y)| ‘x делитель y’};
R4={(x,y)| ‘x живет с y на одном этаже’}.

Вариант 5

1. На множестве $X=\{0, 1, 2, 3, 4\}$ задано бинарное отношение R={(x,y)| ‘x+y делится на 3 без остатка’}. Определить отношения R и R^{-1} матрицей бинарного отношения. Определить свойства R, является ли отношение R отношением эквивалентности.

2. Соответствие G задано графически, в квадрате $[1,4]\times[1,4]$. Найти образы и прообразы отрезков [2,3], [1,2], [3,4]. Проверить свойства соответствия G.



3. Найти композицию преобразований α:A→A, β:A→A и записать α^1:

$$\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix},\quad \beta = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

4. Упростить $\neg(\neg A\cap(B\cup C))$.

Вариант 6

1. Определить свойства бинарных отношений, заданных на множестве M ={1, 2, 3, 4, 5}: R1={(a,b) | ‘a+b<5’}, R2={(A, B) | ‘‘A∩B=∅‘, A, B∈β(M)}. Транзитивность доказывать. Составить матрицы бинарного отношения для дополнения R1, $R1^{-1}$.

2. Определить свойства бинарных операций $\oplus_3$ и $\otimes_3$, заданных таблицами Кэли:

$\oplus_3$	**0**	**1**	**2**
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1
$\otimes_3$	**0**	**1**	**2**
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

3. Доказать, что если отношения R1 R2 рефлексивны, то рефлексивно отношение R1∩R2. (доказывать используя определение рефлексивности)

4. Определить композицию функций: $f(x) = (x + 1)^2$, $g(x) = \ln(x^2 +1)$.

Контрольная работа №2

Вариант 1

1. Определить свойства бинарных операций © и ©˜, заданных таблицами Кэли:

©	a	b
a	a	a
b	b	a
©˜	a	b
a	b	a
b	a	b

2. Записать таблицу истинности для функции: $(x\oplus y)\vee\neg z$

3. Формулу $x\to\neg y$ записать в базисе $\{\downarrow\}$.

Вариант 2

1. Задать таблицами Кэли операции булевой алгебры множеств (β(U); ∪, ∩, ¬) при |U|=2 (Множество U задать самим).

2. Записать таблицу истинности для функции: $x\to(\neg y\oplus z)$

3. Формулу $\neg x\to y$ записать в базисе $\{\downarrow\}$.

Вариант 3

5. Задать таблицами Кэли бинарные операции сложение по модулю 3 ($\oplus_3$) и умножение по модулю 3 ($\otimes_3$), заданные на множестве $N_3 = \{0, 1, 2\}$.

2. Записать таблицу истинности для функции: $\neg x \oplus (\neg y \downarrow z)$

3. Формулу $\neg(x \to y)$ записать в базисе $\{\,|\,\}$.

Вариант 4

1. Проиллюстрировать на примерах коммутативность бинарных операций над множествами A={2,4,6} и B={1,3,5}.

2. Записать таблицу истинности для функции: $\neg x \wedge (y \,|\, \neg z)$

3. Формулу $\neg y \oplus z$ записать в базисе $\{\,|\,\}$.

Вариант 5

1. Определить свойство дистрибутивности бинарных операций $\oplus_3$ и $\otimes_3$, заданных таблицами Кэли:

$\oplus_3$	**0**	**1**	**2**
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1
$\otimes_3$	**0**	**1**	**2**
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

2. Записать таблицу истинности для функции: $\neg x \wedge y \oplus \neg z$

3. Формулу $x \to y$ записать в базисе $\{\,|\,\}$.

9. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИХ РАБОТ

Решение варианта РГР №1
ОПИСАНИЕ МНОЖЕСТВ

1. Задайте множество M с помощью характеристического предиката: множество натуральных четных чисел, кратных 3.

Решение

Для того чтобы задать множество, с помощью характеристического предиката надо порождающую процедуру или правило представить в виде предиката: $M=\{m|\ (m=2k,\ k\in \mathbf{N})\ \&\ (m \text{ делится на 3 без остатка});\ m\in \mathbf{N}\}$, если представить элементы множества M = 6, 12, 18, 24, 30, 36, … Порождающая процедура для этого множества записывается как $M = \{m|\ m=6n,\ n,m\in \mathbf{N}\}$.

2. Задайте перечислением элементов следующие множества:

Решение

а) $S=\{s \mid s = k+l,\ k,l$ – делители числа $24\}$;
Перечислим делители числа 24, это множество D = {1, 2, 3, 4, 6, 8, 12}, тогда множество S получится из множества D как различные суммы его элементов S = {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 14, 15, 16, 18, 20}.

б) $X=\{x \mid (x-5)^2(x-3)(x-7)(x+1)(x^2-144) = 0\}$;
Множество X - это множество корней уравнения $(x-5)^2(x-3)(x-7)(x+1)(x^2-144)=0$, данное уравнение представлено в виде сомножителей, поэтому множество X={-12,-1, 5, 3, 7, 12}.

в) множество натуральных отрицательных чисел.

Множество натуральных отрицательных чисел есть ∅, т.к. натуральные числа это только целые положительные числа.

3. Записать множество порождающей процедурой:

Решение

а) {1,2,3,…};
$A=\{a|\ a+1,\ a\in \mathbf{N}_0\}$

б) {2, 4, 8, 16, 32, …,1024};
$B=\{b|\ 1)\ b=2,\ b\in B;\ 2)\ b= b*2,\ b\in B\}$

б) множество чисел кратных 3.

$C=\{c \mid c=3*n,\ n\in \mathbf{N}\}$

4. Верны ли утверждения:

Решение

а) $A=\{1,2,\{3,4,5\},\{10\}\}$, $|A|=6$, $|\beta(A)|=2^6$;

Неверно, т.к. содержит 4 элемента, два из которых есть множества.

б) $\{2\}\in\{1,2,3,4,5,6\}$;

Неверно, т.к. множество не содержит элементов, которые есть множества.

в) $\{(0,0),(1,1)\}\subset B_n(U)$, U - двухэлементное множество, n=2;

Неверно, т.к. множество $B_n(U)$ содержит не все векторы-наборы для двухэлементного множества, $B_n(U)=\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$.

г) $[0,1)\subseteq\mathbf{R}$, $|[0,1)|=\infty$.

Верно, по теореме о мощности отрезка.

5. Найти все подмножества следующего множества: D={слон, лось, зубр, зебра}; сколько подмножеств содержат только слова зебра и слон; какова мощность булеана множества D ($|\beta(D)|$)?

Решение

№	B_n	$\beta(D)$ –булеан D
0	(0 0 0 0)	$\{\varnothing\}$
1	(0 0 0 1)	{ зебра }
2	(0 0 1 0)	{ зубр}
3	(0 0 1 1)	{ зубр, зебра }
4	(0 1 0 0)	{ лось}
5	(0 1 0 1)	{ лось, зебра }
6	(0 1 1 0)	{ лось, зубр}
7	(0 1 1 1)	{ лось, зубр, зебра }
8	(1 0 0 0)	{ слон }
9	(1 0 0 1)	{ слон, зебра }
10	(1 0 1 0)	{ слон, зубр}
11	(1 0 1 1)	{слон, зубр,зебра }
12	(1 1 0 0)	{слон, лось}
13	(1 1 0 1)	{слон, лось, зебра }
14	(1 1 1 0)	{слон, лось, зубр}
15	(1 1 1 1)	{ слон, лось, зубр, зебра }

Одно подмножество множества D содержит только слова зебра и слон, его порядковый номер 9; мощность булеана множества D $|\boldsymbol{\beta}(D)| = 2^4 = 16$, т.е. всего 16 подмножеств можно сформировать для множества D.

ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ

6. Заданы числовые множества X – множество простых чисел, Y – множество четных чисел. Определить множества: $X\cap Y$, $X\cup Y$, $X\backslash Y$.

Решение

а) $X\cap Y=\{2\}$, т.к. множество простых чисел пересекается с множеством четных чисел, только по одному элементу, простые числа – это числа, которые делятся без остатка на 1 или на себя и нет больше для этих чисел делителей, а четные числа делятся без остатка на 2, на 1 и на себя, также для этих чисел существует ряд делителей отличных от 1, 2 и самого четного числа;

б) $X\cup Y$ – это множество простых и четных чисел;

в) $X\backslash Y = X$ – множество простых чисел.

7. Доказать:

а) если $A\cup B\cup C=U$ (U-универсальное множество) и $A\cap B=\varnothing$, $A\cap C=\varnothing$, $B\cap C=\varnothing$, то $\rceil A=B\cup C$;

Решение

Для доказательства утверждения $\rceil A=B\cup C$, при выполнении условий задачи запишем формулу $A\cap(B\cup C)= A\cap\varnothing = \varnothing$ получаем, что множество A не пересекается с множеством $(B\cup C)$, а при объединении этого множества с множеством A получаем множество универсальное U. Из определения операции дополнения множества D (до универсального множества U) $\rceil D = U\backslash D$, $D\cap\rceil D=\varnothing$, $D\cup\rceil D=U$. Получаем, что множество $B\cup C$ является дополнением множества A до универсального или $\rceil A= B\cup C$

б) $X \backslash (Y \backslash X) = X$.

Покажем, что множество $X \backslash (Y \backslash X)$ равно множеству X. Для любого элемента $a \in X \backslash (Y \backslash X)$ это значит, что $a \in X$ и $a \notin (Y \backslash X)$. Получаем, что $a \in X$ и $a \notin Y$. Из этого следует, что $a \in X$.

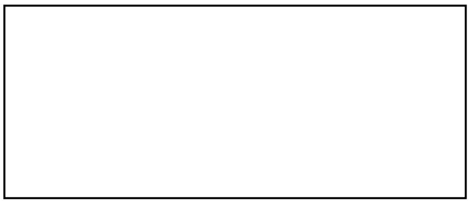
Если $a \in X$, то $a \in X \backslash (Y \backslash X)$.

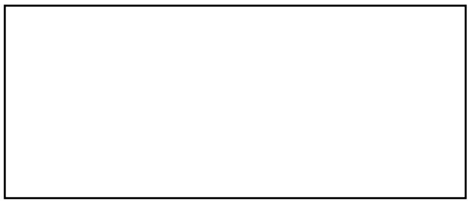
Следовательно два множества $X \backslash (Y \backslash X)$ и X равны.

8. С помощью диаграмм Эйлера-Виенна проверить, верны ли следующие утверждения:

Решение

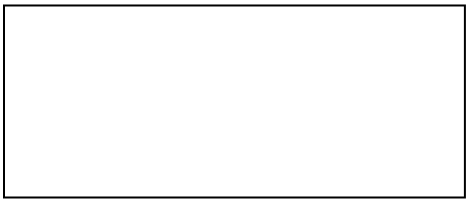
а) $A\cup B\cap C = (A\cap C) \cup (A\cup B)$;

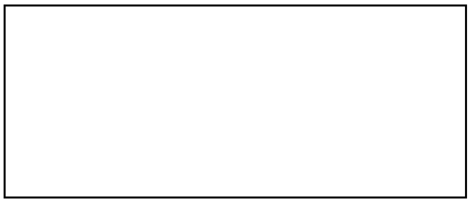




$A \cup B \cap C$ $(A \cap C) \cup (A \cup B)$

б) $(A \cap B) \setminus C = A \setminus C \cap B \setminus C$;





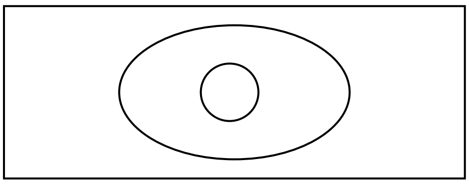
$(A \cap B) \setminus C$ $A \setminus C \cap B \setminus C$

9. Пользуясь только определениями операций над множествами и определением равенства множеств, доказать: $\varnothing \cap A = \varnothing$.

Решение

Докажем $\varnothing \cap A = \varnothing$, используя определение операции пересечения и утверждение о равенстве двух множеств. Пусть $a \in \varnothing \cap A$, по определению операции $\cap$ это значит, что $a \in \varnothing$ и $a \in A$, ($a \in \varnothing$ не возможно, т.к. пустое множество не содержит элементов) из этого следует, ▲ что множество пустое.

10. Какое множество изображено заштрихованной фигурой?



Решение $(I \setminus A) \cup B$

ОТНОШЕНИЯ, СООТВЕТСТВИЯ, ФУНКЦИИ, ОПЕРАЦИИ

1. Проверить свойства бинарных операций (сложение, умножение) $\varphi(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ и $\gamma(x_1, x_2) = x_1 * x_2$ (ассоциативность, коммутативность, дистрибутивность), заданных на конечном множестве $M = \{1,2,3,4,5,6\}$. Задать операции таблицами Кэли.

Решение

Таблицы Кэли.

$\varphi(x_1, x_2)$	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$\gamma(x_1, x_2)$	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

Коммутативность $\varphi(x_1, x_2)$: $x_1+x_2= x_2+x_1$, для любых $x_1, x_2 \in$ M, (2+5 = 5+2)

Ассоциативность $\varphi(x_1, x_2)$: $(x_1+x_2) + x_3 = x_1+ (x_2 + x_3)$, для $x_1, x_2 \in$ M.

Дистрибутивность $\varphi(x_1, x_2)$ относительно $\gamma(x_1, x_2)$: $(x_1* x_2) + x_3 \neq x_1+x_3 * x_2+x_3$, для $x_1, x_2 \in$ M, ((1*2)+4 $\neq$ 1+4 * 2+4, 6 $\neq$ 30). Операция $\varphi(x_1, x_2)$ не дистрибутивна относительно операции $\gamma(x_1, x_2)$.

Коммутативность $\gamma(x_1, x_2)$: $x_1 *x_2= x_2 *x_1$, для любых $x_1, x_2 \in$ M, (4*3 = 3*4)

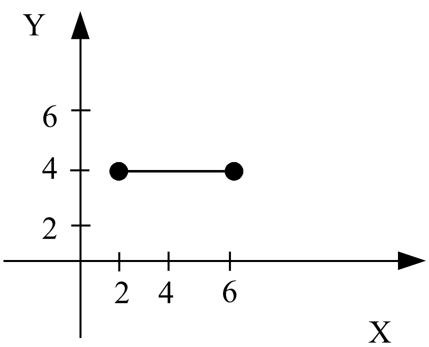
Ассоциативность $\gamma(x_1, x_2)$: $(x_1 * x_2)* x_3 = x_1 * (x_2 * x_3)$, для $x_1, x_2 \in$ M.

Дистрибутивность $\gamma(x_1, x_2)$ относительно $\varphi(x_1, x_2)$: $(x_1+ x_2) * x_3 = x_1*x_3 + x_2*x_3$, для $x_1, x_2 \in$ M, ((1+2)*3 = 1*3 + 2*3, 9 = 9). Операция $\gamma(x_1, x_2)$ дистрибутивна относительно операции $\varphi(x_1, x_2)$.

Замечание. Множество M не замкнуто относительно $\varphi(x_1, x_2)$ и $\gamma(x_1, x_2)$.

2. Пусть соответствие G1 задано на декартовой плоскости, определить его свойства:

а) G1



Решение

G1=$\{(x,y) \mid 2<=x<=6, y=4; x,y\in \mathbf{R}\}$, G1$\subseteq [2,6]\times[2,6]$

1. Соответствие G1 *всюду определено*, т.к. $пр_1 G1=[2,6]$;
2. Соответствие G1 *не сюръективно*, т.к. $пр_2 G1 \neq [2,6]$;
3. Соответствие G1 *функционально*, т.к. для любого $x \in пр_1 G1=[2,6]$ существует единственный $y \in пр_2 G1= 4$ (выполняется единственность образа);
4. При соответствие G1 не выполняется единственность прообраза образа т.к. для любого $y \in пр_2 G1= 4$ существует неединственный $x \in пр_1 G1=[2,6]$(т.е y=4 соответствуют все $x \in =[2,6]$).

3. Для функции f(x) = lg x задать несколько типов, для каждого из заданных типов функции f(x) определить свойства f(x), имеет ли f(x) обратную функцию $f^{-1}(x)$, является $f^{-1}(x)$ отображением.

Решение

f(x) = lg x;

Рассмотрим различные типы функции f .

1) Тип функции $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$, (функция всюду определена, т.е. f(x) – есть отображение; не сюръективна, не биективна)

2) Тип функции $f:\mathbf{N}\to\mathbf{R}$, (функция всюду определена, т.е. f(x) – есть отображение; не сюръективна, не биективна)

3) Тип функции $f:R_+\to N$, (функция всюду не определена, т.е. f(x) – не отображение; сюръективна, не биективна)

4) Тип функции $f:\mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$, (функция всюду определена, т.е. f(x) – отображение; сюръективна, биективна, функция имеет обратную функцию $f^{-1}(x) = 10$^y).

4. Пусть алгебры заданы $A=(N_4, \oplus_4)$ и $B=(N_4, \otimes_4)$, где $N_4 = \{0,1,2,3\}$, $\oplus_4$ - сложение по модулю 4, $\otimes_4$ - умножение по модулю 4. Является ли отображение Г: $0\to3, 1\to0, 2\to1, 3\to2$ гомоморфизмом и изоморфизмом?

Решение

Запишем тождество гомоморфизма $Г(a\oplus_4 b) = Г(a)\otimes_4 Г(b)$ и проверим его для всех элементов множества $N_4=\{0,1,2,3\}$.

Рассмотрим отображение Г : $0\to3, 1\to0, 2\to1, 3\to2$:

$Г(0\oplus_4 0=0)=\mathbf{3} \neq Г(0) \otimes_4 Г(0)=3\otimes_4 3=\mathbf{2}$; *

$Г(0\oplus_4 1=1)=\mathbf{0} = Г(0) \otimes_4 Г(1)=3\otimes_4 0=\mathbf{0}$;

$Г(0\oplus_4 2=2)=\mathbf{1} \neq Г(0) \otimes_4 Г(2)=3\otimes_4 1=\mathbf{3}$; *

$Г(0\oplus_4 3=3)=\mathbf{2} = Г(0) \otimes_4 Г(3)=3\otimes_4 2=\mathbf{2}$;

$Г(1\oplus_4 1=2)=\mathbf{1} \neq Г(1) \otimes_4 Г(1)=0\otimes_4 0=\mathbf{0}$; *

$Г(1\oplus_4 2=3)=\mathbf{2} \neq Г(1) \otimes_4 Г(2)=0\otimes_4 1=\mathbf{0}$; *

$Г(1\oplus_4 3=0)=\mathbf{3} \neq Г(1) \otimes_4 Г(3)=0\otimes_4 2=\mathbf{0}$; *

$\Gamma(2\oplus_4 2=0)=\mathbf{3} \neq \Gamma(2)\otimes_4\Gamma(2)=1\otimes_4 1=\mathbf{1}$; *
$\Gamma(2\oplus_4 3=1)=\mathbf{0} \neq \Gamma(2)\otimes_4\Gamma(3)=1\otimes_4 2=\mathbf{2}$; *
$\Gamma(3\oplus_4 3=2)=\mathbf{1} \neq \Gamma(3)\otimes_4\Gamma(3)=2\otimes_4 2=\mathbf{0}$; *

Таким образом отображение $\Gamma:A\rightarrow B$ не является гомоморфизмом, т.к. тождество гомоморфизма не выполняется (строчки помеченные символом *). Следовательно Г не является и изоморфизмом.

5. Для отношений R1, R2 определить отношения $R1^{-1}$, дополнение R1, $R2^{-1}$, дополнение R2:
   а) R1 – быть старше;
   б) R2 – {(x,y) | “x-y – четное, положительное число”; $x,y \in X$},
   X={1,2,…,9}.

Решение

а) Отношение R1 – «быть старше» определено на множестве людей обратное к нему отношение $R1^{-1}$ - «быть младше», т.к. если aR1b, т.е. a старше b, то b младше a, b $R1^{-1}$ a; дополнение R1 – “быть не старше”;

б)R2={(9,1),(7,1),(5,1)(3,1),(1,1),(8,2),(6,2),(4,2),(2,2),(9,3),(7,3),(5,3),(3,3),(8, 4),(6,4),(4,4),(9,5),(7,5), (5,5),(8,6),(6,6),(9,7),(7,7),(8,8)} отношение R2 содержит 24 пары вида (x,y) таких, что разность x-y есть четное, положительное число, включая 0; обратное к R2 отношение $R2^{-1}$ ={(x,y) | “ y - x – четное, положительное число”; $x,y \in X$}, таким образом отношение $R2^{-1}$ содержит 24 пары вида (y,x);

$R2^{-1}$ ={(1,9),(1,7),(1,5)(1,3),(1,1)(2,8),(2,6),(2,4),(2,2),(3,9),(3,7),(3,5),(3,3),(4,8),(4, 6),(4,4),(5,9),(5,7), (5,5),(6,8),(6,6),(7,9),(7,7),(8,8)}; дополнение R2 до множества X^2 содержит все те пары элементов, которые не вошли в R2, таких пар 57 (9,2),(7,2),…(9,8), т.е. дополнение R2 ={(x,y) | “x-y – нечетное, положительное число”; $x,y \in X$}, X={1,2,…,9}.

Решение варианта РГР №2

АЛГЕБРА ЛОГИКИ

1. Построить таблицу истинности логической функции
   $f(x,y,z)= (\neg z\rightarrow y) \oplus ((y\rightarrow x)\&z)$;

для заданной функции f построить логическую схему.

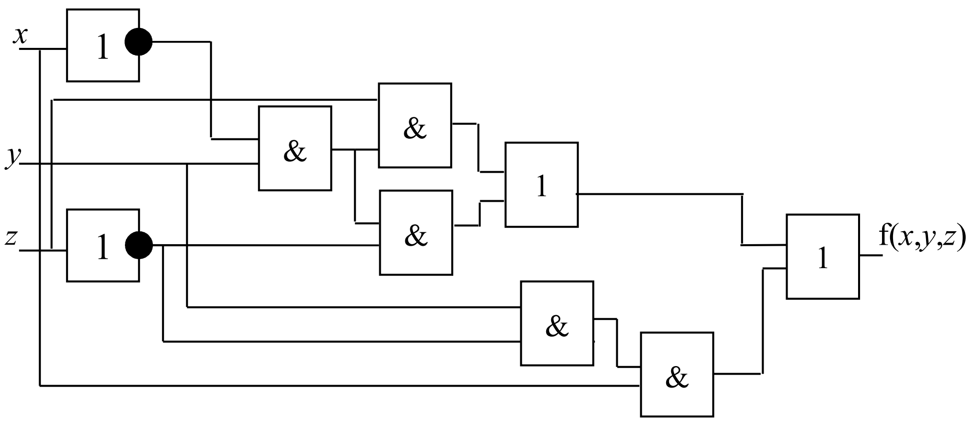
Решение

Таблица истинности для функции f(x,y,z)= (¬z→y) ⊕ ((y→x)&z):

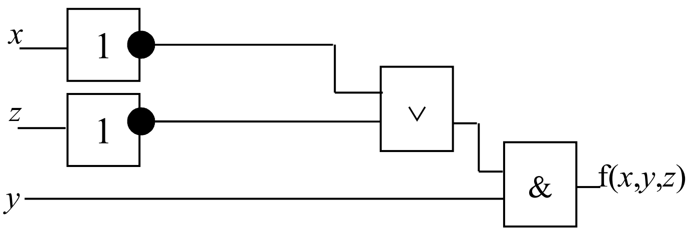
x, y, z	¬z	(¬z→y)	(y→x)	&z	⊕
0 0 0	1	0	1	0	**0**
0 0 1	0	1	1	1	**0**
0 1 0	1	1	0	0	**1**
0 1 1	0	1	0	0	**1**
1 0 0	1	0	1	0	**0**
1 0 1	0	1	1	1	**0**
1 1 0	1	1	1	0	**1**
1 1 1	0	1	1	1	**0**

Логическую схему можно построить по СДНФ функции:

$$f(x,y,z) = \neg xy\neg z \vee \neg xyz \vee xy\neg z$$



СДНФ можно минимизировать, тогда логическая схема упроститься, аналогично строится схема и для упрощенной формы.



2. Логическую функцию Z(A,B) = ¬A∨B & A∨B & ¬A представить картой Вейча.

Решение

Этот вопрос дается на самостоятельное рассмотрение, поэтому, для функции трех переменных построить карту Вейча, используя рекомендованную литературу.

Для заданной функции Z(A,B) карта Вейча имеет вид:

1	1
0	1

3. Функцию $g(x,y)=1$ представить в базисе $\{\vee,\neg\}$.

Решение

Запишем сначала СДНФ функции $g(x,y)=1$, а затем исключим из формулы все конъюнкции, используя тождество де-Моргана:

$g(x,y)= \neg x\neg y\vee x\neg y\vee\neg xy\vee xy=\neg(x\vee y)\vee\neg(x\vee\neg y)\vee\neg(\neg x\vee y)\vee\neg(\neg x\vee\neg y)=1.$

4. Для функции $f(x,y,z,t) = \neg xyt \vee xy\neg z \vee x\neg zt \vee xz\neg t$ получить ее СДНФ и СКНФ:

a) по таблице истинности;

b) используя законы 0 и 1;

c) минимизировать СДНФ методом Блейка-Порецкого.

5. Проверить равносильность формул f1 и f2:

$f1=x\vee(y \&\neg z) \to (\neg x\to y);$

$f2= \neg y\vee z.$

Решение

Проверим равносильность на наборах, при этом надо учитывать, что функция f2 есть функция от двух переменных, а функция f1 – функция от трех переменных, поэтому в функцию f2 введем фиктивную переменную, получим выражение для $f2= (x\&\neg x)\vee(\neg y\vee z)$:

x, y, z	$x\vee(y \&\neg z)$	$(\neg x\to y)$	f1	$0\vee(\neg y\vee z)$	f2
0 0 0	0	0	1	1	1
0 0 1	0	0	1	1	1
0 1 0	1	1	1	0	0
0 1 1	0	1	1	1	1
1 0 0	1	1	1	1	1
1 0 1	1	1	1	1	1
1 1 0	1	1	1	0	0
1 1 1	1	1	1	1	1

Формулы f1 и f2 неравносильны, т.к. их значения совпадают не на всех наборах переменных.

ЛОГИКА ПРЕДИКАТОВ

6. Предикат $P(x,y)$ задан таблицей на предметной области $D=\{a,b,c\}$, провести квантификацию и определить логический смысл формул:

1) $\exists x\exists y\ P(x,y)$;

2) $\forall xP(x,c)$;

3) $\exists yP(b,y)$.

x y	P(x,y)

a	a	0
a	b	1
a	c	0
b	a	0
b	b	1
b	c	1
c	a	1
c	b	0
c	c	0

Решение

1) $\exists x \exists y\ P(x,y)$ – значение предикатной формулы равно истина, т.к. существуют и x и y, такие что предикат P принимает значение истина;
2) $\forall x P(x,c)$ – значение предикатной формулы равно ложь, т.к. не для каждого x при y=c предикат P принимает значение истина;
3) $\exists y P(b,y)$ значение предикатной формулы равно истина, т.к. существует такой y, (например y=b), что предикат P принимает значение истина.

7. Проверить истинность, ложность или выполнимость предикатной формулы, на множестве $\mathbf{N}_0$:

$$(\exists x)(\Sigma(x,y,y)\rightarrow(\forall y)\Sigma(x,y,y)).$$

Решение

Предикатная формула тождественно истинна.
Высказывание, выраженное формулой следующее: «Если *существует* x, такой что $x+y=y$, то *для любого* y выполняется $x+y=y$».

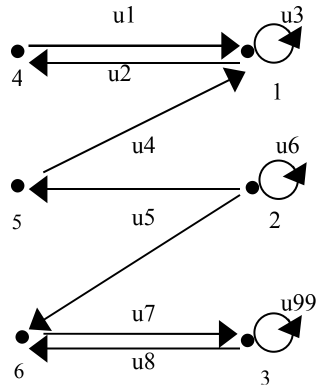
Рассмотрим левую и правую часть импликации.
На множестве натуральных чисел с нулевым элементом $\mathbf{N}_0$ существует такое число $x=0$, что $x+y=y$, таким образом левая часть импликации истинна на $\mathbf{N}_0$. Если предикатная формула находится в области действия квантора по переменной x, то при $x=0$ для любого y будет выполняться $x+y=y$. Следовательно, импликация, в которой левая и правая часть истинна – истинна, формула тождественно истинна на множестве $\mathbf{N}_0$.

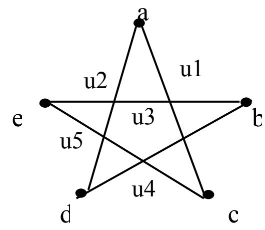
Решение варианта РГР №3

ГРАФЫ

Задание 1. Для графов G1 и G2 построить матрицы смежности, инцидентности и достижимости.

G1: G2:





Решение

Матрица смежности A:

$$A_{G1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{G2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

Матрица инцидентностей B:

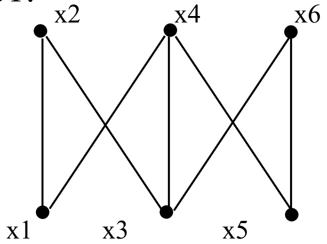
$$B_{G1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & * & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & * \end{pmatrix}, \quad B_{G2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

Матрица достижимости R:

$$R_{G1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_{G2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задание 2. Для графов S1 и G1 определить локальные характеристики.

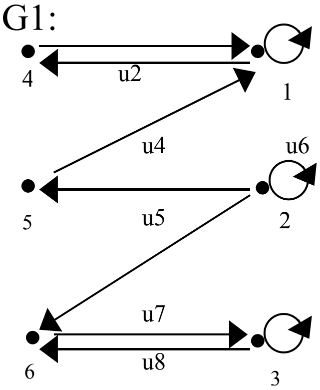
S1:



Решение

Определим степени вершин графа S1:
$\deg(x_1) = 2$,
$\deg(x_2) = 2$,
$\deg(x_3) = 3$,
$\deg(x_4) = 3$,
$\deg(x_5) = 2$,
$\deg(x_6) = 2$.

G1:

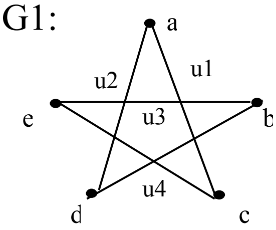


Определим степени вершин графа G1:
$\deg(x_1) = \deg_+(x_1)+\deg_-(x_1)=3+2=5$,
$\deg(x_2) = \deg_+(x_2)+\deg_-(x_2)=1+3=4$,
$\deg(x_3) = \deg_+(x_3)+\deg_-(x_3)=2+2=4$,
$\deg(x_4) = \deg_+(x_4)+\deg_-(x_4)=1+1=2$,
$\deg(x_5) = \deg_+(x_5)+\deg_-(x_5)=1+1=2$,
$\deg(x_6) = \deg_+(x_6)+\deg_-(x_6)=2+1=3$.

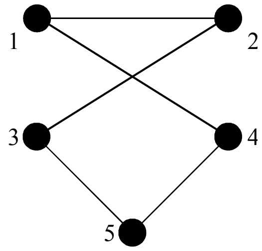
Результаты можно проверить по матрице смежности A_{G1} – сумма единиц в соответствующих стоке и столбце равна степени соответствующей вершины.

Задание 3. Для графов G1 и G2 определить изоморфизм.

G1:



G2:



10. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОРГАНИЗАЦИИ МЕЖСЕССИОННОГО КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ СТУДЕНТОВ

1. Межсессионная аттестация студентов проводится дважды в семестр на 7 и 13 неделях семестра.

2. Аттестационная оценка выставляется по результатам работы в семестре: выполнения домашних заданий, выполнения контрольных работ, сдачи промежуточного коллоквиума по 1-ой части дисциплины, успешного тестирования по 1-ой и 2-ой частям дисциплины, а также посещения практических занятий и посещений лекционных занятий.

3. Организация аттестации студентов, проводится в соответствии с положением АмГУ о курсовых, экзаменах и зачетах.

11. КОМПЛЕКТЫ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ БИЛЕТОВ

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра ИУС
Факультет МиИ
Курс I
Дисциплина
“Дискретная математика”

Утверждено на заседании кафедры
“___”_____________2006
Заведующий кафедрой
Утверждаю:___________

Экзаменационный билет № 1

1. Понятие множества. Способы представления множеств.

2. Понятие алгебры. Носитель алгебры. Тип алгебры. Сигнатура алгебры. Понятие булевой алгебры. Примеры.

3.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра ИУС
Факультет МиИ
Курс I
Дисциплина
“Дискретная математика”

Утверждено на заседании кафедры
“___”_____________2006г.
Заведующий кафедрой
Утверждаю:_______

Экзаменационный билет № 2

1. Понятие алгебры логики. Определение функции алгебры логики. Теорема о мощности множества $P_2(n)$.

2. Операции над множествами (теоретико-множественные операции). Ассоциативность бинарных операций над множествами.

3.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра ИУС
Утверждено на заседании кафедры   Факультет МиИ
“___”____________2006г.   Курс I
Заведующий кафедрой   Дисциплина
Утверждаю:_______   “Дискретная математика”

Экзаменационный билет № 3

1. Операции над множествами (теоретико-множественные операции). Коммутативность бинарных операций над множествами.

2. Понятие n-местной функции. Примеры функций типа $R^2 \to R$.

3.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра ИУС
Утверждено на заседании кафедры   Факультет МиИ
“___”____________2006г.   Курс I
Заведующий кафедрой   Дисциплина
Утверждаю:_______   “Дискретная математика”

Экзаменационный билет № 4

1. Рефлексивность/антирефлексивность отношений. Примеры.

2. Операции над множествами (теоретико-множественные операции). Дистрибутивность бинарных операций над множествами.

3.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра ИУС
Факультет МиИ
Курс I
Дисциплина
“Дискретная математика”

Утверждено на заседании кафедры
“___”_____________2006
Заведующий кафедрой
Утверждаю:___________

Экзаменационный билет № 5

1. Конечные множества. Мощность множества.

2. Понятие алгебры. Носитель алгебры. Тип алгебры. Сигнатура алгебры. Понятие булевой алгебры. Примеры.

3.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра ИУС
Факультет МиИ
Курс I
Дисциплина
“Дискретная математика”

Утверждено на заседании кафедры
“___”_____________2006г.
Заведующий кафедрой
Утверждаю:_______

Экзаменационный билет № 6

1. Булеан множества. Построение булеана множества. Теорема о числе всех подмножеств конечного множества.

2. Метод Блейка-Порецкого минимизации СДНФ.

3.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра ИУС
Факультет МиИ
Курс I
Дисциплина
“Дискретная математика”

Утверждено на заседании кафедры
“___”_____________2006г.
Заведующий кафедрой
Утверждаю:_______

Экзаменационный билет № 7

1. Прямое произведение множеств. Теорема о мощности множества, которое есть прямое произведение множеств.

2. Определение графа. Ориентированные и неориентированные графы.

3.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра ИУС
Факультет МиИ
Курс I
Дисциплина
“Дискретная математика”

Утверждено на заседании кафедры
“___”_____________2006г.
Заведующий кафедрой
Утверждаю:_______

Экзаменационный билет № 8

1. Теоремы о счетных множествах.

2. Определение n-арной операции. Унарные и бинарные операции. Пример бинарных операций на множествах. Примеры.

3.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра ИУС
Факультет МиИ
Курс I
Дисциплина
“Дискретная математика”

Утверждено на заседании кафедры
“___”_____________2006
Заведующий кафедрой
Утверждаю:___________

Экзаменационный билет № 9

1. Что называется соответствием. Область определения и область значения соответствия. Полностью определенное и сюръективное соответствие.

2. Разложение логических функций по переменным. Лемма о разложении.

3.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра ИУС
Факультет МиИ
Курс I
Дисциплина
“Дискретная математика”

Утверждено на заседании кафедры
“___”_____________2006г.
Заведующий кафедрой
Утверждаю:_______

Экзаменационный билет № 10

1. Логические функции двух переменных. Табличное задание логической функции n-переменных.

2. Инъективное, сюръективное, биективное отображения. Пример.

3.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра ИУС
Утверждено на заседании кафедры — Факультет МиИ
“___”_____________2006г. — Курс I
Заведующий кафедрой — Дисциплина
Утверждаю:_______ — “Дискретная математика”

Экзаменационный билет № 11

1. Определение композиции функций. Показать на примере преобразований конечных множеств α:M$\to$M, β:M$\to$M.

2. Локальные характеристики графа. Теорема Эйлера о рукопожатиях.

3.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра ИУС
Утверждено на заседании кафедры — Факультет МиИ
“___”_____________2006г. — Курс I
Заведующий кафедрой — Дисциплина
Утверждаю:_______ — “Дискретная математика”

Экзаменационный билет № 12

1. Гомоморфизм и изоморфизм алгебр. Основное тождество гомоморфизма. Пример.

2. Матричное представление графов (ориентированных и неориентированных).

3.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра ИУС
Факультет МиИ
Курс I
Дисциплина
“Дискретная математика”

Утверждено на заседании кафедры
“___”_____________2006
Заведующий кафедрой
Утверждаю:___________

Экзаменационный билет № 13

1. Понятие предиката. Тождественно истинные формулы логики предикатов.

2. Определение n-местного отношения. Матрица бинарного отношения.

3.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра ИУС
Факультет МиИ
Курс I
Дисциплина
“Дискретная математика”

Утверждено на заседании кафедры
“___”_____________2006г.
Заведующий кафедрой
Утверждаю:_______

Экзаменационный билет № 14

1. Понятие предиката. Формулы логики предикатов. Примеры.

2. Геометрические графы. Плоские и неплоские графы. Теорема о правильной реализации.

3.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра ИУС
Факультет МиИ
Курс I
Дисциплина
“Дискретная математика”

Утверждено на заседании кафедры
“___”_____________2006г.
Заведующий кафедрой
Утверждаю:_______

Экзаменационный билет № 15

1. СДНФ и СКНФ. Теоремы о представлении формулы алгебры высказываний.

2. Определение композиции функций. Показать на примере преобразований конечных множеств α:M$\rightarrow$M, β:M$\rightarrow$M.

3.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра ИУС
Факультет МиИ
Курс I
Дисциплина
“Дискретная математика”

Утверждено на заседании кафедры
“___”_____________2006г.
Заведующий кафедрой
Утверждаю:_______

Экзаменационный билет № 16

1. Понятие соответствия. Функциональное соответствие. Примеры.

2. Логика высказываний. Логически верные схемы логики высказываний. Примеры.

3.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра ИУС
Факультет МиИ
Курс I
Дисциплина
“Дискретная математика”

Утверждено на заседании кафедры
“___”____________2006
Заведующий кафедрой
Утверждаю:__________

Экзаменационный билет № 17

1. Определение соответствия. Функциональное соответствие. Примеры.

2. Изоморфизм графов.

3.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра ИУС
Факультет МиИ
Курс I
Дисциплина
“Дискретная математика”

Утверждено на заседании кафедры
“___”____________2006г.
Заведующий кафедрой
Утверждаю:_______

Экзаменационный билет № 18

1. Определение бинарного отношения. Рефлексивность/антирефлексивность отношений. Примеры.

2. Алгебраические системы. Алгебры и модели.

3.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра ИУС
Утверждено на заседании кафедры Факультет МиИ
“___”_____________2006г. Курс I
Заведующий кафедрой Дисциплина
Утверждаю:_______ “Дискретная математика”

Экзаменационный билет № 19

1. Определение бинарного отношения. Симметричность/антисимметричность, несимметричность отношений. Примеры.

2. Ассоциативность, коммутативность и дистрибутивность бинарных операций. Показать на примерах в алгебрах.

3.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра ИУС
Утверждено на заседании кафедры Факультет МиИ
“___”_____________2006г. Курс I
Заведующий кафедрой Дисциплина
Утверждаю:_______ “Дискретная математика”

Экзаменационный билет № 20

1. Определение бинарного отношения. Транзитивность отношений. Примеры. Транзитивное замыкание.

2. Теоремы о функциональной полноте.

3.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра ИУС
Факультет МиИ
Курс I
Дисциплина
"Дискретная математика"

Утверждено на заседании кафедры
"___"____________2006г.
Заведующий кафедрой
Утверждаю:_______

Экзаменационный билет № 21

1. Понятие обратного отношения. Операции дополнения, объединения, пересечения, заданные на отношениях. Примеры.

2. Теорема Кантора. Парадокс Кантора.

3.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра ИУС
Факультет МиИ
Курс I
Дисциплина
"Дискретная математика"

Утверждено на заседании кафедры
"___"____________2006г.
Заведующий кафедрой
Утверждаю:_______

Экзаменационный билет № 22

1. Отношение эквивалентности. Отношение порядка. Примеры.

2. Способы задания функций.

3.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра ИУС
Факультет МиИ
Курс I
Дисциплина
“Дискретная математика”

Утверждено на заседании кафедры
“___”____________2006г.
Заведующий кафедрой
Утверждаю:_______

Экзаменационный билет № 23

1. Определение взаимно однозначного соответствия. Утверждение о мощности множеств А и В, между которыми существует взаимно однозначное соответствие. Пример.

2. Запись тождества поглощения и тождества склеивания (теория множеств). Доказательства тождеств в теории множеств.

3.

АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра ИУС
Факультет МиИ
Курс I
Дисциплина
“Дискретная математика”

Утверждено на заседании кафедры
“___”____________2006г.
Заведующий кафедрой
Утверждаю:_______

Экзаменационный билет № 24

1. Теорема о булевой алгебре логики. Доказательства тождеств в логике.

2. Инъективное, сюръективное, биективное отображения. Пример.

3.

* 3. практическое задание

12. ЗАДАНИЯ К РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИМ РАБОТАМ

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА №1

Вариант 1

ОПИСАНИЕ МНОЖЕСТВ

1. Задайте множество M с помощью характеристического предиката:
   Множество положительных целых чисел, не превышающих 15.

2. Задайте перечислением элементов следующие множества:
   а) множество натуральных чисел кратных 12 до 144.
   б) множество простых натуральных чисел не превышающих 100.

3. Какие из следующих множеств пусты:
   а) множество действительных корней уравнения: $12x^2 + 4x+1=0$;
   б) множество четных (положительных) чисел;
   в) множество четных, отрицательных натуральных чисел.

4. Верны ли утверждения:

а) $|\varnothing| \neq 0$;
б) $\forall Z,\ \varnothing \subseteq Z$;
в) $X=Y$, тогда $\forall y \in Y,\ y \in Y$;
г) $G = \{15, 12, 11, 9, 7, 5\} \subset \mathbf{N}$, $14 \notin G$, $14 \subset \mathbf{N}$.

5. Найти все подмножества следующего множества: C = {, . ? ! -}, сколько подмножеств содержат знаки «.» и «,»; какова мощность булеана множества C? ($|\boldsymbol{\beta}(C)|$)

ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ

6. Заданы числовые множества X, Y, Z, **N**, где X – множество четных чисел,Y – множество чисел кратных трем, Z – множество чисел кратных пяти , **N** – множество натуральных чисел. Определить множества: а) $(X\cup Y) \cap Z$, б) $Y\cap Z$, в) дополнение X до **N** (обозначение $\rceil$ X).

7. Найти:

а) $\{1,2,3,4\}\cap\{0,1,3,5\}$;
б) $\{0.5, 1.1, -0.01\}\cup\{-1, 0, 1\}$;
в) $\{a,b,c,d\}\setminus\{d,p,q,r\}$.

8. С помощью диаграмм Эйлера-Виенна проверить, верны ли следующие утверждения:

а) если $A \subseteq B$, то $A \cap B = A$;

б) $\rceil X \cap \rceil Y = \rceil (X \cup Y)$.

9. Пользуясь только определениями операций над множествами и определением равенства множеств, доказать: $(X \cap Y) \cup (X \cap \rceil Y) = X$.

10. Решить задачу, используя диаграммы Эйлера-Виенна.

В отделе НИИ работают несколько человек, причем каждый из них знает хотя бы один иностранный язык. Английский знают 6 человек, немецкий – 7 человек, французский – 7человек. Четыре человека знают английский и немецкий языки, три человека – немецкий и французский, два – французский и английский, один знает все три языка. Сколько человек работают в отделе? Сколько человек знают только английский язык?

ОТНОШЕНИЯ, СООТВЕТСТВИЯ, ФУНКЦИИ, ОПЕРАЦИИ

1. Пусть множество $M=\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Составить матрицы отношения C1, C2:

а) C1 – «больше либо равно»;

б) C2 – « x делитель y»;

в) C3 – « $x + y = 5$»;

2. Проверить свойства бинарных отношений C1, C2, C3 (рефлексивность/ антирефлективность, симметричность/антисимметричность, транзитивность).

3. Пусть некоторая программа читает два числа из множества $M=\{1,2,3,4\}$, обозначаемых x, y, и, если $x< y$ печатает число z из множества M такое, что $x<=z<y$. Программа останавливается после считывания чисел на множестве M. Определить отношение. Чему равны области определения и значения отношения?

4. Какой порядок на множестве $M=\{1,2,3,4\}$ задают отношения:

а) $R1 =\{(2,1),(3,1),(4,1),(3,2),(4,2),(4,3)\}$;

б) $R2 =\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$.

5. $y=F(x)$, где $F \subset X \times X$; $X=\{1,2,3,4,5\}$. Определить свойства соответствий. Указать функциональное соответствие:

   а) $F=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)\}$;

   б) $F=\{(1,4),(2,4),(3,4),(4,4),(5,4)\}$;

   в) $F=\{(1,2),(2,3),(3,1),(4,5),(5,4)\}$.

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА №2

Вариант 1

АЛГЕБРА ЛОГИКИ

1. Построить таблицу истинности логической функции
   $f(x,y,z) = \neg(x\&(z\rightarrow y))\vee((y\rightarrow\neg x)\&z)$;

для заданной функции f построить логическую схему.

2. Логическую функцию $Z(A,B,C) = A\vee B\vee\neg B\&C$ представить картой Вейча.

3. Функцию $g(x,y)=x\oplus y$ представить в базисе $\{\&,\vee,\neg\}$.

4. Для функции $f(x,y,z,t) = \neg xy\vee y\neg z\vee\neg zt\vee x\neg t$ получить ее СДНФ и СКНФ:

a) по таблице истинности;
b) используя законы 0 и 1;
c) минимизировать СДНФ методом Блейка-Порецкого.

5. Проверить законы поглощения и склеивания с помощью эквивалентных преобразований выражений.

ЛОГИКА ПРЕДИКАТОВ

6. Предикат P(x,y) задан таблицей на предметной области D={a,b,c}, провести квантификацию и определить логический смысл формул:

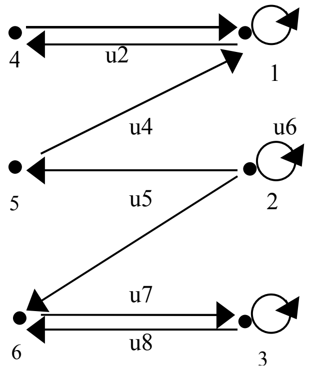
1) $\forall x\forall yP(x,y)$; 2) $\exists xP(x,a)$; 3) $\forall yP(b,y)$.

x y	P(x,y)
a a	1
a b	1
a c	1
b a	1
b b	0
b c	1
c a	1
c b	1
c c	1

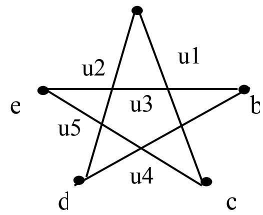
РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА №3

Вариант 1

G1:



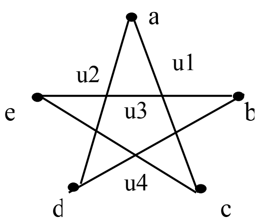
G2:

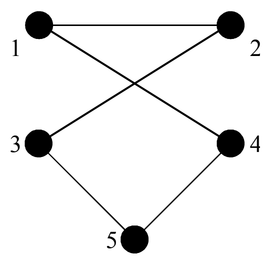


Задание 1. Для графов G1 и G2 построить матрицы смежности, инцидентности и достижимости.

Задание 2. Для графов G1 и G2 определить локальные характеристики.

Задание 3. Для графов определить изоморфизм.





13. ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

«СОГЛАСОВАНО»
Заместитель председателя Совета УМО
к.т.н., доцент

_______________________С.В. Коршунов

М.П.

«____» ________________2007г.

«УТВЕРЖДАЮ»
Ректор

___________________А.Д. Плутенко

М.П.

«____» ________________2007г.

ТЕСТЫ
По проведению самооценки уровня остаточных знаний студентов по дисциплине
«Дискретная математика»
для специальности
230102 «Автоматизированные системы обработки информации и управления»,

Зав.кафедрой ИУС, к.т.н., доцент

_________________________ **Бушманов А.В.**

Благовещенск
2006 г.

Федеральное агентство по образованию РФ
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
(ГОУВПО «АмГУ»)

Тестовые задания
по проверке остаточных знаний
по дисциплине «Дискретная математика»
(специальности 230201, 230102)
20 заданий
время тестирования 90 минут

Вариант 1

Выполнил: студент факультета математики и информатики

____

фамилия, имя и отчество

Курс ____ Группа № ______
Дата тестирования: ________________

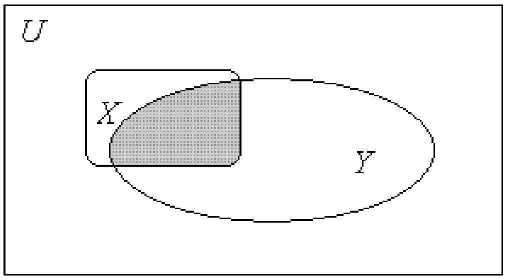
Результат ______% Оценка __________

Вариант 1.

Теория множеств

Определить какие из перечисленных множеств пустые:
a) $(A\cup B) \cap (\rceil A \cup \rceil B)$;
b) $(A\cap B)\backslash A$;
c) $\rceil(X\cup Y) \cup X\cup Y$;
d) все множества непустые.

На диаграмме Эйлера-Венна изображено:



a) $P_{X\cup Y} = \{x \mid x \in X \text{ или } x \in Y\}$;
b) $P_{X\cap Y} = \{x \mid x \in X \text{ и } x \in Y\}$;
c) $P_{X/Y} = \{x \mid x \in X \text{ и } x \notin Y\}$;
d) $P = \{x \mid x \in X\}$;
e) $P_{\rceil X} = \{x \mid x \in U \text{ и } x \notin X\}$.

Для отношения R = «X перпендикуляр к Y» имеют место следующие свойства:
a) рефлексивность, симметричность, транзитивность;
b) антирефлексивность, несимметричность, транзитивность;
c) рефлексивность, симметричность, нетранзитивность;
d) верных свойств нет.

Указать какие отношения являются отношениями эквивалентности:
a) R1 « x-y > 0»;
b) R2 «быть подчиненным»;
c) R3 «равночисленность конечных множеств».

Верно ли утверждение: «Между множеством двоичных векторов разрядности n и булеаном конечного множества мощности n существует взаимно-однозначное соответствие».
a) да;
b) нет.

Какое число подмножеств содержит множество U, $|U|=n$:
a) $n!$;
b) 2^n;
c) n.

Какое тождество, из перечисленных является тождеством склеивания?
a) $(X\cap \rceil Y)\cup Y = X \cup Y$;
b) $\rceil(X\cup Y) = \rceil X\cap \rceil Y$;
c) $(X\cap \rceil Y)\cup (X\cap Y) = X$;
d) такого тождества нет.

Для бинарного отношения R = « $x\leq y$ и x - четное, y - нечетное», заданного на конечном множестве V={1, 2, 3, 4} построить матрицу бинарного отношения.

$C_{R\,=}$

Алгебра логики и логические схемы

Таблица истинности для функции ⊕ (сложение по модулю 2) имеет вид:

a)

x1	x2	f
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0

b)

x1	x2	f
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

c)

c

x1	x2	f
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

d) такой таблицы здесь нет.

Формула вида $(x\vee\neg y)\rightarrow(x\&y)$

a) тождественно истинна;

b) тождественно ложна;

c) имеет определенное значение на всех наборах переменных.

Логическая схема высказывания $\dfrac{a\rightarrow b,\ a}{b}$

a) тождественно истинна;

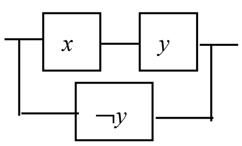
b) тождественно ложна.

Формула $\neg x_1\neg x_2\vee x_1x_2\vee x_1\neg x_2\vee\neg x_1x_2$

a) СДНФ логической функции константа 1;

b) КНФ логической функции;

c) ДНФ логической функции константа 1.



Какая логическая функция соответствует схеме

a) $\neg x\vee y\vee x\&\neg y$;

b) $x \to y \vee \neg y;$
c) $x \vee y \& \neg y$;
d) нет.
Указать какие формулы есть законы:
a) $\neg (x \vee y) \equiv \neg x \& \neg y$;
b) $x \vee x \equiv 0$;
c) $\neg (x \& y) \equiv \neg x \& \neg y$.

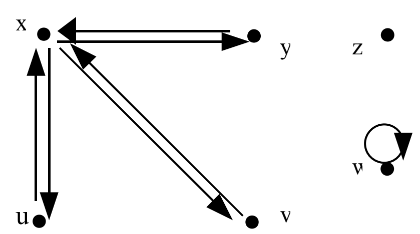
15. Для операций & и $\vee$ в выражении $x_1 \vee (x_2 \vee x_3) = (x_1 \vee x_2) \vee x_3$ записано свойство
a) ассоциативность;
b) коммутативность;
c) дистрибутивность слева;
d) нет.

16. Для функции 2-х переменных записать ее СДНФ и СКНФ:

x1	x2	f
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0

Теория графов

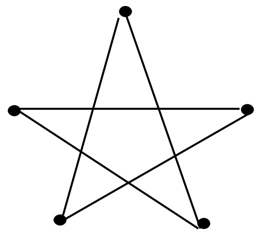
17.
G:



Граф G ориентированный, с противоположными дугами и одной изолированной вершиной;
Граф G ориентированный, симметричный;
Граф G ориентированный, с противоположными дугами и одной голой вершиной.
Граф G ориентированное корневое дерево.

18.
Полустепень захода вершины x (deg_+ x) в графе G равна:
a) 5;
b) 6;
c) 3;
d) 0.

19.
W:



a) Матрица смежности для графа W:

$$A(W) = \begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}$$

b) Матрица достижимости для графа W:

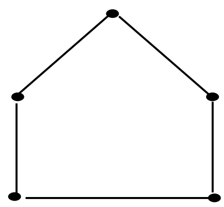
$$R(W) = \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

c) Матрица инцидентности для графа W:

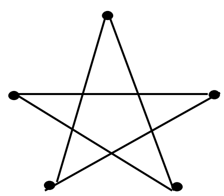
$$B(W) = \begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{matrix}$$

19.
Графы G_1 и G_2 изоморфны:

G_1



G_2



да;
b) нет.

Федеральное агентство по образованию РФ
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
(ГОУВПО «АмГУ»)

Тестовые задания
по проверке остаточных знаний
по дисциплине «Дискретная математика»
(специальности 230201, 230102)
20 заданий
время тестирования 90 минут

Вариант 2

Выполнил: студент факультета математики и информатики

____
фамилия, имя и отчество

Курс ____ Группа № ______
Дата тестирования: ________________

Результат ______% Оценка __________

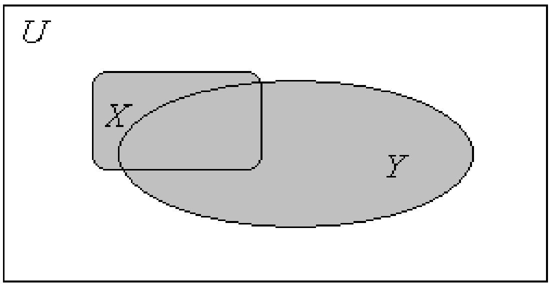
Вариант 2.

Теория множеств

1. Определить какие из перечисленных множеств пустые:

a) $(A \cap B) \cup \rceil(A \cup B)$;
b) $B \setminus (A \cap B)$;
c) $\rceil(X \cup Y) \cap (X \cup Y)$;
d)все множества непустые.

2. На диаграмме Эйлера-Венна изображено:



c) $P_{X \cup Y} = \{x \mid x \in X$ или $x \in Y\}$;
d) $P_{X \cap Y} = \{x \mid x \in X$ и $x \in Y\}$;
e) $P_{X/Y} = \{x \mid x \in X$ и $x \notin Y\}$;
f) $P = \{x \mid x \in X\}$;
e) $P_{\rceil X} = \{x \mid x \in U$ и $x \notin X\}$.

3. Для отношения R = «a + b четное число» имеют место следующие свойства:

a) рефлексивность, симметричность, транзитивность;
b) антирефлексивность, несимметричность, транзитивность;
c) антирефлексивность, антисимметричность, нетранзитивность;
d) верных свойств нет.

4. Указать какие отношения являются отношениями строгого порядка:

a) R1 « x-y > 0»;
b) R2 «жить этажом ниже»;
c) R3 «равночисленность конечных множеств».

5. Верно ли утверждение: «Между множеством двоичных векторов разрядности n и множеством логических функций от n переменных существует взаимно-однозначное соответствие».

a) да;
b) нет.

6. Какое тождество, из перечисленных является тождеством де-Моргана?

a) $(X \cap \rceil Y) \cup Y = X \cup Y$;
b) $\rceil(X \cap Y) = \rceil X \cup \rceil Y$;
c) $(X \cap \rceil Y) \cup (X \cap Y) = X$;
d) такого тождества нет.

7. Для бинарного отношения R = «x+y=4», заданного на конечном множестве V={1, 2, 3, 4} построить матрицу бинарного отношения.

$C_{R} =$

8. Таблица истинности для функции ≡ (эквиваленция) имеет вид:

a)

x1	x2	f
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0

b)

x1	x2	f
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

c)

d

x1	x2	f
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

d) такой таблицы здесь нет.

9. Формула вида $(x \vee \neg x) \rightarrow (x \& \neg x)$

a) тождественно истинна;
b) тождественно ложна;
c) имеет определенное значение на всех наборах переменных.

10. Каково количество логических функций 3-х переменных:

a) 2^8;
b) 3^2;
c) 3^3;
d) нет такой формулы.

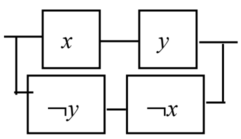
11. Логическая схема высказывания $\dfrac{a \vee b,\ \neg a}{b}$

a) тождественно истинна;
b) тождественно ложна.

12. Формула $(\neg x_1 \vee x_2)\ \&(x_1 \vee x_2)\ \&(\neg x_1 \vee \neg x_2)$

a) СДНФ логической функции;
b) СКНФ логической функции;
c) КНФ логической функции.

13. Какая логическая функция соответствует схеме



a) $\neg x \vee y \vee x \& \neg y;$
b) $x \sim y;$
c) $x \vee y \& \neg y.$

14. Указать эквивалентное выражение для $x \oplus y$:

a) $\neg xy \vee x \neg y$;

b) $x \sim y$;

c) $x \vee y \& \neg y$.

15. Для операций & и $\vee$ в выражении $x_1 \& x_2 = x_2 \& x_1$ записано свойство

a) ассоциативность;

b) коммутативность;

c) дистрибутивность слева;

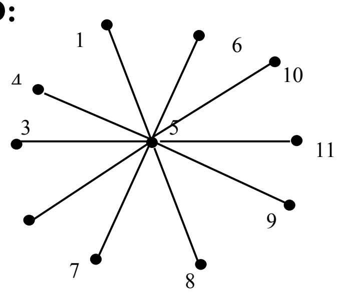
d) нет.

16. Для функции 2-х переменных записать ее СДНФ и СКНФ:

x1	x2	f
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Теория графов.

17. **D:**



Граф D неориентированный, полный, регулярный граф;

Граф D двудольный граф $K_{5,1}$, дерево, звездный граф;

Граф D двудольный граф $K_{5,1}$.

18.

Степень вершины 5 (deg 5) в графе D равна:

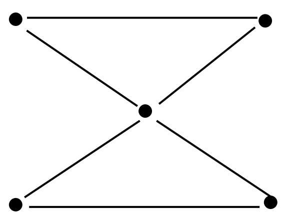
a) 10;

b) 6;

c) 11;

d) 2.

19. **W:**



Для графа W матрица смежности имеет вид:

a)

$$A(W) = \begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

1 0 0 1 0

b)

$$A(W) = \begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{matrix}$$

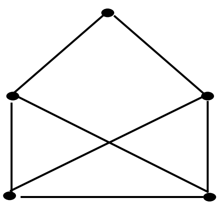
c)

$$A(W) = \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

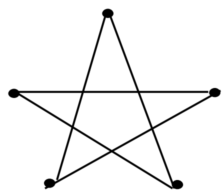
20.

Графы G_1 и G_2 изоморфны:

G_1



G_2



нет;

да.

Федеральное агентство по образованию РФ
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
(ГОУВПО «АмГУ»)

Тестовые задания
по проверке остаточных знаний
по дисциплине «Дискретная математика»
(специальности 230201, 230102)
20 заданий
время тестирования 90 минут

Вариант 3

Выполнил: студент факультета математики и информатики

____
фамилия, имя и отчество

Курс ____ Группа № ______
Дата тестирования: ________________

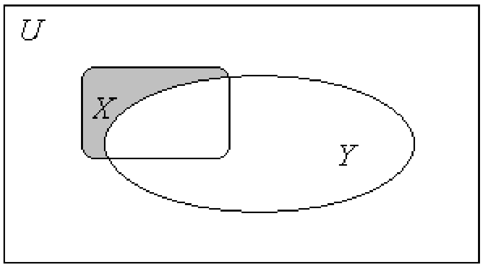
Результат ______% Оценка __________

Вариант 3.

Теория множеств

Определить какие из перечисленных множеств пустые:
a) $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$;
b) $B \cup (A \cap B)$;
c) $\neg(X \cap Y) \cap (X \cup Y)$;
все множества непустые.

На диаграмме Эйлера-Венна изображено:



a) $P_{X \cup Y} = \{x \mid x \in X \text{ или } x \in Y\}$;
b) $P_{X \cap Y} = \{x \mid x \in X \text{ и } x \in Y\}$;
c) $P_{X/Y} = \{x \mid x \in X \text{ и } x \notin Y\}$;
d) $P = \{x \mid x \in X\}$;
e) $P_{\neg X} = \{x \mid x \in U \text{ и } x \notin X\}$.

Для отношения R = «a делитель b» имеют место следующие свойства:
a) рефлексивность, симметричность, транзитивность;
b) антирефлексивность, несимметричность, транзитивность;
c) рефлексивность, антисимметричность, транзитивность;
d)верных свойств нет.

Указать какие отношения являются отношениями нестрогого порядка:
a) R1 «быть братом»;
b) R2 «жить этажом выше»;
c) R3 «равночисленность конечных множеств»;
d) нет верных вариантов.

Верно ли утверждение: «Между множеством двоичных векторов разрядности n и множеством из n наборов логических переменных логической функции существует взаимно-однозначное соответствие».
a) да;
b) нет.
Какое тождество, из перечисленных является тождеством Порецкого?
a) $(X \cap \neg Y) \cup Y = X \cup Y$;
b) $\neg(X \cup Y) = \neg X \cap \neg Y$;
c) $(X \cap \neg Y) \cup (X \cap Y) = X$;
d) такого тождества нет.
7. Для бинарного отношения R = «x+y- кратно 3», заданного на конечном множестве V={1, 2, 3, 4} построить матрицу бинарного отношения.

$C_R =$

8.Таблица истинности для функции $\to$ (импликация) имеет вид:

a)

x1	x2	f
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0

b)

x1	x2	f
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

c)

e

x1	x2	f
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

d) такой таблицы здесь нет.

9. Формула вида $\neg(x\&y) \sim (\neg x \vee \neg y)$

a) тождественно истинна;

b) тождественно ложна;

c) имеет определенное значение на всех наборах переменных.

10. Каково количество логических бинарных операций:

a) $3!$;

b) 2^2;

c) 16;

d) нет такой формулы.

Логическая схема высказывания $\dfrac{a \vee b,\ a \to b}{b}$

a) тождественно истинна;

b) тождественно ложна.

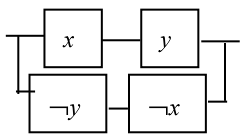
Формула $(\neg x_1 x_2) \vee (x_1 x_2) \vee (\neg x_1 \neg x_2)$

a) СДНФ логической функции;

b) СКНФ логической функции;

c) КНФ логической функции.

Какая логическая функция соответствует схеме



a) $\neg(x \oplus y)$;

b) $\neg(x \sim y)$;

c) $\neg(x \to y)$;

d) нет.

14. Указать эквивалентное выражение для $x\&y$:
a) $\neg xy \vee x\neg y$;
b) $x\sim y$;
c) $(x\vee y)(x\vee \neg y)(\neg x\vee y)$.

15. Для операций & и $\vee$ в выражении $x_1 \vee (x_2 \,\&\, x_3) = x_1 \,\&\, x_2 \vee x_1 \,\&\, x_3$ записано свойство:
a) ассоциативность;
b) коммутативность;
c) дистрибутивность слева;
d) нет.

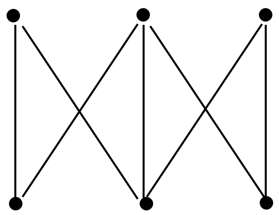
16. Для функции 2-х переменных записать ее СДНФ и СКНФ:

x1	x2	f
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	0

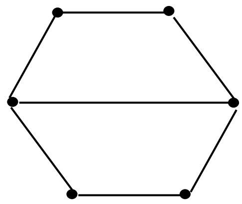
Теория графов

17. Для графа V его правильной реализацией на плоскости (в $\mathbf{R}^2$) является граф W:

V:

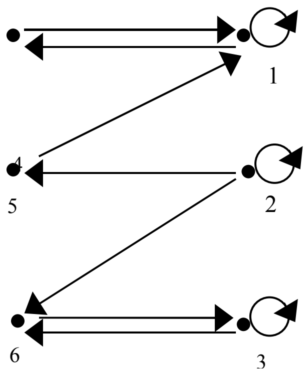


W:



a) да;
b) нет.

18. **G:**



a) Граф G ориентированный, с противоположными дугами и одной изолированной вершиной;
b) Граф G ориентированный, симметричный, три вершины инцидентны петлям;
c) Граф G ориентированный, с противоположными дугами и тремя петлевыми дугами;
d) Граф G ориентированный, двудольный граф;
e) Граф G ориентированный, с противоположными дугами.

19.
Полустепень исхода вершины 4 (deg_ 4) в графе G равна:
a) 1;
b) 6;
c) 3;
d) 2.

20. Полный ориентированный граф K_n с n вершинами без петель, кратных дуг, у которого любые две вершины инцидентны дуге имеет:
(n-1)! дуг;
n^2-n дуг;
(n^2-n)/2 дуг.

Федеральное агентство по образованию РФ
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
(ГОУВПО «АмГУ»)

Тестовые задания
по проверке остаточных знаний
по дисциплине «Дискретная математика»
(специальности 230201, 230102)
20 заданий
время тестирования 90 минут

Вариант 4

Выполнил: студент факультета математики и информатики

____
фамилия, имя и отчество

Курс ____ Группа № ______
Дата тестирования: ________________

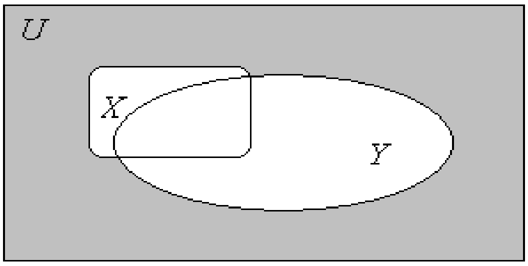
Результат ______% Оценка __________

Вариант 4.

Теория множеств

3. Определить какие из перечисленных тождеств верны:
a) $(A\cup B) \setminus (A\cap B) = (A\setminus B) \cap (B\setminus A)$;
b) $B \cup (A\cap B) = B\cup A$;
c) $\rceil X\cap\rceil Y\cap\rceil Z = \rceil(X\cup Y\cup Z)$;
все тождества неверны.

4. На диаграмме Эйлера-Венна изображено:



a) $P_{X\cup Y} = \{x \mid x \in X$ или $x \in Y\}$;
b) $P_{X\cap Y} = \{x \mid x \in X$ и $x \in Y\}$;
c) $P_{X/Y} = \{x \mid x \in X$ и $x \notin Y\}$;
d) $P = \{x \mid x \in X\}$;
e) $P_{\rceil X} = \{x \mid x \in U$ и $x \notin X\}$;
f) нет формулы.

3. Для отношения R = «учиться в одном вузе» имеют место следующие свойства:
a) рефлексивность, симметричность, транзитивность;
b) антирефлексивность, несимметричность, транзитивность;
c) антирефлексивность, несимметричность, нетранзитивность;
d) верных свойств нет.

4. Указать какие отношения являются отношениями строгого порядка:
a) R1 «быть братом»;
b) R2 «жить в одном городе»;
c) R3 «а делитель b»;
d) Нет верных вариантов.

5. Верно ли утверждение: «Между множеством целых чисел и множеством всех положительных четных чисел существует взаимно-однозначное соответствие».
a) да;
b) нет.

Какое тождество, из перечисленных является тождеством поглощения?
a) $(X\cap\rceil Y)\cup Y = X \cup Y$;
b) $(X\cup Y) \cap Z = (X\cap Z) \cup (Y\cap Z)$;
c) $(X\cap\rceil Y)\cup (X\cap Y) = X$;
d) такого тождества нет.

7. Для бинарного отношения R = «x делится на y без остатка», заданного на конечном множестве V={1, 2, 3, 4} построить матрицу бинарного отношения.

$C_{R} =$

8.Таблица истинности для функции $\vee$ (дизъюнкция) имеет вид:

a)

x1	x2	f
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0

b)

x1	x2	f
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

c)
f

x1	x2	f
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

d) такой таблицы здесь нет.

9. Формула вида $\neg(x\&y)\to(\neg x\&\neg y) \sim (x\&y)\vee(\neg x\&\neg y)$

a) тождественно истинна;
b) тождественно ложна;
c) имеет определенное значение на всех наборах переменных.

10. Каково количество логических функций 3-х переменных:

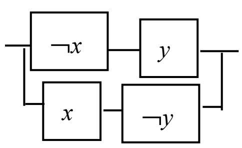
a) $3!$;
b) n^3;
c) 3^n;
d) нет такой формулы.

11. Логическая схема высказывания $\dfrac{a}{b\to a}$

a) тождественно истинна;
b) тождественно ложна.

12. Формула $(\neg x_1x_2)\vee(x_1x_2)\vee(\neg x_1\neg x_2)$

a) СДНФ логической функции;
b) СКНФ логической функции;
КНФ логической функции.



13. Какая логическая функция соответствует схеме

a) $\neg(x\oplus y)$;
b) $\neg(x\sim y)$;
c) $\neg(x\&y)$.

14. Указать эквивалентное выражение для $x|y$ (| штрих Шеффера $f(x,y) = (1110)$):

a) $\neg xy \vee x \neg y$;

b) $x \sim y$;

c) $(x \vee y)(x \vee \neg y)(\neg x \vee y)$;

d) эквивалентных выражений нет.

15. Для операций & и $\vee$ в выражении $x_1 \,\&\, (x_2 \vee x_3) = (x_1 \,\&\, x_2) \vee x_3$ записано свойство

a) ассоциативность;

b) коммутативность;

c) дистрибутивность слева;

d) нет.

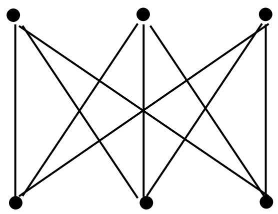
16. Для функции 2-х переменных записать ее СДНФ и СКНФ:

x1	x2	f
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

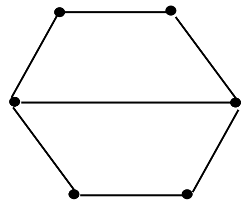
Теория графов

17. Для графа V его правильной реализацией на плоскости (в $\mathbf{R}^2$) является граф W:

V:



W:

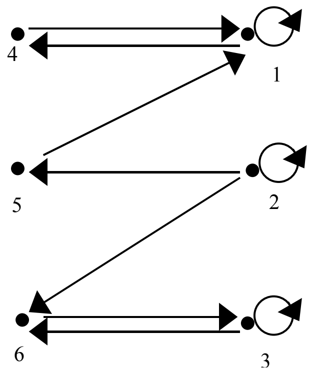


a) да;

b) нет;

c) правильная реализация для графа V в $\mathbf{R}^2$ не существует.

18. **G:**



a) Матрица смежности для графа G:

$$A(G) = \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

b) Матрица достижимости для графа G:

$$R(W) = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

c) Матрица инцидентности для графа G:

$$B(G) = \begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{matrix}$$

d) нет матричного представления для графа G.

19.
Степень вершины 5 (deg 5) в графе G равна:
a) 1;
b) 2;
c) 3;
d) 0.

20. Полный неориентированный граф K_n с n вершинами без петель, кратных дуг, у которого любые две вершины инцидентны дуге имеет:
a) (n-1)! дуг;
b) n^2-n дуг;
c) (n^2-n)/2 дуг;
d) верной формулы нет.

Федеральное агентство по образованию РФ
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
(ГОУВПО «АмГУ»)

Тестовые задания
по проверке остаточных знаний
по дисциплине «Дискретная математика»
(специальности 230201, 230102)
20 заданий
время тестирования 90 минут

Вариант 5

Выполнил: студент факультета математики и информатики

____
фамилия, имя и отчество

Курс ____ Группа № ______
Дата тестирования: ________________

Результат ______% Оценка __________

Вариант 5.

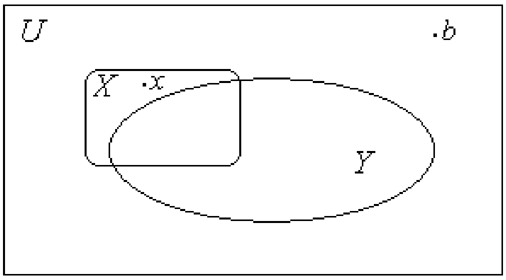
Теория множеств

1. Проверить всегда ли справедливо тождество $(A\setminus B) \cup C = (A\cup C) \setminus (B\cup C)$:

а) нет;

да.

2. На диаграмме Эйлера-Венна изображено:



$P_{X\cup Y} = \{x \mid x \in X$ или $x \in Y\}$;

$P_{X\cap Y} = \{x \mid x \in X$ и $x \in Y\}$;

$P_{X/Y} = \{x \mid x \in X$ и $x \notin Y\}$;

$P = \{x \mid x \in X\}$;

e) $P_{\rceil X} = \{x \mid x \in U$ и $x \notin X\}$.

3. Для отношения R = «а отец b» имеют место следующие свойства:

а) рефлексивность, симметричность, транзитивность;

b) антирефлексивность, несимметричность, транзитивность;

c) антирефлексивность, несимметричность, нетранзитивность;

верных свойств нет.

4. Указать какие отношения являются отношениями эквивалентности:

а) R1 «быть братом»;

b) R2 «жить в одном городе»;

c) R3 «а делитель b»;

d) Нет верных вариантов.

5. Верно ли утверждение: «Между множеством целых чисел и множеством всех вещественных чисел отрезка (0, 1] существует взаимно-однозначное соответствие».

а) да;

b) нет.

6. Какое число подмножеств содержит множество U, $|U|=n$:

а) $n!$;

b) n^2;

c) n;

d) нет такой формулы.

7. Какое тождество, из перечисленных является тождеством идемпотентности?

$(X\cap \rceil Y)\cup Y = X \cup Y$;

$(X\cup Y) \cap Z = (X\cap Z) \cup (Y\cap Z)$;

$(X\cap \rceil Y)\cup (X\cap Y) = X$;

такого тождества нет.

8. Для бинарного отношения R = «x делится на y с остатком 1», заданного на конечном множестве V={1, 2, 3, 4} построить матрицу бинарного отношения.

$C_{R} =$

Алгебра логики и логические схемы

9.Таблица истинности для функции | (штрих Шеффера) имеет вид:

a)

x1	x2	f
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0

b)

x1	x2	f
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

c)

g

x1	x2	f
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

d) такой таблицы здесь нет.

10. Формула вида $(x\&y) \sim (\neg(\neg x \vee \neg y))$

a) тождественно истинна;

b) тождественно ложна;

c) имеет определенное значение на всех наборах переменных.

11. Логическая схема высказывания $\dfrac{a\vee b,\ a\to b}{a}$

a) тождественно истинна;

b) тождественно ложна.

12. Формула $(\neg x_1x_2) \vee (x_1x_2) \vee \neg x_2$

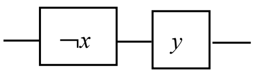
6.СДНФ логической функции;

7.СКНФ логической функции;

8.КНФ логической функции;

h такой формы нет.

13. Какая логическая функция соответствует схеме



a) $(x\oplus y)$;

b) $\neg(x\vee\neg y)$;

c) $(x\to y)$;

d) нет.

14. Указать эквивалентное выражение для $x\to y$:

a) $\neg xy\vee x\neg y$;

b) $\neg(x\sim y)$;

c) $\neg x\neg y \vee \neg xy\vee xy$;

d) $xy\vee\neg x\neg y$;

e) нет.

15. Для операций & и $\vee$ в выражении $x_1 \vee (x_2 \vee x_3) = x_1 \vee x_2 \vee x_1 \vee x_3$ записано свойство

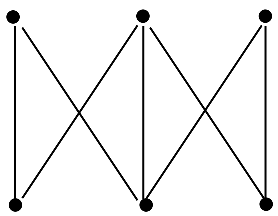
a) ассоциативность;
b) коммутативность;
c) дистрибутивность слева;
9.нет.

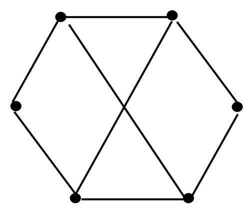
16. Для функции 2-х переменных записать ее СДНФ и СКНФ:

x1	x2	f
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Теория графов

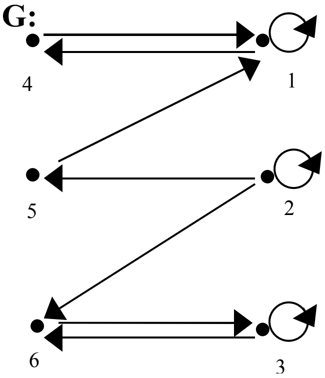
17. Для графа V его правильной реализацией на плоскости (в $\mathbf{R}^2$) является граф W:

V: 

W: 

a) да;
b) нет.

18. **G:**



a) Граф G ориентированный, с противоположными дугами и одной изолированной вершиной;
b) Граф G ориентированный, симметричный, три вершины инцидентны петлям;
c) Граф G ориентированный, с противоположными дугами и тремя петлевыми дугами;
d) Граф G ориентированный, двудольный граф;
e) Граф G ориентированный, с противоположными дугами.

19.

Полустепень исхода вершины 3 (deg_ 3) в графе G равна:

a) 1;
b) 6;
c) 3;
d) 2.

20. Полный двудольный ориентированный граф K_{nm} без петель, кратных дуг, у которого любые две вершины инцидентны дуге имеет:

a) 2nm дуг;
b) n^2-n дуг;
c) (n^2-m)/2 дуг.

14. КАРТА КАДРОВОЙ ОБЕСПЕЧЕННОСТИ ДИСЦИПЛИНЫ

Лектор	к.т.н., доцент	Семичевская Н.П.
Руководитель практических занятий	к.т.н., доцент	Семичевская Н.П.

Наталья Петровна СЕМИЧЕВСКАЯ
доцент кафедры информационных управляющих систем АмГУ

Редактор О.К. Мамонтова

Учебно-методический комплекс дисциплины
ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Издательство АмГУ. Подписано к печати ___.___.07. Формат _____. Усл. печ.л. ________, уч.-изд. л. ______. Тираж _____. Заказ ___.