

Федеральное агентство по образованию
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГОУВПО «АмГУ»
Факультет математики и информатики

УТВЕРЖДАЮ
Зав. кафедрой МАиМ
Т.В. Труфанова
«__» _____ 2007г.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИНАНСОВЫХ СИСТЕМ
для специальности 010101 – математика

Учебно – методический комплекс спецкурса

Составитель: Труфанов В.А.

Благовещенск

2007

*Печатается по решению
редакционно-издательского совета
факультета математики и
информатики
Амурского государственного
университета*

Труфанов В.А.

Математическое моделирование финансовых систем. Учебно – методический комплекс дисциплины для студентов очной формы обучения специальности 010101 «Математика». – Благовещенск: Амурский гос. ун–т, 2007. – 15 с.

© Амурский государственный университет, 2007

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Рабочая программа.....	4
2. Самостоятельная работа студентов.....	5
3. Наименование тем лекций и их содержание.....	7
4. Учебно-методическое обеспечение.....	12
5. Перечень и темы промежуточных форм контроля знаний.....	13
6. Темы вопросов для подготовки к зачету.....	13
7. Учебно-методическая (технологическая) карта дисциплины.....	15

1. Рабочая программа

Спецкурс по дисциплине " Математическое моделирование финансовых систем "

для специальности 010101—" Математика "

Курс 5 Семестр 9

Лекции 48 час. Экзамен (нет)

Практические (семинарские) занятия 48 час. Зачет 9 семестр.

Лабораторные занятия (нет).

Самостоятельная работа 74 час.

Всего 170 час.

1. Цели и задачи дисциплины, ее место в учебном процессе.

1.1. Цель преподавания дисциплины.

Данный спецкурс "Математическое моделирование финансовых систем" ставит своей целью в формировании у студентов представления об основных понятиях и количественных законах развития и управления финансовыми системами, а также в обучении основам математического моделирования в финансовой теории.

1.2. Задачи изучения дисциплины.

Студенты должны усвоить экономическую интерпретацию тех математических моделей, которые строятся при управлении финансами.

В процессе изучения дисциплины студенты должны приобрести навыки и умения исследования и решения задач, формально относящиеся к области финансовой математике.

1.3. Перечень дисциплин с указанием разделов, усвоение которых студентами необходимо при изучении данной дисциплины.

При изучении спецкурса "Математическое моделирование финансовых систем" привлекаются понятия и методы математического анализа, теории дифференциальных уравнений, теории вероятностей и математической статистики.

2. Сводные данные об основных разделах дисциплины и распределение часов по видам занятий.

Тематический план.

№ темы	Наименование темы	Лекции	Практические занятия	Самостоятельная работа
1	Введение.	4	—	2
2	Основы процентной финансовой математики.	12	12	20
3	Инвестирование в безрисковые активы (облигации).	8	10	14
4	Рисковые активы (акции).	12	14	20
5	Производные ценных бумаг: фьючерсы и опционы	12	12	18
Итого		48	48	74

2. Самостоятельная работа студентов

3.1 Знакомство с рекомендуемой литературой.

3.2 Подготовка к практическим занятиям.

3.3 Выполнение индивидуальных заданий.

3.3.1 Индивидуальные задания

1-10. а). Первоначальная сумма S руб. помещена в банк на срок n лет под r % годовых (проценты простые). Найти наращенную сумму, эквивалентные значения простой учетной ставки, сложной процентной ставки, сложной номинальной процентной ставки (проценты начисляются m раз в году).
Найти наращенную сумму, если ставка налога на проценты q %. Уровень инфляции за рассматриваемый период оказался равным α %. Какова реальная доходность операции?

б). Первоначальная сумма S руб., наращенная сумма S руб., процентная ставка r % годовых (проценты простые). Найти период начисления.

в). Первоначальная сумма S руб., наращенная сумма S руб., период начисления n лет. Найти простую процентную ставку.

г). Первоначальная сумма C руб. помещена в банк на срок с a по b под $r\%$ годовых (проценты простые). Найти наращенную сумму в английской, немецкой и французской практиках.

11-20. а). Первоначальная сумма C руб. помещена в банк на срок n лет под $r\%$ годовых (проценты сложные). Найти наращенную сумму, эквивалентные значения простой учетной ставки, простой процентной ставки, сложной номинальной процентной ставки (проценты начисляются m раз в году).
Найти наращенную сумму, если ставка налога на проценты $q\%$. Уровень инфляции за рассматриваемый период оказался равным $\alpha\%$. Какова реальная доходность операции?

б). Первоначальная сумма C руб., наращенная сумма S руб., процентная ставка $r\%$ годовых (проценты сложные). Найти период начисления.

в). Первоначальная сумма C руб., наращенная сумма S руб., период начисления n лет. Найти сложную процентную ставку.

г). Первоначальная сумма C руб. помещена в банк на срок n лет под $r\%$ годовых. Найти наращенную сумму в случае непрерывного начисления процентов.

21-30. а). Размер ежегодных платежей R руб., срок n лет, проценты начисляются по сложной процентной ставке $r\%$ годовых. Найти наращенную (будущую) сумму и современную стоимость простых рент постнумерандо и пренумерандо. Преобразовать эту простую ренту в общую ренту (проценты начисляются m раз в году, p платежей в году).

б). Определить размер ежегодных платежей в конце года по сложной процентной ставке $r\%$ годовых для накопления через n лет суммы S руб.

в). Определить размер ежегодных платежей в конце года по сложной процентной ставке $r\%$ годовых для погашения в течение n лет долга A руб.

31-40. При открытии счета до востребования числа a на него была положена сумма P_1 руб. Числа b на счет поступили P_2 руб. Числа c со счета были сняты P_3 руб. 23 декабря счет был закрыт. Процентная ставка $r\%$ годовых. Используется французская практика. Определить сумму, которую получил владелец счета.

41-50. а). При выдаче кредита на срок b лет по простой процентной ставке $r\%$ годовых удерживаются комиссионные $h\%$ суммы ссуды. Определить доходность этой операции в виде эффективной ставки простых процентов.

б). При выдаче кредита на срок a лет по простой процентной ставке $r\%$ годовых удерживаются комиссионные $h\%$ суммы ссуды. Определить доходность этой операции в виде эффективной ставки сложных процентов.

в). При выдаче кредита на срок a лет по сложной процентной ставке $r\%$ годовых удерживаются комиссионные $h\%$ суммы ссуды. Определить доходность этой операции в виде эффективной ставки сложных процентов.

3. Наименование тем лекций и их содержание

Тема 1

Введение.

Рассматривается понятие финансовой математики и какую часть общей теории финансов она занимает; определяется, в чем суть самих финансов и с какой целью изучается финансовая теория. Что является объектом исследования общей теории финансов и финансовые посредники. Классификация финансовых рынков: валютный, денежный, облигаций, фондовый и рынок производных ценных бумаг. История финансовой математики.

Тема 2

Основы процентной финансовой математики.

2.1. *Инвестиции.* Понятие начисление процентов на капитал.

2.2. *Простые и сложные проценты.* Существуют два способа начисления процентов на капитал, когда деньги даются в долг на несколько периодов.

2.3. *Накопления.* В качестве применения принципа сложных процентов рассмотрен процесс накопления денежных средств путем инвестирования на определенный срок.

2.4. *Приведенная ценность.* Главным итогом формулы

$$C(t) = C(0) (1+r)^t$$

является то, что ценность денег постоянно меняется с течением времени. Поэтому сравнивать, складывать и производить другие операции над денежными суммами можно, только если все эти суммы рассматриваются в один и тот же момент времени. В этой связи возникает вопрос о том, как сравнивать денежные суммы в разные моменты времени. Для ответа на него пользуются методом дисконтирования или приведение ценности.

2.5. *Платежные потоки.* В финансовых операциях довольно часто предусматриваются не отдельно разовые платежи, а серии платежей, распределенных во времени. В этом случае является важным оценить не только отдельно разовые платежи, но и серии платежей в совокупности.

2.6. *Дюрация.* Основной числовой характеристикой сравнения платежных потоков является их стоимость. Следующим по значимости

свойством платежного потока принято считать среднюю продолжительность поступлений.

2.7. Рента. Описанная в § 2.5 математическая модель платежного потока является наиболее общей. В реальной жизни, например, при выплате зарплаты или накопительных пенсий, при платежах рассрочки и оплате страховых премий, используются схемы, обладающие той или иной формой регулярности как по величине платежей, так и по моментам осуществления самих платежей. Платежные потоки, в которых платежи производятся через равные промежутки времени фиксированное число раз, называются рентами.

2.8. Номинальная процентная ставка. В приложениях часто промежутком времени является не весь единичный интервал, а его некоторая часть. Для удобства в финансовой математике доходность вложение средств на такого рода периоды принято характеризовать так называемой номинальной процентной ставкой.

2.9. Непрерывная процентная ставка. На практике достаточно часто используется модель так называемого непрерывного начисления процентов. Она считается удобной в силу компактности формул, получаемых на основе непрерывного начисляемого процента, удобства их записи и обращения с ними.

Тема 3

Инвестирование в безрисковые активы.

3.1. Основные понятия. Долговые контракты являются одной из самых важных частей финансовых активов. Наиболее удобными среди них как для инвесторов, так и для эмитентов (должников) являются ценные бумаги с фиксированным уровнем дохода, которые обеспечивают инвестору получение заранее установленной суммы при каждом погашении их эмитентом. Такие ценные бумаги в общем виде называются облигациями.

3.2. Цена и доходность облигации. В этом параграфе получим основные числовые характеристики, присущие каждой облигации и позволяющие их сравнивать между собой, а также связывающие их соотношения.

3.3. Временная структура процентных ставок. В экономической теории взаимоотношение между доходностью долговых контрактов и сроком погашения принято называть временной структурой процентных ставок. Существуют целые разделы экономической теории, объясняющие временную структуру процентных ставок, например, теория чистых ожиданий, теория предпочтения ликвидности или теория сегментации рынка. Каждая из них несет некоторую математическую аргументацию, на основе которой построен в настоящее время достаточно изощренный математический аппарат, моделирующий поведение доходностей долговых обязательств во времени. Мы же здесь коснемся только основных вопросов, возникающих в связи с изменениями процентных ставок во времени.

3.4. Закон об иммунитете облигаций. В этом параграфе рассмотрим один из способов снижения рисков, связанных с изменением процентных ставок, основанный на управлении дюрации портфеля облигаций.

3.5. Расчет цены облигации. В этом параграфе рассмотрим математическую модель рыночного ценообразования облигации.

3.6. Форвардные контракты. В предыдущих параграфах рассматривали в различных аспектах одно из главных понятий временной структуры процентных ставок – понятие форвардной процентной ставки. В связи с изменениями форвардных процентных ставок существуют различные финансовые инструменты, используемые участниками финансовых рынков как с целью хеджирования, так и для получения прибыли от изменения процентной ставки. К такого рода инструментам принято относить

соглашение о форвардной ставке, процентные и валютные свопы. Все они являются инструментами от форвардных контрактов.

Тема 4

Рисковые активы (акции).

4.1. *Основные понятия об акции.* Одной из наиболее распространенных форм финансирования собственного капитала компании является продажа части своих активов путем выпуска долевых ценных бумаг. Такие ценные бумаги называются акциями, а компания, их выпустившая, – акционерным обществом.

4.2. *Портфель инвестиций.* Рассматривается математическая модель инвестирования капитала на единицу времени в экономику, состоящую из N типов акций.

4.3. *Простейшая модель оптимизации портфеля.* В этом параграфе приводятся основные задачи оптимизации портфеля, которые стоят перед инвестором, на примере простейшей модели двух активов: безрискового и рискованного.

4.4. *Задача Марковица.* Рассматривается в этом параграфе модель инвестирования в N акций без ограничений на открытие коротких позиций.

4.5. *Биномиальная модель эволюции цен акций.* Если взглянуть на графики цен акций, то легко заметить, что их поведение носит стохастический характер. Поэтому значение цены акции S_T в момент времени T принято считать случайной величиной. Если же рассмотреть эволюцию цены акции во времени S_t , $t \in [0, T]$, то она определяет некоторый случайный процесс. Математическим моделям процесса изменения цен акций посвящена оставшаяся часть главы.

4.6. *Метод гауссовских приближений.* Когда число рассматриваемых периодов велико, то принято пользоваться нормальными (гауссовскими) приближениями вероятностей для модели эволюции цены акции.

Тема 5

Производные ценных бумаг: фьючерсы и опционы.

5.1. *Основные понятия фьючерского рынка.* В этом параграфе рассмотрим вопросы функционирования фьючерского рынка и общую модель ценообразования при заключении финансовых фьючерских контрактов.

5.2. *Опционы.* Любой контракт, по которому одна из участвующих сторон получает право покупать или продавать что-либо по заранее определенной цене, называется опционом.

5.3. *Биномиальная модель оценки стоимости опционов.* Методы полного хеджирования и эквивалентного портфеля, предложенные для вычисления цены однопериодного колл-опциона в биномиальной модели эволюции цены акции, не могут быть использованы на прямую в общем случае, когда число периодов больше одного или цена акции может принимать больше двух значений. Чтобы распространить предложенные методы на общий случай, обычно используют пошаговую методику биномиальной модели оценки стоимости опционов.

5.4. *Модель Блэка-Шоулса.* На практике часто пользуются более удобной формулой рациональной цены колл-опциона европейского типа, основанный на построении модели оценки стоимости опционов, которую принято называть *моделью Блэка-Шоулса* в честь ее создателей.

4. Учебно-методическое обеспечение

Основная литература

1. Ширяев А.М. Основы стохастической финансовой математики. В 2-х томах. – М.: Фазис, 1998.
2. Боди З., Мертон Р. Финансы. Пер. с англ.// М.: Изд. дом "Вильямс" , 2000.
3. О'Брайен Дж., Шривастава С. Финансовый анализ и торговля ценными бумагами. Пер. с англ.// М.: "Дело ЛТД", 1995.
4. Буренин А.Н. Рынки производных финансовых инструментов. – М., Инфра-М, 1996.
5. Фалин Г.И. Математические основы теории страхования жизни и пенсионных схем. – М.: Изд-во мех.-мат. ф-та МГУ, 1996.
6. Галиц Л. Финансовая инженерия: инструменты и способы управления финансовым риском. – М.: ТВП, 1998.
7. Лукашин Ю.П. Основы финансовой математики. – М.: Изд-во МЭСИ, 1999.
8. Ван Хорн Дж.К. Основы управления. – М.: Финансы и статистика, 2000.
9. Жуленев С.В. Финансовая математика: введение в классическую теорию. – М.: Изд-во МГУ, 2001.

5. Перечень и темы промежуточных форм контроля знаний

6.1 Расчётно-графические работы (представлены в разделе 3.1.1).

6.2. Критерии допуска и сдачи зачёта

До зачёта допускаются студенты, выполнившие все учебные и проверочные задания.

Зачёт организуется из одного теоретического вопроса и задачи, требующего короткие ответы в виде определения, формулировки результата, записи формулы, и решения задачи. На не ответ или (и) не решение даётся дополнительное задание: вопрос, задача. Если в этом случае хотя бы одно из заданий не выполняется, то ставится незачёт.

6. Темы вопросов для подготовки к зачету.

1. Понятие финансовой математики.
2. Классификация финансовых рынков.
3. История развития финансовой математики.
4. Инвестиции.
5. Простые и сложные проценты.
6. Накопления.
7. Приведённая ценность.
8. Платёжные потоки.
9. Дюрация.
10. Ренты (запаздывающая и упреждающая).
11. Отсроченные ренты.
12. Итоговая сумма ренты.
13. Номинальная процентная ставка (до получения формулы приведённой ценности включительно).
14. Непрерывная процентная ставка (до запаздывающей и упреждающей рент включительно).
15. Цена и доходность облигации.
16. Временная структура процентных ставок (до форвардной процентной ставки включительно).
17. Расчёт цены облигации (определение функции полезности).
18. Простейшая задача распределения потребления во времени (до простейшей экономической модели с одним потребителем).
19. Портфель инвестиций, его доходность и оценка риска.
20. Плоскость “риск-доходность”, кривая “риск-доходность” из двух акций и её свойство: выпуклость влево.
21. Простейшая модель оптимизации портфеля.
22. Задача Марковица (до второго вида задачи Марковица).
23. Модель ценообразования цены акции.
24. Модель формирования цены акции.
25. Биномиальная модель эволюции цен акции.
26. Метод гауссовских приближений.
27. Логнормальная модель цены акции.
28. Понятие фьючерского рынка.
29. Опционы.
30. Биномиальная модель оценки стоимости опционов.
31. Модель Блэка-Шоулса.

7. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ (ТЕХНОЛОГИЧЕСКАЯ) КАРТА ДИСЦИПЛИНЫ

Но мер нед ели	Но мер тем ы	Вопросы, изу- чаемые на лекциях	Занятия (номера)		лекция, доп. литература	Самостоятельная работа студентов		
			Прак- тичес- кие	Лабо- ра- торн ые		Содержание	часы	
1-4	2	Основы процентной финансовой математики.	1-4		лекция, доп. литература	индивид. задание № 1 и № 2	20	отчет по инд. заданию № 1, № 2
5-9	3	Инвестирование в безрисковые активы (облигации).	5-9		лекция, доп. литература	индивид. задание № 3	14	отчет по индивид. зад. № 3
10-12	4	Рисковые активы (акции).	10-12		тоже	индивид. задание № 4	20	отчет по индивид. зад. № 4
13-18	5	Производные ценных бумаг: фьючерсы и опционы	13-18		тоже	индивид. задание № 5	20	отчет по индивид. зад. № 5