

**Федеральное агентство по образованию
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГОУВПО «АмГУ»
Факультет математики и информатики**

УТВЕРЖДАЮ

Зав. кафедрой МАиМ

_____ Т.В. Труфанова

7 мая 2007г.

ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ

*Учебно – методический
комплекс дисциплины
для специальности
010101 – математика*

Составитель: доцент **В.В.Сельвинский**

Благовещенск

2007

ББК

С

*Печатается по решению
редакционно-издательского
совета
факультета математики и
информатики
Амурского государственного
университета*

В.В.Сельвинский

Теория колебаний. Учебно – методический комплекс дисциплины для студентов АмГУ очной формы обучения специальности 010101 «Математика». – Благовещенск: Амурский гос. ун–т, 2007. – с.

Учебно – методический комплекс дисциплины "Теория колебаний" содержит рабочую программу дисциплины, план-конспект лекций, материалы для проведения практических занятий, контролирующие материалы для осуществления промежуточного и итогового контроля, справочный материал и библиографический список. Предназначен ведущим преподавателям и студентам, изучающим данную дисциплину.

1. РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

по факультативной дисциплине **"Теория колебаний"**

для специальности 010101—"Математика"

Курс 5

Семестр 9

Лекции 32 час.

Экзамен (нет)

Практические (семинарские) занятия 32 час. Зачет 9 семестр

Лабораторные занятия (нет)

Самостоятельная работа 48 час.

Всего 112 часов

Составитель В.В.Сельвинский, к.ф-м.н., доцент.

Факультет математики и информатики.

Кафедра математического анализа и моделирования.

1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ, ЕЁ МЕСТО В УЧЕБНОМ ПРОЦЕССЕ

1.1 Цель преподавания учебной дисциплины

Дисциплина "Теория колебаний" изучает существование и устойчивость периодических решений дифференциальных систем, а также соответствующие им приложения в механике, физике.

Целью дисциплины является знакомство с методами исследования математических моделей различных процессов и явлений естествознания, изучение основных методов решения возникающих при этом математических задач, выяснение смысла полученного решения.

1.2. Перечень основных умений и навыков, приобретаемых при изучении дисциплины.

Дисциплина "Теория колебаний" вырабатывает у студентов навыки построения математических моделей простейших физических явлений и решения (аналитического и численного) получающихся при этом математических задач. Студент должен свободно ориентироваться в основных разделах дисциплины, что включает:

- основные законы динамики, дифференциальные уравнения движения и их интегрирование; инерционные и геометрические характеристики твердых тел и механической системы, теорию сил как меру механического взаимодействия между телами, методы исследования простейших механических систем.

1.3. Перечень дисциплин, необходимых для изучения данной дисциплины.

Дисциплина "Теория колебаний" излагается на базе математического анализа, алгебры и аналитической геометрии, дифференциальных уравнений, в тесной связи с теорией функций комплексного переменного и с основами вариационного исчисления.

2. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

2.1. Наименование тем, их содержание и объем в часах лекционных занятий

Лекции – 32 часа

1. Линейные системы. Линейная система без трения (гармонический осциллятор). Понятие о фазовой плоскости. Представление совокупности движений гармонического осциллятора на фазовой плоскости. Устойчивость состояния равновесия. Линейный осциллятор при наличии трения. Линейные системы с "отрицательным трением". Линейная система с отталкивающей силой. – 4 часа

2. Консервативные нелинейные системы. Простейшая консервативная система. Исследование фазовой плоскости вблизи состояний равновесия. Исследование характера движений на всей фазовой плоскости. Зависимость поведения простейшей консервативной системы от параметра. Уравнения движения. Общие свойства консервативных систем. – 4 часа

3. Неконсервативные системы. Диссипативные системы. Осциллятор с "кулоновским" трением. Свойства простейших автоколебательных систем. – 4 часа

4. Динамические системы второго порядка. Фазовые траектории и интегральные кривые на фазовой плоскости. Линейные системы общего типа. Примеры линейных систем. Состояния равновесия. Устойчивость состояний равновесия. Предельные циклы и автоколебания. Точечные преобразования и предельные циклы. Индексы Пуанкаре. Системы без замкнутых траекторий. Исследование поведения фазовых траекторий в удаленных частях плоскости. Оценка месторасположения предельных циклов. Приближенные методы интегрирования. – 4 часа

5. Основы качественной теории дифференциальных уравнений второго порядка. Общая теория поведения траекторий на фазовой плоскости. Пре-

дельные траектории и их классификация. Качественная картина разбиения фазовой плоскости на траектории. Особые траектории. Грубые системы. Зависимость качественной картины траекторий от параметра. – 4 часа

6. Системы с цилиндрической фазовой поверхностью. Цилиндрическая фазовая поверхность. Маятник с постоянным моментом. Маятник с постоянным моментом. Неконсервативный случай. Задача Жуковского о планирующем полете. – 4 часа

7. Нелинейные системы, близкие к гармоническому осциллятору. Метод Ван-дер-Поля. Метод Пуанкаре. Теория бифуркаций в случае автоколебательной системы, близкой к линейной консервативной системе. – 4 часа.

8. Разрывные колебания. Малые параметры и устойчивость состояний равновесия. Малые паразитные параметры и разрывные колебания. Разрывные колебания в системах второго порядка. – 4 часа

2.2. Практические занятия, их содержание и объем в часах - 32 часа

Линейные системы. Устойчивость состояния равновесия. – 4 часа

Консервативные нелинейные системы. Общие свойства консервативных систем. – 4 часа

Неконсервативные системы. Диссипативные системы. Свойства простейших автоколебательных систем. – 4 часа

Динамические системы второго порядка. Фазовые траектории и интегральные кривые на фазовой плоскости. – 4 часа

Предельные циклы и автоколебания. Точечные преобразования и предельные циклы. – 2 часа

Общая теория поведения траекторий на фазовой плоскости. Предельные траектории и их классификация. – 2 часа

Системы с цилиндрической фазовой поверхностью. – 2 часа

Нелинейные системы, близкие к гармоническому осциллятору. – 2 часа

Метод Ван-дер-Поля. – 2 часа

Метод Пуанкаре. – 2 часа

Теория бифуркаций в случае автоколебательной системы, близкой к линейной консервативной системе. – 2 часа

Контрольная работа – 2 часа

2.3. Самостоятельная работа студентов – 48 часов

Индивидуальные задания:

1. Колебания механических систем с двумя степенями свободы.
2. Предельные циклы и автоколебания.

2.4. Вопросы к зачету

1. Линейные системы. Понятие о фазовой плоскости.
2. Устойчивость состояния равновесия.
3. Линейный осциллятор при наличии трения.
4. Линейные системы с "отрицательным трением".
5. Линейная система с отталкивающей силой.
6. Консервативные нелинейные системы.
7. Исследование фазовой плоскости вблизи состояний равновесия.
8. Общие свойства консервативных систем.
9. Диссипативные системы.
10. Осциллятор с "кулоновским" трением.
11. Свойства простейших автоколебательных систем.
12. Динамические системы второго порядка. Фазовые траектории и интегральные кривые на фазовой плоскости.
13. Линейные системы общего типа.
14. Предельные циклы и автоколебания.
15. Точечные преобразования и предельные циклы. Индексы Пуанкаре.

16. Системы без замкнутых траекторий. Исследование поведения фазовых траекторий в удаленных частях плоскости.
17. Основы качественной теории дифференциальных уравнений второго порядка. Общая теория поведения траекторий на фазовой плоскости.
18. Предельные траектории и их классификация.
19. Системы с цилиндрической фазовой поверхностью.
20. Задача Жуковского о планирующем полете.
21. Нелинейные системы, близкие к гармоническому осциллятору.
22. Метод Ван-дер-Поля.
23. Метод Пуанкаре.
24. Теория бифуркаций в случае автоколебательной системы, близкой к линейной консервативной системе.
25. Разрывные колебания.
26. Малые параметры и устойчивость состояний равновесия.

3. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1980.-887 с.
2. Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Введение в теорию нелинейных колебаний. Уч. пособие для вузов. М.: Наука, 1987.- 384 с.
3. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Физматгиз, 1974.- 503 с.
4. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике. Под ред. Яблонского А.А. М.: Высшая школа, 1985.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Аппель П. Теоретическая механика. Т.1,2. М.: Физматгиз, 1960.-487 с.
4. Виттенбург Й. Динамика систем твердых тел. М.: Мир, 1980. – 292 с.

5. Даламбер Ж. Динамика. М.-Л.: ГИТТЛ, 1950.
6. Лагранж Ж. Аналитическая механика. М.-Л.: ГИТТЛ, 1950. Т 1,2.
7. Ланцош К. Вариационные принципы механики. М.: Мир, 1980.
8. Лурье А.И. Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961.- 824 с.
9. Мак-Милан В.Д. Динамика твердого тела. М.: Издательство, 1951.
10. Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Динамика неавтономных систем. М.: Наука, 1967.- 319 с.
11. Парс Л.А. Аналитическая динамика. М.: Наука, 1971.- 635 с.
12. Пэнлеве П. Лекции о трении. М.: Гостехиздат, 1954.- 316 с.
13. Светлицкий В.А. Задачи и примеры по теории колебаний. ч.1,2. М.: Изд. МГТУ им. Н.Э.Баумана
13. Суслов Г.К. Теоретическая механика. М.-Л.: Гостехиздат, 1946.- 655 с.
14. Чаплыгин С.А. Исследование по динамике неавтономных систем. М.-Л.: Гостехтеоретиздат, 1949.- 112 с.
15. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. М.: Наука, 1981.- 480 с.

2. ГРАФИК САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

В самостоятельную работу студентов входит подготовка к текущим занятиям, выполнение индивидуальных заданий (2 задания) и подготовка к зачету. Тематика индивидуальных заданий и вопросы к зачету приведены в рабочей программе.

3. МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ЧТЕНИЯ ЛЕКЦИЙ

1. Дифференциальные уравнения относительного движения твердого тела

Пусть твердое тело, инерционными характеристиками которого является масса M и тензор инерции J_C в центре масс C , перемещается по отношению к системе координат $Oxyz$, которая, в свою очередь, движется относительно осей O_1XYZ произвольным образом со скоростью начала координат \bar{v}_0 и угловой скоростью $\bar{\omega}_1$.

Для исследований относительного движения тела добавим ко всем действительным силам $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$ переносные и кориолисовы силы инерции, обозначив $\bar{\Phi}_{пер}, \bar{\Phi}_{кор}$ - главные векторы, $\bar{M}_{Спер}, \bar{M}_{Скор}$ - главные моменты относительно центра масс C соответственно переносных и кориолисовых сил инерции.

Уравнения относительного движения твердого тела составим в форме уравнений Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, (j = 1, \dots, 6). \quad (2.1)$$

В качестве обобщенных координат q_j выберем координаты центра масс x_c, y_c, z_c и углы Эйлера φ, ψ, θ между осями $Cx'y'z'$, параллельными осям $Oxyz$, и главными осями инерции $C\xi\eta\zeta$ твердого тела.

Обобщенные силы Q_x, Q_y, Q_z , соответствующие обобщенным координатам x_c, y_c, z_c вычисляются как суммы проекций всех действительных сил и сил инерции на оси $Oxyz$:

$$\begin{aligned}
Q_x &= \sum F_{kx} + \Phi_x^{nep} + \Phi_x^{kop}, \\
Q_y &= \sum F_{ky} + \Phi_y^{nep} + \Phi_y^{kop}, \\
Q_z &= \sum F_{kz} + \Phi_z^{nep} + \Phi_z^{kop};
\end{aligned}
\tag{2.2}$$

обобщенные силы $Q_\varphi, Q_\psi, Q_\theta$, соответствующие обобщенным координатам φ, ψ, θ , вычисляется как суммы моментов всех действительных сил и сил инерции относительно осей собственного вращения $C\xi$, прецессии Cz и нутации Cr :

$$\begin{aligned}
Q_\varphi &= \sum M_{C\xi}(\bar{F}_k) + M_{C\xi}^{nep} + M_{C\xi}^{kop}, \\
Q_\psi &= \sum M_{Cz}(\bar{F}_k) + M_{Cz}^{nep} + M_{Cz}^{kop}, \\
Q_\theta &= \sum M_{Cr}(\bar{F}_k) + M_{Cr}^{nep} + M_{Cr}^{kop}.
\end{aligned}
\tag{2.3}$$

Кинетическая энергия T по отношению к осям $Oxyz$ запишется в виде:

$$T = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} (\mathbf{J}_C \bar{\omega}) \bar{\omega}.
\tag{2.4}$$

Проекции вектора угловой скорости $\bar{\omega}$ выражаются известными кинематическими уравнениями Эйлера [95]:

$$\begin{aligned}
\omega_\xi &= \sin\varphi \sin\theta \dot{\psi} + \cos\varphi \dot{\theta}, \\
\omega_\eta &= \cos\varphi \sin\theta \dot{\psi} - \sin\varphi \dot{\theta}, \\
\omega_\zeta &= \cos\theta \dot{\psi} + \dot{\varphi}.
\end{aligned}
\tag{2.5}$$

При переходе от системы координат $C\xi\eta\zeta$ к системе координат $Oxyz$ необходимо использовать матрицу косинусов между этими осями $\{\alpha_{i,j}\}$:

$$\begin{aligned}
\alpha_{11} &= \cos\psi \cos\varphi - \sin\psi \sin\varphi \cos\theta, \\
\alpha_{12} &= -\cos\psi \sin\varphi - \sin\psi \cos\varphi \cos\theta, \\
\alpha_{13} &= \sin\psi \sin\theta, \\
\alpha_{21} &= \sin\psi \cos\varphi + \cos\psi \sin\varphi \cos\theta, \\
\alpha_{22} &= -\sin\psi \sin\varphi - \cos\psi \cos\varphi \cos\theta, \\
\alpha_{23} &= -\cos\psi \sin\theta, \\
\alpha_{31} &= \sin\varphi \sin\theta, \\
\alpha_{32} &= \cos\varphi \sin\theta, \\
\alpha_{33} &= \cos\theta.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Система переносных сил инерции характеризуется главным вектором $\bar{\Phi}_{пер}$ и главным моментом $\bar{M}_{Спер}$. Главный вектор переносных сил инерции равен:

$$\bar{\Phi}_{пер} = -M\bar{a}_{Спер}, \tag{2.7}$$

где

$$\bar{a}_{Спер} = \bar{a}_0 + \bar{\varepsilon}_1 \times \bar{r}_C + \bar{\omega}_1 \times (\bar{\omega}_1 \times \bar{r}_C)$$

- переносное ускорение центра масс;

$$\bar{a}_0 = \frac{\tilde{d}\bar{v}_0}{dt} + \bar{\omega}_1 \times \bar{v}_0$$

- ускорение начала координат O по отношению к осям $Oxyz$; $\bar{\varepsilon}_1 = \frac{d\bar{\omega}_1}{dt}$

- угловое ускорение осей $Oxyz$; \bar{r}_C - радиус-вектор центра масс относительно

точки O ; $\frac{\tilde{d}\bar{v}_0}{dt}$ - относительная производная по времени.

Главный момент переносных сил инерции твердого тела относительно точки C :

$$\bar{M}_C^{nep} = - \int_V \bar{\rho} \times \bar{a}^{nep} dm,$$

где $\bar{\rho}$ - радиус-вектор элементарного объема массой dm относительно точки C

$$\bar{a}^{nep} = \bar{a}_C^{nep} + \bar{\varepsilon}_1 \times \bar{\rho} + \bar{\omega}_1 \times (\bar{\omega}_1 \times \bar{\rho})$$

- переносное ускорение этого же элементарного объема; интеграл берется по всему объему тела V .

Учитывая, что

$$\begin{aligned} \int_V \bar{\rho} \times \bar{a}_C^{nep} dm &= \bar{\rho}_C \times M \bar{a}_C^{nep} = 0, \\ \int_V \bar{\rho} \times (\bar{\varepsilon}_1 \times \bar{\rho}) dm &= J_C \bar{\varepsilon}_1, \\ \int_V \bar{\rho} \times (\bar{\omega}_1 \times (\bar{\omega}_1 \times \bar{\rho})) dm &= \bar{\omega}_1 \times (J_C \bar{\omega}_1), \end{aligned}$$

получаем:

$$M_C^{nep} = - J_C \bar{\varepsilon}_1 - \bar{\omega}_1 \times (J_C \bar{\omega}_1). \quad (2.8)$$

Система кориолисовых сил инерции характеризуется главным вектором $\bar{\Phi}^{kop}$ и главным моментом \bar{M}_C^{kop} относительно точки C . Главный вектор кориолисовых сил инерции равен:

$$\bar{\Phi}^{kop} = - M \bar{a}_C^{kop}, \quad (2.9)$$

где $\bar{a}_C^{kop} = 2\bar{\omega}_1 \times \bar{v}_C$ - кориолисово ускорение центра масс.

Главный момент кориолисовых сил инерции равен:

$$\bar{M}_C^{kop} = - \int_V \bar{\rho} \times \bar{a}_{kop} dm,$$

где \bar{a}_{kop} - кориолисово ускорение элементарного объема массой dm .

Учитывая, что:

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \times \bar{a}_{kop} &= \bar{\rho} \times \bar{a}_{Ckop} + 2(\bar{\omega}_1 \cdot \bar{\rho}) \bar{\rho} \times \bar{\omega}_1, \\ \int_V \bar{\rho} (\bar{\omega}_1 \cdot \bar{\rho}) dm &= -(J_C - JE) \bar{\omega}_1, \end{aligned}$$

получаем:

$$\bar{M}_{Ckop} = -2\bar{\omega}_1 \times [(J_C - JE) \bar{\omega}_1]. \quad (2.10)$$

Здесь: $J = (J_1 + J_2 + J_3)/2$; J_1, J_2, J_3 - главные моменты инерции; E - единичная матрица (тензор).

Уравнения (2.1), (2.2), с учетом (2.3)-(2.10), для координат центра масс x_C, y_C, z_C , и углов Эйлера φ, ψ, θ полностью описывают движение свободного твердого тела относительно осей $Oxyz$. Эти же уравнения сохраняют силу для движения твердого тела по шероховатой плоскости. Уравнения связей, накладываемых на движение твердого тела в этом случае, уменьшают число независимых обобщенных координат и позволяют использовать уравнения (2.1), (2.2) также для определения неизвестных реакций.

Сравнивая формулы (2.8) и (2.10), нетрудно заметить, что в задачах вибрационного перемещения, в которых рассматривается, как правило, медленное относительное движение объекта, влияние переносных сил

инерции на это движение (по крайней мере, на его вращательную часть) является более существенным по сравнению с кориолисовыми силами инерции ввиду

$$|\vec{\omega}_1|_{max} \gg |\vec{\omega}|_{max}.$$

2. Вибрационное поле шероховатой плоскости, совершающей произвольные колебания

В монографии И.И.Блехмана [9] рассмотрены вопросы синтеза вибрационных полей твердых тел с учетом их упругих свойств. В данном параграфе исследуем структуру и свойства вибрационного поля шероховатой плоскости как абсолютно твердого тела, совершающего произвольные пространственные колебания.

Пусть $Oxyz$ - система координат, связанная с плоскостью так, что ось Oz перпендикулярна плоскости. Ускорение некоторой точки D плоскости имеет вид:

$$\vec{a} = \vec{a}_O + \vec{\varepsilon}_1 \times \vec{r} + \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}),$$

где \vec{a}_O - ускорение точки O ; \vec{r} - радиус-вектор точки D ; $\vec{\omega}_1, \vec{\varepsilon}_1$ - векторы угловой скорости и углового ускорения плоскости.

Ускорение точки D можно разложить на две составляющие: касательную \vec{a}_t и нормальную \vec{a}_n по отношению к плоскости. Проекции векторов \vec{a}_t, \vec{a}_n на оси $Oxyz$ равны соответствующим проекциям вектора полного ускорения:

$$a_{tx} = a_{Ox} - (\omega_{1y}^2 + \omega_{1z}^2)x + (-\varepsilon_{1z} + \omega_{1x}\omega_{1y})y,$$

$$a_{ty} = a_{Oy} - (\omega_{1x}^2 + \omega_{1y}^2)y + (\varepsilon_{1z} + \omega_{1x}\omega_{1y})x,$$

$$a_{nz} = a_{Oz} + (-\varepsilon_{1y} + \omega_{1x}\omega_{1z})x + (\varepsilon_{1x} + \omega_{1y}\omega_{1z})y,$$

где x, y, z - координаты точки D . Множество векторов касательных ускорений точек плоскости образуют поле касательных ускорений,

множество векторов нормальных ускорений - поле нормальных ускорений. Для вибрирующей плоскости указанные поля являются нестационарными и периодическими.

В задачах вибрационного перемещения существенна ограниченность этих полей в области взаимодействия плоскости с перемещаемым объектом. Если в любой момент времени:

$$|\vec{a}_{On}| < C_1, |\vec{a}_{Ot}| < C_2,$$

где C_1, C_2 - некоторые постоянные, то совокупность полей касательных и нормальных ускорений будем называть вибрационным полем, локально ограниченным в окрестности точки O . Постоянные C_1, C_2 - определяются условиями конкретных задач и могут характеризовать соответственно безотрывность движения перемещаемого объекта и устойчивость этого движения в окрестности точки O .

Ограничение на нормальное ускорение $|\vec{a}_n| < C_1$ выполняется в области:

$$|a_{Oz} + (-\varepsilon_{ly} + \omega_{lx}\omega_{lz})x + (\varepsilon_{lx} + \omega_{ly}\omega_{lz})y| < C_1,$$

то есть в полосе, заключенной между двумя параллельными прямыми и содержащей точку O , шириной:

$$d = 2C_1 / \sqrt{(-\varepsilon_{ly} + \omega_{lx}\omega_{lz})^2 + (\varepsilon_{lx} + \omega_{ly}\omega_{lz})^2}$$

Условие $|\vec{a}_t| < C_2$, выполняется в области:

$$\begin{aligned} & [a_{Ox} - (\omega_{ly}^2 + \omega_{lz}^2)x + (-\varepsilon_{lz} + \omega_{lx}\omega_{ly})y]^2 + \\ & + [a_{Oy} + (\varepsilon_{lz} + \omega_{lx}\omega_{ly})x - (\omega_{lx}^2 + \omega_{ly}^2)y]^2 < C_2^2, \end{aligned}$$

то есть на участке плоскости Oxy , ограниченном некоторым эллипсом, охватывающим точку O .

Наиболее заметно устойчивые режимы движения объекта могут проявляться в окрестности точек плоскости, касательное ускорение которых минимально. Для того чтобы величина касательного ускорения

$$a_r = \sqrt{a_{rx}^2 + a_{ry}^2}$$

была минимальной в точке O , необходимо:

$$\frac{\partial a_r}{\partial x} = \frac{\partial a_r}{\partial y} = 0 \quad \text{при } x = y = 0.$$

Отсюда получаем систему уравнений для a_{Ox}, a_{Oy} :

$$- a_{Ox}(\omega_{Iy}^2 + \omega_{Iz}^2) + a_{Oy}(\varepsilon_{Iz} + \omega_{Ix}\omega_{Iy}) = 0,$$

$$a_{Ox}(-\varepsilon_{Iz} + \omega_{Ix}\omega_{Iy}) - a_{Oy}(\omega_{Ix}^2 + \omega_{Iz}^2) = 0,$$

главный определитель которой равен

$$\Delta = \omega^2 \omega_{Iz}^2 + \varepsilon_{Iz}^2.$$

В результате имеем:

а) если $\omega_{Iz} \neq 0$, то минимум \vec{a}_r находится в точке O только в случае $a_{Ox} = a_{Oy} = 0$;

б) если $\omega_{Iz} = 0$, то минимум \vec{a}_r находится в точке O также при условии $\vec{a}_{Or} \times \vec{\omega}_I = 0$, то есть когда векторы $\vec{a}_{Or}, \vec{\omega}_I$ коллинеарны.

Заметим, что случай а) имеет меньшее практическое значение, чем случай б), так как наличие составляющей ω_{Iz} увеличивает влияние дестабилизирующего фактора на перемещение объекта; поэтому в дальнейшем считаем $\omega_{Iz} = 0$.

Вибрации шероховатой плоскости оказывают двойное действие на движение твердого тела. С одной стороны, вибрации нивелируют случайный характер зацеплений между микронеровностями соприкасающихся поверхностей. С другой стороны, за счет вибраций можно перемещать твердое тело и разворачивать его в требуемое положение, то есть управлять движением твердого тела.

Влияние вибраций на поступательную часть движения твердого тела достаточно полно отражается теорией вибрационного перемещения материальной частицы. Получим условие, при котором вибрации плоскости могут вызвать разворот тела в требуемое положение. Поле переносных сил инерции будет способствовать ориентации тела в положении ψ_0 , если во все время движения

$$M_{Cz}^{nep} \Big|_{\psi=\psi_0} = 0, \quad \frac{\partial M_{Cz}^{nep}}{\partial \psi} \Big|_{\psi=\psi_0} < 0, \quad (2.11)$$

или, используя выражение (2.8):

$$B_1 \sin \psi_0 + B_2 \cos \psi_0 + B_3 \sin 2\psi_0 + B_4 \cos 2\psi_0 = 0, \\ B_1 \cos \psi_0 - B_2 \sin \psi_0 + 2B_3 \cos 2\psi_0 - 2B_4 \sin 2\psi_0 < 0,$$

$$\text{где, с учетом } \omega_{Iz} \equiv 0, \quad B_1 = J_{rz} \varepsilon_{Iy} - J_{Iz} \varepsilon_{Ix}, \quad B_2 = J_{rz} \varepsilon_{Ix} + J_{Iz} \varepsilon_{Iy}.$$

$$B_3 = \frac{I}{2} (J_{ll} - J_{rr}) (\omega_{Ix}^2 - \omega_{Iy}^2) + 2J_{rl} \omega_{Ix} \omega_{Iy},$$

$$B_4 = J_{rl} (\omega_{Ix}^2 - \omega_{Iy}^2) - (J_{ll} - J_{rr}) \omega_{Ix} \omega_{Iy}.$$

Здесь J_{rz}, J_{Iz}, \dots - моменты инерции по отношению к осям прямоугольной системы координат $CrIz'$ (ось Cr является осью нутации, ось Cz' параллельна оси Oz). Однако следует иметь в виду, что условие (2.11) является необходимым, но недостаточным для осуществления ориентации тела силами инерции. Для получения достаточных условий нужно учитывать движение центра масс, а также действие статических сил и сил трения.

Одним из примеров локально ограниченного вибрационного поля является вибрационное поле плоскости, совершающей угловые колебания вокруг неподвижной оси, расположенной в этой же плоскости. Если ось Ox направить вдоль оси колебаний плоскости, то проекция момента M_{Cz}^{nep} запишется в виде:

$$M_{Cz}^{nep} = (J_{rz} \cos \psi - J_{lz} \sin \psi) \varepsilon_{Ix} + \left[\frac{I}{2} (J_{ll} - J_{rr}) \sin 2\psi + J_{rl} \cos 2\psi \right] \omega_{Ix}^2.$$

Отсюда видно, что ориентация твердого тела возможна только в том случае, если ось Cz' будет главной осью инерции, при этом $J_{rz} = J_{lz} = 0$. Тогда полагая, без ограничения общности, $J_{rl} = 0$, $J_{ll} > J_{rr}$, нетрудно заметить, что условия (2.11) удовлетворяются при $\psi_0 = \frac{\pi}{2}$.

4. Постановка задач взаимодействия твердого тела с виброплоскостью

Общей задачей исследования движения твердого тела по виброплоскости является поиск устойчивых основных режимов движения и решение вопросов их существования. Наиболее перспективными для практического использования представляются режимы движения, устойчивые по траектории и по относительной ориентации тела.

Всю совокупность параметров системы «твердое тело – виброплоскость» можно разделить на следующие группы: параметры, характеризующие геометрическую форму и инерционные свойства твердого тела; параметры движения виброплоскости; параметры трения в точках контакта тела с плоскостью. Целенаправленным определением выбора параметров и их значений можно обеспечить устойчивость исследуемого движения.

Основные режимы относительного движения твердого тела могут состоять из следующих этапов: покой, скольжение, качение и качение со скольжением. Переходные режимы в дополнение к этим этапам включают также опрокидывание, со скольжением или без него, - перекачивание опорного объема через граничные точки возможного контакта. Переходные режимы движения появляются в силу начальных условий или во время

движения при определенных значениях параметров вибрации плоскости, когда данное статически устойчивое положение твердого тела становится динамически неустойчивым. За переходным режимом движения следует основной режим, как только твердое тело попадает в одно из положений, устойчивых по отношению к данным вибрациям плоскости.

Каждый этап движения описывается нелинейными дифференциальными уравнениями, которые, как правило, не интегрируются в конечном виде. К тому же при переходе от одного этапа движения к другому изменяется структура дифференциальных уравнений (число уравнений, их параметры). Поэтому исследование взаимодействия твердого тела с виброплоскостью прямыми методами интегрирования уравнения движения (приближенными или численными) являются весьма громоздким и практически неосуществимым.

Одним из путей решения проблемы представляется исследование устойчивости отдельных состояний твердого тела по отношению к разовым (начальным) и к постоянно действующим (вибрационным) возмущениям. Здесь можно выделить три типа задач: устойчивость к сдвигу с места (из состояния покоя или при качении), устойчивость к опрокидыванию (из состояния покоя, при качении, скольжении или качении со скольжением), устойчивость движения твердого тела в ориентированном положении.

Положение твердого тела на плоскости определяется его обобщенными координатами q_j ($j=1,2, \dots, s$; s - число степеней свободы). Для решения общей задачи ориентирования необходимо обеспечить, чтобы в течение некоторого промежутка времени $\Delta t = t - t_1$ (t_1 - минимальное время ориентирования) тело находилось в требуемом положении $\{q_j^1\}$ или близком к нему $\{q_j : |q_j - q_j^1| < \varepsilon_j\}$ независимо от своего начального положения $\{q_j^0\}$. Здесь величины ε_j определяются из требований к процессу ориентирования.

Решение задачи о сдвиге и об опрокидывании позволяет определить

область существования основных режимов движения. Задача об опрокидывании к тому же совпадает с задачей первичной ориентации твердого тела на виброплоскости /82/. Она заключается в том, чтобы перевести тело из первоначального статически устойчивого положения равновесия в требуемое устойчивое положение, различимое с первоначальным. Это можно достигнуть в отдельных случаях таким подбором параметров виброплоскости, при котором все статически устойчивые положения равновесия, кроме требуемого, становятся неустойчивыми по отношению к выбранным вибрациям. Задача вторичной ориентации определяется так же созданием вибрационного поля, обеспечивающего наряду со стабильностью перемещения тела устойчивость его ориентированного положения.

В настоящей работе исследуются только основные режимы движения. Под математической моделью взаимодействия твердого тела с виброплоскостью понимается совокупность систем дифференциальных уравнений для каждого этапа движения и условий перехода от одного этапа движения к другому. В последующих главах определяются полные математические модели, а также общие закономерности безотрывного движения твердых тел отдельно для каждого из случаев трех, двух и одной точек контакта с виброплоскостью. При этом считается, что коэффициенты трения покоя и скольжения совпадают, трение качения и верчения пренебрежимо малы.

5. Математическая модель твердого тела с тремя точками контакта

Твердое тело с тремя точками контакта на плоскости является упрощенной моделью тела, опирающегося на шероховатую плоскость плоским участком своей поверхности, а также соответствует реальному телу с тремя выступами, в которых осуществляется касание тела с плоскостью. Для тела, опирающегося плоским участком, три точки контакта можно

отождествлять с точками локального максимума нормального давления, возникающего на опорной площадке нагруженного тела; положение этих точек не зависит от вида нагружения, но может изменяться относительно поверхности тела при его движении из-за случайности характера взаимного касания микрорельефов поверхностей. Однако для определенности будем полагать, что точки контакта не перемещаются по поверхности тела. Кроме этого, для устойчивости положения тела на трех точках необходимо, чтобы линия действия силы тяжести (вертикальная прямая, проходящая через центр масс тела) пересекала треугольник, вершинами которого являются точки контакта, в его внутренней точке.

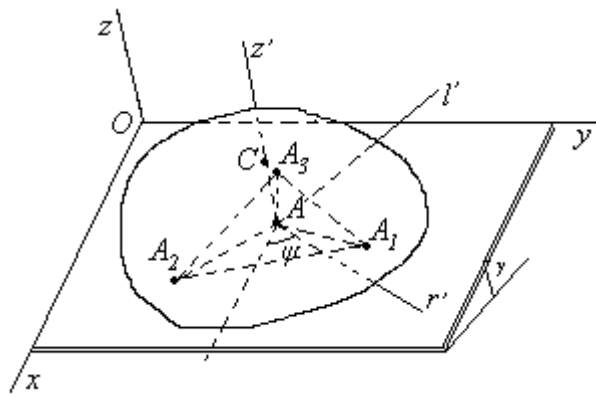


Рис 3.1. Схема положения твердого тела с тремя точками контакта на шероховатой плоскости

Для исследования движения свяжем с телом систему координат $C\xi\eta\zeta$, оси которой являются главными центральными осями инерции тела. Пусть A – точка пересечения оси z' параллельной оси Oz и проходящей через центр масс C , с плоскостью Oxy ; $Ar'l'z'$ – система координат, ось Ar' которой параллельна оси нутации тела (рис. 3.1). Тогда при безотрывном движении тела должны выполняться условия:

$$z_C = z_{C0}, \quad \varphi = \varphi_0, \quad \theta = \theta_0,$$

где $z_{C0}, \varphi_0, \theta_0$ – некоторые постоянные величины. Если $z_{C0} = 0$, то имеем случай плоского твердого тела, в отличие от $z_{C0} \neq 0$ – случая объемного тела. Будем считать, что контакт твердого тела с плоскостью осуществляется в

некоторых точках A_k ($k = 1, 2, 3$); положение тела на плоскости определяется координатами центра масс x_C , y_C и углом поворота ψ между осями Ox и Ar' . На твердое тело действуют: сила тяжести \bar{P} , нормальные реакции \bar{N}_k и силы трения \bar{F}_k в точках контакта A_k ($k = 1, 2, 3$).

В самом общем случае безотрывного движения в каждый момент времени твердое тело может находиться в одном из следующих состояний: относительный покой, поворот вокруг одной из точек контакта, плоское движение. Каждое из указанных состояний подчиняется системе уравнений, вытекающих из уравнений Лагранжа (2.1) – (2.3):

$$\begin{aligned}
 M \ddot{x}_C &= P_x + \sum F_{kx} + \Phi_{\text{неp } x} + \Phi_{\text{коп } x}, \\
 M \ddot{y}_C &= P_y + \sum F_{ky} + \Phi_{\text{неp } y} + \Phi_{\text{коп } y}, \\
 0 &= P_z + \sum N_{kz} + \Phi_{\text{неp } z} + \Phi_{\text{коп } z}, \\
 J_3 \cos\theta \ddot{\psi} + J_{rp} \sin^2\theta \dot{\psi}^2 &= z_C \sin\theta \sum F_{kr} + \sin\theta \sum N_k r_k + \\
 &\quad + \cos\theta \sum (r_k F_{kl} - l_k F_{kr}) + M_{C \text{неp } \zeta} + M_{C \text{коп } \zeta}, \\
 J_{Cz} \ddot{\psi} &= \sum (r_k F_{kl} - l_k F_{kr}) + M_{C \text{неp } z}, \\
 - J_{rp} \sin\theta \dot{\psi} + J_{zl} \dot{\psi}^2 &= z_C \sum F_{kl} + \sum N_k l_k + M_{C \text{неp } r} + M_{C \text{коп } r},
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

где

$$J_{rp} = (J_1 - J_2) \sin\varphi \cos\varphi, \quad J_{Cz} = J_1 \alpha_{31}^2 + J_2 \alpha_{32}^2 + J_3 \alpha_{32}^2;$$

α_{ij} – косинусы углов между осями $Oxyz$ и $C\xi\eta\zeta$, определяемые по формулам (2.6); r_k , l_k – координаты точек контакта A_k в системе координат $Ar'l'z'$; F_{kr} , F_{kl} – проекции сил трения на эти же оси. Проекции P_x , P_y , P_z определяются положением шероховатой плоскости в пространстве, а главные векторы $\bar{\Phi}_{\text{неp}}$, $\bar{\Phi}_{\text{коп}}$ и главные моменты $\bar{M}_{C \text{неp}}$, $\bar{M}_{C \text{коп}}$ сил инерции зависят от движения этой плоскости в соответствии с формулами (2.7) – (2.10).

В состоянии покоя ($\dot{x}_C = \dot{y}_C = 0$, $\dot{\psi} = 0$) из уравнений (3.1) вытекают уравнения для определения нормальных реакций:

$$\begin{aligned}
 \sum N_k &= -P_z - \Phi_{\text{неp } z}, \\
 \sum N_k l_k &= P_l z_C - M_{A \text{неp } r}, \\
 \sum N_k r_k &= P_r z_C - M_{A \text{неp } l},
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

а также условия на силы трения:

$$\begin{aligned}
\sum F_{kr} + P_r + \Phi_{nep r} &= 0, \\
\sum F_{kl} + P_l + \Phi_{nep l} &= 0, \\
\sum (r_k F_{kl} - l_k F_{kr}) + M_{C nep z} &= 0.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

В предельном состоянии равновесия силы трения достигают по величине своих максимальных значений

$$F_k^0 = fN_k$$

(f – коэффициент трения), а по направлению противоположны возможным перемещениям соответствующих точек контакта, то есть:

$$F_{kr} = \pm F_k^0 \frac{l_k - l_Q}{QA_k}, \quad F_{kl} = \mp F_k^0 \frac{r_k - r_Q}{QA_k}, \tag{3.4}$$

где $Q(r_q, l_q)$ – центр начального поворота твердого тела.

Формулы (3.4) имеют смысл, если центр Q не совпадает с точками контакта A_k . В этом случае на основании первых двух уравнений (3.3) определяются координаты центра Q , если он существует. Выбор верхнего или нижнего знака в формулах (3.4) зависит от того, в каком направлении активные силы и силы инерции стремятся повернуть твердое тело. Плоский сдвиг твердого тела наступает, если момент активных сил и сил инерции относительно центра превосходит по величине момент сил трения, то есть

$$|M_{Q nep z} + P_r l_Q - P_l r_Q| \geq \sum F_k^0 QA_k. \tag{3.5}$$

Поворот твердого тела вокруг точки контакта A_i из состояния покоя должен произойти, если:

$$\begin{aligned}
|M_{Ai nep z} + P_r l_i - P_l r_i| &\geq F_j^0 A_i A_j + F_k^0 A_i A_k, \\
F_i &< F_i^0 \quad (i \neq j \neq k).
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Другой подход к исследованию предельного состояния равновесия, указанный в учебнике Г. К. Сулова /95/, рассмотрен в следующем параграфе диссертации.

Во время вращения твердого тела вокруг точки A_i его движение подчиняется уравнению:

$$J_{Aiz} \ddot{\psi} = -f(N_j a_k + N_k a_j) \text{sign} \dot{\psi} - r_i P_l + l_i P_r + M_{Ai nep z} + M_{Ai kop z} \tag{3.7}$$

$$(i \neq j \neq k).$$

Нормальные реакции определяются из уравнений:

$$\sum_{n=1}^3 N_n a_{nj}^i = b_j^i \quad (j = 1, 2, 3)$$

где

$$a_{11}^i = a_{12}^i = a_{13}^i = 1; \quad a_{2i}^i = J_{Aiz} l_i; \quad a_{3i}^i = J_{Aiz} r_i;$$

$$a_{2j}^i = J_{Aiz} l_j - f J_{Airz} a_k \text{sign} \psi \quad (i \neq j \neq k);$$

$$a_{3j}^i = J_{Aiz} r_j + f J_{Ailz} a_k \text{sign} \psi,$$

$$b_1^i = -P_z - \Phi_{неpz} - \Phi_{корz},$$

$$b_2^i = J_{Aiz} (J_{Ailz} \psi^2 + P_l z_C - M_{Ainepr} - M_{Aikorl}) + J_{Airz} (r_i P_l - l_i P_r + M_{Ainepz} + M_{Aikorz});$$

$$b_3^i = J_{Aiz} (J_{Airz} \psi^2 + P_r z_C - M_{Ainepl} - M_{Aikorl}) + J_{Ailz} (-r_i P_l + l_i P_r + M_{Ainepz} + M_{Aikorz});$$

J_{Aiz}, J_{Airz}, \dots – моменты инерции по отношению к осям, параллельным

соответствующим осям Crz' и проходящим через точку A_i . Вращение

твердого тела вокруг точки A_i будет происходить до тех пор, пока

$F_{ir}^2 + F_{il}^2 < (F_i^0)^2$, иначе наступает плоский сдвиг, или $\psi \neq 0$, иначе при

одновременном нарушении неравенства (3.6) твердое тело переходит в

состояние покоя.

При плоском движении:

$$\bar{F}_i = -f N_i \bar{v}_i^0, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.8)$$

где $\bar{v}_i^0 = \bar{v}_i / |\bar{v}_i|$ – единичный вектор направления скорости точки A_i . Полагая

для упрощения вычислений: $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, $\phi_0 = 0$, получаем из (3.1):

– уравнения движения твердого тела:

$$M \ddot{x}_C = P_x - \sum f N_k v_{kx}^0 + \Phi_{неpx} + \Phi_{корx}, \quad (3.9)$$

$$M \ddot{y}_C = P_y - \sum f N_k v_{ky}^0 + \Phi_{неpy} + \Phi_{корy},$$

$$J_2 \ddot{\psi} = - \sum f N_k (r_k v_{kl}^0 - l_k v_{kr}^0) + M_{Cнеpz} + M_{Cкорz},$$

– уравнения для определения реакций N_i :

$$\sum N_k = -P_z - \Phi_{неpz} - \Phi_{корz},$$

$$\sum N_k (r_k - f z_C v_{kr}^0) = M_{Cнеpl} + M_{Cкорl}, \quad (3.10)$$

$$\sum N_k (l_k - f z_C v_{kl}^0) = -M_{Cнеpr} + M_{Cкорr}.$$

За этапом плоского движения должен последовать этап вращения вокруг

точки A_i , если в момент обращения в нуль ее скорости, $\bar{v}_i = 0$, сила трения F_i в этой точке не будет превосходить по величине своего максимального значения F_i^0 . Если в некоторый момент времени выполняются условия: $\dot{x}_C = \dot{y}_C = 0, \psi' = 0$, и при этом нарушается неравенство (3.5), то наступает этап относительного покоя.

Система уравнений и неравенств (3.2) – (3.10) образует полную математическую модель, которая допускает построение единого алгоритма определения закона безотрывного движения твердого тела с тремя точками контакта по вибрирующей шероховатой плоскости (Приложение). Для выявления общих закономерностей в последующих параграфах данной главы рассматриваются частные случаи указанного движения. Учет размеров твердого тела необходим при исследовании вращательной части движения и устойчивости ориентированного положения тела. При определении устойчивости траектории его центра масс будем ограничиваться рассмотрением движения материальной точки при соответствующем силовом воздействии.

6. Сдвиг с места твердого тела, опирающегося на шероховатую плоскость тремя точками

Для исследования основных режимов движения, содержащих этапы покоя, необходимо определить условия, при которых происходит сдвиг первоначально покоящегося тела относительно шероховатой плоскости. Рассмотрим твердое тело, лежащее на шероховатой плоскости и опирающееся на нее тремя своими точками $A_i(x_i, y_i)$, ($i = 1, 2, 3$). Пусть помимо сил, перпендикулярных шероховатой плоскости, на тело действует система сил, параллельных этой плоскости, с главным вектором $\bar{F}_\tau(t)$ и главным моментом $M_{Cz}(t)$ относительно центра масс C . Тело будет находиться в равновесии до тех пор, пока силы трения, возникающие в точках контакта A_i , не достигнут по величине своих предельных значений F_i^0 . Задача заключается в определении условий, при которых в точках контакта A_i начнется проскальзывание, и тело из состояния покоя придет в движение.

Любое элементарное перемещение твердого тела является поворотом вокруг некоторой точки $Q(x, y)$ плоскости Oxy , совпадающей с шероховатой плоскостью. Состояние тела будет зависеть от величины главного момента всех сил:

$$M_{OZ}(t, x, y) = \sum F_i^0 \cdot QA_i - |M_{Cz} + (y - y_C)F_{ix} - (x - x_C)F_{iy}|, \quad (3.11)$$

где $QA_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}$. Движение тела из состояния покоя начинается поворотом вокруг точки $Q_0(x_0, y_0)$ абсолютного минимума функции $M_{OZ}(t, x, y)$ в тот момент времени t , когда абсолютный минимум, будучи до этого положительным, обращается в нуль.

Экстремальные свойства функции $M_{OZ}(t, x, y)$ показывают, что ее абсолютный минимум может находиться либо в одной из точек A_i , либо в той точке, координаты которой являются решением уравнений предельного равновесия твердого тела:

$$\begin{aligned} F_{iy} \pm \sum F_i^0 (x - x_i) / QA_i &= 0, \\ F_{ix} \mp \sum F_i^0 (y - y_i) / QA_i &= 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Здесь учитывается, что предельные силы трения могут быть представлены в виде:

$$\bar{F}_i^0 = \pm F_i^0 \cdot \bar{QA}_i \times \bar{z}_0 / QA_i,$$

где \bar{z}_0 – единичный вектор, перпендикулярный шероховатой плоскости; знак в выражении сил трения выбирается в соответствии с направлением возможного поворота тела так, чтобы силы трения были противоположны скоростям точек контакта. Нетрудно проверить, что

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 M_{OZ}}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 M_{OZ}}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 M_{OZ}}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 M_{OZ}}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

– положительно определенная матрица. Поэтому в силу непрерывности функция $M_{OZ}(t, x, y)$ является выпуклой и имеет единственную точку экстремума – абсолютный минимум.

Особый интерес представляют конечные соотношения между главным вектором и главным моментом активных сил, определяющих состояние

покоя или возникновение движения. Сложность оценки функции $M_{OZ}(t, x, y)$ связана, в основном, с оценкой ее первого члена:

$$g(x, y) = \sum F_i^0 \cdot Q A_i.$$

В работе /95/ приводится геометрическое решение задачи отыскания минимума функции $g(x, y)$ в случае, когда $F_1^0 = F_2^0 = F_3^0$. Этот способ решения нетрудно обобщить на произвольные F_i^0 . Так как минимум $g(x, y)$ совпадает с минимумом $M_{OZ}(t, x, y)$ при $F_{ix} = F_{iy} = 0$, то в этом случае уравнения (3.12) будут выражать условие замкнутости силового треугольника $\bar{F}_1^0, \bar{F}_2^0, \bar{F}_3^0$. Геометрически задачу определения минимума $g(x, y)$ можно сформулировать следующим образом: расположить заданные по величине векторы сил $\bar{F}_1^0, \bar{F}_2^0, \bar{F}_3^0$ в точках A_1, A_2, A_3 соответственно так, чтобы:

- а) силовым треугольником $\bar{F}_1^0, \bar{F}_2^0, \bar{F}_3^0$ был замкнут;
- б) перпендикуляры, проведенные к силам в точках контакта, пересекались в одной точке $Q'_0(x'_0, y'_0)$ (эта точка будет являться точкой минимума функции $g(x, y)$).

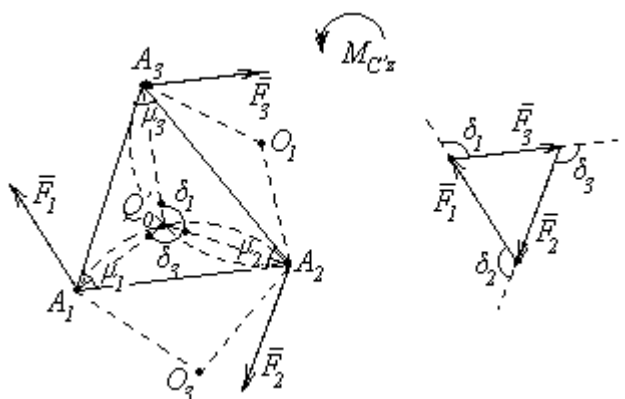


Рис. 3.2. Определение положения Q'_0 – точки минимума функции $g(x, y)$

Обозначим: μ_i – углы треугольника $A_1A_2A_3$; δ_i – углы между направлениями сил в силовом треугольнике $\bar{F}_1^0, \bar{F}_2^0, \bar{F}_3^0$ (рис. 3.2). Геометрическое место точек пересечения перпендикуляров к силам \bar{F}_1^0, \bar{F}_2^0 , расположенных под углом δ_3 , образует дугу окружности A_1A_2 радиуса R_3 с

центром в точке O_3 ; аналогично, дуга A_2A_3 окружности радиуса R_1 с центром в точке O_1 , является геометрическим местом точек пересечения перпендикуляров к силам $\overline{F}_2^0, \overline{F}_3^0$, расположенных под углом δ_1 . Дуги A_1A_2, A_2A_3 пересекаются в искомой точке Q'_0 минимума функции $g(x, y)$. Опуская вычисления, приведем основные формулы для определения положения точки Q'_0 и m , минимума функции $g(x, y)$:

$$\begin{aligned} x'_0 - x_2 &= -a_1 a_3 (y_{03} - y_{01}) \sin(\delta_2 - \mu_2) / 2(O_1 O_3)^2 \sin \delta_1 \sin \delta_3, \\ y'_0 - y_2 &= a_1 a_3 (x_{03} - x_{01}) \sin(\delta_2 - \mu_2) / 2(O_1 O_3)^2 \sin \delta_1 \sin \delta_3, \\ m &= 2R \sqrt{\sin \mu_1 \sin \mu_2 \sin \mu_3 [\sum (F_i^0)^2 \operatorname{ctg} \mu_i + 4S_F]}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

где

$$\begin{aligned} x_{03} - x_{01} &= -[(x_3 - x_1) - (y_3 - y_2) \operatorname{ctg} \delta_1 + (y_2 - y_1) \operatorname{ctg} \delta_3] / 2; \\ y_{03} - y_{01} &= -[(y_3 - y_1) - (x_3 - x_2) \operatorname{ctg} \delta_1 - (x_2 - x_1) \operatorname{ctg} \delta_3] / 2; \\ O_1 O_3 &= \sqrt{(x_{03} - x_{01})^2 - (y_{03} - y_{01})^2}; \end{aligned}$$

$R = a_i / 2 \sin \mu_i$ – радиус описанной окружности треугольника $A_1 A_2 A_3$;

$S_F = F_i^0 F_j^0 \sin \delta_k / 2$ – «площадь» силового треугольника,

$a_i = A_j A_k$ ($i \neq j \neq k$).

Приведенный способ отыскания точки Q'_0 можно осуществить, если справедливы неравенства силового треугольника: $F_i^0 < F_j^0 + F_k^0$ ($i \neq j \neq k$), а также $\mu_i < \delta_i$ ($i = 1, 2, 3$). В противном случае необходимо использовать следующее утверждение.

Лемма. Если для какого-либо номера i нарушается одно из неравенств: $F_i^0 < F_j^0 + F_k^0$ ($i \neq j \neq k$) или $\mu_i < \delta_i$, то $\min g(x, y) = g(x_i, y_i)$.

Доказательство: В условиях леммы точка Q'_0 не может являться внутренней точкой треугольника $A_1 A_2 A_3$, по построению (рис. 3.2); она не может находиться вне треугольника $A_1 A_2 A_3$, так как ее координаты должны удовлетворять уравнениям (3.12) при $F_{tx} = F_{ty} = 0$. Отсюда следует, что точка Q'_0 совпадает с одной из точек контакта.

Пусть указанные в формулировке леммы неравенства нарушаются, для

определенности, в точке A_3 .

1. Имеем: $F_3 > F_1 + F_2$. Тогда

$$\begin{aligned} g(x_3, y_3) &= F_1^0 a_2 + F_2^0 a_1 < (F_3^0 - F_2^0) a_2 + F_2^0 a_1 = F_3^0 a_2 + F_2^0 (a_1 - a_2) < \\ &< F_3^0 a_2 + F_2^0 a_3 = g(x_1, y_1). \end{aligned}$$

Аналогично показывается, что $g(x_3, y_3) < g(x_2, y_2)$. Отсюда

$$\min g(x, y) = g(x_3, y_3).$$

2. Пусть $\delta_3 < \mu_3$. Рассмотрим произвольный единичный вектор $\bar{l}_0 = (\cos v, \sin v)$ и вычислим:

$$\begin{aligned} \lim_{Q \rightarrow A_3} \frac{\partial g}{\partial \bar{l}_0} &= \lim_{Q \rightarrow A_3} \left(\frac{\partial g}{\partial x} \cos v + \frac{\partial g}{\partial y} \sin v \right) = \lim_{Q \rightarrow A_3} \left(\sum F_i^0 \left[\frac{\partial (QA_i)}{\partial x} \cos v + \frac{\partial (QA_i)}{\partial y} \sin v \right] \right) = \\ &= \lim_{Q \rightarrow A_3} \left(\sum F_i^0 \left[\frac{x - x_i}{QA_i} \cos v + \frac{y - y_i}{QA_i} \sin v \right] \right) = \\ &= F_3^0 + \frac{F_1^0}{a_2} [(x_3 - x_1) \cos v + (y_3 - y_1) \sin v] + \frac{F_2^0}{a_1} [(x_3 - x_2) \cos v + (y_3 - y_2) \sin v] = \\ &= F_3^0 + \left(F_1^0 \frac{x_3 - x_1}{a_2} + F_2^0 \frac{x_3 - x_2}{a_1} \right) \cos v + \left(F_1^0 \frac{y_3 - y_1}{a_2} + F_2^0 \frac{y_3 - y_2}{a_1} \right) \sin v \geq \\ &\geq F_3^0 - \sqrt{\left(F_1^0 \frac{x_3 - x_1}{a_2} + F_2^0 \frac{x_3 - x_2}{a_1} \right)^2 + \left(F_1^0 \frac{y_3 - y_1}{a_2} + F_2^0 \frac{y_3 - y_2}{a_1} \right)^2} = \\ &= F_3^0 - \sqrt{(F_1^0)^2 + (F_2^0)^2 + 2F_1^0 F_2^0 \frac{(x_3 - x_1) \cdot (x_3 - x_2) + (y_3 - y_1) \cdot (y_3 - y_2)}{a_1 a_2}} = \\ &= \bar{F}_3^0 - \sqrt{(F_1^0)^2 + (F_2^0)^2 + 2F_1^0 F_2^0 \cos \mu_3} > F_3^0 - \sqrt{(F_1^0)^2 + (F_2^0)^2 + 2F_1^0 F_2^0 \cos \delta_3} = 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что в точке A_3 функция $g(x, y)$ возрастает во всех направлениях и, ввиду выпуклости, минимальна. Лемма доказана.

Рассмотрим частные случаи силового воздействия на твердое тело.

1. Пусть главный вектор активных сил равен нулю, $\bar{F}_\tau(t) \equiv 0$.

Тогда $M_{Q_z}(t, x, y) = g(x, y) - |M_{C_z}(t)|$; сдвиг первоначально покоящегося тела произойдет в тот момент, когда при постепенном возрастании $M_{C_z}(t)$ достигает минимума t функции $g(x, y)$ и представляет собой поворот тела вокруг точки Q_0 с координатами (3.13) в направлении, определяемом знаком $M_{C_z}(t)$.

2. Пусть главный вектор активных сил $\bar{F}_\tau(t)$ отличен от нуля. Не

ограничивая общности, будем считать, что он направлен параллельно оси Ox , то есть $F_{ty} = 0$, $F_{tx} = F_t > 0$. Рассмотрим точку C' , положение которой определяется вектором:

$$\overline{AC'} = \left(\sum F_i^0 \cdot \overline{AA_i} \right) / \sum F_i^0. \quad (3.14)$$

Пусть момент активных сил относительно точки C' равен нулю, то есть $M_{C'z} = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} M_{QZ}(t, x, y) &= g(x, y) - |(y_{C'} - y)F_{tx}| = \sum F_i^0 \cdot QA_i - \left| \sum F_i^0 (y_i - y) \right| F_t / \sum F_i^0 \geq \\ &\geq \sum F_i^0 \left[\sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2} - |y_i - y| \right] F_t / \sum F_i^0. \end{aligned}$$

Несложный анализ полученного выражения показывает, что при постепенном возрастании F_t функция моментов $M_{QZ}(t, x, y)$ обращается в нуль, как только $F_t = \sum F_i^0$, в бесконечно удаленной точке, $y = \infty$. Это говорит о том, что указанное нагружение вызывает поступательный сдвиг тела в направлении главного вектора \overline{F}_t .

3. Рассмотрим общий случай: $M_{C'z} \neq 0$, $\overline{F}_t \neq 0$. Расположим систему координат Oxy так, чтобы $F_{ty} = 0$, $M_{C'z} \cdot F_{tx} > 0$.

Уравнения (3.12) примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \sum F_i^0 (x - x_i) / QA_i &= 0, \\ F_{tx} \mp \sum F_i^0 (y - y_i) / QA_i &= 0. \end{aligned}$$

Из первого уравнения вытекает ограничение на координаты искомой точки $Q_0(x_0, y_0)$:

$$\min_i x_i < x_0 < \max_i x_i$$

Введем функции:

$$\begin{aligned} g_1(y) &= \max \left\{ m, \sum F_i^0 |y - y_{C'}| \right\}, \\ g_2(t, y) &= |M_{C'z} + F_{tx}(y - y_{C'})|. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$g(x, y) \geq g_1(y), \quad \lim_{y \rightarrow \infty} [g(x, y) - g_1(y)] = 0$$

для всех ограниченных значений x ;

$$M_{QZ}(t, x, y) \geq g_1(y) - g_2(t, y).$$

Функции $g_1(y)$, $g_2(t, y)$ пересекаются в точках (рис. 3.3):

$$y_- = y_{C'} - \frac{|M_{C'z}|}{\sum F_i^0 + F_t}, \quad y_m = y_{C'} + \frac{m - |M_{C'z}|}{F_t}, \quad y_+ = y_{C'} + \frac{|M_{C'z}|}{\sum F_i^0 - F_t}.$$

После исследования взаимного расположения точек пересечения заключаем:

а) если

$$\frac{|M_{C'z}|}{m} < 1 - \frac{F_\tau}{\sum F_i^0}, \quad (3.15)$$

то минимум функции $M_{Oz}(t, x, y)$ положителен, состояние покоя твердого тела не является предельным;

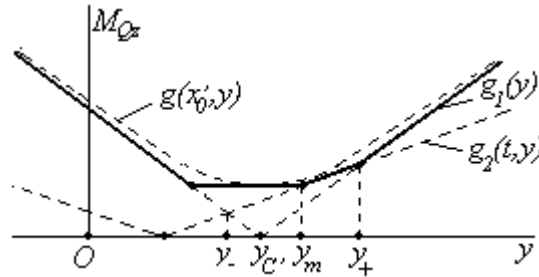


Рис. 3.3. Приближенная оценка минимума функции $M_{Oz}(t, x, y)$

б) если

$$1 - \frac{F_\tau}{\sum F_i^0} < \frac{|M_{C'z}|}{m} < 1 - \frac{F_\tau}{\sum F_i^0},$$

(3.16)

то минимум функции $M_{Oz}(t, x, y)$ возможно отрицателен в области $y_m < y < y_+$

(более определенный ответ требует учета относительного расположения точек контакта A_i);

в) если

$$1 + \frac{F_\tau}{\sum F_i^0} < \frac{|M_{C'z}|}{m},$$

(3.17)

функция $M_{Oz}(t, x, y)$ принимает отрицательные значения в некоторой конечной области (такое состояние твердого тела может возникнуть только в результате мгновенного нагружения и является кинематически неопределенным).

Расположение зон, соответствующих неравенствам (3.15)-(3.17) показано на рис. 3.4. Если для некоторого номера i выполняется неравенство:

$$F_i^0 \geq \left| \overline{F}_j^0 + \overline{F}_k^0 + \overline{F}_\tau \right| \quad (i \neq j \neq k)$$

то точка Q_0 минимума функции $M_{Qz}(t, x, y)$ совпадает с точкой A_i (доказательство этого факта принципиально не отличается от доказательства второй части леммы). Другими словами, для того, чтобы минимум функции $M_{Qz}(t, x, y)$ находился в точке A_i необходимо и достаточно

$$(F_i^0)^2 \geq \left(F_i^0 \frac{x_i - x_j}{a_k} + F_k^0 \frac{x_i - x_k}{a_j} \right)^2 + \left(F_j^0 \frac{y_i - y_j}{a_k} + F_k^0 \frac{y_i - y_k}{a_j} \mp F_{\tau x} \right)^2, \quad (3.18)$$

$(i \neq j \neq k)$

где верхний знак в сочетании \mp берется при выполнении неравенства $M_{C'z} - (y_{C'} - y_i)F_{\tau x} > 0$,

нижний знак – в противном случае.

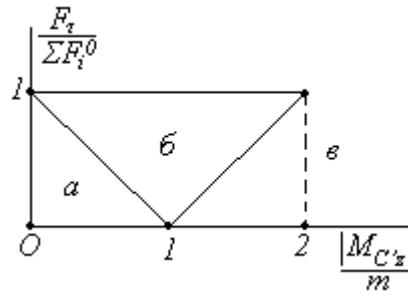


Рис. 3.4. Области значений F_τ , $M_{C'z}$, соответствующих следующим состояниям твердого тела: a – покой, \bar{b} – движение возможно, $\bar{в}$ – движение

Если система координат Oxy расположена произвольным образом, нужно перейти в систему координат $Ox'y'$, удовлетворяющую указанным в этом пункте условиям, и положить:

$$\begin{aligned} x'_i &= x_i \cos \nu + y_i \sin \nu, \\ y'_i &= -x_i \sin \nu + y_i \cos \nu, \\ F_{\tau x'} &= F_\tau \operatorname{sign} M_{C'z}, \end{aligned}$$

где

$$\cos \nu = \frac{F_{\tau x}}{F_\tau} \operatorname{sign} M_{C'z}, \quad \sin \nu = \frac{F_{\tau y}}{F_\tau} \operatorname{sign} M_{C'z}.$$

При этом, неравенства (3.18) сохраняют свой вид по отношению к величинам x'_i , y'_i , $F_{\tau x'}$. Если условия (3.18) не выполняются ни при каком i , то точка

минимума Q_0 , не совпадает ни с одной из точек контакта A_i .

В момент начала движения направление вращения твердого тела совпадает с направлением момента $M_{C'z}$.

7. Движение твердого тела с тремя точками контакта по неподвижной плоскости

Рассмотрим твердое тело массы M , которое может перемещаться по неподвижной наклонной плоскости с углом наклона γ . Пусть трение в каждой точке контакта характеризуется индивидуальным коэффициентом трения f_k . Уравнения движения (3.9) твердого тела запишутся в виде (ось Ox направлена по линии наибольшего ската вниз):

$$\begin{aligned} M \ddot{x}_c &= - \sum f_k N_k v_{kx}^0 + Mg \sin \gamma, \\ M \ddot{y}_c &= - \sum f_k N_k v_{ky}^0, \\ J_2 \ddot{\psi} &= - \sum f_k N_k (r_k v_{kl}^0 - l_k v_{kr}^0), \end{aligned} \quad (3.19)$$

где g – ускорение свободного падения. Нормальные реакции N_k в точках контакта A_k определяются из уравнений (3.10):

$$\begin{aligned} \sum N_k &= Mg \cos \gamma, \\ \sum N_k (r_k - f_k z_C v_{kr}^0) &= 0, \\ \sum N_k (l_k - f_k z_C v_{kl}^0) &= 0. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Поступательная часть движения твердого тела в первом приближении описывается движением материальной частицы. В работе /95/ приводится решение этой задачи и формулируются следующие основные выводы:

- если $tg \gamma \leq f$, то через некоторый промежуток времени тело обязательно остановится и движение прекратится;

- если $f \leq tg \gamma \leq 2f$, то тело движется без остановок, а его траектория (как у материальной точки) имеет асимптоту, параллельную линии наибольшего ската;

- если $tg \gamma > 2f$, то прямолинейное движение тела вдоль линии

наибольшего ската вниз является неустойчивым, то есть любое начальное возмущение в поперечном направлении вызывает отклонение траектории от указанной прямолинейной на неограниченно возрастающие с течением времени расстояния.

При безотрывном перемещении тела вращательная часть его движения определяется моментом сил трения:

$$M_{Cz} = - \sum f_k N_k (r_k v_{kl}^0 - l_k v_{kr}^0) \quad (3.21)$$

Для того чтобы тело ориентировалось в положении $\psi = \psi_0$, необходимо по аналогии с (2.11):

$$M_{Cz} \Big|_{\psi = \psi_0} = 0, \quad \frac{\partial M_{Cz}}{\partial \psi} \Big|_{\psi = \psi_0} < 0. \quad (3.22)$$

Рассмотрим частные случаи. Если трение во всех точках контакта одинаково и не зависит от направления движения, $f_k = f$ ($k = 1, 2, 3$), то уравнения (3.19) допускают частное решение:

$$x_C = x_{C0} + v_0 t + a_0 t^2, \quad y_C = y_{C0}, \quad \psi = \psi_0 \quad (3.23)$$

($x_{C0}, y_{C0}, \psi_0, v_0, a_0$ – некоторые постоянные), которому соответствует поступательное движение твердого тела. Нетрудно убедиться, что в этом случае $M_{Cz} = 0$ при любом $\psi = \psi_0$, то есть у тела нет стремления двигаться в ориентированном положении.

Анизотропия шероховатости плоскости практически не влияет на характер рассмотренного выше движения. Если полагать, как это делается в работе [17], $f_k = f(\mu_k)$, где $\mu_k = \arctg(\dot{y}_k / \dot{x}_k)$ — угол между направлением вектора скорости точки A_k и осью Ox , то допускаемое частное решение (3.23) не является асимптотически устойчивым ни при каких значениях ψ_0 , то есть ориентирование также не происходит.

В качестве одной из причин, способствующих ориентации, можно указать анизотропию шероховатости поверхности тела в области контакта. Допустим, что в каждой из трех точек контакта A_k коэффициент трения можно предоставить зависимостью:

$$f_k(\delta_k) = f_0 / [1 + e \cos(\delta_k - \delta_{k0})], \quad (3.24)$$

где f_0 – параметр трения; e – показатель анизотропии, $0 < e < 1$; δ_k – угол, который составляет вектор скорости точки контакта \vec{v} с осью Ar' ; δ_{k0} – индивидуальный параметр точки контакта A_k . Другими словами, коэффициент трения в каждой точке контакта зависит от направления скорости этой точки относительно поверхности тела. Такое явление может иметь место, если в окрестности точки контакта форма поверхности тела асимметрична, или физико-механические свойства материала поверхности тела в различных направлениях проявляются по-разному. На рис. 3.5 показана диаграмма для определения коэффициента трения в точке контакта A_k .

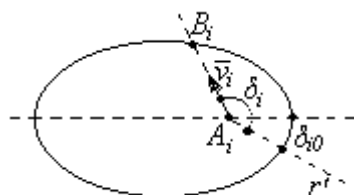


Рис 3.5. Диаграмма для определения коэффициента трения $f_i(\delta_i) = A_i B_i$

Рассмотрим движение твердого тела с малой анизотропией шероховатой поверхности ($e \ll 1$). Если тело движется поступательно и прямолинейно вдоль линии наибольшего ската вниз, то

$$M_{Cz} = - \sum (y_k - y_C) F_{kx} = \sum f_k N_k (y_k - y_C) = - e f_0 \sum N_k d_k \sin(\psi + \beta_k) \cos(\psi + \delta_k).$$

где $d_k = AA_k$; β_k – углы, которые составляют отрезки AA_k с осью Ar' . Здесь использовали:

$$F_{iy} = 0, \quad f_k \approx f_0 [1 - e \cos(\delta_k - \delta_{k0})], \quad \delta_k = -\psi.$$

Пусть например: $\delta_{10} = \delta_{20} = 0$, $\delta_{30} = \pi$ (если все δ_{i0} одинаковы, то $M_{Cz} = 0$ и ориентирование невозможно). Тогда

$$M_{Cz} = 2ef_0N_3d_3 \sin(\psi + \beta_3) \cos\psi ,$$

$$\frac{\partial M_{Cz}}{\partial \psi} = 2ef_0N_3d_3 \cos(2\psi + \beta_3).$$

Из анализа устойчивости (3.22) получаем:

- если $-\pi/2 < \beta_3 < \pi/2$, то положения $\psi_{1,2} = \pm\pi/2$ являются асимптотически устойчивыми;

- если $\pi/2 < \beta_3 < 3\pi/2$, то асимптотически устойчивыми являются положения: $\psi_3 = -\beta_3$, $\psi_4 = \pi - \beta_3$.

Итак, в рассматриваемом случае тело ориентируется с точностью до двух возможных положений. Заметим, что если $\beta_3 = \pm \pi/2$, то поступательное прямолинейное движение тела вдоль линии наибольшего ската вниз является неустойчивым; из-за знакопостоянства момента M_{Cz} обязательно должно возникнуть дополнительное вращение.

Ориентирование твердого тела будет иметь место также в случае, если коэффициенты трения в точках контакта различны (при отсутствии анизотропии трения). Такое явление характерно для тела, поверхность которого изготовлена из различных материалов в точках контакта, или для тела, имеющего неодинаковую форму поверхности в окрестности точек контакта. Пусть, например, коэффициенты трения в точках контакта имеет следующие значения:

$$f_1 = f_2 = f, \quad f_3 = f + \varepsilon,$$

где ε – некоторое положительное число. Тогда при поступательном прямолинейном движении вдоль оси Ox момент всех сил равен:

$$M_{Cz} = -\sum (y_k - y_C) F_{kx} = \sum f_k N_k (y_k - y_C) = \varepsilon (y_3 - y_C) N_3 = \varepsilon N_3 d_3 \sin(\psi + \beta_3);$$

при этом

$$\frac{\partial M_{Cz}}{\partial \psi} = \varepsilon N_3 d_3 \cos(\psi + \beta_3).$$

Отсюда нетрудно получить, что при рассматриваемом движении, положение $\psi = \pi - \beta_3$ является асимптотически устойчивым, то есть тело вполне определенным образом ориентируется.

В работе /103/, представленной в первой главе, основное внимание уделяется самоориентации твердого тела за счет наличия адгезионных сил в области контакта соприкасающихся поверхностей. Указанные особенности трения нужно учитывать при организации процессов ориентирования на виброплоскости. В дальнейшем рассматривается только изотропное однородное трение.

8. Устойчивость траектории твердого тела при его движении по шероховатой плоскости, совершающей угловые колебания.

Если твердое тело касается шероховатой плоскости тремя точками и трение во всех точках одинаково, то поступательные колебания плоскости будут вызывать поступательное движение твердого тела. Этот случай мало отличается от движения материальной частицы, широко известного в научной литературе. Гораздо менее изученным является случай угловых колебаний плоскости. На практике угловые колебания рабочего органа вибрационных транспортирующих машин считаются нежелательными, так как в общем случае дестабилизирует направленное перемещение объекта транспортирования. Тем не менее угловые колебания шероховатой плоскости являются причиной возникновения главного момента переносных сил инерции (2.8), с помощью которого можно воздействовать на вращательную часть движения твердого тела.

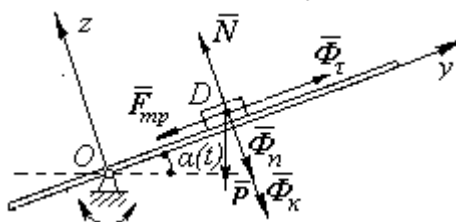


Рис. 3.6. Схема сил, действующих на материальную частицу при угловых колебаниях шероховатой плоскости

Движение центра масс твердого тела в первом приближении соответствует движению материальной частицы при тех же колебаниях плоскости. Поэтому с целью исследования устойчивости траектории центра масс твердого тела рассмотрим материальную частицу D (рис. 3.6), которая находится на шероховатой плоскости, совершающей угловые колебания относительно оси Ox по закону

$$\alpha = \alpha_0 \sin \omega t,$$

где α_0 , ω – амплитуда и частота колебаний плоскости, t – время.

Относительное движение частицы происходит под действием силы тяжести \bar{P} , нормальной реакции плоскости \bar{N} , силы трения \bar{F}_{mp} , к которым необходимо добавить силы инерции: переносные

$$\Phi_\tau = m\dot{y}\alpha^2, \Phi_n = m\dot{y}\dot{\alpha}$$

и кориолисову

$$\Phi_\tau = 2m\dot{y}\dot{\alpha}$$

Здесь m – масса частицы; $\dot{\alpha}$, $\ddot{\alpha}$ – угловые скорость и ускорение плоскости; y , \dot{y} – координата и скорость частицы в системе координат Oyz , связанной с плоскостью;

$$N = P \cos \alpha + \Phi_n + \Phi_k \geq 0 \quad (3.25)$$

Условие относительного покоя частицы ($\dot{y} = 0$) имеет вид:

$$|F_{mp}| = |\Phi_\tau - P \sin \alpha| < fN, \quad (3.26)$$

где f – коэффициент трения. Этапы скольжения описываются уравнением:

$$m\ddot{y} = -P \sin \alpha + F_{mpy} + \Phi_\tau, \quad (3.27)$$

где

$$F_{mpy} = -fN \operatorname{sign} \dot{y}, \quad \dot{y} \neq 0.$$

Будем рассматривать угловые колебания плоскости с достаточно малой амплитудой настолько, что можно считать: $\sin \alpha \approx \alpha$, $\cos \alpha \approx 1$

Исследуем относительный покой частицы как состояние, предшествующее ее возможному скольжению. Для определенности будем

полагать $y \geq 0$. Анализ условия безотрывности (3.25) показывает, что частица не будет отрываться от плоскости до тех пор, пока она находится в области:

$$y < \frac{g}{\alpha_0 \omega^2}, \quad (3.28)$$

где g – ускорение свободного падения.

В зависимости от фазы колебаний плоскости первоначально покоящаяся частица может начать движение либо в положительном, либо в отрицательном направлении оси Oy . Частица не будет перемещаться в положительном направлении оси Oy , если $F_{\text{мпы}} > -fN$. В этом случае получаем из (3.25), (3.26):

$$y\dot{\alpha}^2 - g\alpha < f(y\ddot{\alpha} + g),$$

что, с учетом $\alpha = \alpha_0 \sin \omega t$, $\dot{\alpha}^2 = \omega^2(\alpha_0^2 - \alpha^2)$, $\ddot{\alpha} = -\omega^2 \alpha$,

эквивалентно положительности квадратного трехчлена:

$$h_1(a) \equiv Ya^2 + (a_0 - Y)a + a_0(1 - Ya_0) > 0,$$

где

$$Y = y\alpha_0\omega^2 / g, \quad a = \alpha / f, \quad a_0 = \alpha_0 / f.$$

Квадратный трехчлен $h_1(a)$ положителен при $|a| \leq a_0$ если выполняется одно из условий: а) $D \leq 0$; б) $a_0 \leq a_1$; в) $a_2 \leq -a_0$,

где

$$D = (a_0 - Y)^2 - 4Ya_0(1 - Ya_0)$$

— дискриминант трехчлена $h_1(a)$;

$$a_{1,2} = (Y - a_0 \pm \sqrt{D}) / 2Y$$

— действительные корни трехчлена $h_1(a)$ ($a_1 \leq a_2$).

Условие а) выполняется, если

$$\frac{a_0}{3 + 2\sqrt{2 - a_0^2}} < Y < \frac{a_0}{3 - 2\sqrt{2 - a_0^2}}; \quad (3.29)$$

условие б) выполняется, если

$$\frac{a_0}{1 - 2a_0} < Y < a_0 + 1, \quad a_0 < \frac{1}{2} \quad (3.30)$$

условие в) выполняется, если

$$a_0 - 1 < Y < \frac{a_0}{1 + 2a_0}. \quad (3.31)$$

Частица не будет перемещаться в отрицательном направлении оси Oy , если $F_{\text{мпы}} < fN$. В этом случае

$$-f(y\ddot{\alpha} + g) < y\dot{\alpha}^2 - g\alpha,$$

что эквивалентно отрицательности квадратного трехчлена:

$$h_2(a) \equiv Ya^2 + (a_0 + Y)a - a_0(1 + Ya_0) < 0,$$

последнее неравенство выполняется при $|a| \leq a_0$, если

$$Y < 1 - a_0. \quad (3.32)$$

Неравенства (3.28) – (3.32) разбивают плоскость параметров Y, a_0 на области (рис. 3.37): I – область, где происходит отрыв частицы от плоскости; II – область, в которой первоначально покоящаяся частица может двигаться только по направлению к оси колебаний; III – область относительного покоя; IV – область, в которой направление движения первоначально покоящейся частицы зависит от фазы колебаний плоскости. Для отрицательных Y расположение одноименных областей симметрично относительно оси a_0 .

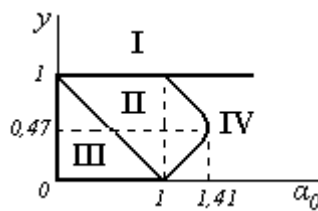


Рис. 3.7. Зоны возможного состояния первоначально покоящегося тела

На основании вышеизложенного можно сделать вывод:

- если $a_0 < 1$, то частица, помещенная в область безотрывности, начинает перемещаться, возможно с остановками, к оси колебаний до тех пор, пока не достигнет области покоя, в которой движение частицы прекращается;

- если $a_0 \geq 1$, то возможны режимы движения, при которых частица скользит в обоих направлениях в окрестности оси колебаний, не покидая области безотрывности.

Исследуем возможность реализации установившихся режимов движения частицы. При $a_0 \geq 1$ движение частицы может состоять из следующих этапов: скольжение в отрицательном направлении оси Oy ($\dot{y} < 0$), скольжение в положительном направлении оси Oy ($\dot{y} > 0$), относительный покой ($\dot{y} = 0$). Во время установившегося движения частицы указанные этапы периодически сменяют друг друга.

Сначала рассмотрим случай, в котором сила трения и нормальная реакция велики по сравнению с силами инерции так, что последними можно пренебречь. Это будет справедливо при выполнении условий: $|Y| \ll 1$, $|Y'| \ll 1$, где Y' – производная по безразмерному времени $\tau = \omega t$. Тогда уравнение движения (3.27) в безразмерных переменных Y, τ имеет вид:

$$Y'' = -a_0 f^2 (a_0 \sin \tau + \text{sign} Y'), \quad Y' \neq 0. \quad (3.33)$$

На этапах покоя:

$$|a_0 \sin \tau| \leq 1, \quad Y' = 0.$$

Исследуем возможность существования 2π – периодического решения уравнения (3.33) с моментами переключений: τ_1 – фаза начала движения частицы в отрицательном направлении оси Oy , τ_2 – фаза остановки, τ_3 – фаза начала движения частицы в положительном направлении оси Oy , τ_4 – фаза остановки; при этом $\tau_3 = \tau_1 + \pi$, $\tau_4 = \tau_2 + \pi$.

Решение уравнения (3.33) на каждом этапе имеет вид:

$$\tau_1 < \tau < \tau_2, \quad Y' = \alpha_0^2 (\cos \tau - \cos \tau_1) + a_0 f^2 (\tau - \tau_1),$$

$$Y = Y_1 + \alpha_0^2 (\sin \tau - \sin \tau_1) - \alpha_0^2 (\tau - \tau_1) \cos \tau_1 + \frac{a_0 f^2}{2} (\tau - \tau_1)^2;$$

$$\tau_2 < \tau < \tau_3, \quad Y \equiv Y_2 = \alpha_0^2 (\sin \tau_2 - \sin \tau_1) - \alpha_0^2 (\tau_2 - \tau_1) \cos \tau_1 + \frac{a_0 f^2}{2} (\tau_2 - \tau_1)^2;$$

$$\tau_3 < \tau < \tau_4, \quad Y' = \alpha_0^2 (\cos \tau - \cos \tau_3) - a_0 f^2 (\tau - \tau_3),$$

$$Y = Y_3 + \alpha_0^2 (\sin \tau - \sin \tau_3) - \alpha_0^2 (\tau - \tau_3) \cos \tau_3 - \frac{a_0 f^2}{2} (\tau - \tau_3)^2;$$

$$\tau_4 < \tau < \tau_1 + 2\pi, \quad Y \equiv Y_4 = \alpha_0^2 (\sin \tau_4 - \sin \tau_3) - \alpha_0^2 (\tau_4 - \tau_3) \cos \tau_3 - \frac{a_0 f^2}{2} (\tau_4 - \tau_3)^2;$$

фаза τ_1 определяется из равенства:

$$a_0 \sin \tau_1 = 1; \quad (3.34)$$

фаза τ_2 определяется из условия $Y' = 0$:

$$a_0 (\cos \tau_2 - \cos \tau_1) + \tau_2 - \tau_1 = 0. \quad (3.35)$$

При этом должно быть:

$$|a_0 \sin \tau_2| < 1, \quad (3.36)$$

иначе периодическое движение становится невозможным. В предельном случае $\tau_2 = \tau_1 + \pi$ и из (3.35) следует:

$$\cos \tau_2 = -\frac{\pi}{2a_0},$$

что, с учетом (3.34), будет выполняться при $a_0 = \sqrt{1 + \pi^2 / 4}$. Если

$1 < a_0 < \sqrt{1 + \pi^2 / 4}$, то этапы скольжения чередуются с этапами покоя.

Равенства (3.34), (3.35) определяют моменты перехода τ_1, τ_2 от одного этапа к другому. Амплитуда перемещения частицы в этом случае имеет вид:

$$|Y_2 - Y_1| = \frac{a_0 f^2}{2} (1 - a_0 \sin \tau_2)^2. \quad (3.37)$$

Нетрудно убедиться в справедливости неравенства

$$|Y_2 - Y_1| < 2\alpha_0^2,$$

что оправдывает предположение о малости Y .

Исследуем влияние сил инерции:

$$\Phi_{\tau} = m y \dot{\alpha}^2 = \alpha_0 m g Y \cos^2 \tau,$$

$$\Phi_n = m y \ddot{\alpha} = -mgY \sin \tau,$$

$$\Phi_k = 2m y \dot{\alpha} = 2mgY' \cos \tau$$

на устойчивость рассмотренного выше установившегося движения частицы в окрестности оси колебаний ($Y \ll l$). Запишем полное уравнение движения (3.27) в безразмерных переменных:

$$Y'' = -\alpha_0 f^2 (a_0 \sin \tau - \text{sign} Y') + a_0^2 f^2 Y \cos^2 \tau + a_0 f^2 Y \sin \tau \text{sign} Y' - 2a_0 f^2 \cos \tau |Y'|. \quad (3.38)$$

При интегрировании будем считать: за период колебаний Y изменяется очень медленно, так что практически можно полагать Y постоянным; закон изменения скорости Y' очень мало отличается от закона изменения скорости рассмотренного установившегося движения, в частности, фазы $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$ перехода от одного этапа движения к другому будем считать таким же, как и для установившегося движения.

При сделанных предположениях среднее за период ускорение частицы получаем из (3.38) в виде:

$$Y_{cp}'' = \frac{\alpha_0^2 Y}{4\pi} [2(\tau_2 - \tau_1)(1 - \frac{2}{a_0^2}) + \sin 2\tau_2 - \sin 2\tau_1]; \quad (3.39)$$

фазы τ_1, τ_2 определяются из уравнений (3.34), (3.35).

На рис. 3.8 приведены результаты численного решения уравнений (3.34), (3.35) и графики приведенной средней равнодействующей сил:

$$R_{\alpha_0} = \frac{4\pi}{\alpha_0^2 Y} Y_{cp}''(a_0)$$

- в зависимости от коэффициента трения f , но при фиксированной амплитуде угловых колебаний плоскости α_0 ;

$$R_f = \frac{4\pi}{f^2 Y} Y_{cp}''(a_0)$$

- в зависимости от α_0 , но при фиксированном f .

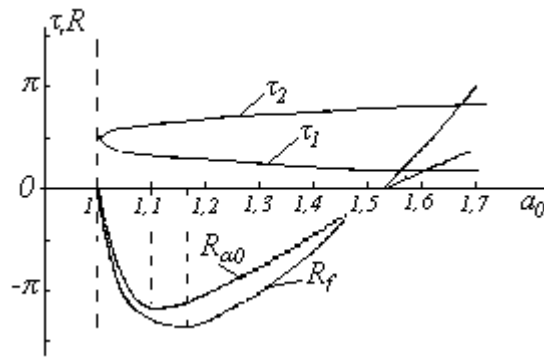


Рис. 3.8. Графики фаз перехода от одного этапа движения к другому (τ_1, τ_2) и средних равнодействующих ($R_f, R_{\alpha 0}$)

Анализ графика $R_{\alpha 0}$ показывает, что группа частиц с различными коэффициентами трения должна при данном α_0 разделиться на два потока (в окрестности оси колебаний): на приближающийся к оси колебаний, для которого $\alpha_0 < 1,51$, и удаляющийся от оси, для которого $\alpha_0 > 1,51$. Это явление может быть использовано в процессах разделения частиц на фракции.

Анализ графика R_f показывает, что наиболее сильно явление устойчивости установившегося движения для данной частицы проявляется при тех α_0 , для которых $\alpha_0 \approx 1,16$. Этот эффект можно использовать для стабилизации положения твердого тела при ориентировании.

9. Устойчивость ориентированного положения твердого тела с тремя точками контакта на плоскости, совершающей угловые колебания.

Исследуем движение плоского твердого тела по шероховатой плоскости совершающей угловые колебания по закону $\alpha = \alpha(t)$ вокруг оси Ox , направленной под углом γ к горизонту (рис. 3.1). Твердое тело соприкасается с шероховатой плоскостью в трех точках $A_i(r_i, l_i)$ ($i = 1, 2, 3$), координаты и проекции скоростей которых по отношению к осям Oxy выражаются формулами:

$$x_i = x_c + d_i \cos(\psi + \beta_i), \quad y_i = y_c + d_i \sin(\psi + \beta_i), \quad (3.40)$$

$$\dot{x}_i = \dot{x}_c - d_i \dot{\psi} \sin(\psi + \beta_i), \quad \dot{y}_i = \dot{y}_c + d_i \dot{\psi} \cos(\psi + \beta_i),$$

где $d_i = AA_i = \sqrt{r_i^2 + l_i^2}$, $\beta_i = \arctg(l_i / r_i)$. Во время движения на тело действуют: сила тяжести \bar{P} ; нормальные реакции плоскости \bar{N}_i , силы трения \bar{F}_i в точках \bar{A}_i . Ко всем действительным силам добавим главный вектор $\bar{\Phi}_{пер}$ и главный момент $\bar{M}_{Спер}$ переносных сил инерции, проекции которых определяются в соответствии с формулами (2.7), (2.8):

$$\begin{aligned} \Phi_{перx} &= 0, \quad \Phi_{перy} = My_c \dot{\alpha}^2, \quad \Phi_{перz} = -My_c \ddot{\alpha}, \\ M_{Сперx} &= -(J_1 \cos^2 \psi + J_3 \sin^2 \psi) \dot{\alpha}, \\ M_{Сперy} &= (J_3 - J_1) \sin \psi \cos \psi \ddot{\alpha}, \\ M_{Сперz} &= (J_3 - J_1) \sin \psi \cos \psi \dot{\alpha}^2; \end{aligned} \quad (3.41)$$

а также главный вектор $\bar{\Phi}_{кор}$ и главный момент $\bar{M}_{Скор}$ кориолисовых сил инерции, проекции которых определяются в соответствии с формулами (2.9), (2.10):

$$\begin{aligned} \Phi_{корx} &= \Phi_{корy} = 0, \quad \Phi_{корz} = -2M\dot{\alpha} \dot{y}_c, \\ M_{Скорx} &= (J_3 - J_1) \sin 2\psi \dot{\alpha} \dot{\psi}, \\ M_{Скорy} &= [(J_3 - J_1) \cos 2\psi + J_2] \dot{\alpha} \dot{\psi}, \\ M_{Скорz} &= 0; \end{aligned} \quad (3.42)$$

Тогда для этапов плоского движения из уравнений (3.9), (3.10) получаем:

- три уравнения относительного движения твердого тела:

$$\begin{aligned} M \ddot{x}_c &= -\sum f N_i v_{ix}^0 + Mg \sin \gamma, \\ M \ddot{y}_c &= -Mg \cos \gamma \sin \alpha - \sum f N_i v_{iy}^0 + My_c \dot{\alpha}^2, \\ J_2 \ddot{\psi} &= -\sum f N_i (r_i v_{il}^0 - l_i v_{ir}^0) + (J_3 - J_1) \dot{\alpha}^2 \sin \psi \cos \psi; \end{aligned} \quad (3.43)$$

и три уравнения для определения реакций N_i :

$$\begin{aligned}\sum N_i &= Mg \cos \gamma \cos \alpha + My_c \ddot{\alpha} + 2M\dot{y}_c \dot{\alpha}, \\ \sum N_i r_i &= J_3 \sin \psi \ddot{\alpha} + 2J_3 \cos \psi \dot{\alpha} \dot{\psi}, \\ \sum N_i l_i &= J_1 \cos \psi \ddot{\alpha} - 2J_1 \sin \psi \dot{\alpha} \dot{\psi}.\end{aligned}$$

Здесь учитывается: $z_c = 0$, $J_2 = J_1 + J_3$. отсюда нормальные реакции можно выразить в следующей форме:

$$\begin{aligned}N_i &= M(g \cos \gamma \cos \alpha + y_c \ddot{\alpha} + 2\dot{y}_c \dot{\alpha}) \frac{S_i}{S} + J_1(\ddot{\alpha} \cos \psi - 2\dot{\alpha} \dot{\psi} \sin \psi) \frac{r'_i}{2S} - \\ &- J_2(\ddot{\alpha} \sin \psi + 2\dot{\alpha} \dot{\psi} \cos \psi) \frac{l'_i}{2S}\end{aligned}\quad (3.44)$$

где S_i – площадь треугольника AA_jA_k ; r'_i, l'_i – проекции стороны A_jA_k на оси Ar', Al' соответственно; набор значений i, j, k является нечетной перестановкой выборки $(1, 2, 3)$; S – площадь треугольника $A_1A_2A_3$.

Для безотрывности движения необходимо, чтобы нормальные реакции плоскости были положительны, $N_i \geq 0$. Учитывая, что в задачах вибрационного перемещения, как правило, относительное движение гораздо медленнее переносного, при выводе условия безотрывности будем пренебрегать членами, содержащими $\dot{y}_c, \dot{\psi}$. Тогда из (3.44) следует, что при безотрывном движении

$$g \cos \gamma \cos \alpha + y_c \ddot{\alpha} + \frac{\ddot{\alpha}}{2MS_i}(r'_i J_1 \cos \psi - l'_i J_2 \sin \psi) \geq 0.$$

Вводя обозначения: $\alpha_i^* = \max_i |\alpha|$, $\varepsilon_i^* = \max_i |\ddot{\alpha}|$,

$$L = \max_i \left(\frac{1}{2MS_i} \sqrt{r_i'^2 J_1^2 + l_i'^2 J_2^2} \right),$$

получаем

$$|y_c| \leq \frac{1}{\varepsilon_i^*} g \cos \alpha_i^* \cos \gamma - L \quad (3.45)$$

Итак, в области, границы которой определяются неравенством (3.45), твердое тело будет совершать безотрывное движение, описываемое уравнениями (3.43).

В соответствии с формулами (3.41), для плоского твердого тела имеем:

$$M_{Cнеpz} = (J_3 - J_1) \sin\psi \cos\psi \dot{\alpha}^2.$$

Полагая для определенности $J_1 < J_3$, заметим, что рассматриваемое поле переносных сил инерции способствует ориентации твердого тела в положениях $\psi_1 = \pi/2$, $\psi_2 = 3\pi/2$, что подтверждается выполнением условий (2.11):

$$M_{Cнеpz} \Big|_{\psi = \psi_{1,2}} = 0, \quad \frac{\partial M_{Cнеpz}}{\partial \psi} \Big|_{\psi = \psi_{1,2}} = -(J_3 - J_1) \dot{\alpha}^2 < 0$$

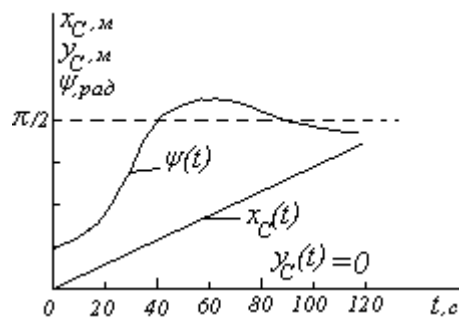


Рис.3.9. График численного решения уравнений движения тонкого однородного стержня: $\gamma = 0,05$; $\alpha_0 = 0,17$; $\omega = 29 \text{ с}^{-1}$; $f = 0,1$; $l = 0,1 \text{ м}$

В качестве примера на рис. 3.9 приведен график численного решения уравнений движения (3.43) для частного случая скольжения тонкого однородного стержня длиной l , соприкасающегося с плоскостью своими концами, при гармоническом законе угловых колебаний плоскости: $\alpha = \alpha_0 \sin\omega t$. Из анализа этого графика следует, что угловые колебания плоскости приводят к перераспределению сил инерции по объему тела в его относительном движении, в результате чего ось $C\xi$ меньшего главного момента инерции J_1 стремится занять положение, перпендикулярное оси колебаний ($\psi = \pi/2$, $3\pi/2$), то есть тело определенным образом ориентируется с точностью до двух возможных положений. При этом ось $C\xi$ совершает малые колебания около положения $\psi = \pi/2$ ($\psi = 3\pi/2$), обусловленные наличием сил сухого трения. Справедливость последнего замечания вытекает из того, что $\psi = \pi/2$ ($\psi = 3\pi/2$) не является решением уравнений (3.43), в чем

нетрудно убедиться прямой подстановкой. Если $J_1 = J_3$, то ориентирование твердого тела невозможно.

4. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. М.: Наука, 1981.- 480 с.

1. В шахте опускается равноускоренно лифт массы 280 кг. В первые 10 с он проходит 35 м. Найти натяжение каната, на котором висит лифт.

2. Горизонтальная платформа, на которой лежит груз массой 1 кг, опускается вертикально вниз с ускорением 4 м/с^2 . Найти силу давления, производимого грузом на платформу во время их совместного спуска.

3. К телу массы 3 кг, лежащему на столе, привязали нить, другой конец которой прикреплен к точке A . Какое ускорение надо сообщить точке A , поднимая тело вверх по вертикали, чтобы нить оборвалась, если она рвется при натяжении $T = 42 \text{ н}$?

4. Камень массы 0,3 кг, привязанный к нити длины 1 м, описывает окружность в вертикальной плоскости. Определить наименьшую угловую скорость ω камня, при которой произойдет разрыв нити, если сопротивление ее разрыву равно 9 н.

5. Гиря массы 0,2 кг подвешена к концу нити длины 1 м; вследствие толчка гиря получила горизонтальную скорость 5 м/с. Найти натяжение нити непосредственно после толчка.

6. Автомобиль массы 1000 кг движется по выпуклому мосту со скоростью $u = 10 \text{ м/с}$. Радиус кривизны в середине моста $\rho = 50 \text{ м}$. Определить силу давления автомобиля на мост в момент прохождения его через середину моста.

7. В поднимающейся кабине подъемной машины производится взвешивание тела на пружинных весах. При равномерном движении кабины показание пружинных весов равно 50 н, при ускоренном – 51 н. Найти ускорение кабины.

8. Масса кузова трамвайного вагона 10000 кг. Масса тележки с колесами 1000 кг. Определить силу наибольшего и наименьшего давления вагона на рельсы горизонтального прямолинейного участка пути, если на ходу кузов совершает на рессорах вертикальные гармонические колебания по закону $x=0,02 \sin 10t$.

9. Движение материальной точки массы 0,2 кг выражается уравнениями $x=3 \cos 2\pi t$ см, $y=4 \sin \pi t$ см (t - в сек). Определить проекции силы, действующей на точку, в зависимости от ее координат.

10. Груз массы 1000 кг перемещается вместе с тележкой вдоль горизонтальной фермы мостового крана со скоростью 1 м/с. Расстояние центра тяжести груза до точки подвеса 5 м. При внезапной остановке тележки груз по инерции будет продолжать движение и начнет качаться около точки подвеса. Определить наибольшее натяжение каната при качании груза.

11. Грузовой автомобиль массы 6000 кг въезжает на паром со скоростью 6 м/с. Заторможенный с момента въезда на паром автомобиль остановился, пройдя 10 м. Считая движение автомобиля равнозамедленным, найти натяжение каждого из двух канатов, которыми паром привязан к берегу. При решении задачи пренебречь массой и ускорением парома.

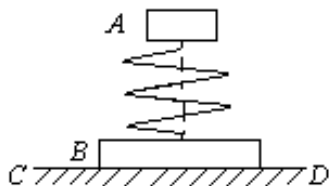


Рис. 1

12. Грузы A и B веса $P_A = 20$ н и $P_B = 40$ н соединены между собой пружиной, как показано на рисунке. Груз A совершает свободные колебания по вертикальной прямой с амплитудой 1 см и периодом 0,25 с. Вычислить силу наибольшего и наименьшего давления грузов A и B на опорную поверхность CD .

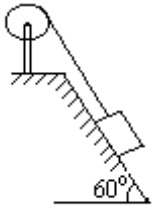


Рис. 2

13. Груз массы $M = 600$ кг посредством ворота поднимают по наклонному шурфу, составляющему угол 60° с горизонтом. Коэффициент трения груза о поверхность шурфа равен $0,2$. Ворота радиуса $0,2$ м вращается по закону $\varphi = 0,4 t^2$.

Найти натяжение троса, как функцию времени и значение этого натяжения через 2 с после начала подъема.

14. Самолет, пикируя отвесно, достиг скорости 300 м/с, после чего летчик стал выводить самолет из пике, описывая дугу окружности радиуса 600 м в вертикальной плоскости. Масса летчика 80 кг. Какая наибольшая сила прижимает летчика к креслу?

15. Камень падает в шахту без начальной скорости. Звук от удара камня о дно шахты услышан через $6,5$ с от момента начала его падения. Скорость звука равна 330 м/с. Найти глубину шахты.

16. Тяжелое тело спускается по гладкой плоскости, наклоненной под углом 30° к горизонту. Найти за какое время тело пройдет путь $9,6$ м. Если в начальный момент его скорость равнялась 2 м/с.

17. Тело массы m вследствие полученного толчка прошло по негладкой горизонтальной плоскости за 5 с расстояние $s = 24,5$ м и остановилось. Определить коэффициент трения f .

18. За какое время и на каком расстоянии может быть остановлен тормозом вагон трамвая, идущий по горизонтальному пути со скоростью 10 м/с, если сопротивление движению, развиваемое при торможении, составляет $0,3$ от веса вагона?

19. Тяжелая точка поднимается по негладкой наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 30^\circ$ с горизонтом. В начальный момент скорость точки равнялась $u_0 = 15$ м/с. Коэффициент трения $f = 0,1$. Какой путь пройдет точка до остановки? За какое время точка пройдет этот путь?

20. Самолет летит горизонтально. Сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости и равно $0,5$ н при скорости в 1 м/с. Сила

тяги постоянна, равна 30760 н и составляет угол в 10° с направлением полета. Определить наибольшую скорость полета.

20. Тело массы 1 кг движется под действием переменной силы $F = 10(1-t)$ н, где t – время в секундах. Через сколько секунд тело остановится, если начальная скорость тела равна 20 м/с и сила совпадает по направлению со скоростью тела? Какой путь пройдет тело до остановки?

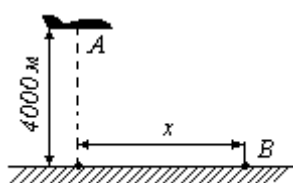


Рис.3

21. Самолет А летит на высоте 4000 м над землей с горизонтальной скоростью 140 м/с (рис.3). На каком расстоянии x , измеряемом по горизонтальной прямой от данной точки В, должен быть сброшен с самолета без начальной относительной скорости какой-либо груз для того, чтобы он упал в эту точку? Сопротивлением воздуха пренебречь.

22. Железнодорожный поезд движется по горизонтальному и прямолинейному участку пути. При торможении развивается сила сопротивления, равная 0,1 веса поезда. В момент начала торможения скорость поезда равняется 20 м/с. Найти время торможения и тормозной путь.

23. По шероховатой наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол 30° , спускается тяжелое тело без начальной скорости. Определить, в течение какого времени тело пройдет путь длины 39,2 м, если коэффициент трения равен 0,2.

24. Каков должен быть коэффициент трения колес заторможенного автомобиля о дорогу, если при скорости езды 20 м/с он останавливается через 6 с после начала торможения.

25. Определить наименьшую работу, которую надо затратить для того, чтобы поднять на 5 м тело массы 2 т, двигая его по наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол в 30° . Коэффициент трения 0,5.

26. По наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол 30° , спускается без начальной скорости тяжелое тело; коэффициент трения равен $0,1$. Какую скорость будет иметь тело, пройдя 2 м от начала движения?

27. Материальная точка массы 3 кг двигалась по горизонтальной прямой влево со скоростью 5 м/с. К точке приложили постоянную силу, направленную вправо. Действие силы прекратилось через 30 с, и тогда скорость точки оказалась равной 55 м/с и направленной вправо. Найти величину этой силы и совершенную ею работу.

28. Брус начинает двигаться с начальной скоростью u_0 по горизонтальной шероховатой плоскости и проходит до полной остановки расстояние s . Определить коэффициент трения скольжения, считая, что сила трения пропорциональна нормальному давлению.

29. Пружина имеет в ненапряженном состоянии длину 20 см. Сила, необходимая для изменения ее длины на 1 см, равна $1,96$ Н. С какой скоростью вылетит из трубки шарик массы 30 г, если пружина была сжата до длины 10 см? Трубка расположена горизонтально.

30. Груз массы 1 кг подвешен на нити длины $0,5$ м в неподвижной точке. В начальный момент груз отклонен от вертикали на угол 60° , и ему сообщена скорость в вертикальной плоскости по перпендикуляру к нити вниз, равная $2,1$ м/с. Определить натяжение нити в наинизшем положении и отсчитываемую по вертикали высоту, на которую груз поднимается над этим положением.

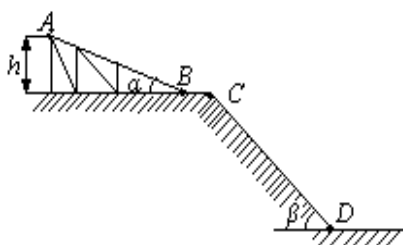
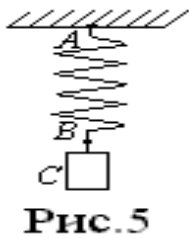


Рис. 4

31. Лыжник при прыжке с трамплина спускается с эстакады AB , наклоненной под углом 30° к горизонту. Перед отрывом он проходит небольшую горизонтальную площадку BC , длиной которой при расчете пренебрегаем. В момент отрыва лыжник толчком сообщает себе вертикальную составляющую скорости $u_y = 1$ м/с. Высота эстакады $h = 9$ м, коэффициент трения лыж о снег $f = 0,08$, линия приземления CD образует

угол $\beta=45^\circ$ с горизонтом. Определить дальность полета лыжника, пренебрегая сопротивлением воздуха.

Примечание. Дальностью полета считать длину, измеряемую от точки C до точки приземления лыжника на линии CD .



32. Пружина AB , закрепленная одним концом в точке A , такова, что для удлинения ее на 1 м необходимо приложить в точке B при статической нагрузке силу 19,6 Н.

В некоторый момент к нижнему концу B недеформированной пружины подвешивают гирию C массы 0,1 кг и отпускают ее без начальной скорости. Пренебрегая массой пружины, написать уравнение дальнейшего движения гири и указать амплитуду и период ее колебаний, отнеся движение к оси, проведенной вертикально вниз из положения статического равновесия гири.



33. К пружине, коэффициент жесткости которой равен 19,6 Н/м, были подвешены два груза массами $m_1=0,5$ кг и $m_2=0,8$ кг. Система находилась в покое в положении статического равновесия, когда груз m_2 убрали. Найти уравнение движения, частоту и период колебаний оставшегося груза.

34. Груз массы $m_1=2$ кг, подвешенный к пружине, коэффициент жесткости которой $c=98$ Н/м находится в равновесии. В некоторый момент к грузу добавили груз $m_2=0,8$ кг. Определить уравнение движения и период колебаний двух грузов.

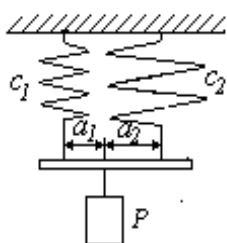


Рис. 7

35. Определить период свободных колебаний груза массы m , прикрепленного к двум параллельно включенным пружинам, и коэффициент жесткости пружины, эквивалентной данной двойной пружине, если груз расположен так, что удлинения обеих

пружин, обладающих заданными коэффициентами жесткости c_1 и c_2 , одинаковы.

36. Определить период свободных колебаний груза массы m , зажатого между двумя пружинами с разными коэффициентами жесткости c_1 и c_2 .

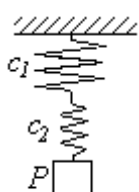


Рис.9

37. Определить коэффициент жесткости c пружины, эквивалентной двойной пружине, состоящей из двух последовательно включенных пружин с разными коэффициентами жесткости c_1 и c_2 , и указать также период

колебаний груза массы m , подвешенного на указанной двойной пружине.

- Ответы: (1) 2548 н; (2) 6 н; (3) 4,2 м/с²; (4) 4,5 с⁻¹; (5) 7 н; (6) 7800 н; (7) 0,2 м/с²; (8) 128 кн, 88 кн; (9) -0,0789 н, -0,0197 н; (10) 10000 н; (11) 5400 н; (12) 72,8 н, 47,2 н; (13) 5,68+0,288t кн; 6,3 кн; (14) 175 м; (15) 1,61 с; (17) 0,2; (18) 3,4 с; 17 м; (19) 246 м/с; (20) 3,24 с; 61 м; (21) 4000 м; (22) 20,4 с; 204 м; (23) 5 с; (24) 0,34; (25) 183 кДж; (26) 4 м/с; (27) 6 Н; 4,5 кДж; (28) $u_0^2 / (2g)$; (29) 8 м/с; (30) 28,4 Н; 47,5 см; (31) 47,4 м; (32) $-0,05\text{Cos}14t$ м; 5 см; 0,45 с; (33) $0,4 \cdot \text{Cos}(6,26t)$ м; 2π с⁻¹; 1 с; (34) $-0,08 \cdot \text{Cos}(5,916t)$; 1,062 с; (35) $2\pi(m/(c_1+c_2))^{1/2}$; $c=c_1+c_2$; $a_1/a_2=c_2/c_1$; (36)

5. КАРТА КАДРОВОЙ ОБЕСПЕЧЕННОСТИ ДИСЦИПЛИНЫ

Лекторы: доцент, к.ф.-м.н. Сельвинский В.В

Практические занятия: доцент, к.ф.-м.н. Сельвинский В.В.,

ОГЛАВЛЕНИЕ

| № | | стр. |
|----|--|------|
| 1. | Рабочая программа | 3 |
| 2. | График самостоятельной работы студентов | 9 |
| 3. | Материалы для чтения лекций | 10 |
| 4. | Задачи для самостоятельного решения | 49 |
| 5. | Карта кадровой обеспеченности дисциплины | 55 |