Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Амурский государственный университет»

Институт компьютерных и инженерных наук

Кафедра математического анализа и моделирования

Т.В. Труфанова

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ»

Благовещенск
Издательство АмГУ
2024

ББК 22.311я73
И 60

Рекомендовано
учебно-методическим советом университета

Рецензент:

Е.М. Веселова, доцент кафедры математического анализа и моделирования АмГУ, канд. физ.-мат. наук, доцент

ББК
И 60

Индивидуальные задания по дисциплине «Дифференциальные уравнения математической физики»: сб. заданий /Амур. гос. ун-т, Ин-т компьютер. и инж. наук; сост. Т.В. Труфанова. – Благовещенск: АмГУ, 2024. – 50 с.

В сборнике заданий представлены варианты заданий для индивидуальных домашних работ по темам: «Уравнения гиперболического типа», «Уравнения параболического типа», «Уравнения эллиптического типа», изучаемых в рамках дисциплины «Дифференциальные уравнения математической физики». Даны методические указания по выполнению индивидуальных заданий и приведены подробные решения задач типового варианта.

Пособие составлено в соответствии с рабочей программой дисциплины «Дифференциальные уравнения математической физики», предназначено для студентов, обучающихся по направлениям подготовки 24.03.01 - Ракетные комплексы и космонавтика, 03.03.02 - Физика, 01.03.02 - Прикладная математика и информатика, а также может быть использовано студентами других направлений, занимающихся решением дифференциальных уравнений в частных производных.

ВВЕДЕНИЕ

Сборник заданий содержит индивидуальные домашние задания для самостоятельной работы по трем основным типам уравнений математической физики. Задания составлены по темам: уравнения гиперболического, параболического и эллиптического типов, изучаемых по дисциплине «Дифференциальные уравнения математической физики».

В пособии излагается основной аналитический метод решения краевых задач уравнений математической физики: метод разделения переменных или метод Фурье.

В каждом задании приводятся постановки задач по вариантам. Студенты решают задачу из каждого раздела в соответствии с номером своего варианта. В каждом разделе, после индивидуальных заданий, иллюстрируется метод решения для данного типа на конкретных примерах.

Для успешного усвоения материала, необходимо самостоятельно решить все задачи предлагаемые студенту, по каждой из трех перечисленных разделов. Варианты индивидуальных работ способствуют усвоению теоретического материала и получение практических навыков, необходимых для решения уравнений в частных производных.

Данный навык служит базой для изучения профессиональных дисциплин, таких как «Термодинамика и теплопередача», «Гидрогазоаэродинамика».

1 МЕТОД РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ ИЛИ МЕТОД ФУРЬЕ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

1.1 Примеры решения уравнений гиперболического типа

Задание 1: Найти решение однородного волнового уравнения:

$$u_{tt} = 49u_{xx}, \quad t > 0, \ 0 < x < 5,$$

при следующих краевых и начальных условиях:

$$u(0,t) = u(5,t) = 0.$$

$$u_t(x,0) = 0, \ u(x,0) = 25\sin 4\pi x.$$

Решение:

Будем искать частные решения методом разделения переменных (методом Фурье):

$$u(x,t) = X(x)T(t) \neq 0. \tag{1}$$

Подставляем (1) в заданное уравнение, получаем

$$T''(t)X(x) = 49X''(x)T(t)$$

или, после деления на $49X(x)T(t),$ имеем

$$\frac{1}{49}\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \tag{2}$$

Ввиду независимости переменных x и t равенство (2) в том случае, когда его левая и правая части являются одной постоянной. Обозначим эту постоянную разделения буквой $-\lambda$, которую для удобства вычисления взяли со знаком минус.

$$\frac{1}{49}\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \tag{3}$$

Раскрывая пропорции (3), получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения

$$T'(t) + 49\lambda T(t) = 0, \tag{4}$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0.$$

Сначала решаем задачу Штурма-Лиувилля на отыскания собственных значений λ и собственных функций $X(x)$.

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ X(0) = X(5) = 0 \end{cases}$$

Решая уравнение, находим

$$X(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda} x + C_2 \sin\sqrt{\lambda} x.$$

Из граничных условий, найдем C_1, C_2, λ.

$$C_1 = 0,\ C_2 \sin 5\sqrt{\lambda} = 0 \Rightarrow C_2 \neq 0,$$

т.к. ищем не нулевые решения.

$$\sin 5\sqrt{\lambda} = 0 \quad \Rightarrow \quad 5\sqrt{\lambda} = \pi n \quad \Rightarrow \quad \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{5}\right)^2$$

и соответствующие функции имеют вид

$$X_n(x) = \sin\frac{\pi n}{5} x,\ n \in Z. \tag{5}$$

Каждому собственному значению λ_n будет соответствовать функция $T_n(t)$, которую находим из уравнения (4).

Общее решение уравнения (4) имеет вид

$$T_n(t) = A_n \cos 7\sqrt{\lambda_n} t + B_n \sin 7\sqrt{\lambda_n} t.$$

Таким образом, решение исходного уравнения имеет вид

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos 7\sqrt{\lambda_n} t + B_n \sin 7\sqrt{\lambda_n} t) \sin\frac{\pi n}{5} x.$$

Из начальных условий найдем константы A_n и B_n

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{\pi n}{5} x = 25 \sin 4\pi x,$$

отсюда для $n = 20\ B_n = 0,\ A_{20} = 25.$

Ответ: $u(x,t) = 25\cos 2\pi t \sin 4\pi x.$

Задание 2: Решить смешанную задачу для уравнения

$$u_{tt} = 64u_{xx}, \quad t > 0,\ 0 < x < 4\ , \tag{1}$$

удовлетворяющую начальным условиям

$$\begin{aligned} &u(x,0) = 0, \\ &u_t(x,0) = 32\pi\cos 4\pi x,\ 0 < x \le 4 \end{aligned} \tag{2}$$

и однородным граничным условиям второго рода

$$u_x(0,t) = u_x(4,t) = 0,\ t \ge 0. \tag{3}$$

Решение: Будем искать частные решения не равные нулю, в виде произведения функций

$$u(x,t) = X(x)T(t) \ne 0, \tag{4}$$

удовлетворяющие краевым условиям (3).

Подставляя (4) в уравнение (1), получаем

$$T''(t)X(x) = 64X''(x)T(t)$$

или, разделяя переменные, получаем

$$\frac{1}{64}\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda. \tag{5}$$

Из равенств (5)получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения

$$T''(t) + 64\lambda T(t) = 0, \tag{6}$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0. \tag{7}$$

Подставляя (4) в (3), получаем

$$X'(0)T(t) = 0 \Rightarrow X'(0) = 0;$$

$$X'(4)T(t) = 0 \Rightarrow X'(4) = 0.$$

Таким образом, для нахождения функции $X(x)$, получили задачу Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ X'(0) = X'(5) = 0. \end{cases}$$

Отсюда получаем $X(x) = C_1\cos\sqrt{\lambda}x + C_2\sin\sqrt{\lambda}x.$ Используя граничные условия, находим C_1, C_2, λ, $X(x)$.

$$\begin{cases} X(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x, \\ X'(x) = -C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x + C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x, \end{cases}$$

отсюда следует $C_2 = 0,\ -C_1\sqrt{\lambda}\sin 4\sqrt{\lambda} = 0 \Rightarrow C_1 \neq 0,$ иначе решение будет тривиальное, следовательно,

$$\sin 4\sqrt{\lambda} = 0 \ \Rightarrow\ 4\sqrt{\lambda} = \pi n \ \Rightarrow\ \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{4}\right)^2$$

При $\lambda = \lambda_n$ решение уравнения (6) имеет вид

$$T_n(t) = A_n \cos 8\frac{\pi n}{4}t + B_n \sin 8\frac{\pi n}{4}t$$

или

$$T_n(t) = A_n \cos 2\pi nt + B_n \sin 2\pi nt,$$

где A_n и B_n – произвольные постоянные.

Таким образом,

$$u_n(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}(A_n \cos 2\pi nt + B_n \sin 2\pi nt)\cos\frac{\pi n}{4}x.$$

В силу линейности и однородности уравнения (1) при условиях (3), всякая линейная комбинация будет решением уравнения (1), т.е.

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}(A_n \cos 2\pi nt + B_n \sin 2\pi nt)\cos\frac{\pi n}{4}x.$$

Постоянные интегрирования найдем из начального условия (2), которые примут значения

$$u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\frac{\pi n}{4}x = 0 \Rightarrow A_n = 0.$$

$$u_t(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n 2\pi n \cos\frac{\pi n}{4}x = 32\pi\cos 4\pi x.$$

Для $n = 16$ находим $B_{16} = 1$.

Ответ: $u(x,t) = \sin 32\pi t \cos 4\pi x.$

Задание 3: Решить смешанную задачу для данного неоднородного волнового уравнения с нулевыми начальными и граничными условиями

$$u_{tt} = u_{xx} + 5e^{-2t}\sin x,\ 0 < x < \pi. \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0,\ 0 \le \mathrm{x} \le \pi;$$
$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0,\ t \ge 0.$$

Решение:

Сначала решаем однородное уравнение с нулевыми граничными условиями

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \end{cases}$$

Решение ищем в виде $u(x,t) = X(x)T(t),$ подставляя в уравнение и, разделяя переменные, получаем

$$T''(t)X(x) = X''(x)T(t) \ \Rightarrow\ \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda.$$

Решаем задачу Штурма-Лиувилля

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0,\ \ X(0) = X(\pi) = 0.$$

Из решения которой, находим $X(x) = C_1\cos\sqrt{\lambda}x + C_2\sin\sqrt{\lambda}x.$ Используя граничные условия, получим $C_1 = 0,\ \sin\sqrt{\lambda}\pi = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}\pi = \pi n,\ \lambda_n = n^2,$ собственную функцию $X_n(x) = \sin nx,\ n \in Z.$

Решение неоднородного уравнения (1) ищем в виде ряда Фурье по собственным функциям $X_n(x) = \sin nx,$ т.е. в форме разложения

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin nx. \tag{2}$$

Подставляя (2) в (1), получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n''(t)\sin nx = \sum_{n=1}^{\infty}(-n^2T_n(t)\sin nx) + 5\mathrm{e}^{-2t}\sin x,$$

отсюда

$$\sum_{n=1}^{\infty}[T_n''(t)+n^2T_n(t)]\sin nx = 5\mathrm{e}^{-2t}\sin x.$$

Сравниваем два ряда Фурье, получим $n = 1$, тогда задача для $T_1(t)$ имеет вид

$$T_1''(t)+T_1(t)=5\mathrm{e}^{-2t}. \qquad (3)$$

Решаем сначала однородное уравнение $T_1''(t)+T_1(t)=0.$ Характеристическое уравнение $k^2+1=0,$ Его решение $k_{1,2}=\pm\, i,$ следовательно,

$$T_{\text{одн}}(t)=A\cos t+B\sin t.$$

Решение неоднородного уравнения ищем в виде $T(t)=D\mathrm{e}^{-2t},$ которое подставляем (3), получаем D.

$$4D\mathrm{e}^{-2t}+D\mathrm{e}^{-2t}=5\mathrm{e}^{-2t}\Rightarrow D=1.$$

Таким образом, определили $T_1(t)=A\cos t+B\sin t+\mathrm{e}^{-2t}$.

Запишем решение уравнения (1) в общем виде

$$u(x,t)=(A\cos t+B\sin t+\mathrm{e}^{-2t})\sin x.$$

Используя начальные условия $u(x,0)=u_t(x,0)=0,$ находим постоянные интегрирования A и B. Получим $A = -1$, $B = 2$.

Окончательное решение исходного уравнения (1) имеет вид

Ответ: $u(x,t)=(2\sin t-\cos t+\mathrm{e}^{-2t})\sin x.$

1.2 Варианты индивидуальных домашних заданий по теме «Уравнения гиперболического типа»

Вариант 1

Задание 1: Решить смешанную задачу.

$u_{tt} = 81u_{xx}$

$u(x,0) = \sin \pi x;\ u_t(x,0) = 0;$

$u(0,t) = u(5,\ t) = 0.$

Задание 2: Решить смешанную задачу.

$u_{tt} = 64u_{xx};$

$u(x,0) = 0;\ u_t(x,0) = 8\pi \cos \pi x;$

$u_x(0,t) = u_x(6,t) = 0.$

Задание 3: Решить смешанную задачу для данного неоднородного волнового уравнения с нулевыми начальными и граничными условиями

$u(x,0) = u_{tt}(x,0) = 0;$

$u(0,t) = u(\pi,t) = 0;$

$u_{tt} = u_{xx} + 65e^{-8t} \sin x.$

Вариант 2

Задание 1: Решить смешанную задачу.

$u_{tt} = 64u_{xx};$

$u(x,0) = 0;\ u_t(x,0) = 8\pi \sin \pi x;$

$u(0,t) = u(6,t) = 0.$

Задание 2: Решить смешанную задачу.

$u_{tt} = 81u_{xx};$

$u(x,0) = 2\cos \pi x;\ u_t(x,0) = 0;$

$u_x(0,t)=u_x(5,t)=0.$

Задание 3: Решить смешанную задачу для данного неоднородного волнового уравнения с нулевыми начальными и граничными условиями

$u(x,0)=u_{tt}(x,0)=0;$

$u(0,t)=u(\pi,t)=0.$

$u_{tt}=\ 1/4u_{xx}+3\sin 2t\sin 2x.$

Вариант 3

Задание 1: Решить смешанную задачу.

$u_{tt}=49u_{xx};\ u(x,0)=3\sin 2\pi x;\ u_t(x,0)=0;\ u(0,t)=u(4,t)=0.$

Задание 2: Решить смешанную задачу.

$u_{tt}=36u_{xx};\ u(x\ 0)=0;\ u_t(x,0)=12\cos 2\pi x;\ u_x(0,t)=u_x(5,t)=0.$

Задание 3: Решить смешанную задачу для данного неоднородного волнового уравнения с нулевыми начальными и граничными условиями

$u(x,0)=u_{te}(x,0)=0;$

$u(0,t)=u(\pi,t)=0.$

$u_{tt}=u_{xx}+16\cos 8t\sin 8x.$

Вариант 4

Задание 1: Решить смешанную задачу.

$u_{tt}=36u_{xx};\ u(x,0)=0;\ u_t(x,0)=12\pi\sin 2\pi x;\ u(0,t)=u(5,t)=0.$

Задание 2: Решить смешанную задачу.

$u_{tt}=49u_{xx};\ u(x,0)=4\cos 2\pi x;\ u_t(x,0)=0;\ u_x(0,t)=u_x(4,t)=0.$

Задание 3: Решить смешанную задачу для данного неоднородного волнового уравнения с нулевыми начальными и граничными условиями

$u(x,0)=u_{tt}(x,0)=0;\ u(0,t)=u(\pi,t)=0.$

$u_{tt}=1/9u_{xx}+8\sin 3t\sin 3x.$

Вариант 5

Задание 1: Решить смешанную задачу.

$u_{tt}=25u_{xx};\ u\left(x,0\right)=5\sin 3\pi x;\ u_t\left(x,0\right)=0;\ u\left(0,t\right)=u\left(3,t\right)=0.$

Задание 2: Решить смешанную задачу.

$u_{tt}=16u_{xx};\ u\left(x,0\right)=0;\ u_t\left(x,0\right)=\ 2\pi\cos 3\pi x;\ u_x\left(0,t\right)=u_x\left(4,t\right)=0.$

Задание 3: Решить смешанную задачу для данного неоднородного волнового уравнения с нулевыми начальными и граничными условиями

$u(x,0)=u_{tt}(x,0)=0;$

$u\left(0,t\right)=u(\pi,t)=0.$

$u_{tt}=1/16u_{xx}+50\,\mathrm{e}^{-7t}\sin 4x.$

Вариант 6

Задание 1: Решить смешанную задачу.

$u_{tt}=16u_{xx};\ u(x,0)=0;\ u_t(x,0)=12\pi\sin 3\pi x;\ u(0,t)=u(4,t)=0.$

Задание 2: Решить смешанную задачу.

$u_{tt}=25u_{xx};\ u(x,0)=6\cos 3\pi x;\ u_t(x,0)=0;\ u_x(0,t)=u_x(3,t)=0.$

Задание 3: Решить смешанную задачу для данного неоднородного волнового уравнения с нулевыми начальными и граничными условиями

$u(x,0)=u_{tt}(x,0)=0;$

$u\left(0,t\right)=u(\pi,t)=0.$

$u_{tt-}=1/25u_{xx}+3\cos 2t\sin 5x.$

Вариант 7

Задание 1: Решить смешанную задачу.

$u_{tt}=9u_{xx};\ u\left(x,0\right)=7\sin 4\pi x;\ u_t\left(x,0\right)=0;\ u\left(0,t\right)=u\left(2,\ t\right)=0.$

Задание 2: Решить смешанную задачу.

$$u_{tt} = 4u_{xx};\ u(x,0) = 0;\ u_t(x,0) = 8\pi\cos 4\pi x;\ u_x(0,t) = u_x(3,\ t) = 0.$$

Задание 3: Решить смешанную задачу для данного неоднородного волнового уравнения с нулевыми начальными и граничными условиями

$$u(x,0) = u_{tt}(x,0) = 0;$$
$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0.$$
$$u_{tt} = 4u_{xx} + 28\cos 14t \sin 7x.$$

Вариант 8

Задание 1: Решить смешанную задачу.

$$u_{tt} = 4u_{xx};\ u(x,0) = 0;\ u_t(x,0) = 8\pi\sin 4\pi x;\ u(0,t) = u(3,t) = 0.$$

Задание 2: Решить смешанную задачу.

$$u_{tt} = 9u_{xx};\ u(x,0) = 8\cos 4\pi x;\ u_t(x,0) = 0;\ u_x(0,t) = u_x(2,t) = 0.$$

Задание 3: Решить смешанную задачу для данного неоднородного волнового уравнения с нулевыми начальными и граничными условиями

$$u(x,0) = u_{tt}(x,0) = 0;$$
$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0.$$
$$u_{tt} = 1/36u_{xx} + 8\cos 3t \sin 6x.$$

Вариант 9

Задание 1: Решить смешанную задачу.

$$u_{tt} = u_{xx};\ u(x,0) = 9\sin 5\pi x;\ u_t(x,0) = 0;\ u(0,t) = u(1,t) = 0.$$

Задание 2: Решить смешанную задачу.

$$u_{tt} = u_{xx};\ u(x,0) = 0;\ u_t(x,0) = 5\pi\cos 5\pi x;\ u_x(0,t) = u_x(3,\ t) = 0.$$

Задание 3: Решить смешанную задачу для данного неоднородного волнового уравнения с нулевыми начальными и граничными условиями

$u(x,0)=u_{tt}(x,0)=0;$
$u(0,t)=u(\pi,t)=0.$
$u_{tt}=1/49u_{xx}+37\,e^{-6t}\sin 7x.$

Вариант 10

Задание 1: Решить смешанную задачу.

$u_{tt}=u_{xx};\ u(x,0)=0;\ u_t(x,0)=5\pi\sin 5\pi x;\ u(0,t)=u(3,t)=0.$

Задание 2: Решить смешанную задачу.

$u_{tt}=u_{xx};\ u(x,0)=10\cos 5\pi x;\ u_t(x,0)=0;\ u_x(0,t)=u_x(1,t)=0.$

Задание 3: Решить смешанную задачу для данного неоднородного волнового уравнения с нулевыми начальными и граничными условиями

$u(x,0)=u_t(x,0)=0;$
$u(0,t)=u(\pi,t)=0.$
$u_{tt-}=1/64u_{xx}+15\sin 4t\sin 8x.$

Вариант 11

Задание 1: Решить смешанную задачу.

$u_{tt}=4u_{xx};\ u(x,0)=11\sin 6\pi x;\ u_t(x,0)=0;\ u(0,t)=u(2,t)=0.$

Задание 2: Решить смешанную задачу.

$u_{tt}=9u_{xx};\ u(x,0)=0;\ u_t(x,0)=18\pi\cos 6\pi x;\ u_x(0,t)=\ u_x(1,\ t)=0.$

Задание 3: Решить смешанную задачу для данного неоднородного волнового уравнения с нулевыми начальными и граничными условиями

$u(x,0)=u_{tt}(x,0)=0;$
$u(0,t)=u(\pi,t)=0.$
$u_{tt}=9u_{xx}+36\cos 18t\sin 6x.$

Вариант 12

Задание 1: Решить смешанную задачу.

$u_{tt}=9u_{xx};\ u(x,0)=0;\ u_t(x,0)=18\pi\sin 6\pi x;\ u(0,t)=u(1,t)=0.$

Задание 2: Решить смешанную задачу.

$u_{tt}=4u_{xx};\ u(x,0)=12\cos 6\pi x;\ u_t(x,0)=0;\ u_x(0,t)=u_x(2,t)=0.$

Задание 3: Решить смешанную задачу для данного неоднородного волнового уравнения с нулевыми начальными и граничными условиями

$$u(x,0)=u_{tt}(x,0)=0;$$
$$u(0,t)=u(\pi,t)=0.$$
$$u_{tt\text{-}}=1/81u_{xx}+15\cos 4t\sin 9x.$$

Вариант 13

Задание 1: Решить смешанную задачу.

$u_{tt}=16u_{xx};\ u(x,0)=13\sin 5\pi x;\ u_t(x,0)=0;\ u(0,t)=u(3,t)=0.$

Задание 2: Решить смешанную задачу.

$u_{tt}=25u_{xx};\ u(x,0)=0;\ u_t(x,0)=25\pi\cos 5\pi x;\ u_x(0,t)=u_x(2,t)=0.$

Задание 3: Решить смешанную задачу для данного неоднородного волнового уравнения с нулевыми начальными и граничными условиями

$$u(x,0)=u_{tt}(x,0)=0;$$
$$u(0,t)=u(\pi,t)=0.$$
$$u_{tt}=u_{xx}+26\mathrm{e}^{-5t}\sin x.$$

Вариант 14

Задание 1: Решить смешанную задачу.

$u_{tt}=25u_{xx};\ u(x,0)=0;\ u_t(x,0)=25\pi\sin 5\pi x;\ u(0,t)=u(2,t)=0.$

Задание 2: Решить смешанную задачу.

$u_{tt}=16u_{xx};\ u(x,0)=14\cos 5\pi x;\ u_t(x,0)=0;\ u_x(0,t)=u_x(3,t)=0.$

Задание 3: Решить смешанную задачу для данного неоднородного волнового уравнения с нулевыми начальными и граничными условиями

$u(x,\ 0)=u_{tt}(x,0)=0;$
$u(0,t)=u(\pi,t)=0.$
$u_{tt}=1/4u_{xx}+24\sin 5\,\mathrm{tsin}\,2x.$

Вариант 15

Задание 1: Решить смешанную задачу.

$u_{tt}=36u_{xx};\ u(x,0)=15\sin 4\pi x;\ u_t(x,0)=0;\ u(0,t)=u(4,t)=0.$

Задание 2: Решить смешанную задачу.

$u_{tt}=49u_{xx};\ u(x,0)=0;\ u_t(x,0)=28\pi\cos 4\pi x;\ u_x(0,t)=u_x(3,t)=0.$

Задание 3: Решить смешанную задачу для данного неоднородного волнового уравнения с нулевыми начальными и граничными условиями

$u(x,0)=u_{tt}(x,0)=0;$
$u(0,t)=u(\pi,t)=0.$
$u_{tt}=16u_{xx}+40\cos 20t\sin 5x.$

Вариант 16

Задание 1: Решить смешанную задачу.

$u_{tt}=49u_{xx};\ u(x,0)=0;\ u_t(x,0)=28\pi\sin 4\pi x;\ u(0,t)=u(3,t)=0.$

Задание 2: Решить смешанную задачу.

$u_{tt}=36u_{xx};\ u(x,0)=16\cos 4\pi x;\ u_t(x,0)=0;\ u_x(0,t)=u_x(4,t)=0.$

Задание 3: Решить смешанную задачу для данного неоднородного волнового уравнения с нулевыми начальными и граничными условиями

$u(x,0)=u_{tt}(x,0)=0;$
$u(0,t)=u(\pi,t)=\ 0.$
$u_{tt}=1/9u_{xx}+24\cos 5t\sin 3x.$

Вариант 17

Задание 1: Решить смешанную задачу.

$u_{tt} = 64u_{xx};\ u(x,0) = 17\sin 3\pi x;\ u_t(x,0) = 0;\ u(0,t) = u(5,t) = 0.$

Задание 2: Решить смешанную задачу.

$u_{tt} = 81u_{xx};\ u(x,0) = 0;\ u_t(x,0) = 27\pi\cos 3\pi x;\ u_x(0,t) = u_x(42,t) = 0.$

Задание 3: Решить смешанную задачу для данного неоднородного волнового уравнения с нулевыми начальными и граничными условиями

$u(x,0) = u_{tt}(x,0) = 0;$
$u(0,t) = u(\pi,t) = 0.$
$u_{tt} = 1/16u_{xx} + 17\,\mathrm{e}^{-4t}\sin 4x.$

Вариант 18

Задание 1: Решить смешанную задачу.

$u_{tt} = 81u_{xx};\ u(x,0) = 0;\ u_t(x,0) = 27\pi\sin 3\pi x;\ u(0,t) = u(4,t) = 0.$

Задание 2: Решить смешанную задачу.

$u_{tt} = 64u_{xx};\ u(x,0) = 18\cos 3\pi x;\ u_t(x,0) = 0;\ u_x(0,t) = u_x(5,t) = 0.$

Задание 3: Решить смешанную задачу для данного неоднородного волнового уравнения с нулевыми начальными и граничными условиями

$u(x,0) = u_{tt}(x,0) = 0;$
$u(0,t) = u(\pi,t) = 0.$
$u_{tt} = 1/25u_{xx} + 35\sin 6\,\mathrm{t}\sin 5x.$

Вариант 19

Задание 1: Решить смешанную задачу.

$u_{tt} = u_{xx};\ u(x,0) = 19\sin 7\pi x;\ u_t(x,0) = 0;\ u(0,t) = u(2,t) = 0.$

Задание 2: Решить смешанную задачу.

$u_{tt} = 4u_{xx};\ u(x,0) = 0;\ u_t(x,0) = 14\pi\cos 7\pi x;\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0.$

Задание 3: Решить смешанную задачу для данного неоднородного волнового уравнения с нулевыми начальными и граничными условиями

$$u(x,0)=u_{tt}(x,0)=0;$$
$$u(0,t)=u(\pi,t)=0.$$
$$u_{tt}=25u_{xx}+40\cos 20t\sin 4x.$$

Вариант 20

Задание 1: Решить смешанную задачу.

$$u_{tt}=4u_{xx};\ u(x,0)=0;\ u_t(x,0)=14\pi\sin 7\pi x;\ u(0,t)=u(1,t)=0.$$

Задание 2: Решить смешанную задачу.

$$u_{tt}=u_{xx};\ u(x,0)=20\cos 7\pi x;\ u_t(x,0)=0;\ u_x(0,t)=u_x(2,t)=0.$$

Задание 3: Решить смешанную задачу для данного неоднородного волнового уравнения с нулевыми начальными и граничными условиями

$$u(x,0)=u_{tt}(x,0)=0;$$
$$u(0,t)=u(\pi,t)=0.$$
$$u_{tt-}=1/36u_{xx}+35\cos 6t\sin 5x.$$

Вариант 21

Задание 1: Решить смешанную задачу.

$$u_{tt}=9u_{xx};\ u(x,0)=21\sin 6\pi x;\ u_t(x,0)=0;\ u(0,t)=u(3,t)=0.$$

Задание 2: Решить смешанную задачу.

$$u_{tt}=16u_{xx};\ u(x,0)=0;\ u_t(x,0)=24\pi\cos 6\pi x;\ u_x(0,t)=u_x(2,t)=0.$$

Задание 3: Решить смешанную задачу для данного неоднородного волнового уравнения с нулевыми начальными и граничными условиями

$$u(x,0)=u_{tt}(x,0)=0;$$
$$u(0,t)=u(\pi,t)=0.$$
$$u_{tt-}=1/49u_{xx}+10\,\mathrm{e}^{-3t}\sin 7x.$$

Вариант 22

Задание 1: Решить смешанную задачу.

$u_{tt}=16u_{xx};\ u(x,0)=0;\ u_t(x,0)=24\pi\sin 6\pi x;\ u(0,t)=u(2,t)=0.$

Задание 2: Решить смешанную задачу.

$u_{tt}=9u_{xx};\ u(x,0)=22\cos 6\pi x;\ u_t(x,0)=0;\ u_x(0,t)=u_x(3,t)=0.$

Задание 3: Решить смешанную задачу для данного неоднородного волнового уравнения с нулевыми начальными и граничными условиями

$u(x,0)=u_{tt}(x,0)=0;$
$u(0,t)=u(\pi,t)=0.$
$u_{tt}=1/64u_{xx}+48\sin 7t\sin 8x.$

Вариант 23

Задание 1: Решить смешанную задачу.

$u_{tt}=25u_{xx};\ u(x,0)=23\sin 5\pi x;\ u_t(x,0)=0;\ u(0,t)=u(4,t)=0.$

Задание 2: Решить смешанную задачу.

$u_{tt}=36u_{xx};\ u(x,0)=0;\ u_t(x,0)=30\pi\cos 5\pi x;\ u_x(0,t)=u_x(3,t)=0.$

Задание 3: Решить смешанную задачу для данного неоднородного волнового уравнения с нулевыми начальными и граничными условиями

$u(x,0)=u_{tt}(x,0)=0;$
$u(0,t)=u(\pi,t)=0.$
$u_{tt}=36u_{xx}+36\cos 18t\sin 3x.$

Вариант 24

Задание 1: Решить смешанную задачу.

$u_{tt}=36u_{xx};\ u(x,0)=0;\ u_t(x,0)=30\pi\sin 5\pi x;\ u(0,t)=u(3,t)=0.$

Задание 2: Решить смешанную задачу.

$u_{tt}=25u_{xx};\ u(x,0)=24\cos 5\pi x;\ u_t(x,0)=0;\ u_x(0,t)=u_x(4,t)=0.$

Задание 3: Решить смешанную задачу для данного неоднородного волнового уравнения с нулевыми начальными и граничными условиями

$$u(x,0)=u_{tt}(x,0)=0;$$
$$u(0,t)=u(\pi,t)=0.$$
$$u_{tt}=1/81u_{xx}+48\cos 7t\sin 9x.$$

Вариант 25

Задание 1: Решить смешанную задачу.

$$u_{tt}=49u_{xx};\; u(x,0)=25\sin 4\pi x;\; u_t(x,0)=0;\; u(0,t)=u(5,t)=0.$$

Задание 2: Решить смешанную задачу.

$$u_{tt}=64u_{xx};\; u(x,0)=0;\; u_t(x,0)=32\pi\cos 4\pi x;\; u_x(0,t)=u_x(4,t)=0.$$

Задание 3: Решить смешанную задачу для данного неоднородного волнового уравнения с нулевыми начальными и граничными условиями

$$u(x,0)=u_{tt}(x,0)=0;$$
$$u(0,t)=u(\pi,t)=0.$$
$$u_{tt}=u_{xx}+5e^{-2t}\sin x.$$

2 МЕТОД РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

2.1 Примеры решения уравнений параболического типа

Задание 1: Решить смешанную задачу.

$$u_t = 6u_{xx}, \quad 0 < x < 6,\ t > 0; \qquad (1)$$

$$u(x,0) = 25\sin 2\pi x, \quad 0 \le x \le 6;$$

$$u(0,t) = u(6,t) = 0, \quad t \ge 0.$$

Решение:

Решаем задачу методом разделения переменных (методом Фурье). Для этого ищем решение в виде $u(x,t) = X(x)T(t) \ne 0.$

Подставляем в уравнение (1):

$$X(x)T'(t) = 6X''(x)T(t).$$

Разделяем переменные, получаем

$$\frac{T'(t)}{6T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \ \Rightarrow\ \begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, & (2) \\ T'(t) + 6\lambda T(t) = 0. & (3) \end{cases}$$

В результате имеем два обыкновенных дифференциальных уравнения, решая которые, найдем искомый ответ.

Решаем уравнение (2), получаем:

$$X(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x,$$

подставляем граничные условия $X(0) = X'(6) = 0,$ получим

$$0 = C_1,\ 0 = C_2 \sin 6\sqrt{\lambda} \Rightarrow C_2 \ne 0,$$

т.к. ищем отличное от нуля решение. Находим λ_n

$$\sin 6\sqrt{\lambda} = 0 \ \Rightarrow\ 6\sqrt{\lambda} = \pi n \ \Rightarrow\ \lambda_n = \left[\frac{\pi n}{6}\right]^2,$$

а искомая функция

$$X_n(x) = \sin\frac{\pi n}{6}x,\ n \in Z.$$

Решаем уравнение (3)

$$\frac{dT_n(t)}{T_n(t)} = -6\lambda_n dt,$$

проинтегрируем и получаем:

$$\ln T_n(t) = -6\lambda_n t + D_n,$$

отсюда

$$T_n(t) = D_n\,\mathrm{e}^{-6(\frac{\pi n}{6})^2 t} = D_n\,\mathrm{e}^{-\frac{(\pi n)^2}{6}t}.$$

Пришли к общему решению поставленной задачи в виде:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n\,\mathrm{e}^{-\frac{(\pi n)^2}{6}t} \sin\frac{\pi n}{6}x.$$

Используя начальные условия $u(x,0) = 25\sin 2\pi x,$ найдем D_n.

Получим

$$25\sin 2\pi x = \sum_{n=1}^{\infty} D_n\,\mathrm{e}^{-\frac{(\pi n)^2}{6}t} \sin\frac{\pi n}{6}x.$$

Очевидно, что только при n=12 существует отличное от нуля D_{12} = 25. Следовательно, решение исходной задачи имеет вид:

Ответ: $u(x,t) = 25\mathrm{e}^{-24\pi^2 t}\sin 2\pi x.$

Задание 2: Решить смешанную задачу:

$$u_t = 4u_{xx}, \quad 0 < x < 6, \; t > 0;$$
$$u(x,0) = 25\cos 3\pi x + 26\cos 4\pi x;$$
$$u_x(0,t) = u_x(6,t) = 0.$$

Решение:

Имеем однородное уравнение, граничные условия второго рода, однородные.

Решаем методом Фурье. Запишем $u(x,t)$ в виде $u(x,t) = X(x)T(t)$ и подставим в исходное уравнение, разделим переменные, получаем:

$$\frac{T'(t)}{4T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda,$$

отсюда

$$T'(t)+4\lambda T(t)=0$$

и задача Штурма-Лиувилля принимает вид:

$$X''(x)+\lambda X(x)=0,$$
$$X'(0)=X'(6)=0.$$

Решая задачу Штурма-Лиувилля:

$$X(x)=C_1\cos\sqrt{\lambda}x+C_2\sin\sqrt{\lambda}x,$$
$$X'(x)=-C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x+C_2\cos\sqrt{\lambda}x,$$

$$0=C_2,\ C_1\neq 0,\ \sin 6\sqrt{\lambda}=0\Rightarrow\sqrt{\lambda}=\frac{\pi n}{6}.$$

Следовательно,

$$\lambda_n=\left(\frac{\pi n}{6}\right)^2,\ X_n(x)=\cos\frac{\pi n}{6}x.$$

При $\lambda_n=\left(\frac{\pi n}{6}\right)^2$ общее решение уравнения $T_n'(t)+4\lambda_n T_n(t)=0$ имеет вид

$$T_n(t)=D_n\,\mathrm{e}^{-\frac{(\pi n)^2}{6}t}.$$

Решение краевой задачи имеет вид

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}D_n\,\mathrm{e}^{-\frac{(\pi n)^2}{6}t}\cos\frac{\pi n}{6}x.$$

Используя начальное условие, находим D_n:

$$\sum_{n=0}^{\infty}D_n\cos\frac{\pi n}{6}x=25\cos 3\pi x+26\cos 4\pi x,$$

при n = 18, D_{18} = 25 и при n = 24, D_{24} = 26. В результате решение исходной задачи имеет вид:

Ответ: $u(x,t)=25\,\mathrm{e}^{-36\pi^2 t}\cos 3\pi x+26\,\mathrm{e}^{-64\pi^2 t}\cos 4\pi x.$

Задание 3: Решить смешанную задачу для неоднородного уравнения теплопроводности с нулевыми начальными и граничными условиями:

$$u_t = \frac{1}{36}u_{xx} + 37\cos 6t \sin 6x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \tag{1}$$

$$u(x,0) = 25\sin 12x, \tag{2}$$

$$u(0,t) = 0, \; u(\pi,t) = 0. \tag{3}$$

Решение:

Применим метод разделения переменных для решения однородного уравнения

$$\tilde{u}_t = \frac{1}{36}\tilde{u}_{xx} \tag{4}$$

при условиях (2), (3). Подставим $\tilde{u}(x,t) = X(x)T(t)$ в (4)

$$X(x)T'(t) = \frac{1}{36}X''(x)T(t),$$

разделяя переменные, получаем

$$\frac{36T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda,$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \tag{5}$$

$$36T'(t) + \lambda T(t) = 0. \tag{6}$$

Сначала решаем задачу Штурма-Лиувилля для (5)

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ X(0) = X(\pi) = 0. \end{cases}$$

В результате имеем $X(x) = C_1\cos\sqrt{\lambda}x + C_2\sin\sqrt{\lambda}x,$ подставляя граничные условия, получаем

$$0 = C_1, \; \sin 6\sqrt{\lambda} = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} = \pi n, \; \lambda_n = n^2.$$

Таким образом, $X_n(x) = \sin nx$ − собственные функции.

Решаем уравнение (6), получаем

$$\frac{dT_n(t)}{T_n(t)} = -\frac{n^2}{36}dt,$$

интегрируя, находим

$$T_n(t) = D_n\,\mathrm{e}^{-\frac{n^2}{36}t}.$$

Запишем полученное решение однородного уравнения в виде

$$\tilde{u}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n\,\mathrm{e}^{-\frac{n^2}{36}t} \sin nx.$$

Используя начальное условие (2), найдем неизвестный коэффициент D_n

$$25\sin 12x = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin nx.$$

Отсюда $D_n = 25$ при $n = 12$, другие значения $D_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots, 11, 13, \ldots$.

Получаем $\tilde{u}(x,t) = 25\,\mathrm{e}^{-4t}\sin 12x.$

Решение неоднородного уравнения (1) ищем в виде ряда по собственным функциям, соответствующей однородной задаче.

$$\tilde{\tilde{u}}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin nx,\ T_n(0) = 0. \tag{7}$$

Подставим $\tilde{\tilde{u}}(x,t)$ в уравнение (1), получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}[T_n'(t) + \frac{n^2}{36}T_n(t)]\sin nx = 37\cos 6t \sin 6\mathrm{x}$$

Для $n = 6$ получаем уравнение

$$T_6'(t) + T_6(t) = 37\cos 6t. \tag{8}$$

Сначала решаем однородное уравнение

$$T_6'(t) + T_6(t) = 0,\ \frac{dT_6(t)}{T_6(t)} = -dt,\ T_6(t) = C\,\mathrm{e}^{-t}.$$

В решение неоднородного уравнения (8) подставляем найденное однородное $T_6(t) = C(t)\,\mathrm{e}^{-t}$, получаем

$$C'(t)\,\mathrm{e}^{-t} - C(t)\,\mathrm{e}^{-t} + C(t)\,\mathrm{e}^{-t} = 37\cos 6t \Rightarrow C'(t) = 37\,\mathrm{e}^{t}\cos 6t,$$

интегрируя по частям дважды, найдем $C(t)$

$$C(t) = \int 37\,\mathrm{e}^{t}\cos 6t\,dt = \mathrm{e}^{t}(6\sin 6t + \cos 6t) + \tilde{C}.$$

Получаем $T_6(t) = \mathrm{e}^t(6\sin 6t + \cos 6t) + \tilde{C}$. Подставляем $T_6(t)$ в функцию (7)

$$\tilde{\tilde{u}}(x,t) = [\ \mathrm{e}^t(6\sin 6t + \cos 6t) + \tilde{C}\ ]\sin 6x,$$

используя

$$\tilde{u}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} 25\mathrm{e}^{-\frac{n^2}{36}0}\sin nx = 0,$$

найдем $\tilde{C}$. $0 = 1 + \tilde{C} \Rightarrow \tilde{C} = -1.$

В результате

$$\tilde{\tilde{u}}(x,t) = [\ \mathrm{e}^t(6\sin 6t + \cos 6t) - 1\ ]\sin 6x.$$

Наконец, можем записать искомое общее решение

Ответ: $u(x,t) = \tilde{u}(x,t) + \tilde{\tilde{u}}(x,t) = 25\mathrm{e}^{-4t}\sin 12x + (\mathrm{e}^t(6\sin 6t + \cos 6t) - 1)\sin 6x.$

2.2 Варианты индивидуальных домашних заданий по теме «Уравнения параболического типа»

Вариант 1

Задание 1: Решить смешанную задачу:

$u_t = 2u_{xx};\ u\left(x,0\right) = \sin 3\pi x;\ u\left(0,t\right) = u\left(8,t\right) = 0.$

Задание 2: Решить смешанную задачу.

$u_t = 2u_{xx};\ u(x,0) = \cos 3\pi x + \ 2\cos 4\pi x;\ u_x(0,t) = u_x(8,t) = \ 0.$

Задание 3: Решить смешанную задачу для данного неоднородного уравнения теплопроводности с нулевыми начальными и граничными условиями

$u(x,0) = \ 0;\ u(0,t) = \ 0,\ u(\pi,t) = 0.$

$u_t = 1/9u_{xx} + 5\sin 2t \sin 3x.$

Вариант 2

Задание 1: Решить смешанную задачу.

$u_t = 9u_{xx};\ u\left(x,0\right) = 2\sin 2\pi x + 3\sin 3\pi x;\ u\left(0,t\right) = u\left(1,t\right) = 0.$

Задание 2: Решить смешанную задачу.

$u_t = 2u_{xx};\ u\left(x,0\right) = 2\cos 2\pi x;\ u_x\left(0,t\right) = u_x\left(2,t\right) = 0.$

Задание 3: Решить смешанную задачу для данного неоднородного уравнения теплопроводности с нулевыми начальными и граничными условиями

$u(x,0) = 0;\ u(0,t) = 0,\ u(\pi,t) = 0.$

$u_t = 1/16\ u_{xx} + \mathrm{e}^{-2t} \sin 4x.$

Вариант 3

Задание 1: Решить смешанную задачу.

$u_t = 3u_{xx};\ u\left(x,0\right) = 3\sin 2\pi x;\ u\left(0,t\right) = u\left(7,t\right) = 0.$

Задание 2: Решить смешанную задачу.

$u_t = 3u_{xx};\ u\left(x,0\right) = 3\cos 3\pi x + 4\cos 4\pi x;\ u_x\left(0,t\right) = u_x\left(7,t\right) = 0.$

Задание 3: Решить смешанную задачу для данного неоднородного уравнения теплопроводности с нулевыми начальными и граничными условиями

$u(x,0)=0;\ u(0,t)=0,\ u(\pi,t)=0.$

$u_t=1/4\ u_{xx}+10\cos 3t\sin 2x.$

Вариант 4

Задание 1: Решить смешанную задачу.

$u_t=2u_{xx};\ u(x,0)=4\sin 3\pi x+5\sin 4\pi x;\ u(0,t)=u(2,t)=0.$

Задание 2: Решить смешанную задачу.

$u_t=3u_{xx};\ u(x,0)=4\cos 3\pi x;\ u_x(0,t)=u_x(3,t)=0.$

Задание 3: Решить смешанную задачу для данного неоднородного уравнения теплопроводности с нулевыми начальными и граничными условиями

$u(x,0)=0;\ u(0,t)=0,\ u(\pi,t)=0.$

$u_t=2u_{xx}+7\,\mathrm{e}^{-18t}\sin 3x.$

Вариант 5

Задание 1: Решить смешанную задачу.

$u_t=4u_{xx};\ u(x,0)=5\sin 3\pi x;\ u(0,t)=u(6,t)=0.$

Задание 2: Решить смешанную задачу.

$u_t=8u_{xx};\ u(x,0)=5\cos 2\pi x+6\cos 3\pi x;\ u_x(0,t)=u_x(6,t)=0.$

Задание 3: Решить смешанную задачу для данного неоднородного уравнения теплопроводности с нулевыми начальными и граничными условиями

$u(x,0)=0;\ u(0,t)=0,\ u(\pi,t)=0.$

$u_t=1/16\ u_{xx}+10\sin 3t\sin 4x.$

Вариант 6

Задание 1: Решить смешанную задачу.

$u_t=7u_{xx};\ u(x,0)=6\sin 2\pi x+7\sin 3\pi x;\ u(0,t)=u(3,t)=0.$

Задание 2: Решить смешанную задачу.

$u_t = 4u_{xx};\ u\left(x,0\right) = 6\cos 2\pi x;\ u_x\left(0,t\right) = u_x\left(4,t\right) = 0.$

Задание 3: Решить смешанную задачу для данного неоднородного уравнения теплопроводности с нулевыми начальными и граничными условиями

$u(x,0) = 0,\ u(0,t) = 0,\ u(\pi,t) = 0.$
$u_t = 1/4\ u_{xx} + 2\,\mathrm{e}^{-3t}\sin 2x.$

Вариант 7

Задание 1: Решить смешанную задачу.

$u_t = 5u_{xx};\ u\left(x,0\right) = 7\sin 2\pi x;\ u\left(0,t\right) = u\left(5,t\right) = 0.$

Задание 2: Решить смешанную задачу.

$u_t = 4u_{xx};\ u(x,\ 0) = 7\cos 3\pi x +\ 8\cos 4\pi x;\ u_x(0,t) = u_x(5,t) = 0.$

Задание 3: Решить смешанную задачу для данного неоднородного уравнения теплопроводности с нулевыми начальными и граничными условиями

$u(x,0) =\ 0;\ u(0,t) = 0,\ u(\pi,t) = 0.$
$u_t = 1/9u_{xx} + 2\cos t\sin 3x.$

Вариант 8

Задание 1: Решить смешанную задачу.

$u_t = 6u_{xx};\ u\left(x,0\right) = 8\sin 3\pi x + 9\sin 4\pi x;\ u\left(0,t\right) = u\left(4,t\right) = 0.$

Задание 2: Решить смешанную задачу.

$u_t = 5u_{xx};\ u\left(x,0\right) = 8\cos 3\pi x;\ u_x\left(0,t\right) = u_x\left(5,t\right) = 0.$

Задание 3: Решить смешанную задачу для данного неоднородного уравнения теплопроводности с нулевыми начальными и граничными условиями

$u(x,0) = 0;\ u(0,t) = 0,\ u(\pi,t) = 0.$
$u_t = 3u_{xx}8e^{-48t}\sin 4x.$

Вариант 9

Задание 1: Решить смешанную задачу.

$u_t = 6u_{xx};\ u(x,0) = 9\sin 3\pi x;\ u(0,t) = u(4,t) = 0.$

Задание 2: Решить смешанную задачу.

$u_t = 6u_{xx};\ u(x,0) = 9\cos 2\pi x + 10\cos 3\pi x;\ u_x(0,t) = u_x(4,t) = 0.$

Задание 3: Решить смешанную задачу для данного неоднородного уравнения теплопроводности с нулевыми начальными и граничными условиями

$u(x,0) = 0;\ u(0,t) = 0,\ u(\pi,t) = 0.$

$u_t = 1/4\ u_{xx} + 2\sin 2t \sin 2x.$

Вариант 10

Задание 1: Решить смешанную задачу.

$u_t = 5u_{xx};\ u(x,0) = 10\sin 2\pi x + 3\sin 3\pi x;\ u(0,t) = u(5,t) = 0.$

Задание 2: Решить смешанную задачу.

$u_t = 6u_{xx};\ u(x,0) = 10\cos 2\pi x;\ u_x(0,t) = u_x(6,t) = 0.$

Задание 3: Решить смешанную задачу для данного неоднородного уравнения теплопроводности с нулевыми начальными и граничными условиями

$u(x,0) = 0;\ u(0,t) = 0,\ u(\pi,t) = 0.$

$u_t = 1/9\ u_{xx} + 3e^{-4t}\sin 3x.$

Вариант 11

Задание 1: Решить смешанную задачу.

$u_t = 7u_{xx};\ u(x,0) = 11\sin 2\pi x;\ u(0,t) = u(3,t) = 0.$

Задание 2: Решить смешанную задачу.

$u_t = 5u_{xx};\ u(x,0) = 11\cos 3\pi x + 12\cos 4\pi x;\ u_x(0,t) = u_x(3,\ t) = 0.$

Задание 3: Решить смешанную задачу для данного неоднородного уравнения теплопроводности с нулевыми начальными и граничными условиями

$u(x,0)=\ 0;\ u(0,t)=\ 0,\ u(\pi,t)=0.$
$u_t=1/16\ u_{xx}+\ 10\cos 3t\sin 4x.$

Вариант 12

Задание 1: Решить смешанную задачу.

$u_t=4u_{xx};\ u(x,0)=12\sin 3\pi x+5\sin 4\pi x;\ u(0,t)=u(6,t)=0.$

Задание 2: Решить смешанную задачу.

$u_t=7u_{xx};\ u(x,0)=12\cos 3\pi x;\ u_x(0,t)=u_x(7,t)=0.$

Задание 3: Решить смешанную задачу для данного неоднородного уравнения теплопроводности с нулевыми начальными и граничными условиями

$u(x,0)=\ 0;\ u(0,t)=0,\ u(\pi,t)=0.$
$u_t=5u_{xx}+6\,\mathrm{e}^{-45t}\sin 3x.$

Вариант 13

Задание 1: Решить смешанную задачу.

$u_t=8u_{xx};\ u(x,0)=13\sin 3\pi x;\ u(0,t)=u(2,t)=0.$

Задание 2: Решить смешанную задачу.

$u_t=4u_{xx};\ u(x,0)=13\cos 2\pi x+14\cos 3\pi x;\ u_x(0,t)=u_x(2,t)=0.$

Задание 3: Решить смешанную задачу для данного неоднородного уравнения теплопроводности с нулевыми начальными и граничными условиями

$u(x,0)=0;\ u(0,t)=0,\ u(\pi,t)=0.$
$u_t=1/9\ u_{xx}+2\sin t\sin 3x.$

Вариант 14

Задание 1: Решить смешанную задачу.

$u_t=3u_{xx};\ u(x,0)=14\sin 2\pi x+7\sin 3\pi x;\ u(0,t)=u(7,t)=0.$

Задание 2: Решить смешанную задачу.

$u_t=8u_{xx};\ u(x,0)=14\cos 2\pi x;\ u_x(0,t)=u_x(8,t)=0.$

Задание 3: Решить смешанную задачу для данного неоднородного уравнения теплопроводности с нулевыми начальными и граничными условиями

$$u(x,0)=0;\ u(0,t)=0,\ u(\pi,t)=0.$$
$$u_t=1/16\ u_{xx}+4\,\mathrm{e}^{-5t}\sin 4x.$$

Вариант 15

Задание 1: Решить смешанную задачу.

$$u_t=9u_{xx};\ u\left(x,0\right)=15\sin 2\pi x;\ u\left(0,t\right)=u\left(1,t\right)=0.$$

Задание 2: Решить смешанную задачу.

$$u_t=3u_{xx};\ u(x,0)=15\cos 3\pi x+16\cos 4\pi x;\ u_x(0,t)=u_x(1,t)=0.$$

Задание 3: Решить смешанную задачу для данного неоднородного уравнения теплопроводности с нулевыми начальными и граничными условиями

$$u(x,0)=0;\ u(0,t)=0,\ u(\pi,t)=0.$$
$$u_t=1/9\ u_{xx}+10\cos 3t\sin 3x.$$

Вариант 16

Задание 1: Решить смешанную задачу.

$$u_t=2u_{xx};\ u\left(x,0\right)=16\sin 3\pi x+9\sin 4\pi x;\ u\left(0,t\right)=u\left(8,t\right)=0.$$

Задание 2: Решить смешанную задачу.

$$u_t=9u_{xx};\ u\left(x,0\right)=16\cos 3\pi x;\ u_x\left(0,t\right)=u_x\left(9,t\right)=0.$$

Задание 3: Решить смешанную задачу для данного неоднородного уравнения теплопроводности с нулевыми начальными и граничными условиями

$$u(x,0)=\ 0;\ u(0,t)=0,\ u(\pi,t)=0.$$
$$u_t=4u_{xx}+5\,\mathrm{e}^{-64t}\sin 4x.$$

Вариант 17

Задание 1: Решить смешанную задачу.

$$u_t=2u_{xx};\ u\left(x,0\right)=17\sin 2\pi x;\ u\left(0,t\right)=u\left(2,t\right)=0.$$

Задание 2: Решить смешанную задачу.

$u_t = 2u_{xx};\ u(x,0) = 17\cos 3\pi x + 18\cos 4\pi x;\ u_x(0,t) =_x (2,t) = 0.$

Задание 3: Решить смешанную задачу для данного неоднородного уравнения теплопроводности с нулевыми начальными и граничными условиями

$u(x,0) = 0;\ u(0,t) = 0,\ u(\pi,t) = 0.$
$u_t = 1/16\ u_{xx} + 2\sin t \sin 4x.$

Вариант 18

Задание 1: Решить смешанную задачу.

$u_t = 3u_{xx};\ u\left(x,0\right) = 18\sin 3\pi x + 3\sin 4\pi x;\ u\left(0,t\right) = u\left(7,t\right) = 0.$

Задание 2: Решить смешанную задачу.

$u_t = 4u_{xx};\ u\left(x,0\right) = 18\cos 3\pi x;\ u_x\left(0,t\right) = u_x\left(6,t\right) = 0.$

Задание 3: Решить смешанную задачу для данного неоднородного уравнения теплопроводности с нулевыми начальными и граничными условиями

$u(x,0) = 0;\ u(0,t) = 0,\ u(\pi,t) = 0.$
$u_t = 1/4\ u_{xx} + \mathrm{e}^{-2t} \sin 2x.$

Вариант 19

Задание 1: Решить смешанную задачу.

$u_t = 3u_{xx};\ u\left(x,0\right) = 19\sin 3\pi x;\ u\left(0,t\right) = u\left(3,t\right) = 0.$

Задание 2: Решить смешанную задачу.

$u_t = 7u_{xx};\ u\left(x,0\right) = 19\cos 2\pi x + 20\cos 3\pi x;\ u_x\left(0,t\right) = u_x\left(3,t\right) = 0.$

Задание 3: Решить смешанную задачу для данного неоднородного уравнения теплопроводности с нулевыми начальными и граничными условиями

$u(x,0) = 0;\ u(0,t) = 0,\ u(\pi,t) = 0.$
$u_t = 1/9\ u_{xx} + 5\cos 2t \sin 3x.$

Вариант 20

Задание 1: Решить смешанную задачу.

$u_t = 8u_{xx};\ u(x,0) = 20\sin 2\pi x + 7\sin 3\pi x;\ u(0,t) = u(6,t) = 0.$

Задание 2: Решить смешанную задачу.

$u_t = 5u_{xx};\ u(x,0) = 20\cos 2\pi x;\ u_x(0,t) = u_x(5,t) = 0.$

Задание 3: Решить смешанную задачу для данного неоднородного уравнения теплопроводности с нулевыми начальными и граничными условиями

$u(x,0) = 0;\ u(0,t) = 0,\ u(\pi,t) = 0.$

$u_t = 7u_{xx} + \mathrm{e}^{-63t}\sin 3x.$

Вариант 21

Задание 1: Решить смешанную задачу.

$u_t = 4u_{xx};\ u(x,0) = 21\sin 2\pi x;\ u(0,t) = u(4,t) = 0.$

Задание 2: Решить смешанную задачу.

$u_t = 6u_{xx};\ u(x,\ 0) = 21\cos 3\pi x + 22\cos 4\pi x;\ u_x(0,t) = u_x(4,t) = 0.$

Задание 3: Решить смешанную задачу для данного неоднородного уравнения теплопроводности с нулевыми начальными и граничными условиями

$u(x,0) = 0;\ u(0,t) = 0,\ u(\pi,t) = 0.$

$u_t = 1/4\ u_{xx} + 10\sin 3t\sin 2x.$

Вариант 22

Задание 1: Решить смешанную задачу.

$u_t = 4u_{xx};\ u(x,0) = 22\sin 3\pi x + 5\sin 4\pi x;\ u(0,t) = u(5,t) = 0.$

Задание 2: Решить смешанную задачу.

$u_t = 6u_{xx};\ u(x,0) = 22\cos 3\pi x;\ u_x(0,t) = u_x(4,t) = 0.$

Задание 3: Решить смешанную задачу для данного неоднородного уравнения теплопроводности с нулевыми начальными и граничными условиями

$u(x,0)=0;\ u(0,t)=0,\ u(\pi,t)=0.$

$u_t = 1/9\ u_{xx} + 2\,\mathrm{e}^{-3t}\sin 3x.$

Вариант 23

Задание 1: Решить смешанную задачу.

$u_t = 5u_{xx};\ u(x,0)=23\sin 3\pi x;\ u(0,t)=u(5,t)=0.$

Задание 2: Решить смешанную задачу.

$u_t = 5u_{xx};\ u(x,0)=23\cos 2\pi x + 24\cos 3\pi x;\ u_x(0,t)=u_x(5,t)=0.$

Задание 3: Решить смешанную задачу для данного неоднородного уравнения теплопроводности с нулевыми начальными и граничными условиями

$u(x,0)=0;\ u(0,t)=0,\ u(\pi,t)=0.$

$u_t = 1/16\ u_{xx} + 5\cos 2t\sin 4x.$

Вариант 24

Задание 1: Решить смешанную задачу.

$u_t = 6u_{xx};\ u(x,0)=24\sin 2\pi x + 9\sin 3\pi x;\ u(0,t)=u(4,t)=0.$

Задание 2: Решить смешанную задачу.

$u_t = 7u_{xx};\ u(x,0)=24\cos 2\pi x;\ u_x(0,t)=u_x(3,t)=0.$

Задание 3: Решить смешанную задачу для данного неоднородного уравнения теплопроводности с нулевыми начальными и граничными условиями

$u(x,0)=0;\ u_t = 7u_{xx};\ u(x,0)=24\cos 2\pi x;\ u_x(0,t)=u_x(3,t)=0.$

Вариант 25

Задание 1: Решить смешанную задачу.

$u_t = 6u_{xx};\ u(x,0)=25\sin 2\pi x;\ u(0,t)=u(6,t)=0.$

Задание 2: Решить смешанную задачу.

$u_{tt} = 4u_{xx};\ u(x,0)=25\cos 3\pi x + 26\cos 4\pi x;\ u_x(0,t)=u_x(6,t)=0.$

Задание 3: Решить смешанную задачу для данного неоднородного уравнения теплопроводности с нулевыми начальными и граничными условиями

$u(x,0) = 0;\ u(0,t)=0,\ u(\pi,t)=0.$

$u_t = 1/9u_{xx} + 10\sin 3t \sin 3x.$

3 МЕТОД РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

3.1 Примеры решения уравнений эллиптического типа

Задание 1: Найти решение уравнения Лапласа Δu = 0 в круговом секторе $0 < r < 1$, $0 < \varphi < \alpha$ (r, φ – полярные координаты, $\alpha < 2\pi$), на границе которого искомая функция $u(r, \varphi)$ удовлетворяет следующему условию:

$$u(1,\varphi) = 25\sin 3\varphi;\ u(r,0) = u(r,\pi) = 0.$$

Решение:

Запишем уравнение Лапласа в полярной системе координат

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, \tag{1}$$

решаем это уравнение методом Фурье (разделение переменных)

$$u(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi) \tag{2}$$

получим два обыкновенных дифференциальных уравнения.

Подставим (2) в (1) и, разделяя переменные, находим решение для функции $\Phi(\varphi)$

$$\Phi(\varphi) = A\sin\sqrt{\lambda}\varphi + B\cos\sqrt{\lambda}\varphi.$$

Используя граничные условия, находим

$$\Phi(0) = 0,\ B = 0;\ \Phi(\pi) = A\sin\sqrt{\lambda}\pi = 0,\ A \neq 0,$$

следовательно, $\sin\sqrt{\lambda}\pi = 0$, отсюда $\sqrt{\lambda}\pi = n\pi$, $\lambda_n = n^2$ и $\Phi(\varphi) = \sin n\varphi$.

Решаем уравнение для $R(r)$.

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2} + r\frac{dR}{dr} - \lambda R = 0,$$

делаем замену $R(r) = r^{\mu}$ и, подставляя в уравнение, получаем $\mu^2 = \lambda$, учитывая, что $\lambda_n = n^2$, получаем $\mu^2 = n^2$ или $\mu_{1,2} = \pm n$.

Общее решение $R(r) = A_n r^n + B_n r^{-n}$. Здесь $B_n = 0$, т.к. при $r = 0$ $R(r) = \infty$.

В результате получаем общее решение исходной задачи в виде:

$$u(r,\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n r^n \sin n\varphi.$$

Используя граничное условие $u(1,\varphi)=25\sin 3\varphi$, найдем неопределенный коэффициент A_n

$$25\sin 3\varphi=\sum_{n=1}^{\infty}A_n r^n \sin n\varphi.$$

Отсюда следует, что только для $n = 3$ $A_3 = 25$, а остальные $A_n = 0$, $n = 1, 2, 4, 5, \ldots$

Ответ: $u(r,\varphi)=25\, r^3 \sin 3\varphi.$

Задание 2: Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в круге $0 < r < 1$, $0 \le \varphi < 2\pi$ (r, φ – полярные координаты), на границе которого искомая функция $u(r, \varphi)$ имеет следующее значение: $u(1,\varphi)=25\cos 2\varphi.$

Решение:

Решение будем искать в виде

$$u(r,\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}r^n(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi),\ n=0,1,2,\ldots.$$

Используя граничные условия, найдем коэффициенты A_n и B_n.

$$25\cos 2\varphi=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi),$$

Отсюда $A_2 = 25$ при $n = 2$ и $A_n = 0$ при остальных $n = 1, 3, 4, 5, \ldots$, B_n.= 0 для всех допустимых значениях $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Ответ: $u(r,\varphi)=25\, r^3 \cos 2\varphi.$

3.2 Варианты индивидуальных домашних заданий по теме «Уравнения эллиптического типа»

Вариант 1

Задание 1: Найти решение уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в круговом секторе $0 < r < 1$, $0 < \varphi < \alpha$ (r, φ – полярные координаты, $\alpha < 2\pi$), на границе которого искомая функция $u(r, \varphi)$ удовлетворяет следующему условию:

$$u(1,\varphi) = \sin 6\varphi; \; u(r,0) = u(r,\pi/3) = 0.$$

Задание 2: Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в круге $0 < r < 1$, $0 \le \varphi < 2\pi$ (r, φ – полярные координаты), на границе которого искомая функция $u(r, \varphi)$ имеет следующее значение:

$$u(1,\varphi) = \cos 9\varphi.$$

Вариант 2

Задание 1: Найти решение уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в круговом секторе $0 < r < 1$, $0 < \varphi < \alpha$ (r, φ – полярные координаты, $\alpha < 2\pi$), на границе которого искомая функция $u(r, \varphi)$ удовлетворяет следующему условию:

$$u(1,\varphi) = 2\cos 2\varphi; \; u_\varphi(r,0) = u_\varphi(r,\pi) = 0.$$

Задание 2: Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в круге $0 < r < 1$, $0 \le \varphi < 2\pi$ (r, φ – полярные координаты), на границе которого искомая функция $u(r, \varphi)$ имеет следующее значение:

$$u(1,\varphi) = 2\sin 8\varphi.$$

Вариант 3

Задание 1: Найти решение уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в круговом секторе $0 < r < 1$, $0 < \varphi < \alpha$ (r, φ – полярные координаты, $\alpha < 2\pi$), на границе которого искомая функция $u(r, \varphi)$ удовлетворяет следующему условию:

$$u(1,\varphi) = 3\cos 15\varphi; \; u_\varphi(r,0) = 0, \; u(r,\pi/6) = 0.$$

Задание2: Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в круге

$0 < r < 1$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ (r, φ – полярные координаты), на границе которого искомая функция $u(r, \varphi)$ имеет следующее значение:

$$u(1,\varphi) = 3\cos 7\varphi.$$

Вариант 4

Задание 1: Найти решение уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в круговом секторе $0 < r < 1$, $0 < \varphi < \alpha$ (r, φ – полярные координаты, $\alpha < 2\pi$), на границе которого искомая функция $u(r, \varphi)$ удовлетворяет следующему условию:

$$u(1,\varphi) = 4\sin 14\varphi;\ u(r,0) = u_{\varphi}(r,\pi/4) = 0.$$

Задание 2: Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в круге $0 < r < 1$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ (r, φ – полярные координаты), на границе которого искомая функция $u(r, \varphi)$ имеет следующее значение:

$$u(1,\varphi) = 4\sin 6\varphi.$$

Вариант 5

Задание 1: Найти решение уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в круговом секторе $0 < r < 1$, $0 < \varphi < \alpha$ (r, φ – полярные координаты, $\alpha < 2\pi$), на границе которого искомая функция $u(r, \varphi)$ удовлетворяет следующему условию:

$$u(1,\varphi) = 5\sin 3\varphi;\ u(r,0) = 0,\ u(r,2\pi/3) = 0.$$

Задание 2: Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в круге $0 < r < 1$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ (r, φ – полярные координаты), на границе которого искомая функция $u(r, \varphi)$ имеет следующее значение:

$$u(1,\varphi) = 5\cos 5\varphi.$$

Вариант 6

Задание 1: Найти решение уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в круговом секторе $0 < r < 1$, $0 < \varphi < \alpha$ (r, φ – полярные координаты, $\alpha < 2\pi$), на границе которого искомая функция $u(r, \varphi)$ удовлетворяет следующему условию:

$u(1,\varphi)=6\cos 6\varphi;\ u_{\varphi}(r,0)=u_{\varphi}(r,7\pi/6)=0.$

Задание 2: Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в круге $0 < r < 1$, $0 \le \varphi < 2\pi$ (r, φ – полярные координаты), на границе которого искомая функция $u(r, \varphi)$ имеет следующее значение:

$u(1,\varphi)=6\sin 4\varphi.$

Вариант 7

Задание 1: Найти решение уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в круговом секторе $0 < r < 1$, $0 < \varphi < \alpha$ (r, φ – полярные координаты, $\alpha < 2\pi$), на границе которого искомая функция $u(r, \varphi)$ удовлетворяет следующему условию:

$u(1,\varphi)=7\cos 10\varphi;\ u_{\varphi}(r,0)=0,\ u(r,\pi/4)=0.$

Задание 2: Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в круге $0 < r < 1$, $0 \le \varphi < 2\pi$ (r, φ – полярные координаты), на границе которого искомая функция $u(r, \varphi)$ имеет следующее значение:

$u(1,\varphi)=7\cos 3\varphi.$

Вариант 8

Задание 1: Найти решение уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в круговом секторе $0 < r < 1$, $0 < \varphi < \alpha$ (r, φ – полярные координаты, $\alpha < 2\pi$), на границе которого искомая функция $u(r, \varphi)$ удовлетворяет следующему условию:

$u(1,\varphi)=8\sin 7\varphi;\ u(r,0)=u_{\varphi}(r,\pi/2)=0.$

Задание 2: Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в круге $0 < r < 1$, $0 \le \varphi < 2\pi$ (r, φ – полярные координаты), на границе которого искомая функция $u(r, \varphi)$ имеет следующее значение:

$u(1,\varphi)=8\sin 2\varphi.$

Вариант 9

Задание 1: Найти решение уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в круговом секторе $0 < r < 1$, $0 < \varphi < \alpha$ (r, φ – полярные координаты, $\alpha < 2\pi$), на границе которого искомая функция $u(r, \varphi)$ удовлетворяет следующему условию:

$$u(1,\varphi) = 9\sin 4\varphi;\ u(r,0) = 0,\ u(r,3\pi/4) = 0.$$

Задание 2: Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в круге $0 < r < 1$, $0 \le \varphi < 2\pi$ (r, φ – полярные координаты), на границе которого искомая функция $u(r, \varphi)$ имеет следующее значение:

$$u(1,\varphi) = 9\cos 2\varphi.$$

Вариант 10

Задание 1: Найти решение уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в круговом секторе $0 < r < 1$, $0 < \varphi < \alpha$ (r, φ – полярные координаты, $\alpha < 2\pi$), на границе которого искомая функция $u(r, \varphi)$ удовлетворяет следующему условию:

$$u(1,\varphi) = 10\cos 4\varphi;\ u_\varphi(r,0) = u_\varphi(r,\ 5\pi/4) = 0.$$

Задание 2: Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в круге $0 < r < 1$, $0 \le \varphi < 2\pi$ (r, φ – полярные координаты), на границе которого искомая функция $u(r, \varphi)$ имеет следующее значение:

$$u(1,\varphi) = 10\sin 3\varphi.$$

Вариант 11

Задание 1: Найти решение уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в круговом секторе $0 < r < 1$, $0 < \varphi < \alpha$ (r, φ – полярные координаты, $\alpha < 2\pi$), на границе которого искомая функция $u(r, \varphi)$ удовлетворяет следующему условию:

$$u(1,\varphi) = 11\cos 5\varphi;\ u_\varphi(r,0) = 0,\ u(r,\pi/2) = 0.$$

Задание 2: Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в круге $0 < r < 1$, $0 \le \varphi < 2\pi$ (r, φ – полярные координаты), на границе которого искомая функция $u(r, \varphi)$ имеет следующее значение:

$u(1,\varphi) = 11\cos 4\varphi.$

Вариант 12

Задание 1: Найти решение уравнения Лапласа Δu = 0 в круговом секторе 0 < *r* < 1, 0 < *φ* < α (*r, φ* – полярные координаты, α < 2π), на границе которого искомая функция $u(r,\varphi)$ удовлетворяет следующему условию:

$u(1,\varphi) = 12\sin 3\varphi;\ u(r,0) = u_{\varphi}(r,3\pi/2) = 0.$

Задание 2: Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа Δu = 0 в круге 0 < r < 1, 0 ≤ *φ* < 2π (*r, φ* – полярные координаты), на границе которого искомая функция $u(r,\varphi)$ имеет следующее значение:

$u(1,\varphi) = 12\sin 5\varphi.$

Вариант 13

Задание 1: Найти решение уравнения Лапласа Δu = 0 в круговом секторе
0 < *r* < 1, 0 < *φ* < α (*r, φ* – полярные координаты, α < 2π), на границе которого искомая функция $u(r,\varphi)$ удовлетворяет следующему условию:

$u(1,\varphi) = 13\sin 6\varphi;\ u(r,0) = 0,\ u(r,5\pi/6) = 0.$

Задание 2: Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа Δu = 0 в круге
0 < *r* < 1, 0 ≤ *φ* < 2π (*r, φ* – полярные координаты), на границе которого искомая функция $u(r,\varphi)$ имеет следующее значение: $u(1,\varphi) = 13\cos 6\varphi.$

Вариант 14

Задание 1: Найти решение уравнения Лапласа Δu = 0 в круговом секторе
0 < *r* < 1, 0 < *φ* < α (*r, φ* – полярные координаты, α < 2π), на границе которого искомая функция $u(r,\varphi)$ удовлетворяет следующему условию:

$u(1,\varphi) = 14\cos 3\varphi;\ u_{\varphi}(r,0) = u_{\varphi}(r,4\pi/3) = 0.$

Задание 2: Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа Δu = 0 в круге

0 < r < 1, 0 ≤ φ < 2π (r, φ – полярные координаты), на границе которого искомая функция $u(r,\varphi)$ имеет следующее значение:

$u(1,\varphi)=14\sin 7\varphi.$

Вариант 15

Задание 1: Найти решение уравнения Лапласа Δu = 0 в круговом секторе 0 < r < 1, 0 < φ < α (r, φ – полярные координаты, α < 2π), на границе которого искомая функция $u(r,\varphi)$ удовлетворяет следующему условию:

$u(1,\varphi)=15\cos\varphi;\ u_{\varphi}(r,0)=0,\ u(r,3\pi/2)=0.$

Задание 2: Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа Δu = 0 в круге 0 < r < 1, 0 ≤ φ < 2π (r, φ – полярные координаты), на границе которого искомая функция $u(r,\varphi)$ имеет следующее значение:

$u(1,\varphi)=15\cos 8\varphi.$

Вариант 16

Задание 1: Найти решение уравнения Лапласа Δu = 0 в круговом секторе 0 < r < 1, 0 < φ < α (r, φ – полярные координаты, α < 2π), на границе которого искомая функция $u(r,\varphi)$ удовлетворяет следующему условию:

$u(1,\varphi)=16\sin 21\varphi;\ u(r,0)=u_{\varphi}(r,\pi/6)=0.$

Задание 2: Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа Δu = 0 в круге 0 < r < 1, 0 ≤ φ < 2π (r, φ – полярные координаты), на границе которого искомая функция $u(r,\varphi)$ имеет следующее значение:

$u(1,\varphi)=16\sin 9\varphi.$

Вариант 17

Задание 1: Найти решение уравнения Лапласа Δu = 0 в круговом секторе 0 < r < 1, 0 < φ < α (r, φ – полярные координаты, α < 2π), на границе которого искомая функция $u(r,\varphi)$ удовлетворяет следующему условию:

$u(1,\varphi) = 17\sin 9\varphi;\ u\left(r,0\right) = 0,\ u\left(r,\pi/3\right) = 0.$

Задание 2: Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа Δu = 0 в круге $0 < r < 1,\ 0 \le \varphi < 2\pi$ (r, φ – полярные координаты), на границе которого искомая функция $u(r,\varphi)$ имеет следующее значение:

$u\left(1,\varphi\right) = 17\cos 9\varphi.$

Вариант 18

Задание 1: Найти решение уравнения Лапласа Δu = 0 в круговом секторе $0 < r < 1,\ 0 < \varphi < \alpha$ (*r, φ* – полярные координаты, $\alpha < 2\pi$), на границе которого искомая функция *u(r, φ)* удовлетворяет следующему условию:

$u\left(1,\varphi\right) = 18\cos 4\varphi;\ u_\varphi(r,0) = u_\varphi(r,\pi) = 0.$

Задание 2: Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа Δu = 0 в круге $0 < r < 1,\ 0 \le \varphi < 2\pi$ (*r, φ* – полярные координаты), на границе которого искомая функция $u(r,\varphi)$ имеет следующее значение:

$u\left(1,\varphi\right) = 18\sin 8\varphi.$

Вариант 19

Задание 1: Найти решение уравнения Лапласа Δu = 0 в круговом секторе $0 < r < 1,\ 0 < \varphi < \alpha$ (*r, φ* – полярные координаты, $\alpha < 2\pi$), на границе которого искомая функция *u(r, φ)* удовлетворяет следующему условию:

$u\left(1,\varphi\right) = 19\cos 21\varphi;\ u_\varphi(r,0) = 0,\ u(r,\pi/6) = 0.$

Задание 2: Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа Δu = 0 в круге $0 < r < 1,\ 0 \le \varphi < 2\pi$ (r, φ – полярные координаты), на границе которого искомая функция *u(r, φ)* имеет следующее значение:

$u\left(1,\varphi\right) = 19\cos 7\varphi.$

Вариант 20

Задание 1: Найти решение уравнения Лапласа Δu = 0 в круговом секторе $0 < r < 1$, $0 < \varphi < \alpha$ (*r, φ* – полярные координаты, $\alpha < 2\pi$), на границе которого искомая функция *u(r, φ)* удовлетворяет следующему условию:

$$u(1,\varphi) = 20\sin 15\varphi;\ u(r,0) = u_\varphi(r,\pi/6) = 0.$$

Задание 2: Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа Δu = 0 в круге $0 < r < 1$, $0 \le \varphi < 2\pi$ (*r, φ* – полярные координаты), на границе которого искомая функция *u(r, φ)* имеет следующее значение:

$$u(1,\varphi) = 20\sin 6\varphi.$$

Вариант 21

Задание 1: Найти решение уравнения Лапласа Δu = 0 в круговом секторе $0 < r < 1$, $0 < \varphi < \alpha$ (*r, φ* – полярные координаты, $\alpha < 2\pi$), на границе которого искомая функция *u(r, φ)* удовлетворяет следующему условию:

$$u(1,\varphi) = 21\sin 6\varphi;\ u(r,0) = 0,\ u(r,2\pi/3) = 0.$$

Задание 2: Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа Δu = 0 в круге $0 < r < 1$, $0 \le \varphi < 2\pi$ (*r, φ* – полярные координаты), на границе которого искомая функция *u(r, φ)* имеет следующее значение:

$$u(1,\varphi) = 21\cos 5\varphi.$$

Вариант 22

Задание 1: Найти решение уравнения Лапласа Δu = 0 в круговом секторе $0 < r < 1$, $0 < \varphi < \alpha$ (*r, φ* – полярные координаты, $\alpha < 2\pi$), на границе которого искомая функция *u(r, φ)* удовлетворяет следующему условию:

$$u(1,\varphi) = 22\cos 12\varphi;\ u_\varphi(r,0) = u_\varphi(r,\pi/3) = 0.$$

Задание 2: Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа Δu = 0 в круге $0 < r < 1$, $0 \le \varphi < 2\pi$ (*r, φ* – полярные координаты), на границе которого искомая функция *u(r, φ)* имеет следующее значение:

$u(1,\varphi) = 22\sin 4\varphi.$

Вариант 23

Задание 1: Найти решение уравнения Лапласа Δu = 0 в круговом секторе $0 < r < 1$, $0 < \varphi < \alpha$ (r, φ – полярные координаты, α < 2π), на границе которого искомая функция *u(r, φ)* удовлетворяет следующему условию:

$u(1,\varphi) = 23\cos 14\varphi;\ u_\varphi(r,0) = 0,\ u(r,\pi/4) = 0.$

Задание 2: Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа Δu = 0 в круге $0 < r < 1$, $0 \le \varphi < 2\pi$ (*r, φ* – полярные координаты), на границе которого искомая *u(r, φ)* имеет следующее значение:

$u(1,\varphi) = 23\cos 3\varphi.$

Вариант 24

Задание 1: Найти решение уравнения Лапласа Δu = 0 в круговом секторе $0 < r < 1$, $0 < \varphi < \alpha$ (r, φ – полярные координаты, α < 2π), на границе которого искомая функция *u(r, φ)* удовлетворяет следующему условию:

$u(1,\varphi) = 24\sin 10\varphi;\ u(r,0) = u_\varphi(r,\pi/4) = 0.$

Задание 2: Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа Δu = 0 в круге $0 < r < 1$, $0 \le \varphi < 2\pi$ (*r, φ* – полярные координаты), на границе которого искомая функция u(r, φ) имеет следующее значение:

$u(1,\varphi) = 24\sin 2\varphi.$

Вариант 25

Задание 1: Найти решение уравнения Лапласа Δu = 0 в круговом секторе $0 < r < 1$, $0 < \varphi < \alpha$ (*r, φ* – полярные координаты, *α* < 2π), на границе которого искомая функция *u(r, φ)* удовлетворяет следующему условию:

$u(1,\varphi) = 25\sin 3\varphi;\ u(r,0) = 0,\ u(r,\pi) = 0.$

Задание 2: Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа Δu = 0 в круге

$0 < r < 1$, $0 \le \varphi < 2\pi$ (r, φ – полярные координаты), на границе которого искомая функция u(r, φ) имеет следующее значение:

$$u(1, \varphi) = 25\cos 2\varphi.$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Труфанова, Т.В. Методы решения уравнений математической физики / Т.В. Труфанова, А.Г. Масловская, Е.М. Веселова. – Благовещенск: Изд-во Амур. гос. ун-та, 2015. – 196 с.

2. Бицадзе, А. В. Сборник задач по уравнениям математической физики / А. В. Бицадзе, Д. Ф. Калиниченко. – 3-е изд. – М.: Альянс, 2007. – 311 с.

3. Практическое решение уравнений математической физики: учеб.-метод. пособие. Ч.1. Гиперболические уравнения / АмГУ, ФМиИ; сост. Т. В. Труфанова. – Благовещенск: Изд- во Амур. гос. ун- та, 2019. – 32 с. – http://irbis.amursu.ru/DigitalLibrary/AmurSU_Edition/11386.pdf

4. Практическое решение уравнений математической физики:учеб.-метод. пособие. Ч.2. Параболические и эллиптические уравнения / АмГУ, ФМиИ; сост. Т. В. Труфанова. – Благовещенск: Изд-во Амур. гос. ун-та, 2020. – 31 с. – http://irbis.amursu.ru/DigitalLibrary/AmurSU_Edition/11500.pdf

5. Емельянов, В. М. Уравнения математической физики. Практикум по решению задач: учебное пособие для вузов / В. М. Емельянов, Е. А. Рыбакина. – 3-е изд., стер. – Санкт- Петербург: Лань, 2021. – 216 с. – Лань: электронно-библиотечная система. – URL: https:// e.lanbook.com/ book/156410.

СОДЕРЖАНИЕ