

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
(ФГБОУВО "АмГУ")

ОСНОВЫ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ
(сборник учебно-методических материалов)

для направления подготовки
09.03.02 Информационные системы и технологии,
специализация образовательной программы «Безопасность информационных систем»

Благовещенск 2017

*Печатается по решению
редакционно-издательского совета
факультета математики и информатики
Амурского государственного
университета*

Составитель: Еремин Е.Л.

Основы теории управления: сборник учебно-методических материалов для направления подготовки: 09.03.02 Информационные системы и технологии. – Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2017.

© Амурский государственный университет, 2017
© Кафедра информационных и управляющих систем, 2017
© Еремин Е.Л., составление

1. Учебно-методическое обеспечение дисциплины "Основы теории управления":

- краткое изложение лекционного материала;
- методические рекомендации (указания) к практическим занятиям;
- методические указания для самостоятельной работы студентов.

2. Краткое изложение лекционного материала

Тема 1. Управление и информатика. Общие принципы системной организации.

В 1948 году Норберт Винер опубликовал свою книгу «Кибернетика или связь в животном и машине». Этот год и принято считать датой рождения кибернетики – науки об управлении. В переводе с греческого кибернетика – искусство управлять. Таким образом, кибернетика – область человеческого знания, благополучно соединяющая в себе искусство и науку управления сложными системами, не только техническими, а и любыми биологическими, административными и социальными. Техническая кибернетика объединяет в себе научные направления, которые решают задачу автоматизации технологических процессов. Непосредственной предшественницей технической кибернетики и кибернетики вообще, является теория автоматического управления, которая имеет дело с относительно простыми объектами и управляющими системами, описываемыми системой дифференциальных или разностных уравнений.

Существует огромное число автоматических систем, выполняющих те или иные функции по управлению самыми разнообразными процессами во всех областях техники. Все эти и подобные автоматические системы можно разделить на 2 больших класса.

I класс – автоматы, выполняющие определенного рода операцию – включение освещения, билетный автомат, станок-автомат, автомат переключения скоростей, различные роботы и ряд других технических устройств. II класс – системы автоматического управления (САУ), которые в течение достаточно длительного времени поддерживают или изменяют требуемым образом какие-либо физические величины (скорость движения или координаты движущегося объекта, давление, температуру, электрическое напряжение и т.п.) в том или ином управляемом процессе.

Цель курса основ теории управления (ОТУ) – изучение автоматических систем второго класса, которые, в свою очередь, делятся на разомкнутые и замкнутые автоматические системы. Очевидно, разомкнутые системы являются полуавтоматическими, так человек наблюдая непосредственно за управляемым объектом или используя показания контрольно-измерительных устройств «вручную» изменяет величину от источника воздействия. Очевидно, система становится полностью автоматической или просто – автоматической, если сигнал от контрольно-измерительного устройства поступит на некоторое устройство, которое по результатам измерения будет само непосредственно формировать сигнал от источника воздействия. В этом случае осуществляется замыкание выхода управляемого объекта на его вход.

Сравнивая разомкнутые и замкнутые системы регулирования, отметим, что характерным для разомкнутой системы является то, что процесс работы системы непосредственно не зависит от результата воздействия на управляемый объект. Характерной особенностью замкнутой автоматической системы является то, что все звенья системы находятся в полной взаимной зависимости, и воздействие на управляемый объект определяется как функция от значения задатчика и значения контролируемой физической величины. Во многих случаях замкнутые системы управления позволяют увеличить точность и быстродействие в системе по сравнению с разомкнутыми системами.

Различают САУ и по задачам управления: От вида и способа формирования этого сигнала в значительной степени зависит способ построения регулятора. В зависимости от вида $Y^{зад}(t)$ принято классифицировать САУ по задачам управления: системы стабилизации, отличаются тем, что

$y^{зад} = const$; системы программного управления. $y^{зад}(t) = y^{зад}(t)$ - является функцией времени и заранее известна; системы следящие. $y^{зад}(t)$ - заранее неизвестно.

САУ состоит из двух основных частей: объекта управления (ОУ) и регулятора. Однако это разделение достаточно условное. ОУ представляет из себя “нечто”, в котором должны быть явно выражены одна или несколько входных и одна или несколько выходных величин. Так же на объект действуют помехи. $u(t)=(u_1(t).....u_m(t))^T$ - входное, управляющее воздействие $y(t)=(y_1(t).....y_n(t))^T$ - выходное сигнал, состояние объекта $\xi(t)=(\xi_1(t).....\xi_k(t))^T$ - вектор помех.

Для поддержания заданного режима функционирования объекта, который выражается в заданном поведении выходных величин y , осуществляется управление входными величинами u , в соответствии с некоторым алгоритмом управления, построенным в соответствии с принципами управления. Устройство, вырабатывающее управление, называют регулятором.

Принципы управления (регулирования):

1. Принцип разомкнутого регулирования.

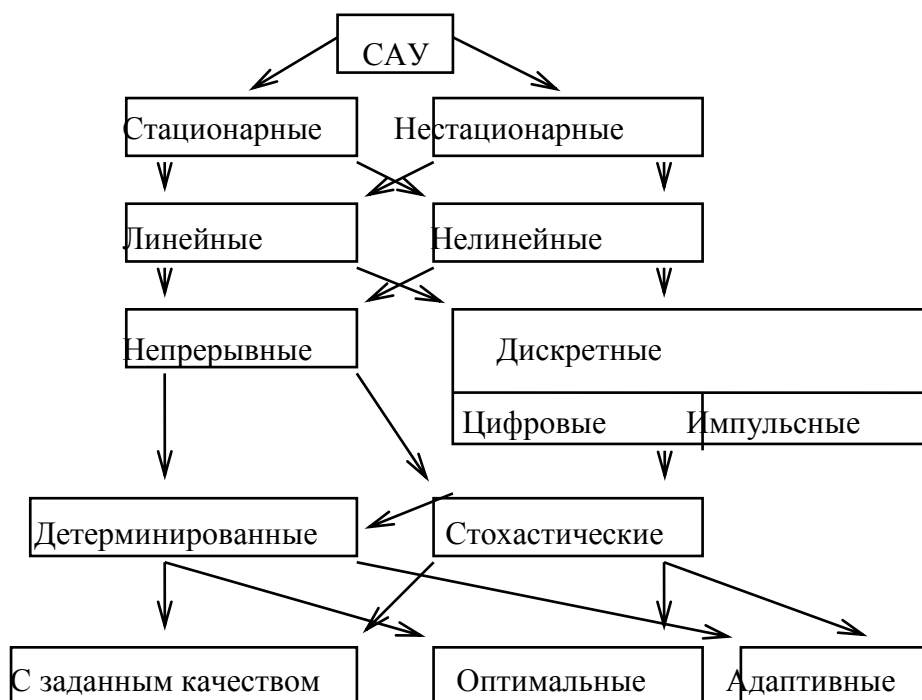
Иначе говоря, принцип планового управления. Работает достаточно успешно при наличии двух условий: достаточно информации о свойствах объекта и неизменности этих свойств в процессе работы; незначительность или полное отсутствие помех.

2. Принцип компенсации (управления по возмущению). Предложен Понселе (1829 г.). Принимаются меры к изучению или вычислению возмущающего воздействия ξ . Регулятор P_2 компенсирует помехи. Качество работы этой системы выше качества системы работающей по принципу 1. Главный недостаток этого принципа - необходимость измерения или априорного задания возмущения (например, его математической модели).

3. Принцип замкнутого управления (управления с обратной связью, управления по отклонению). Предложен Чикалевым (1874 г.) Этот принцип является наиболее общим, но и наиболее дорогим.

Если задача заключается в управлении объектом при наличии возмущающих воздействий, неточности задания математической модели объекта, погрешности измерений и повышенных требованиях к точности, то принцип применяется управления по отклонению.

Методов исследования САУ много и имеется следующая их классификация, учитывающая способы математического описания.



По виду уравнений САУ.

По характеру передачи сигнала.

По характеру процессов в системе.

По критерию качества.

Тема 2. Математическое моделирование процессов в автоматических системах. Обыкновенные дифференциальные уравнения.

Динамические системы разнообразны по своему назначению, принципу действия и конструктивному исполнению.

Первым примером САУ является регулятор Ползунова-Уатта (1764-65 г.г.), предназначенный для автоматического регулирования-поддержания давления в паровом котле.

Задача сводится к поддержанию постоянной скорости вращения.

С принципами работы этого регулятора связана работа И.А. Вышнеградского “Регуляторы парового действия” (1876 г.), основными тезисами которой являются:

1. Увеличение массы шаров вредно влияет на устойчивость.
2. Уменьшение трения вредно влияет на устойчивость.
3. Уменьшение момента нагрузки маховика вредно влияет на устойчивость.
4. Уменьшение неравномерности хода вредно влияет на устойчивость.

Развитие техники: повышение мощности машин, совершенствование обработки металла, увеличения рабочей скорости, стремление уменьшить неравномерность хода, - приводило к ухудшению работы парового регулятора. Вышнеградский в своей работе объяснил, почему улучшение параметров машины ухудшает её работу. Инженерам в то время это было совершенно неясно и никак не укладывалось в стандартные схемы.

В 1892 г. А.М. Ляпунов написал работу “Общие задачи об устойчивости движения”, в которой обосновал общий подход к исследованию устойчивости движения, из этого результаты Вышнеградского вытекали, как частный случай

Поведение систем может описываться обыкновенными дифференциальными уравнениями, дифференциальными уравнениями в частных производных, уравнениями в прямых или обратных разностях и т.д.

Рассмотрим методику составления уравнений непрерывных динамических систем с сосредоточенными параметрами, динамика которых описывается *обыкновенными дифференциальными уравнениями*.

Модели непрерывных систем с сосредоточенными параметрами. Большинство динамических систем – это совокупность взаимодействующих между собой подсистем (фрагментов) и отдельных элементов, определенным образом соединенных друг с другом. Начальным этапом при составлении дифференциальных уравнений является *разделение (декомпозиция) системы* на отдельные элементы и составление их дифференциальных уравнений.

Математические модели элементов системы в виде дифференциальных уравнений и уравнений связей между ними описывают процессы в динамической системе, т.е. изменение во времени всех ее физических координат. Зная уравнения элементов и уравнения связей динамической системы, можно построить ее структурную схему.

Структурная схема динамической системы отражает геометрию системы и характеризует как состав ее элементов, так и связи между ними. На структурной схеме системы указывают пути и направления передачи информации (сигналов).

Состояние системы, а также входящих в нее элементов описывается определенным числом независимых координат, часть которых доступна измерению: например, для электрических систем – это ток, напряжение, мощность; для механических систем – угол поворота, перемещение, скорость и т.д.

Для описания взаимодействия системы с внешней средой, а также подсистемы с другими подсистемами на входе и выходе выбирают соответствующие векторные координаты (входные и выходные). Будем пока полагать, что координаты, или переменные динамической системы – скалярные функции времени, пусть входная величина $g(t)$, а выходная $z(t)$.

При составлении математического описания динамической системы основной задачей является получение дифференциальных уравнений ее отдельных элементов. Рассмотрим общий вид произвольного элемента динамической системы, на входе которого подается два типа внешних

воздействий, один из которых будем называть задающим воздействием $g(t)$, а другой – возмущающим $\varphi(t)$.

Составление уравнений отдельных элементов системы опирается на те физические законы, которые характеризуют их природу и поведение.

Для технических систем – это законы механики, электротехники, гидравлики, теплотехники и т.п. Уравнения динамики каждого элемента и всей системы в целом являются дифференциальными, при составлении которых стремятся, с одной стороны, наиболее точно, полно и подробно описать поведение, а с другой, учитывая сложность таких уравнений, – найти компромисс между усложнением дифференциальных уравнений и упрощением исследования свойств системы при решении этих уравнений.

Если в динамической системе возникает *установившийся режим (стабилизация)*, то это ее состояние характеризуется зависимостью значений выходной величины от входной в виде так называемой *статической характеристики*.

Эти характеристики могут быть получены из дифференциальных уравнений при $t \rightarrow \infty$. Для примера рассмотрим дифференциальное уравнение элемента системы (см. рис. 1.1), динамику которого опишем выражением

$$F\left(\frac{d^2 z(t)}{dt^2}, \frac{dz(t)}{dt}, z(t), g(t)\right) = \phi\left(\frac{d\varphi(t)}{dt}, \varphi(t)\right), \quad (1.1)$$

где $F(\cdot)$, $\phi(\cdot)$ – некоторые функции переменных $g(t)$, $z(t)$ и $\varphi(t)$, а также производных от $z(t)$ и $\varphi(t)$. В этом случае статическая характеристика (здесь в неявном виде) будет описываться уравнением

$$F(0, 0, z_0, g_0) = \phi(0, \varphi_0), \quad (1.2)$$

где $z_0, g_0, \varphi_0 = const$.

Если функции $F(\cdot)$, $\phi(\cdot)$ нелинейные, в частном случае – линейные, то и элемент (1.1) соответственно – *нелинейный* или *линейный*. Из-за нелинейности большинства статических характеристик уравнения динамических систем являются нелинейными.

Упрощение анализа динамической системы чаще всего состоит в приближенной замене нелинейных дифференциальных уравнений на линейные уравнения, решения которых с достаточной степенью точности совпадают с решениями нелинейных уравнений. Такая *линеаризация* нелинейного уравнения производится относительно некоторого установившегося состояния.

Если нелинейность элемента системы вызвана его статической характеристикой, пусть для примера $z = \psi(g)$, то линеаризация характеристики сводится к ее замене на линейную функцию $z = ag + b$. Аналитически такая замена осуществляется за счет разложения в ряд Тейлора функции $z = \psi(g)$ в окрестности *стационарной точки*, соответствующей установившемуся состоянию при отбрасывании всех членов ряда, содержащих отклонения входной величины Δg в степени выше первой. Геометрически это означает замену кривой $z = \psi(g)$ касательной, проведенной к кривой в стационарной точке (z_0, g_0) , как это показано на рис. 1.2, т.е. в точке установившегося режима.

В других случаях линеаризацию можно осуществить путем проведения секущей, мало отличающейся от функции $z = \psi(g)$ в заданном диапазоне изменения входной величины.

Тема 3. Способы линеаризации. Линейные дифференциальные уравнения.

Передаточные функции.

Такие нелинейные характеристики, т.е. линеаризуемые в любой стационарной точке с требуемым диапазоном изменения входной величины в ее окрестности, называют *несущественными* нелинейностями; наряду с ними имеются нелинейные статические характеристики, которые такой линеаризации не поддаются – *существенные нелинейности*. Например к существенным нелинейностям относятся: а) – элемент с зоной нечувствительности; б) – релейный элемент с гистерезисом; в) – элемент с люфтом.

С помощью разложения в ряд Тейлора выполним линеаризацию для уравнений (1.1) и (1.2). Введем в рассмотрение отклонения входной и выходной переменных от установившегося состоя-

ния:

$$\begin{aligned} \Delta g(t) &= g(t) - g_0, \quad \Delta z(t) = z(t) - z_0, \\ \frac{d\Delta z(t)}{dt} &= \frac{dz(t)}{dt} = z'(t), \quad \frac{d^2\Delta z(t)}{dt^2} = \frac{d^2z(t)}{dt^2} = z''(t). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Разложим левую часть выражения (1.1) в ряд Тейлора относительно состояния $(0, 0, z_0, g_0)$:

$$\begin{aligned} F\left(\frac{d^2z(t)}{dt^2}, \frac{dz(t)}{dt}, z(t), g(t)\right) &= F(0, 0, z_0, g_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial g}\right)_0 \Delta g(t) + \\ &+ \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0 \Delta z(t) + \left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)_0 \Delta z'(t) + \left(\frac{\partial F}{\partial z''}\right)_0 \Delta z''(t) + \text{ВЧР}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где аббревиатура ВЧР (*высшие члены разложения*) обозначает слагаемые, содержащие отклонения $\Delta z(t)$, $\Delta g(t)$ и производные от $\Delta z(t)$ в степени выше первой. Частные производные в правой части уравнения (1.4) являются постоянными величинами, значения которых зависят от вида функций $F(z''(t), z'(t), z(t), g(t))$ и координат стационарной точки (z_0, g_0) . Вычитая из уравнения (1.1) уравнение (1.2), с учетом равенства (1.4), можно записать следующее соотношение:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial F}{\partial g}\right)_0 \Delta g(t) + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0 \Delta z(t) + \left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)_0 \Delta z'(t) + \left(\frac{\partial F}{\partial z''}\right)_0 \Delta z''(t) + \\ + \text{ВЧР} = \phi\left(\frac{d\varphi(t)}{dt}, \varphi(t)\right) - \phi(0, \varphi_0). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Предполагая, что отклонения (1.3) малы по величине, а функция $F(z''(t), z'(t), z(t), g(t))$ в окрестности стационарной точки достаточно гладкая по всем аргументам, и отбрасывая в левой части уравнения (1.5) слагаемые ВЧР в силу их малости, получим уравнение вида

$$\left(\frac{\partial F}{\partial g}\right)_0 \Delta g(t) + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0 \Delta z(t) + \left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)_0 \Delta z'(t) + \left(\frac{\partial F}{\partial z''}\right)_0 \Delta z''(t) = \phi\left(\frac{d\varphi(t)}{dt}, \varphi(t)\right) - \phi(0, \varphi_0). \quad (1.6)$$

Таким образом, уравнение (1.6) – это *линейная модель* нелинейного уравнения (1.1), записанная в малых отклонениях относительно заданного установившегося состояния динамической системы.

В стандартной *первой форме записи* принято дифференциальное уравнение элемента системы представлять так, чтобы выходная координата и все ее производные находились в левой части уравнения (причем сама выходная переменная входила бы в уравнение с коэффициентом, равным единице), а все входные переменные располагались в правой части уравнения. В соответствии с этим правилом уравнение (1.6) можно привести к виду:

$$T_1 \frac{d^2x(t)}{dt^2} + T_2 \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = Ku(t) + f(t). \quad (1.9)$$

Вторая форма записи уравнений на основе $W(s)$. *Передаточной функцией* $W(s)$ называется отношение изображения выхода $x(s)$ к изображению входа $u(s)$:

$$W(s) = \frac{x(s)}{u(s)} \quad (1.20)$$

при нулевых начальных условиях.

Применение L -преобразования, в частности к уравнению (1.10), позволяет записать соотношение

$$T_1 s^2 x(s) + T_2 s x(s) + x(s) = Ku(s),$$

преобразование которого согласно определению $W(s)$ дает следующий результат:

$$x(s) = W(s)u(s), \quad W(s) = \frac{K}{T_1 s^2 + T_2 s + 1}. \quad (1.21)$$

Если динамическая система подвержена действию нескольких входных сигналов – см. например, (1.9), то вторую форму записи такого уравнения можно представить в виде

$$x(s) = \frac{K}{T_1 s^2 + T_2 s + 1} u(s) + \frac{1}{T_1 s^2 + T_2 s + 1} f(s). \quad (1.22)$$

Понятие передаточной функции динамической системы весьма удобно при анализе так называемых *структурных схем*.

В тех случаях, когда существует возможность вычисления значений полюсов $W(s)$ или корней знаменателя передаточной функции, называемого *характеристическим уравнением*, можно с помощью данных табл. 1.2 найти явный вид искомой функции. Действительно, пусть в динамической системе, описываемой уравнением (1.21), входной сигнал – единичная функция, т.е. $u(t) = 1(t)$ (изображение которой имеет вид $u(s) = 1/s$: см. данные табл. 1.1 в первой строке). Поскольку для передаточной функции (1.21) из равенства $T_1 s^2 + T_2 s + 1 = 0$ следует, что

$$s_{1,2} = \frac{-T_2 \pm \sqrt{T_2^2 - 4T_1}}{2T_1}, \quad (1.23)$$

то, переписав сомножитель $W(s)u(s)$ эквивалентным образом, находим явный вид изображения выходного сигнала

$$x(s) = W(s)u(s) = \frac{K/T_1}{s(s-s_1)(s-s_2)}.$$

Тогда искомый оригинал, согласно данным табл. 1.2 (пятая строка), соответствующий изображению $x(s)$, будет описываться равенством

$$x(t) = \frac{K}{T_1} \left(\frac{1}{s_1(s_1-s_2)} e^{s_1 t} + \frac{1}{s_2(s_2-s_1)} e^{s_2 t} + \frac{1}{s_1 s_2} \right), \quad (1.24)$$

где вещественные или комплексные числа s_1 и s_2 , вычисляются по формулам (1.23). Кроме того, учитывая значения $s_1 - s_2 = -\frac{T_2}{T_1}$, $s_1 s_2 = \frac{1}{T_1}$,

равенство (1.24) можно представить и следующим образом:

$$x(t) = K \left(-\frac{1}{T_2 s_1} e^{s_1 t} + \frac{1}{T_2 s_2} e^{s_2 t} + 1 \right). \quad (1.25)$$

Тема 4. Импульсная переходная функция. Переходная характеристика. Переходная матрица. Частотные характеристики.

Как уже отмечалось, для анализа динамических систем их разбивают на отдельные элементы. Классификация динамических элементов обычно осуществляется по виду дифференциального уравнения. В элементах *позиционного (статического)* типа линейной зависимостью $x(t) = Ku(t)$ связаны выходная и входная координаты в установившемся режиме. В элементах *интегрирующего* типа, при $t \rightarrow \infty$ выходная и входная переменные связаны линейным уравнением

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ku(t), \text{ или } x(t) = K \int_0^t u(q) dq.$$

В элементах *дифференцирующего* типа аналогичная линейная связь имеет вид

$$x(t) = K \frac{du(t)}{dt}.$$

Динамические свойства элемента могут быть определены по его *переходной функции* и *функции веса*.

Переходная функция $h(t)$ (*переходная характеристика*) представляет собой временной отклик или реакцию выхода элемента, при подаче на его вход *единичного сигнала*

$$u(t) = 1(t) = \begin{cases} 1, & \forall t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad (1.26)$$

который часто называют *единичной ступенью*, или *единичным скачком*. Предполагается, что единица имеет размерность физической величины на входе элемента.

Функция $1(t)$ – весьма распространенный вид входного воздействия в динамических системах. К такому виду сводятся мгновенное изменение нагрузки электрического генератора, мгновенное возрастание момента нагрузки на валу двигателя, мгновенный поворот руля управления движущегося автомобиля и т.д.

Функция веса $\omega(t)$ (*импульсная переходная характеристика*) является временной реакцией выхода элемента при подаче на его вход *единичного импульсного сигнала*

$$u(t) = \delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0, \\ 0, & t \neq 0. \end{cases} \quad (1.27)$$

Основное свойство дельта-функции $\delta(t)$ состоит в том, что она имеет единичную площадь:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1,$$

Характеристика $\omega(t)$ в динамических системах является распространенным видом входного воздействия. К такому виду можно отнести, например, кратковременный удар нагрузки на валу двигателя, кратковременный ток короткого замыкания генератора (отключаемый плавкими предохранителями) и т.п.

Можно показать, что между функциями $h(t)$ и $\omega(t)$ существует связь вида

$$\omega(t) = \frac{dh(t)}{dt}.$$

Кроме того, передаточная функция связана с переходным процессом и импульсной переходной функцией элемента – прямым интегральным преобразованием Лапласа

$$W(s) = \int_0^{\infty} \omega(t) e^{-st} dt = s \int_0^{\infty} h(t) e^{-st} dt. \quad (1.28)$$

Динамические свойства элемента в частотной области определяются его *частотной передаточной функцией* $W(j\omega)$, получаемой из функции $W(s)$ путем замены s на $j\omega$, где $j^2 = -1$, $\omega \in R$, $-\infty \leq \omega \leq +\infty$. Часто $W(j\omega)$ называют *амплитудно-фазовой частотной характеристикой*, или *комплексным коэффициентом усиления*.

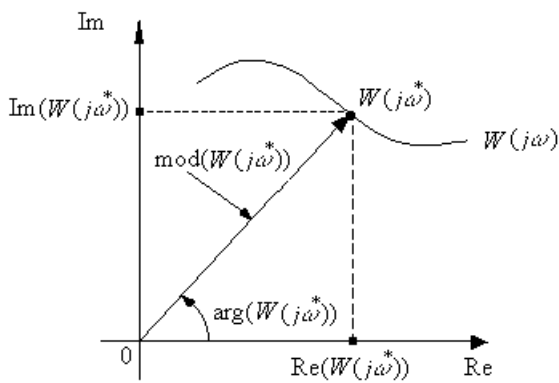


Рис. Комплексная плоскость $W(j\omega)$.

В комплексной плоскости график векторной функции $W(j\omega)$ – это *годограф* (геометрическое место конца вектора). Для пар характеристик $(U(\omega), V(\omega))$ и $(A(\omega), \varphi(\omega))$ в любой фиксированной точке $\omega = \omega^*$ (рис. 1.9) справедливы следующие формулы:

$$A(\omega^*) = \sqrt{U^2(\omega^*) + V^2(\omega^*)}, \quad \varphi(\omega^*) = \arctg \frac{V(\omega^*)}{U(\omega^*)}, \quad (1.30)$$

$$U(\omega^*) = A(\omega^*) \cos \varphi(\omega^*), \quad V(\omega^*) = A(\omega^*) \sin \varphi(\omega^*).$$

Поскольку в комплексной плоскости геометрический образ функции $W(j\omega)$ см. рис., может описываться как в прямоугольных, так и в полярных координатах, то частотную передаточную функцию будем рассматривать в виде

$$W(j\omega) = \text{Re}(W(j\omega)) + j \text{Im}(W(j\omega)) = \text{mod}(W(j\omega)) e^{j \arg(W(j\omega))}, \quad (1.29)$$

где введены обозначения: $\text{Re}(W(j\omega)) = U(\omega)$ – *вещественная частотная характеристика*; $\text{Im}(W(j\omega)) = V(\omega)$ – *мнимая частотная характеристика*; $\text{mod}(W(j\omega)) = A(\omega)$ – *амплитудная частотная характеристика*; $\arg(W(j\omega)) = \varphi(\omega)$ – *фазовая частотная характеристика*.

Поскольку передаточная функция $W(s)$ любой системы является дробно-рациональной функцией вида

$$W(s) = \frac{R(s)}{Q(s)} = \frac{r_0 s^m + r_1 s^{m-1} + \dots + r_{m-1} s + r_m}{q_0 s^n + q_1 s^{n-1} + \dots + q_{n-1} s + q_n}, \quad (1.31)$$

то в частотной области для нее справедливы, во-первых, соотношения (в прямоугольных координатах):

$$W(j\omega) = \frac{U_R(\omega) + jV_R(\omega)}{U_Q(\omega) + jV_Q(\omega)} = U(\omega) + jV(\omega), \quad U(\omega) = \frac{U_R(\omega)U_Q(\omega) + V_R(\omega)V_Q(\omega)}{U_Q^2(\omega) + V_Q^2(\omega)},$$

$$V(\omega) = \frac{U_R(\omega)V_Q(\omega) - V_R(\omega)U_Q(\omega)}{U_Q^2(\omega) + V_Q^2(\omega)}, \quad U_R(\omega) = \operatorname{Re}(R(j\omega)), \quad (1.32)$$

$$V_R(\omega) = \operatorname{Im}(R(j\omega)), \quad U_Q(\omega) = \operatorname{Re}(Q(j\omega)), \quad V_Q(\omega) = \operatorname{Im}(Q(j\omega));$$

во-вторых, выражения (в полярных координатах):

$$W(j\omega) = \frac{A_R(\omega)e^{j\varphi_R(\omega)}}{A_Q(\omega)e^{j\varphi_Q(\omega)}} = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}, \quad A(\omega) = \frac{A_R(\omega)}{A_Q(\omega)}, \quad \varphi(\omega) = \varphi_R(\omega) - \varphi_Q(\omega), \quad (1.33)$$

$$A_R(\omega) = \operatorname{mod}(R(j\omega)), \quad \varphi_R(\omega) = \operatorname{arg}(R(j\omega)), \quad A_Q(\omega) = \operatorname{mod}(Q(j\omega)), \quad \varphi_Q(\omega) = \operatorname{arg}(Q(j\omega)).$$

Тема 5. Типовые динамические звенья. Группа позиционных звеньев.
Группа интегрирующих звеньев.

В группу позиционных звеньев обычно включаются безынерционное, инерционные 1-го и 2-го порядков, колебательное. Все эти звенья в установившемся режиме описываются одинаковым уравнением вида

$$x(t) = ku(t), \quad k = \operatorname{const}. \quad (4.1)$$

Безынерционное звено. Это звено часто называют статическим, усилительным, масштабным, пропорциональным и описывают уравнением вида (4.1). Примеры безынерционного звена: а) редуктор; б) делитель напряжения; в) электронный усилитель.

Согласно уравнению (4.1) передаточная функция имеет вид $W(s) = k$. Переходной процесс описывается уравнением $h(t) = k1(t)$, а импульсная переходная характеристика уравнением вида $\omega(t) = k\delta(t)$. Частотная передаточная функция описывается уравнением $W(j\omega) = k$, годограф которой имеет вид точки на комплексной плоскости. Представив частотную передаточную функцию вида как комплексное выражение, представленное соответственно в полярных и прямоугольных координатах, получим следующие частотные характеристики: амплитудную $\operatorname{mod}(W(j\omega)) = A(\omega) = k$; фазовую $\operatorname{arg}(W(j\omega)) = \varphi(\omega) = 0$; вещественную $\operatorname{Re}(W(j\omega)) = U(\omega) = k$; мнимую $\operatorname{Im}(W(j\omega)) = V(\omega) = 0$.

Инерционное звено 1-го порядка. Звено также называют аperiodическим 1-го порядка и описывают уравнением вида $T \frac{dx}{dt} + x = ku$, $T [c], k = \operatorname{const} > 0$. Примеры инерционного звена: а) резервуар с газом (ресивер); б) электрический двигатель; в) RC – цепочка; г) тепловой объект; д) резервуар с жидкостью. Передаточная функция звена имеет вид $W(s) = \frac{k}{Ts + 1}$. Уравнение связи вход-

выход, согласно (4.12), будет следующим: $x(s) = \frac{k/T}{s - s_1} u(s)$, а переходной процесс определится со-

отношением $h(t) = L^{-1} \left[\frac{k/T}{s(s - s_1)} \right] = k(1 - e^{-\frac{t}{T}})$, из которого следует уравнение импульсной переход-

ной характеристики $\omega(t) = \frac{dh(t)}{dt} = \frac{k}{T} e^{-\frac{t}{T}}$. Частотная передаточная функция инерционного звена 1-го порядка имеет вид $W(j\omega) = \frac{k}{1 + j\omega T}$.

Частотную передаточную функцию (4.16) можно описать в полярных координатах $A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}$, $\varphi(\omega) = -\arctg \omega T$, и в прямоугольных, используя соотношения вида

$U(\omega) = \frac{k}{1 + \omega^2 T^2}$, $V(\omega) = \frac{-\omega k T}{1 + \omega^2 T^2}$. Инерционное звено 2-го порядка описывается уравнением

$T_1^2 \frac{d^2 x}{dt^2} + T_2 \frac{dx}{dt} + x = ku$, $T_2^2 > 4T_1^2$, где положительные числа k – коэффициент передачи; T_1^2 , T_2 –

постоянные времени, которому соответствует следующая передаточная функция : $W(s) = \frac{k}{T_1^2 s^2 + T_2 s + 1}$. Для колебательного звена имеют место те же математические модели, но при

выполнении параметрического условия вида $T_2^2 < 4T_1^2$.

Группа интегрирующих звеньев. К этой группе звеньев обычно относят интегрирующее звено и интегрирующее звено с замедлением. Эти звенья в установившемся режиме описываются одним и тем же уравнением $x(t) = k \int_0^t u(t) dt$, $k = const$.

Интегрирующее звено.

Звено иногда называют идеально интегрирующим, тем самым подчеркивая, что для любого момента времени его математической моделью является уравнение (4.43), которое можно переписать и в дифференциальной форме $\frac{dx}{dt} = ku$ или $T \frac{dx}{dt} = u$, где $T = \frac{1}{k}$ (с). Примеры физической

реализации интегрирующего звена: а) интегратор на операционном усилителе; б) гидравлический демпфер, динамика которого (без учета инерции) описывается соотношением $v = \frac{dx}{dt} = \frac{p}{K_s}$, где K_s

– коэффициент скоростного сопротивления. Передаточная функция интегрирующего звена имеет вид $W(s) = \frac{1}{Ts} = \frac{k}{s}$, а переходной процесс и импульсная переходная характеристики описываются

соотношениями $h(t) = L^{-1} \left[\frac{k}{s^2} \right] = kt$, $\omega(t) = \frac{dh(t)}{dt} = k$. Частотная передаточная функция и частотные

характеристики имеют вид: $W(j\omega) = \frac{1}{j\omega T}$, $A(\omega) = \frac{1}{\omega T}$, $\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}$, $U(\omega) = 0$, $V(\omega) = -\frac{1}{\omega T}$.

Интегрирующее звено с замедлением.

Звено описывается уравнением $T \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = ku$,

где k (с⁻¹) – коэффициент передачи; T (с) – постоянная времени. Примером интегрирующего звена с замедлением может служить двигатель постоянного тока (см. рис. 4.5) с математическим описанием (4.11), (4.12), т.е. без учета электромагнитной реакции якорной цепи, но в случае когда выходной величиной является не скорость, а угол поворота вала электродвигателя.

Передаточная функция определяется соотношениями

$$W(s) = \frac{k}{s(Ts + 1)},$$

что соответствует:

$$h(t) = L^{-1} \left[\frac{k}{s^2(Ts+1)} \right] = k \left[t - T(1 - e^{-\frac{t}{T}}) \right], \text{ и } \omega(t) = k(1 - e^{-\frac{t}{T}}).$$

Частотные характеристики описываются уравнениями

$$W(j\omega) = \frac{k}{j\omega(1+j\omega T)},$$

$$A(\omega) = \frac{k}{\omega(1+\omega^2 T^2)}, \quad \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \text{arctg} \omega T,$$

$$U(\omega) = \frac{-kT}{1+\omega^2 T^2}, \quad V(\omega) = \frac{-k}{\omega(1+\omega^2 T^2)}.$$

Тема 6. Группа дифференцирующих звеньев. Звено с запаздыванием.
 Модели систем в пространстве переменных состояния.

Группа дифференцирующих звеньев. В состав этой группы звеньев обычно входят идеальное дифференцирующее и реально дифференцирующее звенья, описываемые в установившемся режиме уравнением

$$x(t) = k \frac{du(t)}{dt}, \quad k = \text{const}, \quad k \text{ (с)}.$$

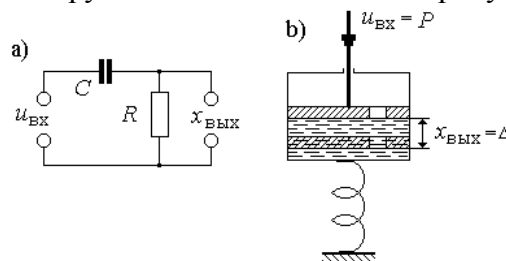
Этим же уравнением описывается идеальное дифференцирующее звено, которому соответствует передаточная функция

$W(s) = ks$. Переходной процесс в идеальном дифференцирующем звене описывается уравнением

$h(t) = k\delta(t)$. Частотные характеристики описываются выражениями: $W(j\omega) = j\omega k$, $A(\omega) = \omega k$,

$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2}$, $U(\omega) = 0$, $V(\omega) = \omega k$.

Реальное дифференцирующее звено показано на рисунке.



Это звено описывается уравнением $T \frac{dx}{dt} + x = k \frac{du}{dt}$, где постоянная времени T и коэффициент передачи k имеют размерность в секундах. Примеры: а) RC -цепочка; б) гидравлический демпфер с пружиной.

Передаточная функция этого звена имеет вид $W(s) = \frac{ks}{Ts+1}$, согласно которому определив корень характеристического можно записать уравнения переходного процесса и импульсной переходной характеристики следующим образом:

$$h(t) = L^{-1} \left[\frac{sk/T}{s(s-s_1)} \right] = L^{-1} \left[\frac{k/T}{s-s_1} \right] = \frac{k}{T} e^{-\frac{t}{T}},$$

$\omega(t) = -\frac{k}{T^2} e^{-\frac{t}{T}}$. Частотная передаточная функция и частотные характеристики реального дифференцирующего звена, имеют следующее математическое описание:

$$W(j\omega) = \frac{j\omega k}{1+j\omega T},$$

$$A(\omega) = \frac{\omega k}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}, \quad \varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \omega T,$$

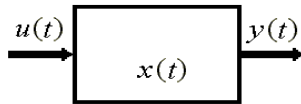
$$U(\omega) = \frac{\omega^2 k T}{1 + \omega^2 T^2}, \quad V(\omega) = \frac{\omega k}{1 + \omega^2 T^2}.$$

Звено с чистым или транспортным запаздыванием описывается уравнением $x(t) = u(t - \tau)$,

где $\tau = \operatorname{const} > 0$ – временное запаздывание.

Передаточная функция звена имеет вид $W(s) = \exp(-s\tau)$, в соответствии с которым амплитудно-фазовая частотная характеристика будет следующей:

$$W(j\omega) = \exp(-j\omega\tau).$$



Пространство состояний. Множество $X = \{x\}$ возможных значений состояния системы называется *пространством состояний*. В случае $X = R^n$ состояние $x = x(t)$ есть n -мерный вещественный вектор – *вектор состояния* (в частном случае – это *фазовый вектор*), элементы которого будем обозначать через $x_i(t)$, $i = \overline{1, n}$.

Вектор, составленный из указанных элементов, обычно записывают следующим образом: $x = x(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T$, где T – символ транспонирования. Если x – состояние системы, $\mu(\cdot)$ – некоторое взаимно однозначное отображение пространства X в себя ($\mu: X \rightarrow X$), то $\bar{x} = \mu(x)$ также можно считать состоянием данной системы. Тогда состояние x можно определить различным, но взаимно однозначным образом. Например, если $X = R^n$, а T – n -мерная невырожденная матрица ($\det T \neq 0$), то вектор $\bar{x} = Tx$ также можно применять для описания состояния системы, поскольку $x = T^{-1}\bar{x}$, где T^{-1} – обратная матрица.

Описание динамической системы в нормальной форме. Уравнения состояния так называемых *конечномерных дифференциальных (непрерывных) систем* можно представить в виде

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t), t), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \geq t_0,$$

$$y(t) = g(x(t), u(t), t),$$

где $f(\cdot)$, $g(\cdot)$ – вектор-функции от векторных аргументов. Первое уравнение называют *уравнением состояния* или *эволюционным уравнением*, описывающим изменение состояния системы во времени $t \in R$, в соответствии с начальным условием $x(t_0)$ и входным воздействием $u(t)$, а второе – уравнением выхода, устанавливающим статическую связь между значениями выхода и текущими значениями состояния и входа.

Уравнения линейных систем в пространстве состояний. Метод пространства состояний в качестве базовой математической модели системы (2.2), (2.3), когда функции $f(\cdot)$, $g(\cdot)$ линейны по x , u , предполагает использование уравнений вида

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \geq t_0,$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t),$$

где $x(t) \in R^n$; $u(t) \in R^m$; $y(t) \in R^k$; матрицы-функции $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $D(t)$ соответствующего размера. Матрицы, входящие в эти уравнения обычно называют: $A(t)$ – матрицей состояния системы, $B(t)$ – матрицей управления, $C(t)$ – матрицей выхода, $D(t)$ – матрицей обхода системы. Эти системы часто называют *нормальными системами*, или *системами в нормальной форме Коши* следующего вида:

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \geq t_0,$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad D = 0.$$

В тех случаях, когда в системе (переменные состояний совпадают с фазовыми, оказывается, что матрица A имеет специфическую форму записи – *форму Фробениуса*. Иногда матрицу

Фробениуса называют *матрицей сопровождения*.

Наиболее распространенными приемами построения моделей динамических систем в переменных состояниях являются приемы, основанные на *способах прямого, параллельного или последовательного программирования*.

Тема 7. Типовые соединения и передаточные функции систем. Устойчивость САУ.

Передаточные функции нормальных систем. Рассмотрим модель нормальной системы, записанную в пространстве состояний $\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t)$, $y(t) = Cx(t) + Du(t)$, где $x(t) \in R^n$; $u(t) \in R^m$; $y(t) \in R^l$. Перепишем уравнения системы в изображениях с помощью векторно-матричной передаточной функции системы. С этой целью выполним преобразование Лапласа и определим изображение вектора состояний $x(s)$ в виде

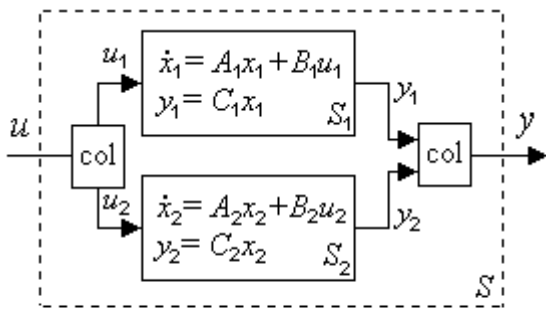
$$x(s) = (sE - A)^{-1} Bu(s) = \frac{(sE - A)^+}{\det(sE - A)} Bu(s),$$

где $(sE - A)^{-1}$ – обратная матрица; $\det(sE - A)$ – детерминант матрицы; $(sE - A)^+$ – присоединенная матрица к матрице $(sE - A)$; E – единичная матрица соответствующего размера, в данном случае ($n \times n$). Если соотношение записать в изображениях, то получим равенство

$$y(s) = (C(sE - A)^{-1} B + D) u(s) = W(s)u(s),$$

где $W(s)$ – передаточная функция в виде матричного множителя, связывающего изображение по Лапласу выхода $y(s)$ и входа $u(s)$ при нулевом начальном состоянии $x(0)$. В строго реализуемых системах функция $W(s)$ имеет более простой вид $W(s) = C(sE - A)^{-1} B$. Размер матрицы $W(s)$ определяется выходом $y(s)$ и входом $u(s)$, в рассматриваемом случае ($l \times m$).

Уравнения состояний при типовом соединении систем. В ряде прикладных задач возникает необходимость в получении математического описания системы в пространстве состояний, состоящей из элементов (подсистем), соединенных между собой типовым образом – параллельно, последовательно или с помощью обратной связи. Иногда требуется иметь единое уравнение в качестве математической модели некоторой объединенной системы, т.е. описание нескольких независимых систем.



Модель объединения независимых систем.

Объединение независимых систем. Рассмотрим простой случай, когда некоторая объединенная система S состоит из независимых систем S_i , $i=1, 2$, описываемых уравнениями

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = A_i x_i(t) + B_i u_i(t), \quad y_i(t) = C_i x_i(t),$$

где матрицы A_i , B_i , C_i имеют соответственно размеры $(n_i \times n_i)$, $(n_i \times m_i)$, $(l_i \times m_i)$.

Введем в рассмотрение составные (обобщенные) векторы: для переменных состояния системы $x(t) = \text{col}\{x_1(t), x_2(t)\} \in R^{n_1+n_2}$, для переменных входа $u(t) = \text{col}\{u_1(t), u_2(t)\} \in R^{m_1+m_2}$, переменных выхода $y(t) = \text{col}\{y_1(t), y_2(t)\} \in R^{l_1+l_2}$. Графический образ объединения систем S_i в одну показан на рисунке, математическое описание которого представляет собой систему уравнений

$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t)$, $y(t) = Cx(t)$, где блочные матрицы A , B , C имеют

структуру: $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix}$. Параллельное соединение систем (подсистем).

Принципиальное отличие параллельного соединения двух подсистем от объединения двух независимых систем состоит в том, что при параллельном соединении вход $u(t) = u_1(t) = u_2(t)$ по-

ступает на обе подсистемы одновременно, а выход этого соединения образуется как сумма $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$.

Устойчивость систем. Асимптотические свойства собственного движения и весовой матрицы линейной системы пусть нелинейное дифференциальное уравнение состояния имеет вид $\dot{\bar{x}}(t) = F\{\bar{x}(t), \bar{u}(t), t\}$. Пусть также $\bar{u}_0(t)$ – некоторая заданная (номинальная) функция времени и $\bar{x}_0(t_0)$ – некоторый номинальный вектор начальных условий. Решение $\bar{x}_0(t)$ является устойчивым в смысле Ляпунова, если для любого t_0 и для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ такое, что при

$\|\bar{x}(t_0) - \bar{x}_0(t_0)\| \leq \delta$, удовлетворяется неравенство $\|\bar{x}(t) - \bar{x}_0(t)\| \leq \varepsilon$. Норма вектора \bar{x} в простейшем случае совпадает с его евклидовой длиной

$\|\bar{x}\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}$. Введение нормы в пространстве состояний дает возможность ввести понятие близости точек пространства. Устойчивость в смысле Ляпунова гарантирует, что состояние $\bar{x}(t)$ не отклоняется далеко от «номинального» режима $\bar{x}_0(t)$ при начальном состоянии $\bar{x}(t_0)$, достаточно близком к номинальному начальному состоянию $\bar{x}_0(t_0)$. Решение $\bar{x}_0(t)$ называется асимптотически устойчивым, если оно устойчиво в смысле Ляпунова, и для любого t_0 существует такое $\rho(t_0)$, что при $\|\bar{x}(t_0) - \bar{x}_0(t_0)\| \leq \rho$, выполняется условие $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\bar{x}(t) - \bar{x}_0(t)\| = 0$. Решение $\bar{x}_0(t)$ является асимптотически устойчивым в целом, если оно устойчиво по Ляпунову, и для любых t_0 и $\bar{x}(t_0)$ $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\bar{x}(t) - \bar{x}_0(t)\| = 0$. Применительно к нелинейным системам, вследствие сложности характерных для них явлений, обсуждается обычно устойчивость решений. В линейных системах ситуация проще, и в этом случае целесообразнее говорить об устойчивости уже не решения, а самой системы. Пусть дано уравнение системы $\dot{\bar{x}}_C(t) = A(t)\bar{x}_C(t) + B(t)\bar{u}(t)$, и для t_0 , $\bar{x}_{C0}(t_0)$ и $\bar{u}_0(t)$, при $t \geq t_0$ известно $\bar{x}_{C0}(t)$, то есть справедливо уравнение $\bar{x}_{C0}(t) = A(t)\bar{x}_{C0}(t) + B(t)\bar{u}_0(t)$. Естественно, что при других начальных условиях $\bar{x}_{C1}(t_0)$ решение $\bar{x}_{C1}(t)$ будет другим $\bar{x}_{C1}(t) = A(t)\bar{x}_{C1}(t) + B(t)\bar{u}_0(t)$, которое можно привести к виду $\bar{x}(t) = A(t)\bar{x}(t)$, при $t = t_0$ $\bar{x} = \bar{x}(t_0)$. Таким образом, понятие устойчивости решения можно свести к понятию устойчивости линейной системы.

Линейная система устойчива в определенном смысле (по Ляпунову, асимптотически, или асимптотически в целом), если тривиальное решение $\bar{x}_0(t) \equiv 0$ устойчиво в этом смысле.

Линейная система асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда она асимптотически устойчива в целом. Таким образом, исследование вопроса устойчивости решений линейной неавтономной системы сводится к исследованию решения соответствующего однородного дифференциального уравнения, которое определяется матрицей $A(t)$ и имеет вид: $\dot{\bar{x}}(t) = \Phi(t, t_0)\bar{x}(t_0)$;

$$\bar{y} = C(t)\Phi(t, t_0)\bar{x}(t_0).$$

Рассмотрим два возможных случая. 1. $\Phi(t, t_0)$ – ограниченная матрица в интервале $[t_0, \infty)$, то есть существует такое положительное число M , что $|\Phi_{ij}(t, t_0)| \leq M$, $t \geq t_0$; $i, j = \overline{1, n}$. Тогда получаем, что $\|\bar{x}(t)\| \leq n^2 M \max_i |x_i(t_0)|$. 2. Переходная матрица удовлетворяет условию $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t, t_0) = 0$. При этом движение и сама система являются асимптотически устойчивыми.

Тема 8. Управляемость и наблюдаемость САУ.

Управляемость линейных стационарных систем. Непрерывная линейная система $\dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t) + B\bar{u}(t)$ является полностью управляемой тогда и только тогда, когда она может быть

переведена из любого начального состояния $\bar{x}(t_0)$ в произвольный момент времени t_0 в любое конечное состояние $\bar{x}(t_1)$ за конечное время $t_1 - t_0$. Примем начальные условия нулевыми: $\bar{x}(t_0) = 0$. Тогда, в соответствии с формулой Коши

$$\bar{x}(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} B \bar{u}(\tau) d\tau,$$

которое можно записать в виде

$$\bar{x}(t_1) = B \int_{t_0}^{t_1} \bar{u}(\tau) d\tau + AB \int_{t_0}^{t_1} (t_1 - \tau) \bar{u}(\tau) d\tau + A^2 B \int_{t_0}^{t_1} \frac{(t_1 - \tau)^2}{2!} \bar{u}(\tau) d\tau + \dots$$

Можно показать, что вектор $\bar{x}(t_1)$ может рассматриваться как линейная комбинация векторов $\vec{\beta}_{iV}$, являющихся вектор-столбцами матриц B, AB, A^2B, A^3B, \dots . Иначе говоря, конечное состояние $\bar{x}(t_1)$ принадлежит линейному подпространству, порождаемому вектор-столбцами бесконечной последовательностью матриц B, AB, A^2B, A^3B, \dots .

В этой последовательности должна появиться матрица $A^l B$, все вектор-столбцы которой линейно зависят от вектор-столбцов предыдущих матриц $B, AB, A^2B, \dots, A^{l-1}B$. Такая матрица обязательно должна иметь место, так как в линейном n -мерном пространстве не может быть более чем n линейно-независимых векторов. Отсюда же следует, что $l \leq n$. Таким образом, можно записать $A^l B = B\Lambda_0 + AB\Lambda_1 + \dots + A^{l-1}B\Lambda_{l-1}$, где Λ_i - соответствующие диагональные матричные коэффициенты

$$\Lambda_i = \begin{bmatrix} \lambda_{i1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_{i2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{in} \end{bmatrix}.$$

Очевидно, тем же свойством обладает и матрица $A^{l+1}B$, так как $A^{l+1}B = AA^lB = AB\Lambda_0 + A^2B\Lambda_1 + \dots + A^{l-1}B\Lambda_{l-2} + A^lB\Lambda_{l-1}$.

По индукции можно утверждать то же самое и для всех $A^k B$ при $k \geq l$. Итак, конечное состояние $\bar{x}(t_1)$ принадлежит линейному подпространству, порождаемому вектор-столбцами матриц $B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B$ (здесь учтено, что $l \leq n$). Если эти вектор-столбцы не порождают n -мерное пространство, то в такой системе можно достичь лишь тех состояний, которые принадлежат подпространству меньшей размерности.

Таким образом, критерий управляемости формулируется следующим образом:

Система $\dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t) + B\bar{u}(t)$ полностью управляема тогда и только тогда, когда ранг матрицы управляемости

$$U = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B]$$

равен n , то есть полной размерности линейного пространства.

При этом говорят, что пара матриц $\{A, B\}$ полностью управляема.

Наблюдаемость линейных стационарных систем. В ОТУ большую роль играет задача восстановления вектора состояния по результатам наблюдения за входом и выходом объекта. Непрерывная система

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t),$$

называется наблюдаемой, если вектор состояния $x(t_0)$ можно определить, зная $\bar{y}(t)$ на некотором интервале времени $t = [t_0, t_1]$. Если это справедливо для любого t_0 , то система называется полностью наблюдаемой. Рассмотрим задачу наблюдаемости при $\bar{u}(t) = 0$. Тогда $\bar{y}(t) = Ce^{At} \bar{x}(0)$. В развёрнутом виде - это система алгебраических уравнений

$$C_{11}x_1 + C_{12}x_2 + \dots + C_{1n}x_n = y_1(t_1) \dots \dots \dots C_{ny}x_1 + \dots + C_{ny,n}x_n = y_{ny}(t_n),$$

в качестве неизвестных в которой выступают координаты вектора состояния. В связи с тем, что, как правило, $n_y < n$, число уравнений оказывается меньше числа неизвестных, и решение невозможно. В соответствии с теоремой Кэли-Гамильтона каждая квадратная матрица удовлетворяет характеристическому уравнению: $A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} A + \alpha_n E = 0$. Поэтому матричная экспонента, являющаяся степенным рядом относительно матрицы A , может быть представлена в виде полинома степени $n-1$.

С учетом этого можно записать равенство: $\bar{y}(t) = \sum_{l=0}^{n-1} \gamma_l(t) \cdot C \cdot A^l \bar{x}(0)$, где $\gamma_l(t)$ соответствующие коэффициенты этого полинома. Для i -й составляющей вектора выхода соответственно будем иметь $y_i(t) = \sum_{l=0}^{n-1} \gamma_l(t) (CA^l)_i \bar{x}(0)$. Здесь $(CA^l)_i$ – i -я строка матрицы (CA^l) .

Если набор $(CA^l)_i$ для $i=1,2,\dots,n_y$; $l=0,1,2,\dots,n-1$ не содержит полного базиса, то есть n линейно независимых строк, иначе говоря – матрица имеет ранг, меньший, чем n , то в качестве ненулевого вектора начальных условий $\bar{x}(0) \neq 0$ может быть выбран вектор, ортогональный всем строкам матрицы N . Тогда в соответствии с (3.3-5) получим, что $\bar{y}(t) = 0$ для всех t , т.е. система не наблюдаема. Теперь докажем, что если ранг матрицы N равен n , то $\bar{x}(t_0)$ может быть определен с помощью конечного числа измерений вектора выхода $y(t)$. Обозначим $\Gamma(t_k) = [\gamma_0(t_k)E \ \gamma_1(t_k)E \ \dots \ \gamma_{n-1}(t_k)E]$, где E – квадратная единичная матрица размером $[n_y \times n_y]$. Моменты измерения t_k выберем таким образом, чтобы для различных значений k элементы $\gamma_i(t_k)$ отличались друг от друга. С учетом введенного обозначения равенство (3.3-5) примет вид $\bar{y}(t_k) = \Gamma(t_k) N \bar{x}(0)$. Известно, что ранг произведения любых двух матриц не превосходит ранга каждого из сомножителей. Ранг матрицы $\Gamma(t_k)$ не превосходит числа ее строк $n_y < n$. Матрица Γ имеет $n_y \times n$ строк. Моменты измерений должны быть выбраны таким образом, чтобы выполнялось условие $rank \Gamma_R = n$. Как было обусловлено, ранг матрицы N также равен n . Поэтому уравнение $\Gamma_R \cdot N \cdot \bar{x}(0) = \bar{Y}_R$, содержит n линейно независимых скалярных уравнений. Таким образом: *Линейная стационарная система вполне наблюдаема тогда и только тогда, когда ранг матрицы $N = [C \ A^T C \ (A^T)^2 C \ \dots \ (A^T)^{n-1} C]$ наблюдаемости N равен n .*

Лекция 9. Инвариантность и чувствительность САУ. Методы анализа САУ.
 Качество процессов управления.

Принцип инвариантности. Принцип комбинированного управления с обратной связью по отклонению и по возмущенному воздействию. Идея метода: помимо общего замыкания системы обратной связью и построения регулятора, дополнительно вводится в систему ветвь прохождения нежелательного сигнала, и коэффициент передачи в этой ветви подбирается так, чтобы повысить точность.

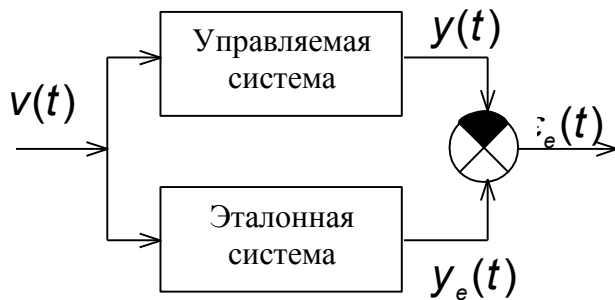
Введением производных от задающего воздействия можно с наперед заданной точностью решить задачу инвариантности.

Рассмотренные ранее способы повышения точности и устойчивости системы должны быть более строго сформулированы с целью, во-первых, уточнить показатели качества замкнутой системы, которые могут являться заданием на проектирование системы, во-вторых, систематизировать методы достижения данного качества. В системе может быть явно выделена неизменяемая часть и оставшаяся часть системы, в которую можно вносить коррективы. Неизменяемая часть системы ограничивает возможность получения данного качества в том смысле, что в изменяемой части системы иногда требуется вносить нереализуемые элементы. В любом случае, качество си-

стемы можно существенно повысить, однако эта задача существенно сложнее, чем задача моделирования и, вообще, анализа системы.

Качество процессов управления. Основные показатели качества. Устойчивость - это необходимое, но недостаточное условие эффективной работы системы. Комплекс требований, определяющих поведение системы в установившихся и переходных процессах обработки заданного воздействия, определяется понятием «качество процесса управления» или качество системы.

Качество работы системы проверяется по ее реакции на: дельта функцию $\delta(t)$; единичную функцию $1(t)$; гармонический сигнал $A \cdot \sin \omega_H t$; случайные воздействия с заданными вероятностными характеристиками.



Сравнение управляемой системы с эталонной

Качество обработки типовых сигналов оценивают либо непосредственно по выходному сигналу $y(t)$, либо путем сравнения этого сигнала $y(t)$ с реакцией некоторой эталонной системы, на рисунке $\varepsilon_e(t)$ - рассогласование, либо по ошибке воспроизведения командного сигнала

$$\varepsilon_v(t) = v(t) - y(t).$$

К основным опоказателям качества относятся: установившаяся ошибка: $\varepsilon_{ycm} = \varepsilon(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} (v(t) - y(t))$;

время регулирования t_p - минимальное время, в течение которого переходный процесс перестает выходить за пределы заданной «трубки», т.е. определяется из условия $|\varepsilon(t) - \varepsilon_{ycm}| \leq \Delta$ при $t \geq t_p$, где Δ - заранее заданное значение, определяемое требованиями к точности системы (обычно 2-5% от значения командного или выходного сигнала в установившемся режиме); максимальное перерегулирование σ - наибольший выброс управляемого процесса относительно установившегося значения по отношению к разности ε_{ycm} и $\varepsilon(0)$,

$\sigma = \frac{|\varepsilon_{max} - \varepsilon_{ycm}|}{|\varepsilon_{ycm} - \varepsilon(0)|} 100\%ot_m$; число колебаний N - число пересечений значения ε_{ycm} в интервале: $0 \leq t \leq t_p$

Ошибки системы регулирования в установившихся режимах.

В общем случае разомкнутая система может быть представлена последовательным соединением объекта (неизменяемой части системы) с передаточной функцией $W_{об}(s)$ и регулятора (корректирующего звена) с передаточной функцией $W_{pez}(s)$. Кроме того, учтем дополнительно возмущающее воздействие $f(t)$. С учетом этого передаточная функция разомкнутой системы $W(s) = W_{pez}(s)W_{об}(s)$. В соответствии с этой структурной схемой изображение по Лапласу от ошибки $E(s)$ зависит как от командного сигнала, так и от возмущения:

$$E(s) = W_{v\varepsilon}(s) \cdot V(s) + W_{f\varepsilon}(s) \cdot F(s) = E_v(s) + E_f(s),$$

$$\text{где } W_{v\varepsilon}(s) = \frac{1}{1 + W(s)}, W_{f\varepsilon}(s) = \frac{-W_{об}(s)}{1 + W(s)}.$$

3. Методические рекомендации (указания) к практическим занятиям и расчетно-графическим работам

Вопросы для проверки готовности студентов к проведению практических занятий:

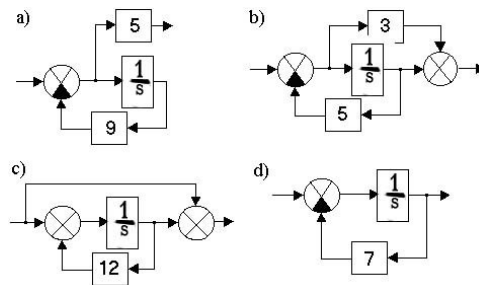
1. Укажите передаточную функцию реально дифференцирующего звена:

a) $W(p) = \frac{2p+1}{3p+8}$	b) $W(p) = \frac{3}{2p+7}$	c) $W(p) = \frac{p}{p+6}$	d) $W(p) = \frac{2p}{p^2+9}$
-------------------------------	----------------------------	---------------------------	------------------------------

2. Сигнал, обладающий свойством $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$ называется:

a) Дельта-функцией	b) функцией Дирака	c) весовой функцией	d) функция Ляпунова
--------------------	--------------------	---------------------	---------------------

3. Укажите структурную схему аperiodического звена первого порядка:



4. Укажите уравнение переходного процесса для звена: $W(s) = \frac{T_1 s}{T_2 s + 1}$

a) $h(t) = T_1 \left(T_2 - e^{-\frac{t}{T_2}} \right)$	b) $h(t) = \frac{T_1}{T_2} \cdot e^{-\frac{t}{T_2}}$	c) $h(t) = \frac{T_2}{T_1} \cdot e^{-\frac{t}{T_1}}$	d) $h(t) = 1 - e^{-\frac{T_1}{T_2} t}$
---	--	--	--

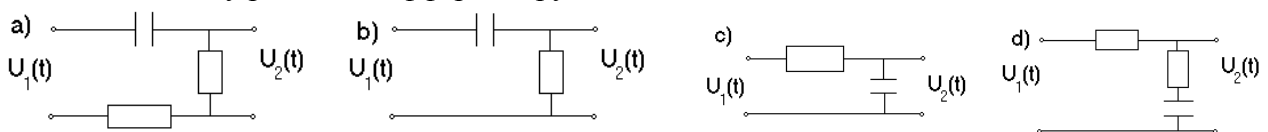
5. Интервалом времени от момента подачи единичной ступени на вход до момента, начиная с которого переходной процесс попадает в зону заданной точности и больше ее не покидает называется:

a) время настройки	b) время регулирования	c) время адаптации	d) время реакции
--------------------	------------------------	--------------------	------------------

6. Уравнение переходного процесса для интегрирующего звена с замедлением имеет вид

a) $h(t) = k \left[1 - e^{-\frac{t}{T}} \right]$	b) $h(t) = k \left[e^{-\frac{t}{T}} - 1 - t \right]$	c) $h(t) = k \left[t - T + T e^{-\frac{t}{T}} \right]$	d) $h(t) = k \left[1 - T \cdot t - T e^{-\frac{t}{T}} \right]$
---	---	---	---

7. Укажите схему реально дифференцирующего звена

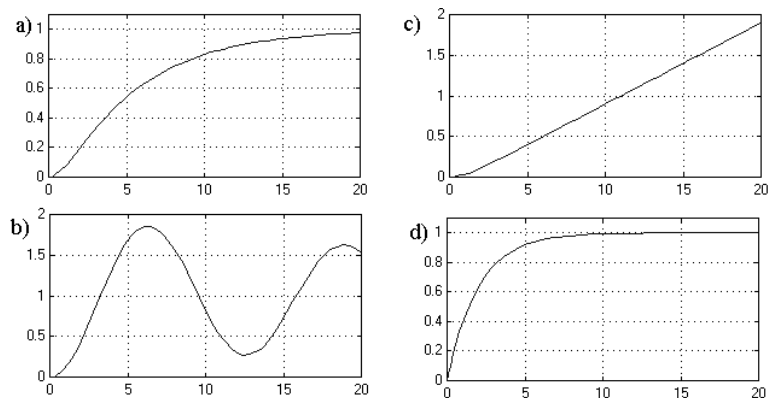


8. Если передаточная функция звена представлена уравнением $W(p) = \frac{k}{T_2^2 p^2 + T_1 p + 1}$, $T_1^2 - 4T_2^2 < 0$,

то величина $\xi = \frac{T_1}{2T_2}$ называется

a) степенью устойчивости	b) коэффициентом затухания	c) степенью затухания	d) собственной частотой колебаний
--------------------------	----------------------------	-----------------------	-----------------------------------

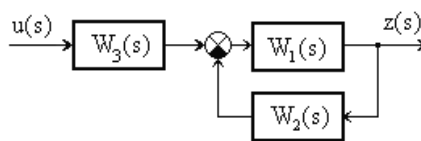
9. Укажите переходной процесс интегрирующего звена с замедлением



10. Переходной процесс колебательного звена имеет вид

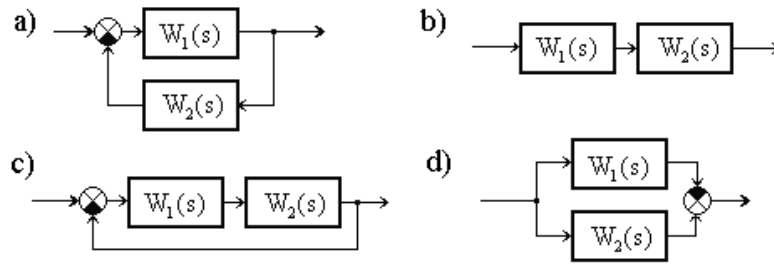
a) $h(t) = 1 + \frac{\gamma}{\xi \cdot \lambda} \cdot e^{-\gamma t} \cdot \sin(\lambda t + \varphi)$	b) $h(t) = k \cdot \left[1 - \frac{\gamma}{\xi \cdot \lambda} \cdot e^{-\gamma t} \cdot \sin(\lambda t + \varphi) \right]$	c) $h(t) = -\frac{\gamma}{\xi \cdot \lambda} \cdot e^{-\gamma t} \cdot \sin(\lambda t - \varphi)$	d) $h(t) = k + 1 + \frac{\gamma}{\xi \cdot \lambda} \cdot e^{-\gamma t} \cdot \sin(\lambda t + \varphi)$
---	--	--	---

11. Общая передаточная функция звена, представленного на рисунке, имеет вид

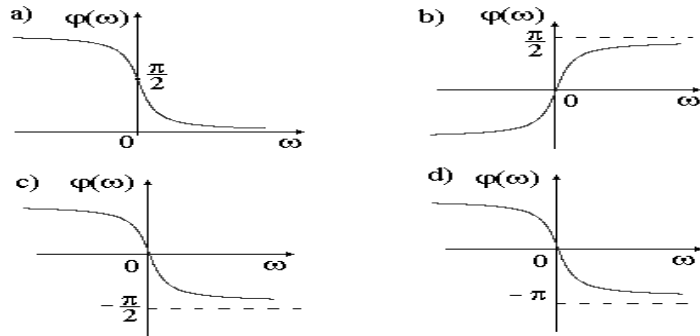


a) $W(s) = \frac{W_1(s) \cdot W_2(s) \cdot W_3(s)}{1 - W_1(s) \cdot W_2(s)}$	b) $W(s) = \frac{W_1(s) \cdot W_3(s)}{1 + W_1(s) \cdot W_2(s)}$	c) $W(s) = \frac{W_1(s) \cdot W_2(s)}{1 + W_1(s) \cdot W_2(s) \cdot W_3(s)}$	d) $W(s) = \frac{1 + W_1(s) \cdot W_2(s)}{W_1(s) \cdot W_2(s) \cdot W_3(s)}$
---	--	---	---

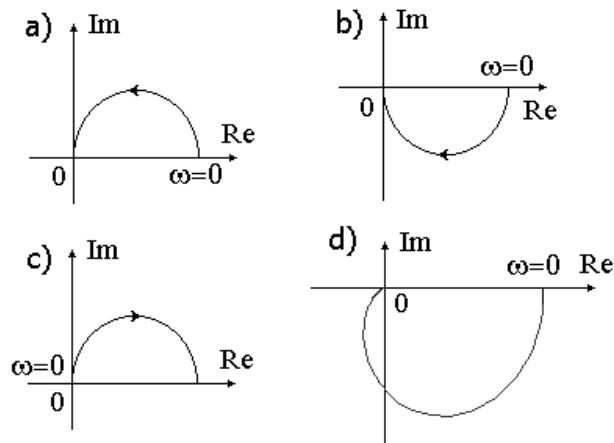
12. Укажите схему, на которой представлено параллельное соединение звеньев



13. Укажите график фазовой частотной характеристики аperiodического звена первого порядка



14. Укажите годограф реально-дифференцирующего звена ($\omega > 0$)



15. Укажите уравнение, по которому можно вычислить фазовую частотную характеристику звена с передаточной функцией $W(j\omega) = k \cdot \frac{\text{Re} Q(j\omega) + j \text{Im} Q(j\omega)}{\text{Re} R(j\omega) + j \text{Im} R(j\omega)}$

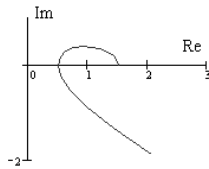
$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{\text{Re} R(j\omega)}{\text{Re} Q(j\omega)} - \arctg \frac{\text{Im} R(j\omega)}{\text{Im} Q(j\omega)},$$

$$\varphi(\omega) = -\arctg \frac{\text{Im} Q(j\omega)}{\text{Re} Q(j\omega)} + \arctg \frac{\text{Im} R(j\omega)}{\text{Re} R(j\omega)},$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{\text{Im} Q(j\omega)}{\text{Im} R(j\omega)} - \arctg \frac{\text{Re} Q(j\omega)}{\text{Re} R(j\omega)},$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{\text{Im} Q(j\omega)}{\text{Re} Q(j\omega)} - \arctg \frac{\text{Im} R(j\omega)}{\text{Re} R(j\omega)}.$$

16. Если годограф Михайлова исследуемой системы имеет вид, представленный на рисунке

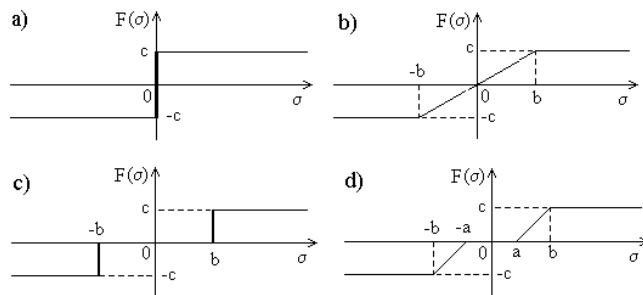


то система является

a) абсолютно устойчивой	b) устойчивой	c) неустойчивой	d) условно устойчивой
-------------------------	---------------	-----------------	-----------------------

17. Укажите, какой нелинейный элемент описывается уравнением

$$F(\sigma) = \begin{cases} c, & \sigma > b, \\ \frac{c}{b} \cdot \sigma, & -b \leq \sigma \leq b, \\ -c, & \sigma < -b. \end{cases}$$



18. Если функция сохраняет один и тот же знак, но может обращаться в нуль не только в начале координат, но и в других точках области, то она в данной области является

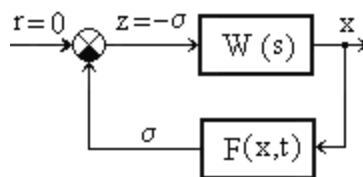
a) знакоопределенной	b) знакопостоянной,	c) знакопеременной,	d) функцией Ляпунова
----------------------	---------------------	---------------------	----------------------

19. Если характеристическое уравнение исследуемой системы имеет вид

$D(p) = a_0 p^5 + a_1 p^4 + a_2 p^3 + a_3 p^2 + a_4 p + a_5$, то укажите верную матрицу Рауса-Гурвица

a) $\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_2 & a_5 \end{vmatrix}$, c) $\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}$, d) $\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & 0 & a_1 & a_2 & a_5 \end{vmatrix}$

20. Укажите верное интегральное неравенство В.М. Попова, которое должно выполняться $\forall t \geq 0$, согласно критерию гиперустойчивости, чтобы нелинейная система, изображенная на рисунке, была асимптотически гиперустойчивой



a) $\eta(0,t) = -\int_0^t z(s)x(s)ds > -\gamma_0^2 = const,$

b) $\eta(0,t) = \int_0^t z(s)x(s)ds < -\gamma_0^2 = const,$

c) $\eta(0,t) = -\int_0^t z(s)x(s)ds \geq -\gamma_0^2 = const,$

d) $\eta(0,t) = -\int_{x(0)}^{x(t)} z(s)x(s)ds \geq \gamma(t) .$

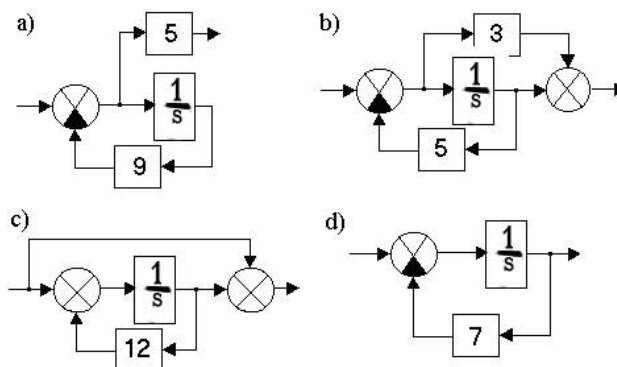
21. Укажите передаточную функцию аperiodического звена первого порядка:

a) $W(p) = \frac{2p+1}{3p+8}$	b) $W(p) = \frac{3}{2p+7}$	c) $W(p) = \frac{p}{p+6}$	d) $W(p) = \frac{2p}{p^2+9}$
-------------------------------	----------------------------	---------------------------	------------------------------

22. Реакцией системы на единичную ступень называется:

a) Дельта-функция	b) переходной процесс	c) передаточная функция	d) весовая функция
-------------------	-----------------------	-------------------------	--------------------

23. Укажите структурную схему реального дифзвена:



24. Укажите уравнение переходного процесса для звена: $W(s) = \frac{k}{T_1 p + 1}$

a) $h(t) = T_1 \left(T_2 - e^{-\frac{t}{T_2}} \right)$	b) $h(t) = \frac{T_1}{T_2} \cdot e^{-\frac{t}{T_2}}$	c) $h(t) = \frac{T_2}{T_1} \cdot e^{-\frac{t}{T_1}}$	d) $h(t) = k(1 - e^{-\frac{t}{T_1}})$
---	--	--	---------------------------------------

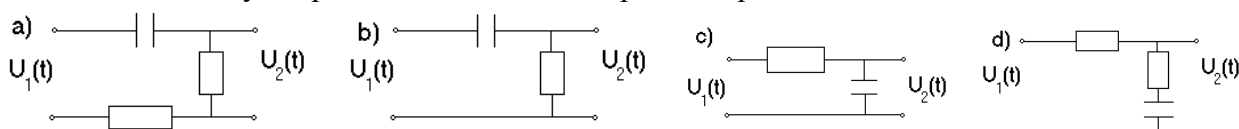
25. Интервалом времени от момента подачи единичной ступени на вход до момента, начиная с которого переходной процесс попадает в зону заданной точности и больше ее не покидает называется:

a) время настройки	b) время регулирования	c) время адаптации	d) время реакции
--------------------	------------------------	--------------------	------------------

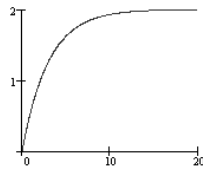
26. Уравнение переходного процесса для интегрирующего звена с замедлением имеет вид

a) $h(t) = k \left[1 - e^{-\frac{t}{T}} \right]$	b) $h(t) = k \left[e^{-\frac{t}{T}} - 1 - t \right]$	c) $h(t) = k \left[t - T + T e^{-\frac{t}{T}} \right]$	d) $h(t) = k \left[1 - T \cdot t - T e^{-\frac{t}{T}} \right]$
---	---	---	---

27. Укажите схему аperiodического звена первого порядка

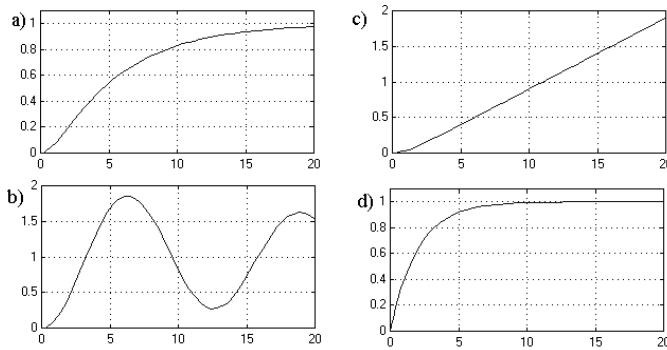


28. Весовая функция какого звена изображена рисунке?



a) колебательного	b) аperiodического первого порядка	c) аperiodического второго порядка	d) интегрирующего с замедлением
-------------------	------------------------------------	------------------------------------	---------------------------------

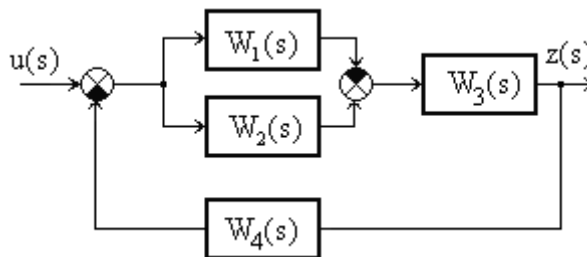
29. Укажите переходной процесс колебательного звена



30. Переходной процесс аperiodического звена второго порядка имеет вид

a) $h(t) = 1 + \frac{\gamma}{\xi \cdot \lambda} \cdot e^{-\gamma t} \cdot \sin(\lambda t + \varphi)$	b) $h(t) = k \cdot \left[1 - \frac{T_3}{T_3 - T_4} \cdot e^{-\frac{t}{T_3}} + \frac{T_4}{T_3 - T_4} \cdot e^{-\frac{t}{T_4}} \right]$	c) $h(t) = -\frac{\gamma}{\xi \cdot \lambda} \cdot e^{-\gamma t} \cdot \sin(\lambda t - \varphi)$	d) $h(t) = k \cdot \left[1 - \frac{T_4}{T_3 - T_4} \cdot e^{-\frac{t}{T_3}} + \frac{T_3}{T_3 - T_4} \cdot e^{-\frac{t}{T_4}} \right]$
--	--	---	--

31. Общая передаточная функция звена, представленного на рисунке, имеет вид

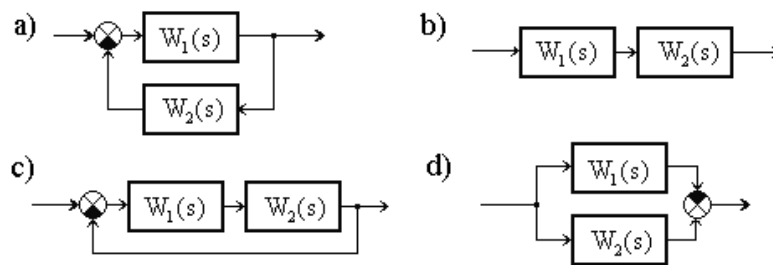


$$W(s) = \frac{W_1(s) - W_2(s) \cdot W_3(s)}{1 + (W_1(s) - W_2(s) \cdot W_3(s)) \cdot W_4(s)}, \quad \text{b) } W(s) = \frac{(W_2(s) - W_1(s)) \cdot W_3(s)}{1 + (-W_1(s) + W_2(s)) \cdot W_3(s) \cdot W_4(s)},$$

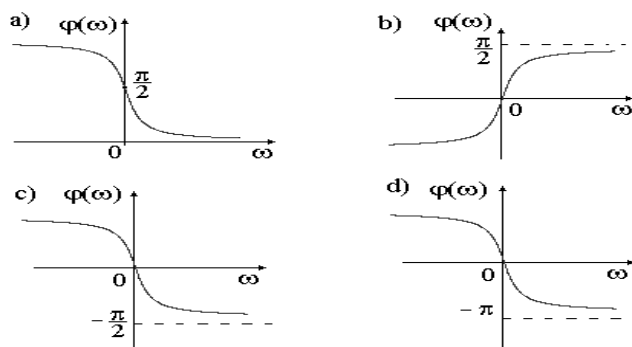
$$\text{c) } W(s) = \frac{(W_1(s) - W_2(s)) \cdot W_3(s)}{1 + (W_1(s) - W_2(s)) \cdot W_3(s) \cdot W_4(s)}, \quad \text{d) } W(s) = \frac{(W_2(s) - W_1(s)) \cdot W_3(s) \cdot W_4(s)}{1 + (-W_1(s) + W_2(s)) \cdot W_3(s)}$$

32. Укажите схему, на которой представлено соединение с итоговой передаточной функцией

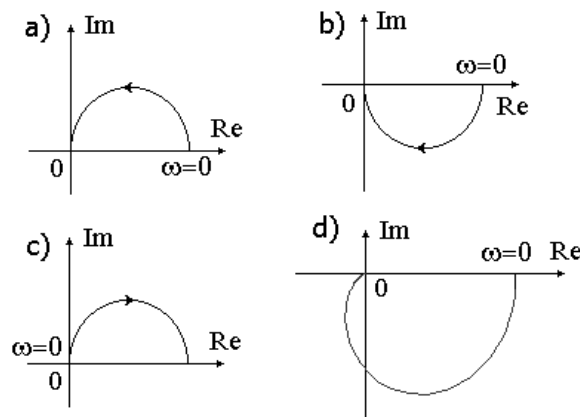
$$W(s) = \frac{W_1(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)}$$



33. Укажите график фазовой частотной характеристики апериодического звена второго порядка



34. Укажите годограф колебательного звена ($\omega > 0$)



35. Укажите уравнение амплитудной частотной характеристики апериодического звена 2-го порядка $W(s) = \frac{k}{(T_3s+1)(T_4s+1)}$

$$W(s) = \frac{k}{(T_3s+1)(T_4s+1)}$$

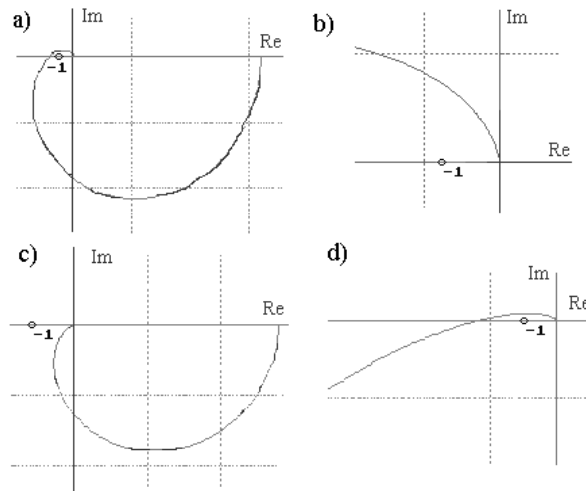
a) $A(\omega) = \frac{k(1 - T_3^2 \omega^2)}{\sqrt{(1 - T_3^2 \omega^2)^2 + 4T_4^2 \omega^2}}$,

b) $A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{(T_3^2 \omega^2 + 1)(T_4^2 \omega^2 + 1)}}$,

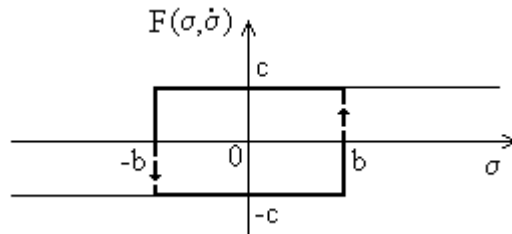
c) $A(\omega) = \frac{kT_3T_4\omega}{\sqrt{(T_3^2 \omega^2 + 1)(T_4^2 \omega^2 + 1)}}$,

d) $A(\omega) = \frac{k(T_3T_4 + 1)}{\sqrt{(T_3^2 \omega^2 + 1)(T_4^2 \omega^2 + 1)}}$.

36. Укажите устойчивый годограф Найквиста



37. Укажите уравнение, которым описывается нелинейный элемент



a) $F(\sigma) = \begin{cases} c, & \sigma > b, \\ \frac{c}{b} \cdot \sigma, & -b \leq \sigma \leq b, \\ -c, & \sigma < -b. \end{cases}$ b) $F(\sigma, \dot{\sigma}) = \begin{cases} c, & \sigma \geq b \text{ или } \{a < \sigma < b, \dot{\sigma} < 0\}, \\ 0, & -a \leq \sigma \leq a \text{ или } \{a < \sigma < b, \dot{\sigma} > 0\} \text{ или } \{-b < \sigma < -a, \dot{\sigma} < 0\}, \\ -c, & \sigma \leq -b \text{ или } \{-b < \sigma < -a, \dot{\sigma} > 0\}. \end{cases}$

c) $F(\sigma, \dot{\sigma}) = \begin{cases} c, & \sigma \geq b \text{ или } \{-b < \sigma \leq b, \dot{\sigma} < 0\}, \\ -c, & \sigma \leq -b \text{ или } \{-b < \sigma \leq b, \dot{\sigma} > 0\}. \end{cases}$ d) $F(\sigma) = \begin{cases} c, & \sigma > b, \\ \frac{c}{b-a} \cdot (\sigma - a), & a \leq x \leq b, \\ 0, & -a < \sigma < a, \\ \frac{c}{b-a} \cdot (\sigma + a), & -b \leq x \leq -a, \\ -c, & \sigma < -b. \end{cases}$

38. Если функция сохраняет один и тот же знак, но может обращаться в нуль не только в начале координат, но и в других точках области, то она в данной области является

- | | | | |
|----------------------|---------------------|---------------------|----------------------|
| a) знакоопределенной | b) знакопостоянной, | c) знакопеременной, | d) функцией Ляпунова |
|----------------------|---------------------|---------------------|----------------------|

39. Характеристическое уравнение исследуемой системы имеет вид $D(p) = a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3$.

Если $a_3 = 0$, то исследуемая система:

- | | | | |
|---------------|--|--|---------------------------------------|
| a) устойчива, | b) находится на границе бесконечного корня | c) находится на аperiodической границе | d) находится на колебательной границе |
|---------------|--|--|---------------------------------------|

40. Укажите верное неравенство, которому должна удовлетворять $W(j\omega)$ – АФЧХ линейной части устойчивой нелинейной системы, согласно теореме об абсолютной устойчивости В.М. Попова

$$a) \operatorname{Re}[(1+k)W(j\omega)] + \frac{j\omega}{h} > 0,$$

$$b) \operatorname{Re}[W(j\omega)] - \frac{(1+j\omega \cdot h)}{k} > 0,$$

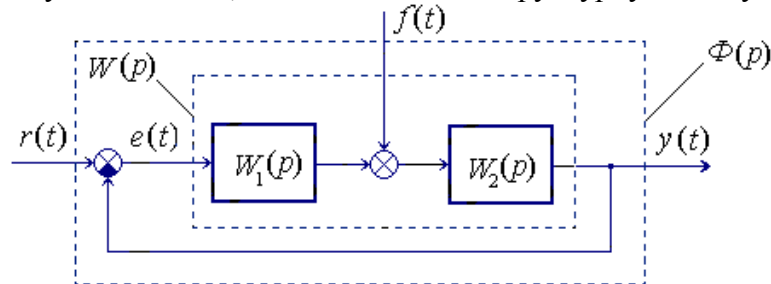
$$c) \frac{1}{k} \operatorname{Re}[(1+j\omega \cdot h)W(j\omega)] \leq 0,$$

$$d) \operatorname{Re}[(1+j\omega \cdot h)W(j\omega)] + \frac{1}{k} > 0.$$

Рекомендации и указания к расчетно-графическим работам.

РГР №1. Непрерывные системы

Передаточные функции непрерывных систем управления. Понятие разомкнутой системы неразрывно связано с понятием замкнутой системы, поскольку первая получается из второй путем разрыва обратной связи; при этом важно, что обратную связь следует разрывать перед тем сумматором, относительно которого рассматривается вход исследуемой системы. Далее будем использовать следующие обозначения: $\Phi(p)$ – передаточная функция замкнутой системы, $W(p)$ – передаточная функция разомкнутой системы, в частности – см. структурную схему САУ на рисунке.



Тогда, если $f(t) = 0$, $r(t) \neq 0$, то передаточные функции "по выходу" в системе на рис. 16 получат вид соотношений

$$W(p) = \frac{y(p)}{r(p)}, \quad \Phi(p) = \frac{y(p)}{r(p)}, \quad W_{np}(p) = W_1(p) \cdot W_2(p), \quad W_{oc}(p) = 1, \quad \Phi(p) = \frac{W_1(p) \cdot W_2(p)}{1 + W_1(p) \cdot W_2(p)},$$

где нижние индексы ($_{np}$) и ($_{oc}$) – обозначение прямого и обратного каналов связи; для этой же структурной схемы передаточные функции "по ошибке" будут описываться выражениями:

$$W_e(p) = \frac{e(p)}{r(p)}, \quad \Phi_e(p) = \frac{e(p)}{r(p)}, \quad W_{np}(p) = 1, \quad W_{oc}(p) = W_1(p)W_2(p), \quad \Phi_e(p) = \frac{1}{1 + W_1(p) \cdot W_2(p)}.$$

В свою очередь, если $f(t) \neq 0$, $r(t) = 0$, то

$$W_f(p) = \frac{y(p)}{f(p)}, \quad \Phi_f(p) = \frac{y(p)}{f(p)}, \quad W_{np}(p) = W_1(p), \quad W_{oc}(p) = -W_2(p), \quad \Phi_f(p) = \frac{W_2(p)}{1 + W_1(p) \cdot W_2(p)},$$

а также

$$W_{ef}(p) = \frac{e(p)}{f(p)}, \quad \Phi_{ef}(p) = \frac{e(p)}{f(p)}, \quad W_{np}(p) = -W_2(p), \quad W_{oc}(p) = W_1(p), \quad \Phi_{ef}(p) = \frac{-W_2(p)}{1 + W_1(p) \cdot W_2(p)}.$$

При этом уравнение связи в изображениях по Лапласу для выхода $y(p)$ относительно входов $r(p)$ и $f(p)$ можно записать в виде $y(p) = \frac{W_1(p) \cdot W_2(p)}{1 + W_1(p) \cdot W_2(p)} r(p) + \frac{W_2(p)}{1 + W_1(p) \cdot W_2(p)} f(p)$,

а уравнение связи для ошибки $e(p)$ следующим образом:

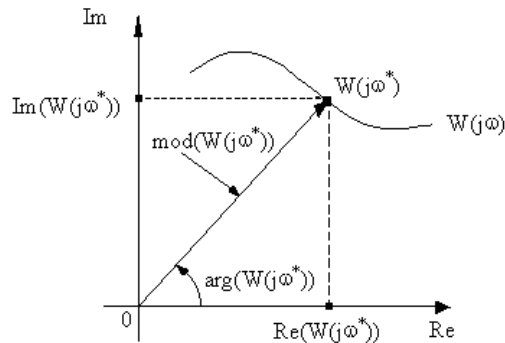
$$e(p) = \frac{1}{1 + W_1(p) \cdot W_2(p)} r(p) - \frac{W_2(p)}{1 + W_1(p) \cdot W_2(p)} f(p).$$

Частотные характеристики непрерывных систем получают на основе передаточной функции исследуемой системы. Для этого в $W(p)$ осуществляется замена $p \rightarrow j\omega$, где $j^2 = -1$, $\omega \in \mathbb{R}$, $-\infty < \omega < +\infty$.

Согласно графическому изображению фрагмента годографа частотной передаточной функции $W(j\omega)$ (см. рисунок) ее можно записать в виде

$$W(j\omega) = \operatorname{Re}(W(j\omega)) + j\operatorname{Im}(W(j\omega)) = \operatorname{mod}(W(j\omega)) \cdot e^{j\arg(W(j\omega))},$$

где в зависимости от системы координат применяются следующие обозначения: $U(\omega) = \text{Re}(W(j\omega))$ – вещественная частотная характеристика, $V(\omega) = \text{Im}(W(j\omega))$ – мнимая частотная характеристика, $A(\omega) = \text{mod}(W(j\omega))$ – амплитудно-частотная характеристика, $\varphi(\omega) = \text{arg}(W(j\omega))$ – фазо-частотная характеристика.



Частотные критерии устойчивости непрерывных систем.

Критерий Михайлова. Критерий формулируется относительно годографа характеристического уравнения исследуемой системы, пусть имеющего следующее описание:

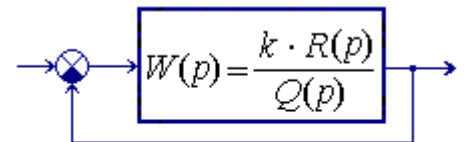
$$D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n, \quad a_i = \text{const}, \quad i = 0, \dots, n, \quad (22)$$

которое при замене $p \rightarrow j\omega$ получает вид

$$D(j\omega) = a_0 (j\omega)^n + a_1 (j\omega)^{n-1} + \dots + a_{n-1} j\omega + a_n.$$

Формулировка критерия Михайлова: чтобы система с характеристическим уравнением (22) была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы при $\omega \in [0, +\infty)$ годограф Михайлова $D(j\omega)$ начинался с положительного значения на вещественной оси и проходил последовательно n квадрантов против часовой стрелки, где n – порядок характеристического уравнения (22).

Критерий Найквиста. Критерий применяется для анализа устойчивости линейных замкнутых систем с единичной отрицательной обратной связью (см. рисунок), при этом наиболее характерным обстоятельством является то, что об устойчивости замкнутой системы $\Phi(p)$ судят по внешнему виду годографа разомкнутой системы $W(j\omega)$.



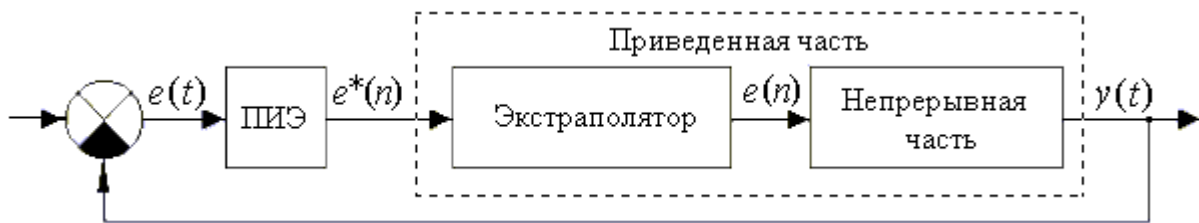
В связи с тем, что свойства полиномов $R(p)$ и $Q(p)$ могут быть различными, при формулировке критерия их свойства оговариваются.

Поэтому рассмотрим несколько определений. $W(p)$ принято называть *минимально фазовой* тогда, когда все корни полинома $R(p)$, т.е. нули $W(p)$, лежат в левой полуплоскости. $W(p)$ называется *гурвицевой*, если все корни полинома $Q(p)$, т.е. полюсы $W(p)$, лежат в левой полуплоскости. Первая формулировка критерия устойчивости Найквиста (для случая минимально фазовой гурвицевой $W(p)$): для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы годограф разомкнутой системы $W(j\omega)$ при изменении частоты $\omega \in [0, +\infty)$ не охватывал точку с координатами $(-1, j0)$.

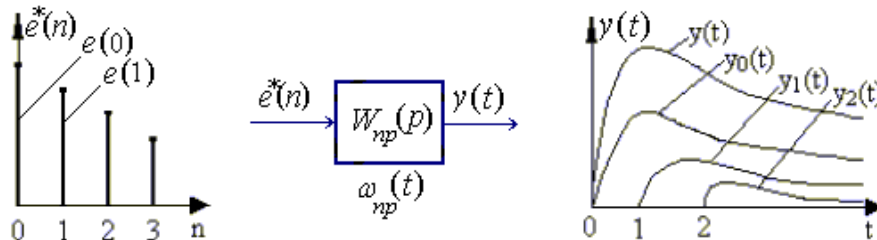
Вторая формулировка критерия устойчивости Найквиста (для случая минимально фазовой негурвицевой $W(p)$): для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы годограф разомкнутой системы $W(j\omega)$ при изменении частоты $\omega \in [0, +\infty)$ охватывал точку с координатами $(-1, j0)$ против часовой стрелки $m/2$ раз, где m – число корней полинома $Q(p)$, лежащих в правой полуплоскости.

РГР №2. Дискретные системы

Передаточные функции дискретных систем. Рассмотрим импульсную систему с одним импульсным элементом, структурная схема которой показана на рисунке, где выделена так называемая приведенная часть системы, объединяющая непрерывную часть совместно с экстраполятором.



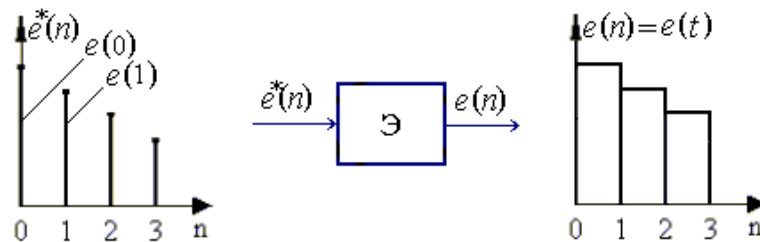
Если для приведенной части системы ввести в рассмотрение весовую $\omega_{np}(t)$ и передаточную $W_{np}(p)$ функции (см. рисунок), то можно найти и $W_{np}(z)$.



Действительно, если реакцию приведенной части на составляющую входного сигнала $e(0)$ записать в виде $y_0(t) = \omega_{np}(t)e(0)$, реакцию на составляющую $e(1)$ как $y_1(t) = \omega_{np}(t-1)e(1), \dots$, и т.д. до m -й составляющей включительно, то получим выражение $y_m(t) = \omega_{np}(t-m)e(m)$.

Суммируя указанные реакции, находим реакцию выхода приведенной части, которую запишем в виде $y(t) = \sum_{m=0}^n \omega_{i0}(t-m)e(m)$. Если же непрерывную часть рассматривать как импульсный фильтр, т.е. при $t = nT$, $T = 1$ фиксировать дискретные значения $y(n)$, то будем иметь выражение $y(n) = \sum_{m=0}^n \omega_{i0}(n-m)e(m)$, Z-преобразование которого дает соотношение $y(z) = W_{np}(z)e(z)$, где $W_{np}(z)$ – дискретная передаточная функция приведенной части системы управления.

Рассмотрим получение передаточной функции экстраполятора нулевого порядка, т.е. фиксатора импульсов, который в течении всего такта продолжительностью T удерживает величину $e(n)$, $n=0,1,2,\dots$, что и отражено на рисунке.



Передаточную функцию экстраполятора определим следующим образом:

$$W_{\text{Э}}(p) = \int_0^T 1(t)e^{-pt} dt = -\frac{1}{p} \int_0^T e^{-pt} dt = -\frac{1}{p} (e^{-pT} - 1) = \frac{1}{p} \left(1 - \frac{1}{z}\right) = \frac{z-1}{pz},$$

это позволяет, учитывая последовательное соединение экстраполятора и непрерывной части, записать их общую передаточную функцию как для непрерывных систем

$$W_{np}(p) = W_{\text{Э}}(p)W_{nc}(p) = \frac{z-1}{z} \cdot \frac{W_{nc}(p)}{p},$$

так и для дискретных

$$W_{np}(z) = \frac{z-1}{z} \cdot Z\left(\frac{W_{nc}(p)}{p}\right). \quad (*)$$

Определение дискретной передаточной функции на основе $Z(W_{nc}(p)/p)$. В качестве примера рассмотрим нахождение передаточной функции приведенной части системы управления (см. структурную схему на рис. 26) для случая, когда фиксатором является экстраполятор нулевого по-

рядка, а непрерывная часть имеет передаточную функцию вида

$$W_{\text{нч}}(p) = \frac{k_1}{1+T_1 p} \cdot \frac{k_2}{1+T_2 p} \cdot \frac{k_3(1+T_3 p)}{p(1+T_4 p)}.$$

Разложим выражение $W_{\text{нч}}(p)/p$ на простые дроби согласно методу неопределенных коэффициентов:

$$\frac{W_{\text{нч}}(p)}{p} = \frac{k_1 \cdot k_2 \cdot k_3}{p} \cdot \left[\frac{A}{p} + \frac{B}{1+T_1 p} + \frac{C}{1+T_2 p} + \frac{D}{1+T_4 p} \right].$$

Можно показать, что значения коэффициентов А, В, С, D определяются следующим образом:

$$A=1, \quad C = \frac{T_2^2(T_{21}-T_3)}{(T_1-T_2)(T_2-T_4)}, \quad B = \frac{-T_1^2(T_1-T_3)}{(T_1-T_2)(T_1-T_4)}, \quad D = \frac{T_4^2(T_3-T_4)}{(T_4-T_1)(T_4-T_2)}.$$

Тогда из (*) следует, что передаточная функция $W_{\text{нп}}(z)$ имеет вид

$$W_{\text{нп}}(z) = \frac{z-1}{z} \cdot Z \left(\frac{k_1 k_2 k_3}{p^2} + \frac{k_1 k_2 k_3 T_1^2 (T_3 - T_1)}{(T_1 - T_2)(T_1 - T_4)} \cdot \frac{1}{p(1+T_1 p)} + \right. \\ \left. + \frac{k_1 k_2 k_3 T_2^2 (T_2 - T_3)}{(T_1 - T_2)(T_2 - T_4)} \cdot \frac{1}{p(1+T_2 p)} + \frac{k_1 k_2 k_3 T_4^2 (T_3 - T_4)}{(T_4 - T_1)(T_4 - T_2)} \cdot \frac{1}{p(1+T_4 p)} \right),$$

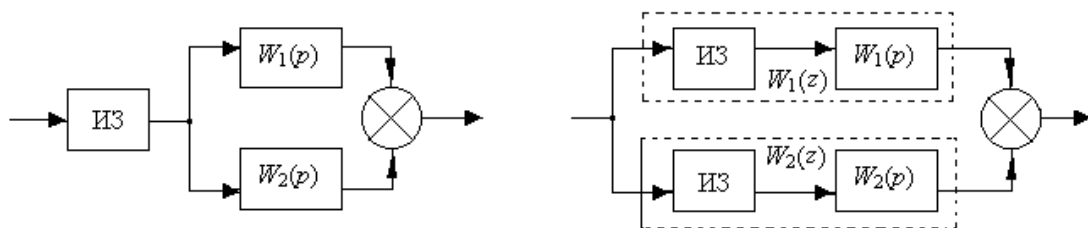
которую с помощью таблицы Z-преобразований можно привести к следующему выражению

$$W_{\text{нп}}(z) = \frac{k_1 k_2 k_3 T}{z-1} + \frac{k_1 k_2 k_3 T_1^2 (T_3 - T_1)}{(T_1 - T_2)(T_1 - T_4)} \cdot \frac{1-d}{z-d} + \frac{k_1 k_2 k_3 T_2^2 (T_2 - T_3)}{(T_1 - T_2)(T_2 - T_4)} \cdot \frac{1-\tilde{d}}{z-\tilde{d}} + \frac{k_1 k_2 k_3 T_4^2 (T_3 - T_4)}{(T_4 - T_1)(T_4 - T_2)} \cdot \frac{1-\bar{d}}{z-\bar{d}},$$

где T – период дискретизации, $d = e^{-\frac{T}{T_1}}$, $\tilde{d} = e^{-\frac{T}{T_2}}$, $\bar{d} = e^{-\frac{T}{T_4}}$.

Типовые соединения в дискретных системах.

Параллельное соединение звеньев. На рисунке изображены два фрагмента дискретных систем, которые имеют эквивалентное математическое описание в виде $W(z) = \sum_{i=1}^2 W_i(z)$.



Последовательное соединение звеньев.

Для непрерывной системы, показанной на рис. 3.1а, ее дискретным эквивалентом является система, изображенная на рис. 3.1б, в отличие от дискретной системы, представленной на рис. 3.1с, что имеет место в силу того, что $W'(z) \neq W''(z) = W_1(z)W_2(z)$.

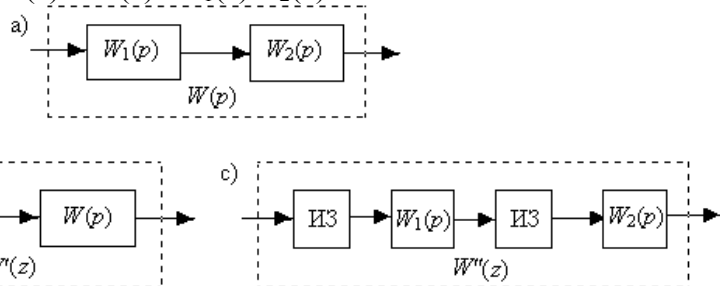


Рис. 3.1

Соединение звеньев с обратной связью. Как и в непрерывных системах, если определены дискретные передаточные функции прямого и

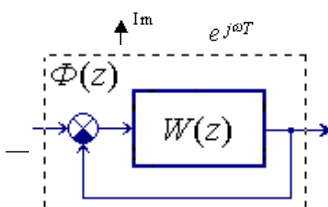
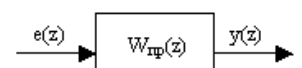


Рис. 3.2



обратного каналов связи, то передаточная функция замкнутой дискретной системы определяется без каких-либо отличий. Например, для системы, показанной на рис. 3.2, передаточная функция

$$\text{вход-выход будет иметь вид} \quad \Phi(z) = \frac{W(z)}{1+W(z)}.$$

Частотная передаточная функция дискретных систем Рис. 3.3 и импульсную систему управления с приведенной частью общего вида (см. рис. 3.3).

Частотной функции приведенной части выполним замену z на $e^{j\omega T}$. При этом очевидно, поскольку частотное соотношение $e^{j\omega T}$ является периодической функцией (см. график на рис. 3.4), то при построении годографа $W_{\text{пр}}(e^{j\omega T})$ достаточно ограничиться изменением аргумента в следующем частотном диапазоне:

$$\omega = 0.5\omega_0, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad \text{где } T \text{ – период дискретизации.}$$

Построение годографа $W_{\text{пр}}(e^{j\omega T})$ можно осуществлять как в полярных, так и прямоугольных координатах в силу справедливости следующих соотношений:

$$W_{\text{пр}}(e^{j\omega T}) = \text{mod}(W(e^{j\omega T}))\exp(j \arg(W(e^{j\omega T}))) = \text{Re}(W(e^{j\omega T})) + j \text{Im}(W(e^{j\omega T})).$$

Устойчивость дискретных систем управления. При исследовании устойчивости дискретных систем управления используется Z-преобразование. Тогда, учитывая необходимые и достаточные условия устойчивости непрерывных систем – полюса передаточной функции исследуемой системы должны располагаться в левой полуплоскости комплексной плоскости корней ($j\omega$), из соотношения $z=e^{j\omega T}$ следует, что необходимые и достаточные условия устойчивости дискретных систем сводятся к требованию о расположении полюсов ее передаточной функции $W(z)$ внутри круга единичного радиуса с центром в начале координат. Необходимые и достаточные условия устойчивости непрерывных и дискретных систем представлены на рис. 3.5а и 3.5б.

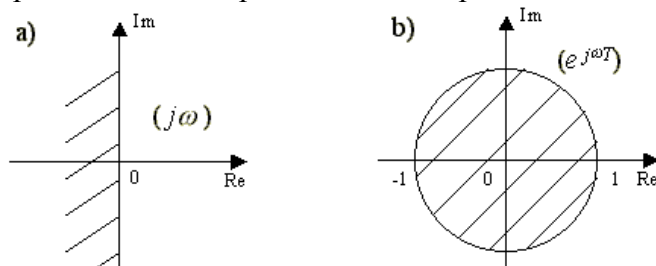


Рис. 5

Однако с практической точки зрения необходимое и достаточное условие устойчивости дискретных систем вида $|z_i| < 1$, где z_i – корни характеристического уравнения или полюса $W(z)$, не нашло широкого применения. При исследовании устойчивости дискретных систем обычно используется так называемое v -преобразование:

$$v = \frac{z-1}{z+1} = \frac{e^{j\omega T} - 1}{e^{j\omega T} + 1} = \frac{\cos \omega T + j \sin \omega T - 1}{\cos \omega T + j \sin \omega T + 1} = j \cdot \text{tg} \frac{\omega T}{2} = j \cdot \lambda,$$

где $\lambda = \text{tg} \frac{\omega T}{2}$ – псевдочастота, $-\frac{\pi}{T} \leq \omega \leq \frac{\pi}{T}$ – частотный диапазон.

С помощью этого преобразования, выполняя в $W(z)$ замену параметра z на v , получаем передаточную функцию дискретной системы, для которой применим математический аппарат исследования передаточных функций непрерывных систем.

Замечание. Для определения устойчивости замкнутой импульсной системы возможно использование критерия Найквиста. Для этой цели можно применять передаточную функцию разомкнутой системы, полученную на основе Z-преобразования, так и на основе v -преобразования. И в том и в другом случае амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы не должна охватывать точку $(-1, j0)$.

4. Методические рекомендации к практическим занятиям на ПЭВМ

Предлагаемый практикум, затрагивает только часть разделов теории автоматического управления, но позволяет студентам получить достаточно полное представление об основах автоматического управления в технических системах и приобрести навыки, необходимые для решения ряда практических задач.

4.1. Исследование временных и частотных характеристик динамических систем 1-го порядка (4 часа)

Цель занятия – получить навыки в построении математических моделей динамических систем и освоить приемы имитационного моделирования временных и частотных характеристик систем 1-го порядка на примере апериодического, идеального интегрирующего, реального дифференцирующего и упругих звеньев.

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Рассматриваются линейные системы автоматического управления, описываемые обыкновенным дифференциальным уравнением 1-го порядка

$$\frac{dz}{dt} + b_1 z = a_0 \frac{du}{dt} + a_1 u \quad (4.1)$$

или, используя передаточную функцию, соотношением

$$z(s) = W(s)u(s) = \frac{a_0 s + a_1}{s + b_1} u(s), \quad (4.2)$$

где a_0, a_1, b_1 – числа, которые могут иметь разные знаки, в связи с чем:

при положительных числах a_0, a_1, b_1 (полюса и нули $W(s)$ лежат в левой полуплоскости комплексной плоскости корней), система является *устойчивой* и *минимально-фазовой*;

если числа a_0, a_1 имеют одинаковые знаки (как правило, положительные числа), а $b_1 < 0$ (полюс $W(s)$ лежит в правой полуплоскости) – система становится *неустойчивой*, но *минимально-фазовой*;

если числа a_0, a_1 имеют разные знаки (нуль $W(s)$ лежит в правой полуплоскости), а $b_1 > 0$ – система оказывается *неминимально-фазовой*, но *устойчивой*;

если числа a_0, a_1 имеют разные знаки, а $b_1 < 0$ – система является *неустойчивой* и *неминимально-фазовой*.

Например, при $a_1 > 0, b_1 \neq 0$ – любое число, тогда система (4.1) является апериодическим звеном, S-модель которого показана на рис. 4.1.

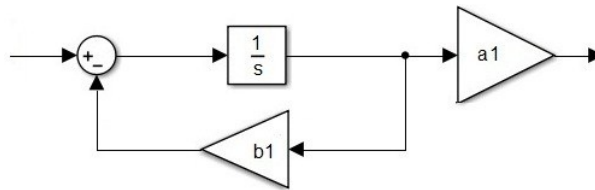


Рис. 4.1. S-модель аperiodического (инерционного) звена 1-го порядка.

Передаточная функция этого звена (в пространстве состояний) имеет вид

$$W(s) = \frac{a_1}{s + b_1}, \quad (4.3)$$

Очевидно, что свойства аperiodического звена (4.3), зависят от значений параметров a_1, b_1 и определяются следующими решениями уравнения (4.1):

$$\text{при } a_1 > 0, b_1 > 0, \text{ имеем } h(t) = \frac{a_1}{b_1} \left(1 - e^{-b_1 t} \right), \quad \omega(t) = a_1 e^{-b_1 t}; \quad (4.4)$$

$$\text{при } a_1 > 0, b_1 < 0, \text{ имеем } h(t) = \frac{a_1}{|b_1|} \left(e^{|b_1| t} - 1 \right), \quad \omega(t) = a_1 e^{|b_1| t}.$$

Отметим, что звено, при $a_1 > 0, b_1 = 0, h(t) = a_1 t$ – это идеальный интегратор. В случае $a_1, b_1 > 0$, аperiodическое звено (4.3) является устойчивым, передаточная функция которого (во второй форму записи) имеет вид

$$W(s) = \frac{K}{Ts + 1}, \quad K = \frac{a_1}{b_1}, \quad T = \frac{1}{b_1} [c], \quad (4.5)$$

при этом из графика на рис. 4.2 хорошо видно, что длительность переходного процесса составляет приблизительно $(3 \div 4)T$ [с].

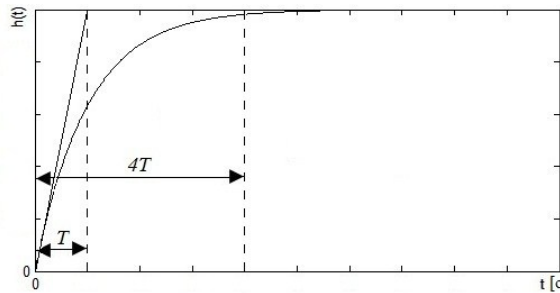


Рис. 4.2. Оценка времени затухания $h(t)$ в аperiodическом звене 1-го порядка.

При построении семейства временных характеристик, наряду с S-моделями, можно воспользоваться стандартными командами пакета Matlab.

Например, используя передаточную функцию (4.3) и задавая при $a_1 = 1$ следующий набор значений параметра b_1 : $b_1 = 2; b_1 = -2, b_1 = 0$, т.е. рассматривая как устойчивое и неустойчивое инерционные звенья, так и идеальное интегрирующее звено, можно построить соответствующие им переходные процессы и весовые функции (рис. 4.3). В частности, создав и запустив *m*-файл вида:

```
%временные характеристики
W0=tf([1],[1 2]); %устойчивое инерционное звено
```

```

W1=tf([1],[1 0]);    %идеальный интегратор
W2=tf([1],[1 -2]);  %неустойчивое инерционное звено
subplot(121); step(W0,W1,W2,1); %переходной процесс
subplot(122); impulse(W0,W1,W2,1).%весовая функция

```

Отметим, что в командах `step(W0,W1,W2,1)` и `impulse(W0,W1,W2,1)` время моделирования было задано (0.8 с), если же его не указывать, то оно будет выбрано по умолчанию, т.е. автоматически.

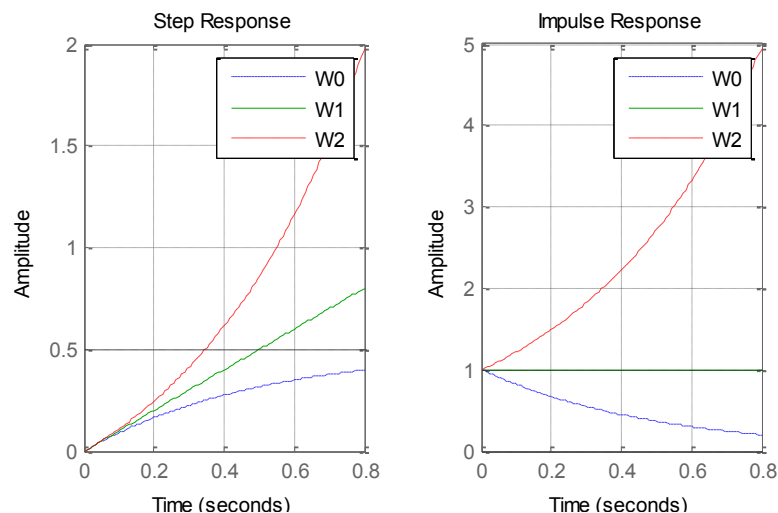


Рис. 4.3. Динамические процессы в звеньях 1-го порядка.

Теоретический анализ свойств системы управления связан с построением частотных характеристик на основе ее передаточной функции. Используя стандартные команды пакета Matlab, можно построить вещественную и мнимую частотные характеристики, годограф, а также логарифмические амплитудную и фазовую частотные характеристики исследуемой системы.

Частотная передаточная функция (комплексный коэффициент усиления) устойчивого инерционного звена 1-го порядка (4.3) имеет вид

$$W(j\omega) = \frac{a_1}{b_1 + j\omega},$$

а частотные характеристики описываются выражениями:

$$\begin{aligned}
 \text{вещественная} - U(\omega) &= \operatorname{Re} W(j\omega) = \frac{a_1 b_1}{b_1^2 + \omega^2}, \\
 \text{мнимая} - V(\omega) &= \operatorname{Im} W(j\omega) = -\frac{a_1 \omega}{b_1^2 + \omega^2}, \\
 \text{амплитудная} - A(\omega) &= \operatorname{mod} W(j\omega) = \frac{a_1}{\sqrt{b_1^2 + \omega^2}}, \\
 \text{фазовая} - \varphi(\omega) &= \operatorname{arg} W(j\omega) = -\operatorname{arctg} \frac{\omega}{b_1}.
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

При этом логарифмическая амплитудно-частотная характеристика описывается следующим образом:

$$20 \lg A(\omega) = \left(20 \lg a_1 - 20 \lg \sqrt{b_1^2 + \omega^2} \right) [\text{дБ}].$$

Например, если коэффициенты устойчивого инерционного звена имеют значения: $a_1 = 100$, $b_1 = 4$, то в результате запуска *m*.файла:

Листинг lb1_2.m

```
%частотные характеристики
num=[100]; den=[1 4];
[re,im]=nyquist(num,den);
subplot(221); plot(re);           %вещественная
subplot(222); plot(im);         %мнимая
subplot(223); nyquist(num,den); %годограф
subplot(224); bode(num,den);    %логарифмические
```

будут построены частотные характеристики, представленные на рис. 4.4.

Частотные передаточные функции идеального интегрирующего, реального дифференцирующего и упругого звеньев описываются соответственно следующими выражениями:

$$W(j\omega) = \frac{a_1}{j\omega} \text{ – идеальное интегрирующее; } W(j\omega) = \frac{ja_0\omega}{b_1 + j\omega} \text{ – реальное дифференцирующее; } W(j\omega) = \frac{a_1 + ja_0}{b_1 + j\omega} \text{ – упругое звено.}$$

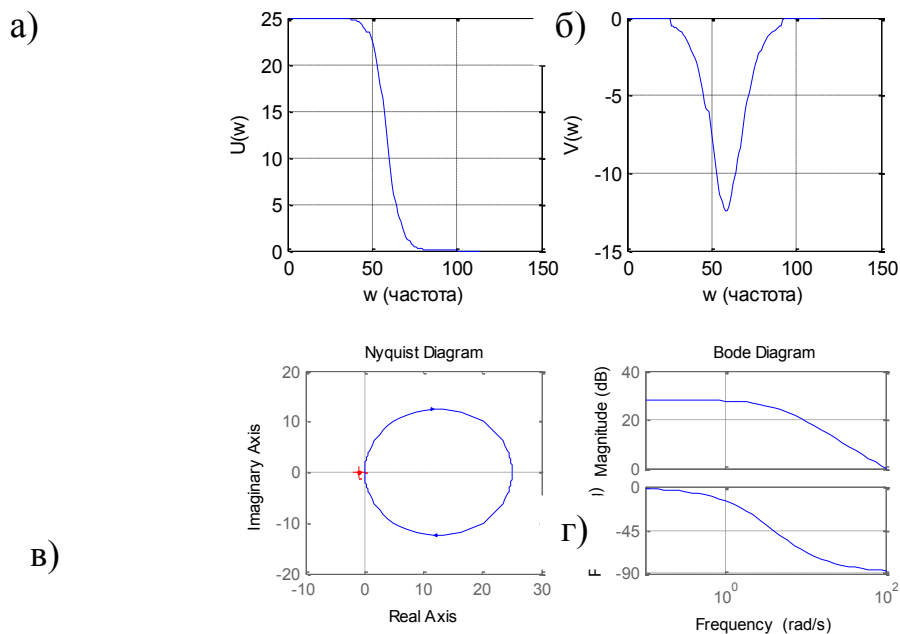


Рис. 4.4. Частотные характеристики устойчивого апериодического звена 1-го порядка.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

Таблица 4.1

параметры	№ варианта (для уравнения (4.2))														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
b_1	0.3	0.4	0.5	0.6	1.7	1.8	1.9	2.1	2.2	2.3	3.5	4.5	4.7	4.2	4.1
a_0	0.4	0.8	1.1	1.3	3.5	3.4	3.8	4.2	4.3	4.8	6.8	8.6	9.8	8.6	8.0
a_1	1.2	1.4	1.9	2.0	2.2	1.5	2.4	2.3	1.6	2.6	1.7	3.1	1.8	2.7	2.8

1. В соответствии с вашим вариантом задания (табл. 4.1), полагая $a_0 = 0$, запишите передаточную функцию апериодического звена 1-го порядка и, создавая листинги, аналогичные m-файлам lb1_1 и lb1_2, постройте графики временных и частотных характеристик этого звена.

2. Постройте семейство переходных процессов апериодического звена 1-го порядка, изменяя значения параметра b_1 следующим образом: $0.25b_1$; $0.5b_1$; $2b_1$; $4b_1$.

3. Повторите задание пп.1, полагая $a_0 = b_1 = 0$, т.е. запишите передаточную функцию идеального интегрирующего звена и постройте графики его временных и частотных характеристик.

4. Повторите задание пп.1, полагая $a_1 = 0$, т.е. запишите передаточную функцию реального дифференцирующего звена и постройте графики его временных и частотных характеристик.

5. Повторите задание пп.1, запишите передаточную функцию упругого и постройте графики его временных и частотных характеристик.

6. Поменяйте местами числитель и знаменатель передаточной функции упругого звена и повторите задание пп.5.

7. Сделайте выводы на основе сравнительного анализа результатов моделирования.

ЗАДАЧИ И ВОПРОСЫ

1. Сформулируйте строгое определение передаточной функции.

2. Как найти передаточную функцию системы управления, если ее математическая модель представлена в виде дифференциального уравнения n -го порядка или системы n дифференциальных уравнений первого порядка?

3. Дайте определение переходного процесса $h(t)$ и весовой функции $\alpha(t)$, а также приведите аналитические зависимости, связывающие их с передаточной функцией $W(s)$.

4. Запишите передаточные функции и уравнения переходных процессов идеального интегрирующего, реального дифференцирующего и упругого звеньев.

5. Приведите примеры апериодического звена первого порядка и реально дифференцирующего звена.

6. При каком значении параметра b_1 , апериодическое звено будет неустойчивым

$$W_1(s) = \frac{a_1}{s + b_1}.$$

7. Как, используя способ прямого программирования, получить описание системы управления в пространстве состояний, если математическая модель системы задана в виде передаточной функции?

4.2. Исследование временных и частотных характеристик динамических систем 2-го порядка (4 часа)

Цель занятия – имитационное моделирование и анализ временных и частотных характеристик звеньев второго порядка и систем управления, построенных с помощью типовых соединений.

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

I. Рассматриваются линейные системы автоматического управления, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями.

венным дифференциальным уравнением 2-го порядка

$$\frac{d^2z}{dt^2} + b_1 \frac{dz}{dt} + b_2 z = a_1 u, \quad (4.7)$$

или, используя передаточную функцию, соотношением

$$z(s) = W(s)u(s) = \frac{a_1}{s^2 + b_1 s + b_2} u(s), \quad (4.8)$$

где a_1, b_1, b_2 – положительные числа.

Известно, что числовые значения коэффициентов b_1 и b_2 , определяют тип звена (4.7), в частности:

- 1) $b_1^2 - 4b_2 > 0$ – аperiodическое звено;
- 2) $b_1^2 - 4b_2 < 0$ – колебательное звено;
- 3) $b_1 = 0$ – консервативное звено;
- 4) $b_2 = 0$ – интегрирующее звено с замедлением.

При исследовании первых трех звеньев удобно вводить замену коэффициентов a_1, b_1 и b_2 . Например, для аperiodического звена целесообразно использовать постоянные времени T_3 и T_4 , удовлетворяющие равенствам

$$T_3 T_4 = \frac{1}{b_2}, \quad T_3 + T_4 = \frac{b_1}{b_2}, \quad K = \frac{a_1}{b_2}, \quad (4.9)$$

а для колебательного и консервативного звеньев – постоянную времени T и коэффициент затухания ζ , полагая выполненными условия

$$T^2 = \frac{1}{b_2}, \quad 2\zeta T = \frac{b_1}{b_2}, \quad K = \frac{a_1}{b_2}, \quad (4.10)$$

причем, если $0 < \zeta < 1$ – это колебательное звено, когда $\zeta = 0$ – консервативное.

С учетом уравнений (4.8), (4.9), можно записать соотношения:
для инерционного звена

$$z(s) = W(s)u(s) = \frac{K}{(T_3 s + 1)(T_4 s + 1)} u(s), \text{ пусть } T_3 > T_4, \quad (4.11)$$

$$h(t) = K \left(1 - \frac{T_3}{T_3 - T_4} e^{-\frac{t}{T_3}} + \frac{T_4}{T_3 - T_4} e^{-\frac{t}{T_4}} \right); \quad (4.12)$$

для колебательного звена

$$z(s) = W(s)u(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 2\zeta T s + 1} u(s), \quad (4.13)$$

$$h(t) = K \left(1 - \frac{\gamma}{\zeta \lambda} e^{-\gamma t} \sin(\lambda t + \varphi_0) \right) = K \left(1 - \left(\cos \lambda t + \frac{\gamma}{\lambda} \sin \lambda t \right) e^{-\gamma t} \right), \quad (4.14)$$

$$\gamma = \frac{\zeta}{T}, \quad \lambda = \frac{1}{T} \sqrt{1 - \zeta^2}, \quad \varphi_0 = \operatorname{arctg} \frac{\lambda}{\gamma};$$

для консервативного

$$z(s) = W(s)u(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 1} u(s), \quad (4.15)$$

$$h(t) = K(1 - \cos \omega t), \quad \omega = \frac{1}{T}. \quad (4.16)$$

I I. Рассматриваются типовые соединения линейных систем (рис. 4.5), передаточные функции описываются выражениями:

а) $W(s) = \frac{z(s)}{g(s)} = W_1(s)W_2(s)$ – последовательное соединение; (4.17)

б) $W(s) = \frac{z(s)}{g(s)} = W_2(s) - W_1(s)$ – параллельное соединение; (4.18)

в) $W(s) = \frac{z(s)}{g(s)} = \frac{W_1(s)W_2(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)}$ – соединение с обратной связью. (4.19)

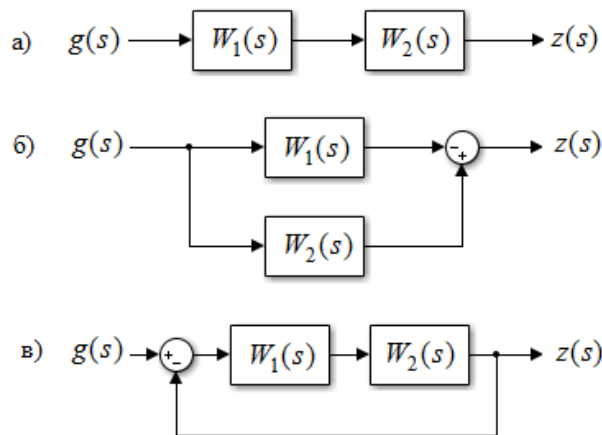


Рис. 4.5. Структурные схемы типовых соединений.

Примером последовательного соединения может служить инерционное звено 2-го порядка (4.11), поскольку оно может быть образовано последовательным соединением двух инерционных звеньев 1-го порядка.

Классическими примерами параллельного соединения являются структурные схемы типовых законов управления или промышленных ПИ-, ПД- и ПИД-регуляторов, описываемые соответственно передаточными функциями вида:

$$W_{ПИ}(s) = k_{II} + k_{II} \frac{1}{s}, \quad W_{ПД}(s) = k_{II} + k_{II} s, \quad W_{ПИД}(s) = k_{II} + k_{II} \frac{1}{s} + k_{II} s, \quad (4.20)$$

где идеальный дифференциатор, входящий в состав ПД- и ПИД-регуляторов, технически реализуется, как правило, за счет применения реального дифференцирующего звена, т.е. путем замены

$k_{II} s \cong k_{II} \frac{s}{T_* s + 1}$ (здесь T_* – достаточно малая постоянная времени) и использования следующих

передаточных функций

$$W_{ПД}(s) = k_{П} + k_{Д} \frac{s}{T_*s + 1}, \quad (4.21)$$

$$W_{ПИД}(s) = k_{П} + k_{И} \frac{1}{s} + k_{Д} \frac{s}{T_*s + 1}.$$

Здесь $k_{П}$, $k_{И}$ и $k_{Д}$ – константы (передаточные коэффициенты или настройки регулятора).

Примером соединения с обратной связью может служить любая замкнутая система управления, в частности – рис. 4.5в, это система с отрицательной обратной связью, где $W_1(s)$ – регулятор, $W_2(s)$ – объект управления.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

Таблица 4.2

параметры	№ варианта (для уравнения (4.7))														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
b_1	4.3	5.4	4.5	5.6	6.7	5.8	4.9	5.1	6.2	4.3	6.5	4.5	5.7	4.2	6.1
b_2	3.4	3.8	2.1	3.3	3.5	3.4	3.8	2.2	3.3	1.8	3.8	2.6	1.8	2.6	3.0
a_1	1.2	1.4	1.7	1.0	1.2	1.5	1.4	1.3	1.6	1.3	1.7	1.1	1.8	1.7	1.8

1. В соответствии с вашим вариантом задания (табл. 4.2), используя передаточную функцию апериодического звена 2-го порядка и создавая листинги, аналогичные m-файлам lb1_1 и lb1_2, постройте временные и частотные характеристики этого звена.

2. Оставляя значение коэффициента b_1 прежним, задайте новое значение коэффициента b_2 таким образом, чтобы выполнилось условие $b_1^2 - 4b_2 < 0$. Для полученного колебательного звена определите значения постоянной времени T и коэффициента затухания ζ , а затем, используя листинги пп.1, постройте временные и частотные характеристики этого звена.

3. Повторите задание предыдущего пункта (полагая $b_1 = 0$) и постройте графики временных и частотных характеристик консервативного звена.

Замечания: 1) для наглядности графических результатов в командах step и impulse необходимо задать время моделирования; 2) при моделировании частотных характеристик (дополнительно к случаю $b_1 = 0$) постройте графики, задавая значение $b_1 = 10^{-6} \cong 0$.

4. Повторите задание пп.1 (полагая $b_2 = 0$) для интегрирующего звена с замедлением (последовательное соединение звеньев идеального интегрирующего и инерционного 1-го порядка), постройте временные и частотные характеристики.

Замечание: в команде step необходимо задать время моделирования.

5. Постройте переходной процесс и весовую функцию ПИ-регулятора, где $k_{П} = b_1$, $k_{И} = b_2$. Для ПД- и ПИД-регуляторов, используя передаточные функции вида (4.21), где $k_{П} = b_1$, $k_{И} = b_2$, $k_{Д} = a_1$ и $T_* = 0.1a_1$, постройте графики их переходных процессов и весовых функций.

Замечание: в командах step и impulse необходимо задать время моделирования.

7. Для системы управления (см. рис. 4.5в) с передаточными функциями: $W_1(s) = k_{П}$,

$W_2(s) = \frac{a_1}{s^2 + b_1s - b_2}$, постройте графики $h(t)$ и $\omega(t)$, задавая значение коэффициента $k_{П}$ из усло-

вий: $k_{П}a_1 - b_2 > 0$; $k_{П}a_1 - b_2 = 0$; $k_{П}a_1 - b_2 < 0$.

Замечание: в командах step и impulse необходимо задать время моделирования.

8. Сделайте выводы на основе сравнительного анализа результатов моделирования (по каж-

дому из пунктов задания).

ЗАДАЧИ И ВОПРОСЫ

1. Приведите физические и технологические примеры апериодического, колебательного и консервативного звеньев.
2. Сформулируйте отличительные особенности математических моделей апериодического, колебательного и консервативного звеньев, а также интегрирующего звена с замедлением, исходя из дифференциального уравнения (4.7).
3. Как определить весовую функцию $\omega(t)$ по уравнению переходного процесса $h(t)$?
4. Запишите передаточные функции последовательного и параллельного соединения двух звеньев, а также передаточные функции звена охваченного положительной и отрицательной обратными связями.

4.3. Исследование устойчивости систем управления с обратной связью (4 часа).

Цель занятия – исследование устойчивости замкнутых линейных систем управления и оценка влияния значений коэффициентов их характеристических уравнений на динамические процессы.

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

I. Рассматриваются линейные замкнутые системы управления (рис. 4.6), которые описываются следующими передаточными функциями:

$$W_{раз}(s) = W_1(s)W_2(s), \quad W_1(s) = \frac{a_1(s)}{b_1(s)}, \quad W_2(s) = \frac{a_2(s)}{b_2(s)},$$

$$W_{зам}(s) = \frac{W_{раз}(s)}{1 + W_{раз}(s)} = \frac{a_1(s)a_2(s)}{b_1(s)b_2(s) + a_1(s)a_2(s)} = \frac{a_3(s)}{b_3(s)}, \quad (4.22)$$

где $W_{раз}(s)$, $W_{зам}(s)$ – передаточные функции соответственно разомкнутой и замкнутой систем; $a_i(s)$, $b_i(s)$, $i = \overline{1,3}$ – нормированные полиномы с числовыми коэффициентами.

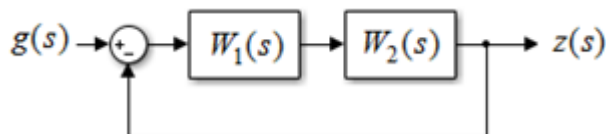


Рис. 4.6. Замкнутая система управления с единичной отрицательной обратной связью.

Хорошо известно, что устойчивость таких систем может устанавливаться как за счет необходимых и достаточных условий устойчивости – все корни полинома $b_3(s)$ должны лежать в левой полуплоскости комплексной плоскости корней, так и с помощью применения критериев устойчивости.

Критерий устойчивости Рауса-Гурвица:

для устойчивости системы с характеристическим полиномом вида

$$b_3(s) = b_{3n} s^n + b_{3n-1} s^{n-1} + \dots + b_{31} s + b_{30}, \quad (4.23)$$

необходимо и достаточно, чтобы при $b_{3n} > 0$, все главные диагональные миноры матрицы Гурвица были бы положительными.

Например, пусть $n = 3$, тогда (при $b_{33} > 0$) для матрицы Гурвица

$$G = \begin{pmatrix} b_{32} & b_{30} & 0 \\ b_{33} & b_{31} & 0 \\ 0 & b_{32} & b_{30} \end{pmatrix},$$

должны выполняться условия

$$\Delta_1 = b_{32} > 0, \Delta_2 = b_{32}b_{31} - b_{33}b_{30} > 0, \Delta_3 = b_{30}\Delta_2 > 0.$$

Следствие критерия устойчивости Рауса-Гурвица позволяет определить нахождение исследуемой системы на границе устойчивости, в частности, рассматривая такие условия для случая $n = 3$, имеют место следующие описания:

$$b_{30} = 0, b_{33} > 0, b_{32} > 0, b_{31} > 0 - \text{апериодической границы};$$

$$b_{33} = 0, b_{32} > 0, b_{31} > 0, b_{30} > 0 - \text{границы } \infty\text{-го корня};$$

$$b_{32}b_{31} - b_{33}b_{30} = 0, b_{33} > 0, b_{32} > 0, b_{31} > 0, b_{30} > 0 - \text{колебательной границы}.$$

Критерий устойчивости Михайлова:

для устойчивости системы с полиномом (4.23) необходимо и достаточно, чтобы кривая Михайлова $b_3(j\omega) = b_{3n}(j\omega)^n + \dots + b_{31}(j\omega)s + b_{30} = X(\omega) + jY(\omega)$, начиналась с положительного значения на вещественной оси ($b_3(j0) = b_{30} > 0$) и, последовательно обходила n квадрантов против часовой стрелки, при изменении частоты в интервале $0 \leq \omega \leq \infty$.

Кривые Михайлова *устойчивых* систем не пересекают начало координат и уходят в бесконечность в n -м квадранте.

Если же кривая Михайлова начинается в начале координат (причем при смещении графика этой кривой вправо – система оказывается устойчивой, а при смещении влево – неустойчивой), то исследуемая система будет находиться на *апериодической границе*.

В том случае, когда кривая Михайлова проходит через начало координат (причем при смещении графика этой кривой влево – система оказывается устойчивой, а при смещении вправо – неустойчивой), то исследуемая система будет находиться на *колебательной границе*.

Если график кривой Михайлова системы n -го порядка совпадает с графиком устойчивой системы $(n - 1)$ -го порядка, то исследуемая система находится на *границе* ∞ -го корня.

Критерий устойчивости Найквиста, в отличие от критериев Рауса-Гурвица и Михайлова, рассматривается только замкнутых систем (рис. 4.6), об устойчивости которой судят по виду годографа разомкнутой системы $W_{раз}(j\omega)$.

Критерий Найквиста (для случая *неустойчивой* и минимально-фазовой $W_{раз}(s)$):

для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы при изменении частоты в интервале $-\infty \leq \omega \leq \infty$, годограф $W_{раз}(j\omega)$ охватывал точку с координатами $(-1, j0)$, против часовой стрелки $l/2$, где l – число правых корней характеристического уравнения $W_{раз}(s)$.

Критерий Найквиста (для случая *устойчивой* и минимально-фазовой $W_{раз}(s)$):

для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы при изменении частоты в интервале $-\infty \leq \omega \leq \infty$, годограф $W_{раз}(j\omega)$ не охватывал точку с координатами $(-1, j0)$.

В том случае, когда годограф $W_{раз}(j\omega)$ проходит через точку $(-1, j0)$, замкнутая система оказывается на границе устойчивости.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

Таблица 4.3

№ варианта (для уравнений (4.24))

параметры	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
λ	0.2	0.3	0.3	0.4	0.4	0.5	0.3	0.6	0.6	0.7	0.1	0.5	0.3	0.4	0.8
K	1.4	1.2	1.3	1.4	1.2	1.3	1.4	1.2	1.3	1.4	1.2	1.3	1.4	1.2	1.3
$T_1(c)$	0.2	0.1	0.4	0.3	0.2	0.1	0.4	0.3	0.2	0.1	0.2	0.5	0.3	0.4	0.5
$T_2(c)$	2.0	2.2	2.4	2.6	2.7	2.1	2.3	2.5	2.0	2.2	2.4	2.6	2.6	2.7	2.1
$T_3(c)$	1.1	1.3	1.1	1.2	1.3	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.4	1.3	1.2

1. В соответствии с вашим вариантом задания (табл. 4.3) определите устойчивость, применяя критерий Рауса-Гурвица, замкнутой системы (рис. 4.6) с передаточными функциями

$$W_1(s) = K, \quad W_2(s) = \frac{T_1 s + 1}{(T_2 s + 1)(T_3^2 s^2 + 2\lambda T_3 s + 1)}, \quad (4.24)$$

Теоретический вывод подтвердите видом переходного процесса, полученным в результате имитационного моделирования замкнутой системы управления с помощью ее Simulink-модели.

2. Замените передаточные функции (4.24) следующими:

$$W_1(s) = \left(1 + \frac{K}{s}\right), \quad W_2(s) = \frac{1}{(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)}, \quad W_{раз}(s) = W_1(s)W_2(s), \quad (4.25)$$

где (в отличие от пп. 1) значение параметра $K > 0$ выбирается произвольно.

Применяя следствие критерия Рауса-Гурвица, рассчитайте значение коэффициента усиления разомкнутой системы K^* , при котором замкнутая система (4.25) будет находиться на колебательной границе устойчивости. Используя K^* определите значения параметра K , выполняя неравенства

$$K = K_1 > K^*, \quad K = K_2 = K^*, \quad K = K_3 < K^*$$

и постройте графики соответствующих весовых функций и переходных процессов Simulink-модели замкнутой системы (при K_1 , K_2 и K_3).

3. Замените передаточные функции (4.24) следующими:

$$W_1(s) = \frac{K}{s}, \quad W_2(s) = \frac{1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}, \quad (4.26)$$

где (в отличие от пп. 1) теперь значение параметра $T_1 \geq 0$ выбирается произвольно. Запишите характеристическое уравнение замкнутой системы (4.26) и покажите, что при $T_1 > 0$ и $T_1 = 0$, замкнутая система будет соответственно устойчивой и находится на границе ∞ -го корня.

Теоретический вывод подтвердите графиками кривых Михайлова, построенными при $T_1 > 0$ и $T_1 = 0$.

4. Замените передаточные функции (4.24) следующими:

$$W_1(s) = K, \quad W_2(s) = \frac{1}{(T_3 s + 1)^3}, \quad (4.27)$$

где (как и в пп. 2) значение параметра $K > 0$ выбирается произвольно.

Учитывая, что $\text{Im}W_{раз}(j\omega) = \frac{-KT_3\omega(3 - T_3^2\omega^2)}{(1 - 3T_3^2\omega^2)^2 + T_3^2\omega^2(3 - T_3^2\omega^2)^2}$, вычислите, используя

соотношение $KT_3\omega(3 - T_3^2\omega^2) = 0$, частоту ω_ϕ (при которой поворот годографа составит угол $\arg W_{раз}(j\omega_\phi) = 180^\circ$) и величину запаса по амплитуде

$$A_{зан} = 1 - \text{Re} W_{раз}(j\omega_\phi) = 1 - \frac{K(1 - 3T_3^2\omega_\phi^2)}{(1 - 3T_3^2\omega_\phi^2)^2 + T_3^2\omega_\phi^2(3 - T_3^2\omega_\phi^2)^2}.$$

Поскольку $\text{mod} W_{раз}(j\omega) = \frac{K}{(T_3^2 \omega^2 + 1)\sqrt{(T_3^2 \omega^2 + 1)}}$, вычислите, используя соотношение

$$\frac{K}{T_3^2 \omega^2 + 1)\sqrt{(T_3^2 \omega^2 + 1)}} = 1, \text{ частоту } \omega_a \text{ (при которой годограф имеет длину } \text{mod} W_{раз}(j\omega_a) = 1$$

), т.е. в результате решения уравнения

$$T_3^6 \omega_a^6 + 3T_3^4 \omega_a^4 + 3T_3^2 \omega_a^2 + 1 - K^2 = 0,$$

определите в системе управления величину запаса по фазе

$$\varphi_{зан} = 180^\circ - 3\text{arct}T_3\omega_a.$$

5. Замените передаточные функции (4.24) следующими:

$$W_1(s) = K \left(1 + \frac{s}{0.05T_1s + 3} \right), \quad W_2(s) = \frac{T_1s + 1}{(T_2s + 1)(T_3^2s^2 + 2\lambda T_3s + 1)}, \quad (4.28)$$

где (как и в пп. 2) значение параметра $K > 0$ выбирается произвольно.

Постройте годографы разомкнутой системы управления, выбирая значения параметра K так, чтобы замкнутая система (согласно критерию Найквиста) была бы устойчивой, неустойчивой и находилась на границе устойчивости.

6. Сделайте выводы на основе сравнительного анализа результатов моделирования.

ЗАДАЧИ И ВОПРОСЫ

1. Сформулируйте необходимые и достаточные условия устойчивости линейной динамической системы управления.

2. Сформулируйте частотный критерий устойчивости Михайлова.

3. Сформулируйте алгебраический критерий устойчивости Рауса-Гурвица.

4. Сформулируйте критерий устойчивости Найквиста. Почему у критерия Найквиста две формулировки?

5. Как определяются запасы устойчивости системы управления по амплитуде и частоте?

6. Дайте качественную характеристику вида годографа разомкнутой системы с передаточной функцией вида

$$W(s) = \frac{K}{s^2(Ts + 1)},$$

опираясь на условия устойчивости замкнутой системы с единичной отрицательной обратной связью.

8. Обеспечивая устойчивость замкнутой системы управления, запишите соотношения, которым должны удовлетворять коэффициенты усиления передаточных функций следующих разомкнутых систем:

$$W_1(s) = \frac{K(T_1s + 1)}{s(T_2s + 1)}, \quad W_2(s) = \frac{Ks}{T_1^2s^2 - T_2s + 1}.$$

4.4. Исследование статических и скоростных ошибок замкнутых систем (2 часа).

Цель занятия – исследование и анализ установившихся ошибок в статических и астатических системах управления.

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Основной характеристикой качества работы систем управления (в установившемся режиме) является величина *установившейся ошибки* e_y , определяемая соотношением

$$e_y = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot e(s), \quad (4.29)$$

где $e(s)$ – изображение по Лапласу сигнала ошибки $e(t)$.

В тех случаях, когда внешнее воздействие постоянно и $e_y \neq 0$, то ошибка, также как и система управления, называются *статическими*. Если же статическая ошибка $e_y = 0$, то систему управления считают *астатической*. Как правило, систему управления считают статической или астатической относительно задающего воздействия $g(t)$ и/или возмущения $f(t)$.

Сигнал ошибки в замкнутой системе (рис. 4.7) можно описать уравнением

$$e(s) = e_g(s) + e_f(s) = \frac{1}{1 + W_1(s)W_2(s)} g(s) + \frac{-W_2(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)} f(s), \quad (4.30)$$

где $e_g(s)$ и $e_f(s)$ – изображения соответственно задающего воздействия $g(t)$ и возмущения $f(t)$, поэтому определение предельных значений (4.29), зависит от явного вида как изображений $g(s)$, $f(s)$, так и передаточных функций $W_1(s)$, $W_2(s)$.

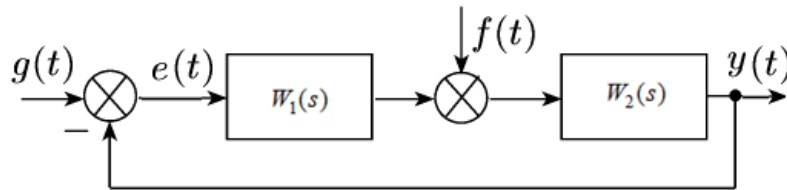


Рис. 4.7. Типовая схема системы управления.

Обычно функционирование систем управления с единичной отрицательной обратной связью рассматривают в типовых режимах – *стабилизации* и *слежения*. В режиме стабилизации задающий сигнал является постоянным, $g(t) = const$, а в режиме слежения переменным, $g(t) = var$.

Установившуюся ошибку в режиме слежения часто называют *скоростной ошибкой*, $e_y = e_{ск}$. Следует отметить, что если скоростная ошибка, при максимальной скорости изменения $g(t)$, будет ограничена, т.е. $e_{ск} \leq e_{ск}^*$, где $e_{ск}^*$ – заданное или допустимое значение скоростной ошибки, то задающее воздействие $g(t) = var$, при расчете ошибок, можно заменить сигналом

$$g^*(t) = \max \left| \frac{dg(t)}{dt} \right| = K_g t.$$

Будем полагать, что передаточные функции имеют вид

$$W_1(s) = \frac{K_1}{s^\nu}, \quad \nu = 0, 1; \quad W_2(s) = \frac{K_1 K_2 R(s)}{s^\nu Q(s)}, \quad (4.31)$$

где ν – порядок астатизма ($\nu = 0$ – астаизм нулевого порядка или статизм, $\nu = 1$ – астатизм первого порядка); $K_1, K_2 > 0$ – коэффициенты передачи; $R(s)$, $Q(s)$ – нормированные устойчивые полиномы

$$R(s) = (r_m s^m + \dots + r_1 s + 1), \quad Q(s) = (q_n s^n + \dots + q_1 s + 1), \quad (4.32)$$

а задающее $g(t)$ и возмущающее $f(t)$ воздействия (соответственно в режиме стабилизации и слежения) удовлетворяют условиям:

$$g(t) = g_0 1(t), \quad f(t) = f_0 1(t); \quad (4.33)$$

$$g(t) = g^*(t) = \max \left| \frac{dg(t)}{dt} \right| \leq K_g t, \quad f(t) = f^*(t) = \max \left| \frac{df(t)}{dt} \right| \leq K_f t, \quad (4.34)$$

где $g_0, K_g, f_0, K_f = \text{const} > 0$ – числовые коэффициенты.

Поскольку в соотношениях (4.29), (4.30), согласно (4.33) и (4.34), используются изображения сигналов $1(t)$ и t , приведем их явный вид

$$L(1(t)) = \int_0^{\infty} 1(t) e^{-st} dt = \frac{1}{s}, \quad L(t) = \int_0^{\infty} t e^{-st} dt = \frac{1}{s^2}.$$

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

Таблица 4.4

параметры	№ варианта (для уравнений (4.30) – (4.34))														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
K_1	4	2	3	5	6	7	4	2	3	7	6	5	4	2	3
K_2	0.2	0.3	0.3	0.4	0.4	0.5	0.3	0.6	0.6	0.7	0.1	0.5	0.3	0.4	0.8
r_1	0.2	0.1	0.4	0.3	0.2	0.1	0.4	0.3	0.2	0.1	0.2	0.5	0.3	0.4	0.5
q_1	2.0	2.2	2.4	2.6	2.7	2.1	2.3	2.5	2.0	2.2	2.4	2.6	2.6	2.7	2.1
q_2	1.1	1.3	1.1	1.2	1.3	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.4	1.3	1.2
g_0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
f_0	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3
K_g	0.6	0.6	0.7	0.1	0.5	0.3	0.4	0.8	0.6	0.7	0.1	0.5	0.3	0.4	0.8
K_f	0.2	0.3	0.3	0.4	0.4	0.5	0.3	0.2	0.5	0.3	0.4	0.4	0.5	0.3	0.3

1. В соответствии с вашим вариантом задания (табл. 4.4), исследуя случай $\nu = 0$, рассчитайте значение статической ошибки в режиме стабилизации замкнутой системы управления (4.30). С помощью Simulink-модели системы управления (структурная схема которой показана на рис. 4.7) покажите, что теоретический и экспериментальный результаты совпадают.

2. Повторите пп.1 и рассчитайте новое значение коэффициента усиления K_1 , при котором уже найденную величину статической ошибки можно уменьшить вдвое. Подтвердите это утверждение экспериментально.

Покажите теоретически и продемонстрируйте с помощью Simulink-модели, что рассматриваемая система управления в режиме слежения не является работоспособной.

3. Рассматривая случай $\nu = 1$, рассчитайте величину скоростной ошибки в системе управления (4.30) для режима слежения. Подтвердите, используя Simulink-модель системы управления, эквивалентность теоретического и экспериментального результатов.

Покажите теоретически и продемонстрируйте на Simulink-модели, что рассматриваемая система управления в режиме стабилизации дает нулевую статическую ошибку.

Замечание: предварительно убедитесь, что исследуемая замкнутая система управления устойчива. Если окажется, что замкнутая система неустойчива, то замените табличное значение параметра K_1 на новое. Предлагаемую замену обоснуйте и используйте в последующих расчетах и моделировании.

4. Повторите пп.3 и покажите, рассчитывая новые значения коэффициента усиления K_1 , что коэффициент усиления разомкнутой системы имеет предельное или критическое значение $K_{\text{крит}}$, т.е. замкнутая система управления при $K_1 K_2 > K_{\text{крит}}$ потеряет устойчивость.

Подтвердите этот вывод с помощью Simulink-модели, рассматривая варианты имитационного моделирования: $K_1 K_2 = K_{\text{крит}}$; $K_1 K_2 > K_{\text{крит}}$.

5. Сделайте выводы на основе сравнительного анализа результатов моделирования.

ЗАДАЧИ И ВОПРОСЫ

1. Чем отличается статическая система от астатической и от чего зависит порядок астатизма системы управления?

2. Докажите, что в режиме стабилизации замкнутой системы управления установившаяся ошибка зависит от величины коэффициента усиления разомкнутой статической системы $W_{раз}(s)$.

3. Докажите, что при стабилизации замкнутой системы управления с астатической $W_{раз}(s)$, величина установившейся ошибки стремится к нулю.

4. Докажите, что в следящей замкнутой системе управления со статической $W_{раз}(s)$, величина установившейся ошибки неограниченно возрастает.

5. Докажите, что в замкнутой системе с астатической $W_{раз}(s)$, величина скоростной ошибки зависит от величины коэффициента усиления разомкнутой системы.

6. При внешних воздействиях $g(t) = 1 + 0.1t$ и $f(t) = 0.2$, определите величину установившейся ошибки в системе управления (рис. 4.7), где $W_1(s) = 0.5$, $W_2(s) = \frac{4}{s(s+1)}$.

4.5. Исследование нелинейных систем 1-го типа (4 часа).

Цель занятия – исследование и анализ динамических процессов в нелинейных системах управления 1-го типа.

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Рассматриваются так называемые нелинейные системы управления 1-го типа со структурой (рис. 4.8) состоящей из двух блоков – линейного (ЛБ) и нелинейного (НБ).

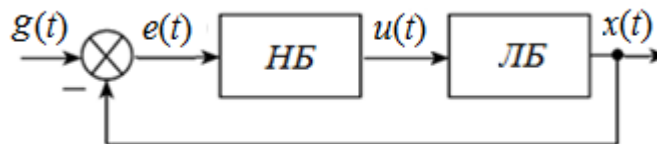


Рис. 4.8. Структура нелинейной системы 1-го типа.

Примерами нелинейных элементов НБ, показанными на рис. 4.9, являются "люфт", "зона нечувствительности", "реле (с гистерезисом)" и "насыщение".



Рис. 4.9. Примеры типовых нелинейных блоков в среде simulink.

Математической моделью ЛБ служат линейное дифференциальное уравнение или передаточная функция

$$W(s) = \frac{R(s)}{Q(s)}. \quad (4.35)$$

где $R(s) = r_ms^m + \dots + r_1s + r_0$ и $Q(s) = (s^n + q_{n-1}s^{n-1} + \dots + q_1s + q_0)$ – соответствующие полиномы.

Изображение процессов на фазовой плоскости. Если уравнения системы управления представлены в нормальной форме, то вектор состояния системы однозначно определяет ее состояние. Каждому состоянию системы в пространстве состояний соответствует точка. Точка, соответствующая текущему состоянию системы, называется изображающей точкой. При изменении состояния изображающая точка описывает траекторию. Эта траектория называется фазовой траекторией. Совокупность фазовых траекторий, соответствующая всевозможным начальным условиям, называется

ся фазовым портретом.

Наглядно фазовую траекторию или фазовый портрет можно представить в случае двухмерного фазового пространства. В фазовой плоскости по осям координат откладываются две переменные (фазовые координаты), однозначно определяющие состояние системы 2-го порядка.

Метод анализа и синтеза системы управления, основанный на построении фазового портрета, называют методом фазовой плоскости.

Если рассмотреть систему управления 2-го порядка, которая описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= F(x_1, x_2), \end{aligned} \quad (4.36)$$

то ее решение $x_i = x_i(x^0, t)$, $i = 1, 2$, при начальном условии $x(t_0) = x^0 = (x_1^0, x_2^0)^T$, представляет собой параметрические уравнения фазовых траекторий, где параметром является время. Построив фазовые траектории по этим уравнениям при различных начальных условиях, получаем фазовый портрет.

Уравнения (4.36) являются дифференциальными уравнениями фазовых траекторий в параметрической форме. Разделив второе уравнение на первое, получим дифференциальное уравнение

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{F_1(x_1, x_2)}{x_2}, \quad (4.37)$$

решение которого непосредственно связывает фазовые координаты. Это уравнение будем называть (непараметрическим) *дифференциальным уравнением фазовых траекторий*. Фазовые траектории обладают следующими свойствами. В верхней полуплоскости изображающая точка движется слева направо, так как $\dot{x}_1 = x_2 > 0$ и x_1 возрастает. В нижней полуплоскости, наоборот, изображающая точка движется справа налево, так как $\dot{x}_1 = x_2 < 0$ и x_1 убывает.

Один из примеров simulink-модели нелинейной системы 1-го типа представлен на рис. 4.10, где используется нелинейный элемент типа "квантователь (с одинаковым шагом по уровню)".

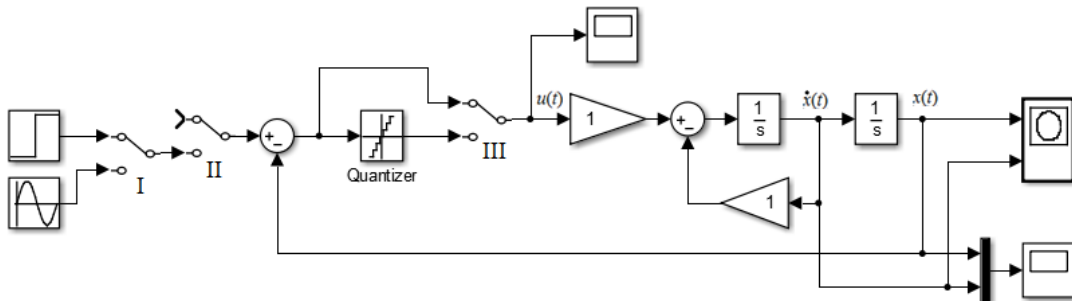


Рис. 4.10. Simulink-модель нелинейной системы 1-го типа с "квантователем".

Для удобства имитационного моделирования в simulink-модель системы управления введены ключи, в частности: ключ I – подключает входной задающий сигнал (ступенчатый или синусоидальный); ключ II – позволяет перевести систему управления в автономный режим (внешнее воздействие отсутствует); ключ III – отключает (подключает) нелинейный блок, превращая систему управления в линейную (нелинейную).

При этом, используя обычные и графические индикаторы, можно наблюдать как переходные процессы, так и фазовые портреты системы управления.

С помощью simulink-модели системы управления, в случае, когда положение всех ключей полностью соответствует изображению на рис. 4.10 (система линейная), можно построить графики (рис. 4.11): а) – фазового портрета; б) и в) – соответственно переменных $u(t)$ и $x(t)$, $\dot{x}(t)$, где $x(t_0) = x^0 = (0.45, 0.45)^T$.

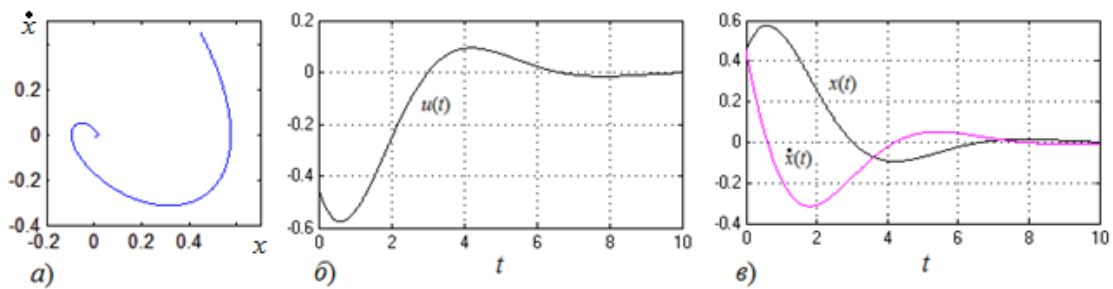


Рис. 4.11. Графики Simulink-модели линейной системы управления в автономном режиме.

Случай, когда ключ III занимает положение противоположное тому, что показано на рис. 4.10 (система управления нелинейная, интервал квантования $\Delta t = 0.2$ с), графики фазового портрета и переменных $u(t)$, $x(t)$ и $\dot{x}(t)$ имеют вид (при тех же начальных условиях), представленный на рис. 4.12.

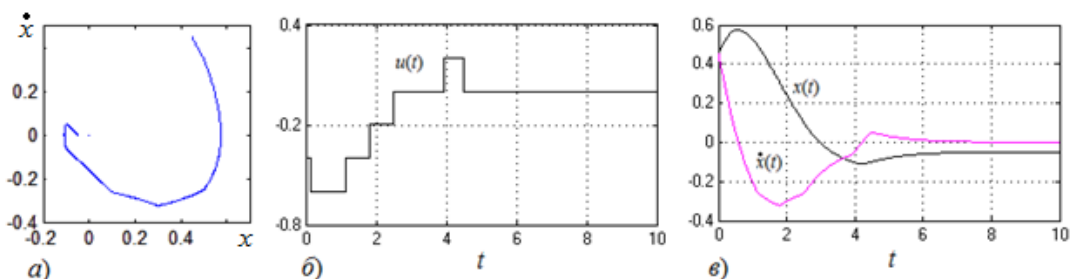


Рис. 4.12. Графики процессов нелинейной системы управления в автономном режиме.

Графики фазового портрета и переменных $u(t)$, $x(t)$ и $\dot{x}(t)$, с начальными условиями $x(t_0) = x^0 = (0.45, 0.45)^T$, построенные в нелинейной системе управления "с квантователем" при входных воздействиях $g(t) = 1(t)$ и $g(t) = \sin(t)$, изображены на рис. 4.13 соответственно а) и б).

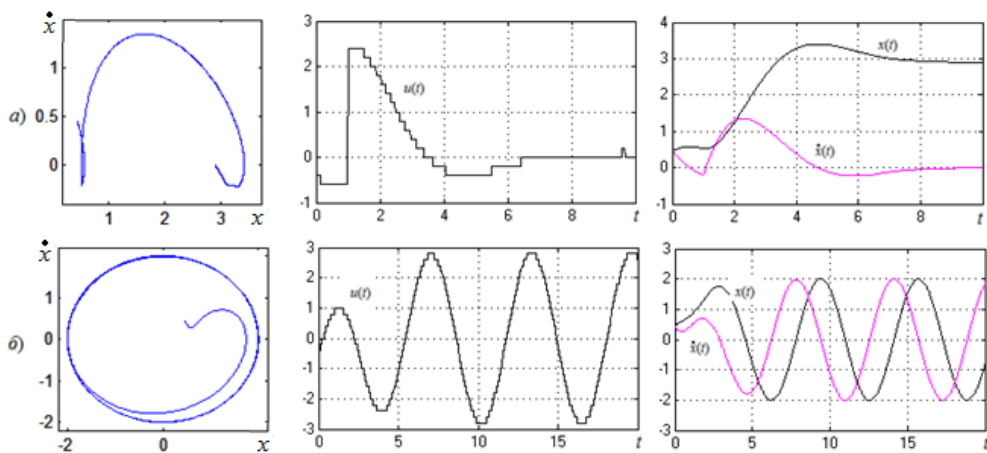


Рис. 4.13. Графики процессов в нелинейной системе управления в режимах стабилизации $g(t) = 1(t)$ и слежения $g(t) = \sin(t)$.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

Исследуются динамические процессы, протекающие в нелинейной системе управления 1-го типа, имитационная модель которой приведена на рис. 4.14, где K и T – соответственно коэффициент усиления и постоянная времени линейного блока.

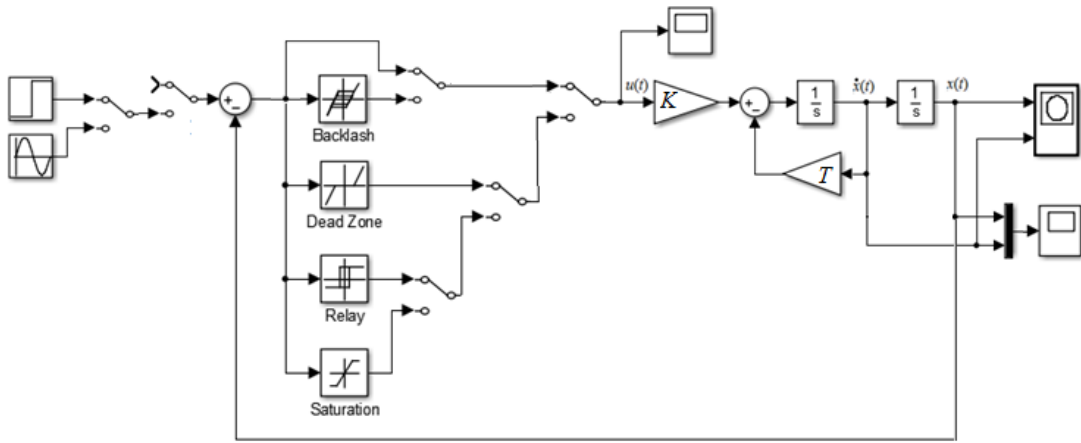


Рис. 4.14. Simulink-модель нелинейной системы 1-го типа.

Таблица 4.5

параметры	№ варианта														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
K	4	2	3	5	6	7	4	2	3	7	6	5	4	2	3
T	1.2	0.9	0.7	0.4	0.4	0.5	0.8	1.6	0.6	0.7	1.5	1.3	0.9	1.4	0.8
x_1^0	0.2	0.1	0.4	0.3	0.2	0.1	0.4	0.3	0.2	0.1	0.2	0.5	0.3	0.4	0.5
x_2^0	2.0	2.2	2.4	2.6	2.7	2.1	2.3	2.5	2.0	2.2	2.4	2.6	2.6	2.7	2.1
параметры ширины люфта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
начало и конец зоны нечувствительности	1.1	1.3	1.1	1.2	1.3	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.4	1.3	1.2
начало и конец зоны нечувствительности	-0.1	-0.2	-0.3	-0.4	-0.3	-0.2	-0.1	-0.1	-0.2	-0.3	-0.4	-0.3	-0.2	-0.1	-0.4
и	и	и	и	и	и	и	и	и	и	и	и	и	и	и	и
нечувствительности	0.1	0.2	0.3	0.4	0.3	0.2	0.1	0.1	0.2	0.3	0.4	0.3	0.2	0.1	0.4
значение всех порогов включения	-0.3	-0.4	-0.5	-0.6	-0.2	-0.3	-0.4	-0.5	-0.6	-0.2	-0.3	-0.4	-0.5	-0.6	-0.3
и	и	и	и	и	и	и	и	и	и	и	и	и	и	и	и
верхний и нижний пороги ограничений	0.3	0.4	0.5	0.6	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.3
и	и	и	и	и	и	и	и	и	и	и	и	и	и	и	и
нижний порог ограничений	0.6	0.6	0.7	0.1	0.5	0.3	0.4	0.8	0.6	0.7	0.1	0.5	0.3	0.4	0.8

1. В соответствии с вашим вариантом задания (табл. 4.5), используя simulink-модель (рис. 4.14) в автономном режиме работы ($g(t) = 0$), постройте графики фазового портрета и переменных $u(t)$, $x(t)$ и $\dot{x}(t)$ линейной системы управления (нелинейности отключены).

2. Переведите simulink-модель из автономного режима в режим управления. Постройте графики фазового портрета и переменных $u(t)$, $x(t)$, $\dot{x}(t)$ линейной системы управления в режимах как стабилизации $g(t) = 1(t)$, так и слежения $g(t) = \sin(t)$.

3. Подключите в simulink-модели нелинейность типа "люфт" и постройте графики фазового портрета и переменных $u(t)$, $x(t)$ и $\dot{x}(t)$, для трех режимов нелинейной системы 1-го типа: автономного, $g(t) = 0$; стабилизации, $g(t) = 1(t)$; слежения $g(t) = \sin(t)$.

4. Переключите нелинейность "люфт" на нелинейность типа "зона нечувствительности" и повторите задание пп.3.

5. Переключите нелинейность "зона нечувствительности" на нелинейность типа "реле (с гистерезисом)" и повторите задание пп.3.

6. Переключите нелинейность "реле (с гистерезисом)" на нелинейность типа "насыщение" и повторите задание пп.3.

7. Сделайте выводы на основе сравнительного анализа результатов моделирования.

ЗАДАЧИ И ВОПРОСЫ

1. Чем отличие существенной нелинейности от несущественной нелинейности?
2. Какими принципиальными особенностями обладают нелинейные системы по сравнению с линейными?
3. Приведите примеры нелинейных статических характеристик.
4. Какие методы исследования нелинейных систем вам известны?
5. Поясните смысл и содержание метода фазовой плоскости.

5. Методические указания для самостоятельной работы студентов

(по теме: математические модели в пространстве состояний)

5.1. Состояние динамической системы

В современной теории систем активно развиваются и используются *методы пространства состояний*. Наиболее характерный пример такого применения – теория автоматического управления, где, наряду с простыми классическими методами, появляются новые абстрактные методы, позволяющие решать более сложные задачи исследования замкнутых многомерных систем управления.

Начало систематического использования методов пространства состояний обычно связывают с работами Л.С. Понтрягина – по математической теории оптимальных процессов, Р. Беллмана – по динамическому программированию и Р. Калмана – по общей теории фильтрации и управления.

К преимуществам методов пространства состояний общепринято относить: одинаковую формулировку различных задач и простоту их решения при наличии большого числа переменных; возможность обнаружения и исследования таких свойств систем, которые при использовании классических подходов в терминах "вход-выход" остались бы недоступными; возможность анализа и синтеза нестационарных и нелинейных динамических систем; использование векторно-матричной формы представления для описания исследовательских задач, имеющей неоспоримое преимущество при их численном решении на ПЭВМ.

Основной недостаток методов пространства состояний заключается в том, что переменные состояния сохраняют ясный физический смысл только тогда, когда они наблюдаемы и могут быть измерены или когда переменные состояния совпадают с фазовыми

$$x_1(t)=x(t), x_2(t)=dx_1(t)/dt, \dots, x_n(t)=dx_{n-1}(t)/dt.$$

В противном случае, если выбор переменных состояния определяется иным образом, связь математической модели с физической реальностью теряется и, как следствие, исчезает возможность корректного сопоставления расчетных и экспериментальных данных.

5.1.1. Вход, состояние и выход

Динамика системы описывается ее математической моделью, аналитически отражающей зависимости между тремя множествами переменных: переменными входа $u(t) \in R^m$, выхода $y(t) \in R^l$ и состояния $x(t) \in R^n$, где R^i – i -мерное линейное вещественное пространство.

Вход системы, выраженный множеством временных функций, представляет описание внешних переменных, действующих на систему. *Выход системы*, выраженный аналогично, – это описание наблюдаемых выходных переменных, непосредственно отражающих поведение системы.

Как уже отмечалось, любая система состоит из набора подсистем или элементов (звеньев), которые по характеру реакции на входное воздействие делятся на статические и динамические.

Отличительной особенностью статической системы является ее безынерционность, т.е. наличие мгновенной реакции на входное воздействие, никак не связанное с ее предыдущим положением. В любой момент времени t_0 значение выхода статической системы $y(t_0)$ однозначно определяется по значению входа $u(t_0)$, а сама связь (стационарная или нестационарная) *статическая характеристика* – описывается одним из уравнений:

$$y = F(u), \quad y = F(u, t).$$

Важнейшее свойство любой динамической системы – это зависимость ее реакции как от переменных, действующих на систему в данный момент, так и от переменных, действовавших на нее в прошлом. Отметим, что для определения в момент времени t_1 значения выхода $y(t_1)$ информации только о значении входа $u(t_1)$ недостаточно, поскольку требуются еще сведения о предыстории изменения $u(t)$ на некотором интервале $t \in [t_0, t_1]$ и начальном состоянии $x(t_0)$. Такую зависимость будем описывать следующим образом:

$$y(t_1) = S(x(t_0), u(t)), \quad t \in [t_0, t_1], \quad (5.1)$$

где S – оператор преобразования одной функции в другую.

Таким образом, состояние динамической системы – это некий параметр, однозначно определяющий реакцию выхода системы относительно входа. Состояние системы должно удовлетворять так называемым *аксиомам совместности*. Укажем две наиболее важные.

Первая аксиома совместности. Для определения будущего поведения системы не играет роли то, каким образом она пришла в данное состояние, поскольку траектория движения системы определяется однозначно по начальному состоянию и динамике входа в рассматриваемом интервале времени.

Выход $y(t)$, $\forall t \geq t_0$ определяется однозначно при заданных $x(t_0)$ и $u(t)$, $t \in [t_0, t_1]$.

Вторая аксиома совместности. Если траекторию движения системы разбить на участки, то каждый из них можно рассматривать как новую траекторию с соответствующим начальным условием. При этом в зависимости от входного процесса и начального состояния динамика системы будет изменяться соответствующим образом.

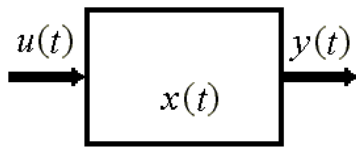
Пусть $t_0 < t_1 < t_2$, тогда при любом $x(t_0)$ и $\forall t \in [t_0, t_1]$ выход $y(t_1)$ будет определяться уравнением (2.1). Если же вычислить значение $x(t_1)$, то выход $y(t_2)$ будет следующим:

$$y(t_2) = S(x(t_1), u(t)), \quad t \in [t_1, t_2].$$

5.1.2. Пространство состояний

Множество $X = \{x\}$ возможных значений состояния системы называется *пространством состояний*.

В случае $X = R^n$ состояние $x = x(t)$ есть n -мерный вещественный вектор – *вектор состояния* (в частном случае – это *фазовый вектор*), элементы которого будем обозначать через $x_i(t)$, $i = \overline{1, n}$.



Вектор, составленный из указанных элементов, обычно записывают следующим образом:

$$x = x(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T,$$

где T – символ транспонирования.

Если x – состояние системы, $\mu(\cdot)$ – некоторое взаимно однозначное отображение пространства X в себя ($\mu: X \rightarrow X$), то $\bar{x} = \mu(x)$ также можно считать состоянием данной системы. Тогда состояние x можно определить различным, но взаимно однозначным образом.

Например, если $X = R^n$, а T – n -мерная невырожденная матрица ($\det T \neq 0$), то вектор $\bar{X} = Tx$ также можно применять для описания состояния системы, поскольку $x = T^{-1}\bar{X}$, где T^{-1} – обратная матрица.

5.2. Описание динамической системы в нормальной форме

Уравнения состояния так называемых *конечномерных дифференциальных (непрерывных) систем* можно представить в виде

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t), t), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \geq t_0, \quad (5.2)$$

$$y(t) = g(x(t), u(t), t), \quad (5.3)$$

где $f(\cdot)$, $g(\cdot)$ – вектор-функции от векторных аргументов.

Уравнение (5.2) называют *уравнением состояния (эволюционным уравнением)*, описывающим изменение состояния системы во времени $t \in R$, в соответствии с начальным условием $x(t_0)$ и входным воздействием $u(t)$, а уравнение (5.3) – уравнением выхода, устанавливающим статическую связь между значениями выхода и текущими значениями состояния и входа.

5.2.1. Уравнения линейных систем в пространстве состояний

Метод пространства состояний в качестве базовой математической модели системы (5.2), (5.3), когда функции $f(\cdot)$, $g(\cdot)$ линейны по x , u , предполагает использование уравнений вида

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \geq t_0, \quad (5.4)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t), \quad (5.5)$$

где $x(t) \in R^n$; $u(t) \in R^m$; $y(t) \in R^k$; матрицы-функции $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $D(t)$ соответствующего размера¹. Системы (5.4), (5.5) называются *непрерывными линейными системами*, в которых матрицы $A(t)$, $B(t)$ и $C(t)$ имеют следы

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad (5.6)$$

$$B(t) = \begin{pmatrix} b_{11}(t) & b_{12}(t) & \dots & b_{1m}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1}(t) & b_{n2}(t) & \dots & b_{nm}(t) \end{pmatrix}, \quad m \leq n, \quad (2.7)$$

$$C(t) = \begin{pmatrix} c_{11}(t) & c_{12}(t) & \dots & c_{1n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{l1}(t) & c_{l2}(t) & \dots & c_{ln}(t) \end{pmatrix}, \quad l \leq n. \quad (2.8)$$

¹ В теории автоматического управления матрицы, входящие в уравнения (5.4), (5.5), обычно называют: $A(t)$ – матрицей состояния системы, $B(t)$ – матрицей управления, $C(t)$ – матрицей выхода, $D(t)$ – матрицей обхода системы.

В случае, когда матрица $D(t) \equiv 0$, систему (5.4), (5.5) называют *собственной*² (*строго реализуемой*), а при $D(t) \neq 0$ – *несобственной*.

Систему (5.4), (5.5) с матрицами $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $D(t)$ называют *нестационарной*, если же элементы этих матриц от времени не зависят, то система – *стационарная*.

Структура стационарной линейной системы представлена на рис. 5.2, для которой (например, при $n > m$), математическое описание будет следующим:

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \geq t_0, \quad (5.9)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad D = 0. \quad (5.10)$$

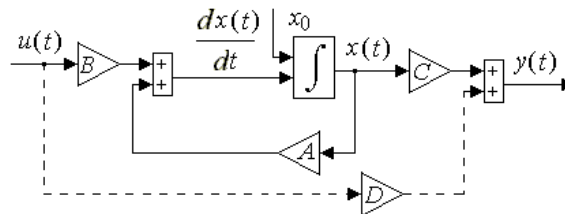


Рис. 5.2. Структурная схема стационарной динамической системы.

Системы (5.4), (5.5) и (5.9), (5.10) часто называют *нормальными системами*, или *системами в нормальной форме Коши*. В тех случаях, когда в системе (5.9), (5.10) переменные состояний совпадают с фазовыми, оказывается, что матрица A имеет специфическую форму записи – *форму Фробениуса*, представляемую в виде

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{pmatrix}, \quad (5.11)$$

где $a_i = \text{const} > 0$. Для матрицы Фробениуса характерно следующее: элементы над главной диагональю равны единице, а элементы нижней строки являются коэффициентами однородного дифференциального уравнения n -го порядка

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dx(t)}{dt} + a_n x(t) = 0. \quad (5.12)$$

Иногда матрицу Фробениуса называют *матрицей сопровождения*.

5.2.2. Способы программирования в переменных состояния

Наиболее распространенными приемами построения моделей динамических систем в переменных состояния являются приемы, основанные на *способах прямого, параллельного или последовательного программирования*.

Поскольку исходное математическое описание системы в этих способах программирования – передаточная функция, выберем описание динамической системы, например, в следующем виде:

$$x(s) = W(s)u(s) = \frac{b_0 s^2 + b_1 s + b_2}{a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3} u(s). \quad (5.13)$$

Прямое программирование относится к наиболее общим подходам, позволяющим осуществить переход в пространство состояний без каких-либо предварительных условий.

Этапы прямого программирования предусматривают последовательное выполнение следующих типовых действий или процедур:

во-первых, числитель и знаменатель функции $W(s)$ вида (5.13) разделим на выражение $a_0 s^3$, соответствующее слагаемому с максимальной степенью s в знаменателе, в результате получим

² Такой тип систем в прикладных задачах является наиболее распространенным.

уравнение

$$x(s) = \frac{\frac{b_0}{a_0} s^{-1} + \frac{b_1}{a_0} s^{-2} + \frac{b_2}{a_0} s^{-3}}{1 + \frac{a_1}{a_0} s^{-1} + \frac{a_2}{a_0} s^{-2} + \frac{a_3}{a_0} s^{-3}} u(s); \quad (5.14)$$

во-вторых, введем обозначение

$$E(s) = \frac{1}{1 + \frac{a_1}{a_0} s^{-1} + \frac{a_2}{a_0} s^{-2} + \frac{a_3}{a_0} s^{-3}} u(s); \quad (5.15)$$

в-третьих, перепишем уравнение (2.15) следующим образом:

$$E(s) = u(s) - \frac{a_1}{a_0} s^{-1} E(s) - \frac{a_2}{a_0} s^{-2} E(s) - \frac{a_3}{a_0} s^{-3} E(s); \quad (5.16)$$

в-четвертых, учитывая соотношение (5.15), а также вводя обозначение выхода $y(s) = x(s)$, представим уравнение (5.14) в виде

$$y(s) = x(s) = \frac{b_0}{a_0} s^{-1} E(s) + \frac{b_1}{a_0} s^{-2} E(s) + \frac{b_2}{a_0} s^{-3} E(s); \quad (5.17)$$

в-пятых, введем в рассмотрение переменные состояния, которые в изображениях зададим следующим образом:

$$x_1(s) = s^{-3} E(s), \quad (5.18)$$

$$x_2(s) = s^{-2} E(s), \quad (5.19)$$

$$x_3(s) = s^{-1} E(s); \quad (5.20)$$

в-шестых, запишем совместно уравнения (5.15) – (5.18). Подстановка соотношений (5.19) в (5.18) и соответственно (5.20) в (5.19) позволяет записать уравнения

$$x_1(s) = s^{-1} x_2(s), \quad x_2(s) = s^{-1} x_3(s). \quad (5.21)$$

Кроме того, подстановка $E(s)$ вида (5.16) в соотношение (5.17), с учетом обозначений (5.18) – (5.20), позволяет записать равенство

$$y(s) = \frac{b_0}{a_0} x_1(s) + \frac{b_1}{a_0} x_2(s) + \frac{b_2}{a_0} x_3(s). \quad (5.22)$$

Аналогичные действия, выполненные для выражения (5.20), приводят к следующему уравнению

$$x_3(s) = s^{-1} \left(u(s) - \frac{a_1}{a_0} x_3(s) - \frac{a_2}{a_0} x_2(s) - \frac{a_3}{a_0} x_1(s) \right). \quad (5.23)$$

Объединяя уравнения (5.20) – (5.23), окончательно получаем

$$\begin{aligned} s x_1(s) &= x_2(s), \quad s x_2(s) = x_3(s), \\ s x_3(s) &= -\frac{a_3}{a_0} x_1(s) - \frac{a_2}{a_0} x_2(s) - \frac{a_1}{a_0} x_3(s) + u(s), \end{aligned} \quad (5.24)$$

$$y(s) = \frac{b_0}{a_0} x_1(s) + \frac{b_1}{a_0} x_2(s) + \frac{b_2}{a_0} x_3(s),$$

где первые три уравнения – уравнения состояний системы, а последнее – уравнение ее выхода.

Уравнения (5.24), записанные в изображениях, можно переписать относительно оригиналов следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= x_2(t), \quad \frac{dx_2(t)}{dt} = x_3(t), \\ \frac{dx_3(t)}{dt} &= -\frac{a_3}{a_0}x_1(t) - \frac{a_2}{a_0}x_2(t) - \frac{a_1}{a_0}x_3(t) + u(t), \\ y(t) &= \frac{b_0}{a_0}x_1(t) + \frac{b_1}{a_0}x_2(t) + \frac{b_2}{a_0}x_3(t), \end{aligned} \quad (5.25)$$

т.е. в виде, который полностью идентичен уравнениям нормальной системы (5.9), (5.10), полагая, что имеют место соотношения

$$\begin{aligned} x^T(t) &= (x_1(t) \quad x_2(t) \quad x_3(t)), \\ A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{a_3}{a_0} & -\frac{a_2}{a_0} & -\frac{a_1}{a_0} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ C &= \begin{pmatrix} \frac{b_0}{a_0} & \frac{b_1}{a_0} & \frac{b_2}{a_0} \end{pmatrix}, \quad D = 0. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Для наглядности приведем числовой пример. Пусть в исходной передаточной функции $W(s)$ вида (5.13) коэффициенты имеют значения:

$$b_0 = 1, \quad b_1 = 7, \quad b_2 = 12, \quad a_0 = 1; \quad a_1 = 3, \quad a_2 = 2, \quad a_3 = 0, \quad (5.27)$$

тогда в системе (2.9), (2.10) матрицы и векторы будут следующими:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = (12 \quad 7 \quad 1), \quad D = 0. \quad (5.28)$$

Для динамической системы (5.25) – (5.27) или в нормальной форме системы (5.9), (5.10), (5.28) можно построить структурную схему в пространстве состояний, показанную на рис. 5.3.

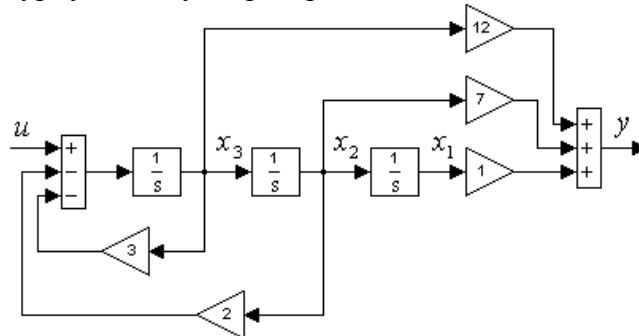


Рис. 5.3. Структурная схема динамической системы (5.25) – (5.27).

Параллельное программирование. Для применения этого способа требуется, чтобы полюса передаточной функции $W(s)$ – корни знаменателя – были бы вещественными и рациональными, т.е. допускалось представление $W(s)$ в виде суммы дробно-рациональных функций. Данный способ программирования рассмотрим на числовом примере. Пусть аналогично системе (5.13), (5.27) исследуемая система описывается уравнением

$$x(s) = \frac{s^2 + 7s + 12}{s^3 + 3s^2 + 2s} u(s). \quad (5.29)$$

Параллельное программирование предусматривает выполнение определенной последовательности действий:

во-первых, учитывая явный вид $W(s)$, выражение (5.29) перепишем следующим образом:

$$x(s) = \frac{s^2 + 7s + 12}{s^3 + 3s^2 + 2s} u(s) = \frac{s^2 + 7s + 12}{s(s+1)(s+2)} u(s) = \left(\frac{\alpha_1}{s} + \frac{\alpha_2}{s+1} + \frac{\alpha_3}{s+2} \right) u(s), \quad (5.30)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – неопределенные множители;
во-вторых, используя тождество

$$\alpha_1(s+1)(s+2) + \alpha_2s(s+2) + \alpha_3s(s+1) = s^2 + 7s + 12,$$

запишем систему линейных уравнений относительно его коэффициентов

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1,$$

$$3\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 7,$$

$$2\alpha_1 = 12,$$

решение которой будет иметь вид

$$\alpha_1 = 6, \quad \alpha_2 = -6, \quad \alpha_3 = 1; \quad (5.31)$$

в-третьих, учитывая (5.31), а также переобозначив $y(s) = x(s)$, перепишем уравнение (5.30) следующим образом:

$$y(s) = \left(\frac{1}{s} \cdot 6 + \frac{1}{s+1} \cdot (-6) + \frac{1}{s+2} \cdot 1 \right) u(s); \quad (5.32)$$

в-четвертых, в соответствии с выражением (5.32) введем в рассмотрение переменные состояния

$$x_1(s) = \frac{1}{s} u(s), \quad x_2 = \frac{1}{s+1} u(s), \quad x_3(s) = \frac{1}{s+2} u(s), \quad (5.33)$$

уравнения которых в эквивалентном виде будут иметь вид

$$\begin{aligned} sx_1(s) &= u(s), \\ sx_2(s) &= -x_2(s) + u(s), \\ sx_3(s) &= -2x_3(s) + u(s), \end{aligned} \quad (5.34)$$

а также, учитывая явный вид переменных состояния (5.33), перепишем уравнение (5.32) следующим образом:

$$y(s) = 6x_1(s) - 6x_2(s) + x_3(s). \quad (5.35)$$

Уравнения состояния (5.34) и уравнение выхода (5.35) можно записать и в оригиналах, т.е. в виде системы уравнений

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = u(t), \quad (5.36)$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = -x_2(t) + u(t),$$

$$\frac{dx_3(t)}{dt} = -2x_3(t) + u(t),$$

$$y(t) = 6x_1(t) - 6x_2(t) + x_3(t),$$

которой в векторно-матричной форме (5.9), (5.10) соответствуют следующие матрицы и векторы:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = (6 \quad -6 \quad 1), \quad D = 0. \quad (5.37)$$

Структурная схема динамической системы (5.36) или (5.9), (5.10), (5.37) показана на рис. 5.4.

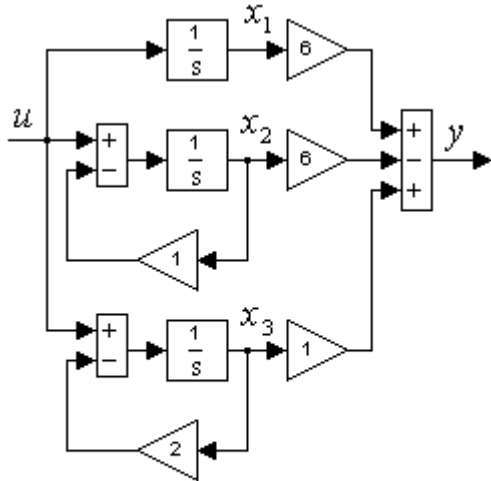


Рис. 5.4. Структурная схема системы (5.36).

Последовательное программирование. Для применения этого способа должно быть выполнено условие – $W(s)$ исследуемой системы должна быть представлена в виде произведения дробно-рациональных функций, иначе говоря, как полюса, так и нули $W(s)$ должны быть вещественны и рациональны.

Применение способа параллельного программирования, как и в предыдущем случае параллельного программирования, рассмотрим на примере выражения (5.29).

Этапы последовательного программирования следующие:

во-первых, уравнение (5.29) перепишем в виде

$$x(s) = \frac{s^2 + 7s + 12}{s^3 + 3s^2 + 2s} u(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{(s+3)}{(s+1)} \cdot \frac{(s+4)}{(s+2)} u(s); \quad (5.38)$$

во-вторых, введем в рассмотрение дополнительные переменные $u_1(s)$, $E_1(s)$ и переменную состояния $x_1(s)$, зада-

вая уравнения

$$u_1(s) = \frac{1(s+3)}{s(s+1)} u(s), \quad E_1(s) = \frac{1}{1+2s^{-1}} u_1(s), \quad x_1(s) = s^{-1} E_1(s), \quad (5.39)$$

что позволяет первую переменную состояния $x_1(s)$ описать в виде

$$x_1(s) = \frac{s^{-1}}{1+2s^{-1}} u_1(s) = \frac{1}{s+2} u_1(s)$$

или следующим образом:

$$sx_1(s) = -2x_1(s) + u_1(s); \quad (5.40)$$

в-третьих, подобно предыдущему этапу, введем в рассмотрение переменные вида

$$u_2(s) = \frac{1}{s} u(s), \quad E_2(s) = \frac{1}{1+s^{-1}} u_2(s), \quad x_2(s) = s^{-1} E_2(s), \quad (5.41)$$

что позволяет преобразовать выражение $u_1(s)$ из (5.39) и получить соотношение

$$u_1(s) = \frac{s+3}{s+1} u_2(s) = (1+3s^{-1}) E_2(s) = u_2(s) + 2x_2(s), \quad (5.42)$$

а также записать следующее уравнение для второй переменной состояния:

$$sx_2(s) = -x_2(s) + u_2(s); \quad (5.43)$$

в-четвертых, аналогично предыдущим этапам введем в рассмотрение переменные вида

$$E_3(s) = u(s), \quad x_3(s) = s^{-1} E_3(s), \quad (5.44)$$

тогда выражение для $u_2(s)$ из (5.41) получит вид

$$u_2(s) = \frac{1}{s} E_3(s) = x_3(s), \quad (5.45)$$

а третье уравнение состояния будет следующим:

$$sx_3(s) = u(s); \quad (5.46)$$

в-пятых, в результате подстановки уравнений (5.45) в (5.43) и (5.45) в (5.42), а затем (5.42) в (5.40) получаем систему уравнений состояния в виде:

$$\begin{aligned} sx_1(s) &= -2x_1(s) + 2x_2(s) + x_3(s), \\ sx_2(s) &= -x_2(s) + x_3(s), \\ sx_3(s) &= u(s); \end{aligned} \quad (5.47)$$

в-шестых, обозначая выход $y(s) = x(s)$ и выполняя подстановку выражения (5.39) в (5.38), получаем $y(s) = (1+4s^{-1}) E_1(s) = E_1(s) + 4x_1(s) = u_1(s) + 2x_1(s)$,

а также учитывая явный вид функций $u_1(s)$ и $u_2(s)$ согласно равенствами (5.42) и (5.45), окончательно уравнение выхода $y(s)$ запишем в виде

$$y(s) = 2x_1(s) + 2x_2(s) + x_3(s). \quad (5.48)$$

В оригиналах система уравнений (5.47), (5.48) имеет вид

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = -2x_1(t) + 2x_2(t) + x_3(t), \quad (5.49)$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = -x_2(t) + x_3(t),$$

$$\frac{dx_3(t)}{dt} = u(t), \quad y(t) = 2x_1(t) + 2x_2(t) + x_3(t),$$

которому в векторно-матричной форме записи (5.9), (5.10) соответствуют следующие матрица и векторы:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = (2 \quad 2 \quad 1), \quad D = 0. \quad (5.50)$$

Структурная схема динамической системы (5.49) или (5.9), (5.10), (5.50) дана на рис. 5.5.

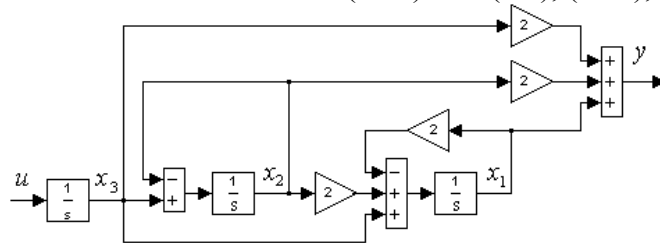


Рис. 5.5. Структурная схема динамической системы (5.49).

Кроме приведенных выше способов программирования, построение модели систем в переменных состояния можно осуществлять и по другим методикам.

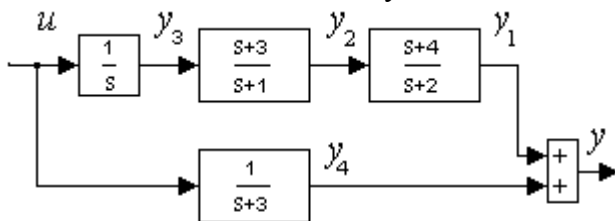


Рис. 5.6. Структурная схема динамической системы (5.51).

В частности, структура исследуемой системы может задана. Например, хорошо известно, что при последовательном соединении элементов их передаточные функции перемножаются, а при параллельном – суммируются. Поэтому для системы, описываемой уравнением

$$x(s) = \left(\frac{1}{s} \cdot \frac{(s+3)}{(s+1)} \cdot \frac{(s+4)}{(s+2)} + \frac{1}{s+3} \right) u(s), \quad (5.51)$$

которой соответствует структурная схема, изображенная на рис. 5.6, можно вначале любым из способов выполнить построение моделей в пространстве состояний для каждого из четырех элементов, а затем, исключая промежуточные переменные, записать уравнение модели в переменных состояния для всей системы.

Программирование по структурной схеме. Выделим в уравнении (5.51) элементы, описываемые следующим образом:

$$y_1(s) = W_1(s)y_2(s) = \frac{s+4}{s+2}y_2(s), \quad (5.52)$$

$$y_2(s) = W_2(s)y_3(s) = \frac{s+3}{s+1}y_3(s),$$

$$y_3(s) = W_3(s)u(s) = \frac{1}{s}u(s), \quad y_4(s) = W_4(s)u(s) = \frac{1}{s+3}u(s).$$

Для каждой $W(s)$ из (5.52), – например, с помощью прямого программирования – построим модели в пространстве состояний, структурные схемы которых показаны на рис. 5.7.

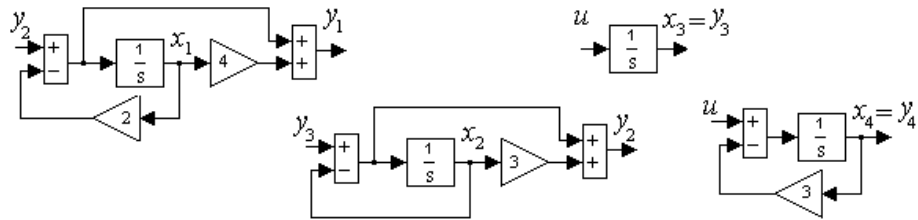


Рис. 5.7. Модели элементов системы (5.52) в пространстве состояний.

Модели элементов динамической системы (5.51) в пространстве состояний, в соответствии с выражениями (5.52), имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= -2x_1(t) + y_2(t), & y_1(t) &= 2x_1(t) + y_2(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= -x_2(t) + y_3(t), & y_2(t) &= 2x_2(t) + y_3(t), \\ \frac{dx_3(t)}{dt} &= u(t), & y_3(t) &= x_3(t), \\ \frac{dx_4(t)}{dt} &= -3x_4(t) + u(t), & y_4(t) &= x_4(t). \end{aligned} \tag{5.53}$$

Структурная схема динамической системы (5.53), в соответствии с моделями вида (5.52) и структурами на рис. 5.6 и рис. 5.7, изображена на рис. 5.8.

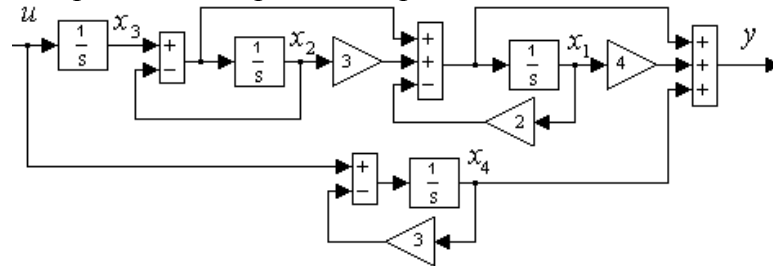


Рис. 5.8. Модель системы (5.53), (5.54).

Исключая в уравнениях (5.53) промежуточные переменные y_1, y_2, y_3, y_4 , а также учитывая равенство $y = y_1 + y_4$, модель системы (5.51) в пространстве состояний можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= -2x_1(t) + 2x_2(t) + x_3(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= -x_2(t) + x_3(t), \\ \frac{dx_3(t)}{dt} &= u(t), \\ \frac{dx_4(t)}{dt} &= -3x_4(t) + u(t), & y(t) &= 2x_1(t) + 2x_2(t) + x_3(t) + x_4(t). \end{aligned} \tag{5.54}$$

Векторно-матричная форма представления уравнений (5.54) в виде (5.9), (5.10) имеет место при следующих матрице и векторах:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = (2 \quad 2 \quad 1 \quad 1), \quad D = 0. \tag{5.55}$$

Перечень учебников и учебных пособий для самостоятельной работы:

Ким, Д. П. Теория автоматического управления. Линейные системы : учебник и практикум для академического бакалавриата / Д. П. Ким. — 3-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2017. — 311 с. — Режим доступа: <https://www.biblio-online.ru/book/9B251E55-533A-4419-ABEC-0BC986CA2066>

Ким, Д. П. Теория автоматического управления. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы : учебник и практикум для академического бакалавриата / Д. П. Ким. — 3-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2017. — 441 с. — Режим доступа: <https://www.biblio-online.ru/book/D6F48516-07C6-4592-9949-D28BCA1FD1CC>

Еремин Е.Л., Еремин И.Е Системы автоматического управления: Лабораторный практикум (MatLab-Simulink). Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2017.
http://irbis.amursu.ru/DigitalLibrary/AmurSU_Edition/7687.pdf