Федеральное агентство по образованию
АМУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГОУВПО «АмГУ»
Факультет математики и информатики

УТВЕРЖДАЮ
Зав. кафедрой МАиМ
Т.В. Труфанова
«___»__________ 2007г.

Учебно – методический комплекс дисциплины

ТЕОРИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

для специальности 010101 − математика

Составитель: Труфанов В.А.

Благовещенск
2007

Печатается по решению
редакционно-издательского совета
факультета математики и
информатики
Амурского государственного
университета

Труфанов В.А.

Теория случайных процессов. Учебно – методический комплекс дисциплины для студентов очной формы обучения специальности 010101 «Математика». – Благовещенск: Амурский гос. ун–т, 2007. − 24 с.

ЗОГЛАВЛЕНИЕ

1. Государственный образовательный стандарт

ОПД.Ф.15 **Теория случайных процессов.** Определение случайного процесса, конечномерные распределения; траектории; теорема Колмогорова о существовании процесса с заданным семейством конечномерных распределений (без доказательства). Классы случайных процессов: гауссовские, марковские, стационарные, точечные с независимыми приращениями; примеры; соотношения между классами. Свойства многомерных гауссовских процессов; существование гауссовского процесса с заданным средним и корреляционной матрицей; свойства симметрии и согласованности. Винеровский процесс; критерий Колмогорова непрерывности траектории; следствие для гауссовских процессов. Пуассоновский процесс; построение пуассоновского процесса по последовательности независимых показательных распределений; определение Хинчина пуассоновского процесса. Среднеквадратическая теория: необходимые и достаточные условия непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости; стохастический интеграл; процессы с ортогональными приращениями. Пример стационарного, гауссовского, марковского процесса; примеры стационарных в широком смысле процессов. Цепи Маркова с непрерывным временем; уравнение Колмогорова-Чепмэна; прямые и обратные дифференциальные уравнения Колмогорова; время пребывания процесса в данном состоянии. Процессы гибели и размножения; связь с теорией массового обслуживания; применение к расчету пропускной способности технических систем. (54 час.)

2. Рабочая программа

по дисциплине " Теория случайных процессов "

для специальности 010101–" Математика "

Курс 3 Семестр 6

Лекции 18 час. Экзамен (нет)

Практические (семинарские) занятия 18 час. Зачет 6 семестр.

Лабораторные занятия (нет).

Самостоятельная работа 18 час.

Всего 54 час.

1. Цели и задачи дисциплины, ее место в учебном процессе.

1.1. Цель преподавания дисциплины.

Дисциплина “Теория случайных процессов” ставит своей целью ознакомление студентов с основами современной теории случайных процессов.

1.2. Задачи изучения дисциплины.

Студенты должны усвоить основные классы случайных процессов, получивших широкое применение: гауссовский, марковский, стационарный. Иметь представление по основам стохастического анализа, по линейным стохастическим дифференциальным уравнениям, описывающие случайные процессы.

В процессе изучения дисциплины студенты должны приобрести навыки и умения исследования и решения задач по теории случайных процессов.

1.3. Перечень дисциплин с указанием разделов, усвоение которых студентами необходимо при изучении данной дисциплины.

При изучении курса “Теория случайных процессов” привлекаются понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теории дифференциальных уравнений, теории вероятностей и математической статистики, функциональный анализ.

2. Сводные данные об основных разделах дисциплины и распределение часов по видам занятий.

Тематический план.

№ темы	Наименование темы	Лекции	Практические занятия	Самостоятельная работа
1	Фундаментальные понятия и результаты, лежащие в основе построения математической теории.	2	2	2
2	Гауссовские случайные процессы.	2	2	2
3	Процессы с независимыми приращениями.	2	2	2
4	Линейная теория случайных процессов.	2	2	2
5	Спектральные представления и задача прогнозирования случайного процесса.	2	2	2
6	Процессы размножения и гибели.	2	2	2
7	Непрерывность реализаций.	1	1	1
8	Условные математические ожидания.	1	1	1
9	Мартингалы.	2	2	2
10	Стохастические дифференциалы и интегралы Ито.	2	2	2
Итого		**18**	**18**	**18**

3. Самостоятельная работа студентов

3.1 Знакомство с рекомендуемой литературой.

3.2 Подготовка к практическим занятиям.

3.3 Выполнение индивидуальных заданий.

3.3.1 Темы индивидуальных заданий и задачи к ним

1. Случайные процессы и их вероятностные характеристики.

Варианты заданий

1) Пусть $\boxed{X(t)}$ - случайный процесс вида $\boxed{X(t) = U\cos\omega t + V\sin\omega t}$, где $\boxed{}$ - постоянное число, а $\boxed{U и\ V}$ - две независимые случайные величины с

равными нулю математическими ожиданиями и одной и той же дисперсией D_X. Найти корреляционную функцию.

2) Задан случайный процесс $\xi(t) = X^2 + 2tY + t^2$, где случайные величины (с. в.) $X, Y \in N_{0,1}$. Найти вероятность события

$A = \{\xi(t) = 0$ *хотя бы для одного* $t \in [0, \infty]\}.$

3) Пусть X и Y - независимые с.в., $X \in N_{1,0}$, $Y \in N_{0,1}$. Построить пучок траекторий процесса $\xi(t) = Xt + Y$.

4) Доказать, что $D_\xi(t) = R_\xi(t,t)$.

5) Пусть $\xi(t) = \sum_{i=1}^{n} X_i \varphi_i(t), t \in T$, где X_i некоррелированные с.в. с известными параметрами $\{m_{X_i} = 0, D_{X_i} = 1\}$, $X_i \in N_{0,1}$, $\{\varphi_i(t)\}$ заданные на T детерминированные функции. Найти $F_\xi(x,t)$. Указание. Определить для этого математическое ожидание и дисперсию процесса $\xi(t)$.

6) Найти м.о., корреляционную функцию, дисперсию и одномерный закон распределения случайного процесса $\xi(t,\omega) = \alpha(\omega)t + \beta(\omega)t^2, t \in T = [0, \infty)$, где $\alpha(\omega)$ *и* $\beta(\omega)$ - независимые с.в. $\in N_{0;0,25}$.

7) Найти корреляционную функцию и дисперсию случайного процесса

$\xi(t,\omega) = \sum_{k=1}^{n} \left(\alpha_k(\omega)\cos(\upsilon_k t) + \beta_k(\omega)\sin(\upsilon_k t)\right), t \in T \subset R,$ если $\upsilon_k,\ k = \overline{1,n}$ – известные неслучайные параметры, $\alpha(\omega), \beta(\omega)$ – некоррелированные с.в., $k = \overline{1,n}$, имеют нулевые математические ожидания и равные дисперсии $D\alpha_K(\omega) = D\beta_K(\omega) = \sigma_K^2,\ k = \overline{1,n}$.

8) Найти взаимную корреляционную функцию случайных процессов:

$$\boxed{\begin{aligned}&\xi(t,\omega)=\left(\alpha(\omega)\sin(\upsilon t)+\beta(\omega)\cos(\upsilon t)\right),\ t\in T\subset R,\\&\eta(t,\omega)=\left(\alpha(\omega)\sin(\upsilon t)+\gamma(\omega)\cos(\upsilon t)\right),\ t\in T\subset R\ \text{если}\end{aligned}}$$

$\boxed{}$ - известный неслучайный параметр, $\boxed{\alpha(\omega),\beta(\omega),\gamma(\omega)-}$ с.в. попарно некоррелированные.

9) Построить семейство реализаций (траекторий) случайного процесса $\xi(t,\omega)=\dfrac{U(\omega)}{1+t^2}$, $t\in T=[a,b]$,где с.в. $U(\omega)\in \Pi_{0,5}$. Определить математическое ожидание и дисперсию случайного процесса $\xi(t)$.

10) Пусть известны числовые характеристики двумерного случайного вектора $U(\omega)=\left(U_1(\omega),U_2(\omega)\right)^T: EU(\omega)=\begin{pmatrix}-0,5\\1\end{pmatrix}, \operatorname{cov}(U(\omega))=\begin{pmatrix}3&-2\\-2&2,9\end{pmatrix}$. Найти математическое ожидание, дисперсию и корреляционную функцию случайного процесса $\xi(t,\omega)=U_1(\omega)\cos t+U_2(\omega)\sin t+t, t\in T$.

11) Пусть $\xi(t)=Xt^2+Yt, t>0$ - случайный процесс, где $X,Y\in N_{0,1}$ - независимые случайные величины. Найти вероятность того, что траектория монотонно не убывает.

12) Случайный процесс задан соотношением $\xi(t)=X+\alpha t, t>0$, где X – случайная величина с непрерывной функцией распределения, а $\alpha>1$ - постоянная величина. Пусть $D\subset[0,\infty)$ - некоторое конечное или счетное подмножество. Найти вероятности событий: 1) $P\{\xi(t)=0$ хотя бы для одного $t\in D\}$; 2) $P\{\xi(t)=0$ хотя бы для одного $t\in[0,1]\}$.

2. Элементы стохастического анализа.

Варианты заданий

1) Является ли случайный процесс

$\xi(t,\omega) = \alpha(\omega)\cos(\varphi t) + \beta(\omega)\sin(\omega t),\ \ t \in T = [0,\infty)$, имеющий параметры

$E\alpha(\omega) = m_\alpha,\ E\beta(\omega) = m_\beta,\ \ D\alpha(\omega) = \sigma_\alpha^2, D\beta(\omega) = \sigma_\beta^2,\ \operatorname{cov}(\alpha(\omega),\beta(\omega)) = x,$

непрерывным на T?

2) Условие из 1-го задания. Является ли данный процесс дифференцируемым?

3) Покажите, что скалярный случайный процесс

$\xi(t,\omega) = e^{-2t}\sin(t + \varphi(\omega)),\ \ t \in T,$ где $\varphi(\omega) \in U_{0,2\pi}$, дифференцируемым на T.

4) Найти математическое ожидание (м.о.), дисперсию и корреляционную функцию случайного процесса $\eta(t,\omega) = \dot{\xi}(t,\omega),\ \ t \in T \subset R,$ если известно, что $\xi(t,\omega) = 2 + t + \alpha(\omega)t^2 + \beta(\omega)t^3,\ \ t \in T$, где $\alpha(\omega)\ \ и\ \ \beta(\omega)$ некоррелированные случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями и одинаковыми дисперсиями, равными 0,1.

5) Найти м.о. и корреляционную функцию случайного процесса $\eta(t,\omega) = \dot{\xi}(t,\omega),\ \ t \in T$, если известно, что $\xi(t,\omega) = \alpha_1(\omega)t + \alpha_2(\omega)\sin t,\ \ t \in T$,

$$\alpha(\omega) = \begin{pmatrix}\alpha_1(\omega)\\ \alpha_2(\omega)\end{pmatrix},\ \ E\alpha(\omega) = \begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix},\ \ \operatorname{cov}(\alpha(\omega)) = \begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}.$$

6) Доказать, что $\eta(t) = \varphi(t)\xi(t) + \psi(t)$ - с.к. – непрерывная (в среднеквадратичном смысле) случайная функция, если $\varphi(t), \psi(t)$ непрерывные детерминированные функции, $\xi(t)$ – с. к. – непрерывная случайная функция.

7) Найти с. к. – производную $\dot{\xi}(t)$ для случайной функции (с.ф.) $\dot{\xi}(t) = A\sin(\upsilon t + \varphi)$, где A, φ – с. в. с конечными вторыми моментами, а $\upsilon = const$.

8) Доказать , что $R_{\xi\dot{\xi}}(t,\tau) = \operatorname{cov}(\xi(t), \dot{\xi}(\tau)) = \dfrac{\partial R_\xi(t,\tau)}{\partial \tau}$.

9) Пусть центрированная случайная функция $\xi(t)$ имеет корреляционную функцию $R_\xi(t,\tau) = \sigma^2 t\tau$. Вычислить $E\eta^2$, где $\eta = \int_0^T \xi(t)\sin\frac{\pi t}{T}dt.$

10) Вычислить дисперсию интеграла $\eta(t) = \int_0^t \xi(t)d\tau$, если с.ф. $\xi(t)$ имеет корреляционную функцию $R_\xi(t,\tau) = De^{-\alpha|t-\tau|}$.

11) Является ли гармоническое колебание $\xi(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, где $A > 0, \omega > 0, \varphi$ - н. с. в. и $\varphi \in U_{0,2\pi}$, стационарным процессом. Указание. Представить $\xi(t)$ в форме $\xi(t) = A\cos\varphi\cos\omega t - A\sin\varphi\sin\omega t$, и найти $E\xi(t)$ и $R_\xi(t_1,t_2)$.

12) Пусть $\xi(t) = Ut + V$, где *U, V* – с. в. с конечными 2-ми моментами. Решить дифференциальное уравнение $\dot{\eta}(t) + \alpha\eta(t) = \beta\eta(t), \eta(0) = 0,$ где α и β - постоянные коэффициенты .

4. Наименование тем лекций и их содержание

Тема 1

Фундаментальные понятия и результаты, лежащие в основе построения математической теории.

Пусть *T* – некоторое множество. *A(T)* – пространство действительно-значных функций, определенных на *T*. Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega,\mathcal{F},P)$. Отображение ξ: $T\times\Omega\to R$ назовем случайной функцией, если $\forall t\in T$ $\xi(t) = \xi(t,\cdot)$ – случайная величина. Точка вместо второго аргумента означает здесь и дальше, что $\xi(t)$ рассматриваем как функцию $\omega\in\Omega$. Ясно также, что $\xi(t,\cdot)\in A(T)$. Если $T\subset R$ и параметр *t* интерпретируется как время, то случайную функцию называют случайным процессом. При записи формул, связанным со случайным процессом, как и при записи случайных величин в теории вероятностей, случайный аргумент ω обычно опускается. Если T представляет собой класс целых чисел Z или натуральных чисел N, то говорят о *случайной последовательности.*

Если фиксируется $\omega \in \Omega$, то полученная неслучайная функция $\xi(\omega, \cdot)$ называется *реализацией* случайного процесса. Наряду с этим термином употребляются также названия *траектория, выборочная функция.* Функция

$$K(t,s) = \operatorname{cov}(\xi(t), \xi(s)) = E\xi(t)\xi(s) - E\xi(t)E\xi(s)$$

называется *ковариационной функцией* случайного процесса $\xi(t)$.

Лемма. *Ковариационная функция любого случайного процесса обладает свойством неотрицательной определенности.*

Условимся через $\bar{t} = \bar{t}(n)$ обозначать конечные подмножества T, например, $\bar{t} = \{t_1, ..., t_n\} \subset T$. Если подмножество $\bar{t}(n)$ зафиксировано, то через $R^{\bar{t}}$ условимся обозначать n-мерное евклидово пространство. Будем предполагать $R^{\bar{s}} \subset R^{\bar{t}}$ ïðè $\bar{s} \subset \bar{t}$. Будем также считать все такие пространства подпространствами $R^T = \{f \mid f : T \to R\}$. Такое включение станет сразу понятным, если считать, что $R^{\bar{t}} = \{(f(t_1), ..., f(t_1)) \mid f \in R^T\}$. Обозначим $\xi_{\bar{t}} = (\xi(t_1), ..., \xi(t_n))$ для заданного $\bar{t}$ и произвольного отображения $\xi : T \to R$.

Пусть $\xi(t)$ – случайный процесс. Распределение векторов $\xi_{\bar{t}}$, когда $\bar{t}$ пробегает все конечные подмножества множества T, называют конечномерными распределениями случайного процесса $\xi(t)$. Эти распределения зададим формулами $\forall B \in \mathcal{B}(R^{\bar{t}})$ $\mathrm{P}_{\bar{t}}(B) = \mathrm{P}(\xi_{\bar{t}} \in B)$.

Пусть $\bar{t} \supset \bar{s}$, $\pi_{\bar{s},\bar{t}}$ - естественная проекция $R^{\bar{s}}$ на . Тогда во введенных обозначениях справедливо

$$(\forall B \in \mathcal{B}(R^{\bar{s}}))\ \mathrm{P}_{\bar{s}}(A) = \mathrm{P}_{\bar{t}}(\pi_{\bar{t},\bar{s}}^{-1}(A)). \qquad (1)$$

Это условие называется условием согласованности семейства распределения $\mathrm{P}_{\bar{t}}$, когда $\bar{t}$ пробегает класс всех конечных подмножеств *T*.

Теорема (А.Н. Колмогорова). *Пусть семейство распределений удовлетворяет условию согласованности (1). Тогда найдется некоторое вероятностное пространство* (Ω,F,P) *и случайный процесс ξ(t) на нем, такой, что* $\mathrm{P}_{\bar{t}}$ *есть распределение* $\xi_{\bar{t}}$ *для произвольного конечного* $\bar{t} \subset T$.

Другими словами, если семейство распределений удовлетворяет условию согласованности, то оно является семейством конечномерных распределений некоторого случайного процесса.

Тема 2

Гауссовские случайные процессы.

Случайный процесс (с.п.) *ξ(t)* называется *гауссовским*, если все его конечномерные распределения нормальны. Теорема: *для произвольно заданной функции a(t) и любой функции K(t,s), удовлетворяющей условию неотрицательной определенности, существует гауссовский случайный процесс с математическим ожиданием a(t) и ковариационной функцией K(t,s).* Важным примером является *винеровский процесс*, который служит моделью броуновского движения. Винеровским процессом $\omega(t,\omega)$, будем называть гауссовский процесс с независимыми приращениями такой, что $\omega(0)=0$, $\omega(t)-\omega(s)$ имеет нормальное распределение $N(0, t-s)$ при $t>s$.

Тема 3

Процессы с независимыми приращениями.

Пусть $T=[a, b]$. Процесс $\xi(t)$, $t\in T$ называется *процессом с независимыми приращениями*, если для любого k и любых $t_1<\ldots<t_k\in T$, приращения $\xi(t_1) - \xi(a)$, $\xi(t_2) - \xi(t_1),\ldots, \xi(b)- \xi(t_k)$ являются независимыми случайными величинами. Говорят, что $\xi(t)$ – *стационарный процесс,* если для произвольных s,t,h распределения $\xi(t)- \xi(s)$ и $\xi(t+h)- \xi(s+h)$ совпадают. Процесс $\xi(t)$ называется *стохастически непрерывным,* если при $s\to t$ справедливо $\xi(s)\xrightarrow{P}\xi(t)$. Теорема: *Пусть с.п. $\xi(t)$ стохастически непрерывен, стационарен и имеет независимые приращения. Тогда для задания его конечномерных распределений достаточно задать только одно распределение $\xi(t) - \xi(s)$, $t>s$.*

Одним из часто применяемых обобщений процессов с независимыми приращениями является понятие марковского процесса.

Тема 4

Линейная теория случайных процессов.

4.1. Гильбертово пространство случайных величин с комплексными значениями.

Пусть $(\Omega,\mathcal{F},P)$ – вероятностное пространство, $\xi:\Omega\to C$ – комплекснозначный случайный элемент, т.е. $Re\xi$, $Im\xi$ – случайные величины. Введем $L_2 = L_2(\Omega,\mathcal{F},P)=\{\xi \mid E|\xi|^2 < \infty\}$. На этом пространстве определим скалярное произведение и норму: $(\xi,\eta)=E\xi\bar{\eta}$, $\|\xi\|_{L_2}^2=(\xi,\xi)=E|\xi|^2$.

Обозначим $m(t)=E\xi(t)$, $\xi_*(t)= \xi(t)- m(t)$. В этом случае ковариационная функция процесса должна быть определена следующим образом $K(t,s)\equiv E\xi_*(t)\bar{\xi}_*(s)$.

Полнота построенного пространства во введенной норме проверяется теми же методами, что доказывается полнота пространства интегрируемых с квадратом функций в функциональном анализе.

4.2. Дифференцирование и интегрирование в среднем квадратическом.

Определим, если $\xi(t) \xrightarrow{L_2} \xi$, при $t \to a$, условимся писать $\underset{t \to a}{l.i.m.}\xi(t) = \xi$ и называть этот предел *пределом в среднем квадратическом.* Справедливы следующие необходимые и достаточные условия дифференцируемости в среднем квадратическом:

Лемма. *Процесс ξ(t) будет дифференцируемым в среднем квадратическом в точке a тогда и только тогда, когда выполнены два условия:*

- *в этой точке существует производная m(t) в обычном смысле;*
- *ковариационная функция процесса имеет в этой точке обобщенную вторую производную* $D_s D_t K(t,s)|_{t=s=a}$.

Теорема. *Пусть для произвольного a∈* [*A, B*] *определена обобщенная вторая производная* $D_s D_t K(t,s)|_{t=s=a}$, *тогда случайный процесс* $\xi_*(t)$ *дифференцируем в среднем квадратическом на* [*A, B*], *существуют обычные частные производные* $\frac{\partial K}{\partial t}, \frac{\partial K}{\partial s}, \frac{\partial^2 K}{\partial t \partial s}$.

Из условия видно, что существование обобщенной второй производной означает, вообще говоря, нечто большее, чем существование второй смешанной частной производной. Рассуждая так же, как в курсе математического анализа доказывалась теорема о независимости вида производной от порядка дифференцирования, получаем

Следствие. *Если ковариационная функция K(t,s) дважды непрерывно дифференцируема, то процесс имеет производную.*

Пусть случайный процесс *ξ(t)* задан на [*A, B*], $A=t_0<t_1<\ldots<t_m=B$, $\Delta t_i=t_i-t_{i-1}$. Рассмотрим $S_m = \sum_{i=1}^{m} \xi(\theta_i)\Delta t_i, \theta \in [t_{i-1}, t_i], i = 1,\ldots,m.$

Процесс $\xi(t)$ *интегрируем в среднем квадратическом,* если найдется элемент $I \in L_2$ такой, что независимо от выбора точек t_i, θ_i справедливо

$$I = \underset{\Delta \to 0}{l.i.m.} S_m, \Delta = \max_i \Delta t_i .$$

Обозначение, принятое для интеграла I от процесса в среднем квадратическом совпадает с обозначением обычного интеграла:

$$I = \int_A^B \xi(t) dt.$$

Теорема. *Пусть $m(t)$ интегрируема на* $[A, B]$ *и определен двойной интеграл* $\int_A^B \int_A^B K(t,s) ds,$ *тогда процесс $\xi(t)$ интегрируем в среднем квадратическом.*

4.3. Стохастический интеграл от неслучайной функции.

Теорема. *Стохастический интеграл осуществляет изометрическое соответствие между* $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и $L_2(\hat{m})$

Тема 5

Спектральные представления и задача прогнозирования случайного процесса.

5.1 Спектральная функция.

Теорема (Бохнера-Хинчина). *Комплекснозначная функция действительного аргумента $K(t)$ удовлетворяет условию неотрицательной неопределенности тогда и только тогда, когда найдется функция распределения $F(\lambda)$ такая, что*

$$(\forall\, t)\ \frac{K(t)}{K(0)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dF(\lambda). \qquad (2)$$

Функция, существование которой утверждается в теореме, носит название *спектральной функции,* а представление (2) называют *спектральным представлением* ковариационной функции.

5.2 Линейные преобразования стационарных процессов.

Здесь рассматривается одно из применений спектральной теории стационарных случайных процессов, что позволит изучать производные и интегралы от процессов в среднеквадратическом смысле.

5.3. Задача прогноза стационарного случайного процесса – сингулярный случай.

Общая постановка задачи прогнозирования. Пусть $\xi(t)$ – с.п., а случайная величина $\eta \in L_2(\Omega,\mathsf{F},P)$. Требуется, наблюдая значения процесса $\xi(t)$, предсказать значение η, недоступной непосредственному наблюдателю.

Обозначим через $\hat{\eta}_{\leq t}$ прогноз по η по значениям $\xi(s),\ s \leq t$ наилучший в том

смысле, что $E(t)=\mathrm{E}|\hat{\eta}_{\leq t} - \eta|^2$ минимально среди всех допустимых интегрируемых с квадратом прогнозов.

Процесс $\xi(t)$ называется *регулярным слева*, если

$$(\forall \eta \in L_2(\Omega,\mathsf{F},P)) \lim_{t \to -\infty} E(t) = D\eta \;,$$

и *сингулярным слева,* если этот предел равен нулю.

Смысл этих определений состоит в том, что в сингулярном случае значения любой случайной величины предсказывается абсолютно точно по сколь угодно удаленным во времени в прошлое результатам наблюдений, а в регулярном случае невозможно указать значение η с точностью более высокой, чем ее дисперсия.

Тема 6

Процессы размножения и гибели.

6.1 Основные предположения.

Рассматривается простейший вариант последовательности зависимых испытаний.

6.2.Одномерные распределения.

Здесь получаем дифференциальное уравнение в частных производных, описывающие процесс размножения и гибели $\frac{\partial F}{\partial t} = (\mu - (\lambda + \mu)x + \lambda x^2)\frac{\partial F}{\partial x}$, где

$F(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t)x^n$, и рассматривается его решение.

6.3. Время пребывания и уравнения Колмогорова.

Получаем систему дифференциальных уравнений:

$$P'_{0,k}(t) = \lambda_0 P_{0,k}(t),$$

$$P'_{n,k}(t) = \mu_n P_{n-1,k}(t) - (\lambda_n + \mu_n)P_{n,k}(t) + \lambda_n P_{n+1,k}(t), \; n > 0 .$$

Эта система носит название *системы обратных дифференциальных уравнений Колмогорова.*

6.4. Примеры.

Линейный рост с иммиграцией, образование очереди в системе массового обслуживания.

Тема 7

Непрерывность реализаций.

Здесь все рассматриваемые с.п. заданы при $t \in [a,b]$. Два с.п. $\xi(t)$, $\eta(t)$ называются *стохастически эквивалентными,* если $(\forall\ t)\ \mathrm{P}(\xi\,(\mathrm{t}) = \eta\,(\mathrm{t})) = 1$. Любой процесс, стохастически эквивалентный $\xi(t)$, будем называть *модификацией* $\xi(t)$.

Существование модификаций процесса, обладающих непрерывными модификациями, очень удобно. Для таких процессов мы имеем возможность исследовать, например, наибольшие и наименьшие значения и их распределения как случайных величин. Сформулируем две теоремы, в которых даны условия для существования непрерывных реализаций.

Теорема. *Пусть при некоторых* $r, \alpha > 0$

$$(\forall\ s,t)\ \mathrm{E}\,|\,x(t) - x(s)\,|^r \le c\,|\,t - s\,|^{1+\alpha}\ ,$$

тогда найдется модификация $\xi(t)$ *с.п.* $x(t)$, *обладающая непрерывными реализациями.*

Теорема. *Пусть нашлись такие монотонно возрастающие при положительных значениях аргументов функции* g,q, *что*

$$(\forall t,h>0)\ \mathrm{P}(|x(t+h) - x(t)| \ge g(h) \le q(h),$$

и, вдобавок, $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n q(\frac{b-a}{2^n}) < \infty$, $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n g(\frac{b-a}{2^n}) < \infty$.

Тогда найдутся модификация $\xi(t)$ *с.п.* $x(t)$, *обладающая непрерывными реализациями.*

Тема 8

Условные математические ожидания.

Определим для события B и с.в. ξ $\mathrm{E}(\xi \mid B) = \int_{\Omega} \xi \, d\mathrm{P}(\cdot \mid B)$. Тогда по определению интеграла по вероятности для произвольных событий *A, B* и с.в. $\xi(t)$ $\int_B \mathrm{E}(\xi \mid B) d\mathrm{P} = \mathrm{E}(\xi \mid B)\,\mathrm{P}(B) = \int_B \xi \, d\mathrm{P}$. Пусть $(\Omega, \mathsf{F}, \mathrm{P})$ – вероятностное пространство, $U = \{B_1, B_2, \ldots\}$ – разбиение Ω, т.е.

$$\bigcup_j B_j = \Omega,\ i \neq j \Rightarrow B_i \cap B_j = 0, (\forall j)\, B_j \in \mathsf{F},\ \mathrm{P}(B_j) \neq 0.$$

С.в. $\hat{\xi} = \sum_j \mathrm{E}(\xi \mid B_j)\, I(B_j)$ называется условным математическим ожиданием ξ при условии U и обозначается $\mathrm{E}(\xi|U)$.

Приводятся основные свойства условных математических ожиданий.

Тема 9

Мартингалы.

Рассмотрены процессы, устроенные более сложно, чем процессы с независимыми приращениями.

9.1 Определения.

Случайный процесс называется *мартингалом* относительно потока сигма-алгебр, если он согласован с этим потоком, имеет конечное математическое ожидание, и $(\forall t, s \in T)$ $(s<t) \Rightarrow \mathrm{E}(\xi(t)| \mathsf{F}_s) = \xi(s)$ с вероятностью 1. Если $\mathrm{E}(\xi(t)| \mathsf{F}_s) \geq \xi(s)$ для произвольных пар аргументов с условием $s<t$, то процесс называется *субмартингалом,* если же в последнем определении знак $\geq$ изменить на $\leq$, то процесс $\xi(t)$ называют *супермартингалом.* Обобщающим понятием служит *полумартингал* – это или субмартингал, или супермартингал.

9.2 Полнота гильбертова пространства мартингалов.

Пусть (Ω,F,P) – вероятностное пространство, F_t , $t\in T$ − непрерывный в каждой точке справа поток σ–алгебр. Предположим также, что все σ–алгебры, входящие в поток, полны относительно P. Введем в рассмотрение класс *M(T)* всех мартингалов относительно этого потока, у которых реализации с вероятностью 1 не имеют разрывов второго рода и $E\xi^2(t) < \infty$, $t\in T$. Пусть $M_C(T)$ − подкласс мартингалов из *M(T)*, обладающих непрерывными реализациями с вероятностью 1.

Все значения мартингала восстанавливаются по $\xi(b)$. Поэтому естественно ввести в *M(T)* скалярное произведение по формуле

$$(\xi,\eta)_T = E\xi(t)\eta(t).$$

Теорема. *M(T) с введенным скалярным произведением является гильбертовым пространством, а $M_C(T)$ − замкнутое подпространство этого пространства.*

Тема 10

Стохастические дифференциалы и интегралы Ито.

10.1. Стохастические интегралы Ито.

Пусть теперь вместо произвольного мартингала $\mu(t)$ рассмотрим винеровский процесс $\omega(t)$. Для него соответствующая элементарная стохастическая мера $\mu([a, b]) = \omega(b) - \omega(a)$ обладает тем свойством, что для непересекающихся отрезков Δ_1 и Δ_2 с.в. $\mu(\Delta_1)$ и $\mu(\Delta_2)$ независимы, а $\xi(a)$ не зависит от $\mu([a, b])$ в силу сделанных предположений. Интеграл

$\int_a^b \xi(t)d\omega(t)$ называют *стохастическим интегралом Ито.*

10.2. Стохастический дифференциал.

Говорят, что с.п. $\xi(t)$ имеет *стохастический дифференциал*

$$d\xi(t) = a(t)dt + b(t)d\omega(t),$$

где $a(t)=a(t,\xi(t))$, $b(t)=b(t,\xi(t))$ – прогрессивно измеримые случайные процессы, если

$$\xi(t) = \xi(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(s)d\omega(s) + \int_{t_0}^{t} b(s)d\omega(s), \quad t \geq t_0,$$

а выписанные интегралы существуют.

5. Учебно-методическое обеспечение

Основная литература

1. Боровков А.А. Теория вероятностей. — М.,2000
2. Булинский А.В., Ширяев А.М. Теория случайных процессов. – М.: Физматлит: Лаборатория Базовых Знаний, 2003.
3. Волков И.К., Зуев С.М., Цветкова Г.М. Случайные процессы. М.: Изд-во МГТУ, 2000.
4. Миллер Б.М., Панков А.Р. Теория случайных процессов в примерах и задачах. М.: Физматлит, 2002.

Дополнительная

5. Вентцель А.Д. Курс теории случайных процессов. М., 1999.
6. Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 1977.
7. Карлин С. Основы теории случайных процессов. М.: Мир, 1971.

8. Климов Г.П. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Изд-во МГУ, 1983. — 328 с.
9. Климов Г.П., Кузьмин А.Д. Вероятность, процессы, статистика. Задачи с решениями. М.: Изд-во МГУ,1985.-232 с.
10. Розанов Ю.А. Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика. М.: Наука, 1989.
11. Розанов Ю.А. Случайные процессы. М.: Наука, 1979.

6. Перечень и темы промежуточных форм контроля знаний

6.1 Расчётно-графические работы — охватывает темы практических занятий (представлены в разделе 3.1.1).

6.2. Критерии допуска и сдачи зачёта

До зачёта допускаются студенты, выполнившие все учебные и проверочные задания.

Зачёт организуется из одного (двух) теоретических вопросов, требующих короткие ответы в виде определения, формулировки теоремы (леммы, утверждения и пр.), записи формулы, и решения задачи. На не ответ или (и) не решение даётся дополнительное задание: вопрос, задача. Если в этом случае хотя бы одно из заданий не выполняется, то ставится незачёт.

7. Вопросы для подготовки к зачету.

1. Понятие случайного процесса (с.п.).
2. Примеры с.п.
3. Теорема Колмогорова.
4. Векторный с.п.
5. Определение с.п.

6. Реализация и сечение с.п.
7. Средства описания с.п.
8. Описание с.п. общего вида.
9. Стохастическая эквивалентность с.п.
10. Процессы с независимыми приращениями.
11. Моментные функции с.п.
12. Корреляционная функция.
13. Ковариационная функция.
14. Случайный процесс 2-го порядка.
15. Непрерывность случайного процесса в среднем квадратичном (с.к.).
16. Производная с.п. в с.к.
17. Интегрирование с.п. в с.к.
18. Простой пуассоновский процесс.
19. Пуассоновский процесс с переменной интенсивностью.
20. Винеровский процесс.
21. Процессы восстановления.
22. Нормальный (гауссовский) случайный процесс.
23. Общее определение марковского процесса.
24. Стохастический интеграл от неслучайной функции.
25. Спектральная функция.
26. Линейные преобразования с.п.
27. Задача прогноза стационарного с.п. – сингулярный случай.
28. Процессы гибели и размножения.
29. Одномерные распределения.
30. Уравнения Колмогорова.
31. Пример: линейный рост с иммиграцией.
32. Пример: образование очереди в СМО.
33. Мартингалы: определения.
34. Полнота гильбертова пространства мартингалов.

35.Стохастические интегралы Ито.

36.Стохастический дифференциал.

8. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕКАЯ (ТЕХНОЛОГИЧЕСКАЯ) КАРТА ДИСЦИПЛИНЫ

Номер недели	Номер темы		Занятия (номера)			Самостоятельная работа студентов		
			Прак-тич.	Лабора-торные	лекция, доп. литература	Содержание	часы	
1-6	1-5	Случайные процессы и их вероятностные характери стики	1-6		лекция, доп. литература	индивид. задание № 1	6	отчет по инд. заданию № 1
7 -11	1	Основные классы с.п..	7-11		лекция, доп. литература		3	
12-18	11	анализа случайных процессов, мартингалы	12-18		теже	индивид. задание № 2	9	отчет по индвид. зад. №2